

ΑΛΓΕΒΡΑ – 1^η σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

Άσκηση 1 (9–11, σελ. 41). Εξετάστε αν η διμελής πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική και αν είναι προσεταιριστική σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α'. Η $*$ ορισμένη στο \mathbb{Q} μέσω της $a * b = ab + 1$.

β'. Η $*$ ορισμένη στο \mathbb{Z}^+ μέσω της $a * b = 2^{ab}$.

γ'. Η $*$ ορισμένη στο \mathbb{Z}^+ μέσω της $a * b = a^b$.

Άσκηση 2 (17, 19 σελ. 41). Εξετάστε αν ο ορισμός της $*$ δίνει μια διμελή πράξη στο σύνολο. Αν όχι σημειώστε ποιές από τις συνθήκες δεν τηρούνται.

α'. Στο \mathbb{Z}^+ , ορίζουμε την $*$ μέσω της $a * b = c$, όπου c είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τους a και b .

β'. Στο \mathbb{Z}^+ , ορίζουμε την $*$ μέσω της $a * b = c$, όπου c είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από το γινόμενο των a και b .

Άσκηση 3 (1–6, σελ. 56). Εξετάστε αν η διμελής πράξη $*$ ορίζει δομή ομάδας στο δοθέν σύνολο. Αν όχι γράψτε γιατί.

α'. Ορίζουμε την $*$ στο \mathbb{Z} με την $a * b = ab$.

β'. Ορίζουμε την $*$ στο \mathbb{Z} με την $a * b = a - b$.

γ'. Ορίζουμε την $*$ στο \mathbb{R}^+ με την $a * b = ab$.

δ'. Ορίζουμε την $*$ στο \mathbb{Q} με την $a * b = ab$.

ε'. Ορίζουμε την $*$ στο σύνολο των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών με την $a * b = ab$.

ς'. Ορίζουμε την $*$ στο \mathbb{C} με την $a * b = a + b$.

Άσκηση 4 (7 σελ. 56). Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών εκτός από το -1 . Ορίζουμε την $*$ στο S με την

$$a * b = a + b + ab.$$

α'. Δείξτε ότι η $*$ ορίζει μια διμελής πράξη στο S .

β'. Δείξτε ότι η $\langle S, * \rangle$ είναι ομάδα.

γ'. Βρείτε τη λύση της εξίσωσης $2 * x * 3 = 7$ στο S .