

## ΑΛΓΕΒΡΑ – 6<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

**Άσκηση 1** (25, 26 σελ. 107). Βρείτε όλες τις δυνατές τάξεις υποομάδων των ομάδων  $\mathbb{Z}_8$  και  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Άσκηση 2** (29 σελ. 107). Σημειώστε αν είναι σωστό ή λάθος.

α'. Κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή.

β'. Κάθε αβελιανή ομάδα είναι κυκλική.

γ'. Το  $\mathbb{Q}$  με πράξη την πρόσθεση είναι κυκλική ομάδα.

δ'. Κάθε στοιχείο μιας κυκλικής ομάδας παράγει την ομάδα.

ε'. Υπάρχει τουλάχιστον μια αβελιανή ομάδα με δεδομένη πεπερασμένη τάξη  $> 0$ .

ς'. Κάθε ομάδα τάξης  $\leq 4$  είναι κυκλική.

ζ'. Όλοι οι γεννήτορες της  $\mathbb{Z}_{20}$  είναι πρώτοι αριθμοί.

η'. Η  $S_3$  είναι κυκλική ομάδα.

θ'. Η  $A_3$  είναι κυκλική ομάδα.

ι'. Κάθε κυκλική ομάδα τάξης  $> 2$  έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικούς γεννήτορες.

**Άσκηση 3** (40 σελ. 108). Δείξτε ότι μια ομάδα που έχει πεπερασμένο μόνο πλήθος υποομάδων πρέπει να είναι πεπερασμένη.

**Άσκηση 4** (43 σελ. 108). Έστω  $G$  μια ομάδα και ας υποθέσουμε ότι το  $a \in G$  παράγει μια κυκλική υποομάδα τάξης 2 και είναι το μοναδικό τέτοιο στοιχείο. Δείξτε ότι  $ax = xa$  για κάθε  $x \in G$ . [Υπόδειξη: Θεωρήστε το  $(xax^{-1})^2$ .]

**Άσκηση 5** (44 σελ. 108). Έστω  $p$  και  $q$  πρώτοι αριθμοί. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων της κυκλικής ομάδας  $\mathbb{Z}_{pq}$

**Άσκηση 6** (48 σελ. 109). Έστω  $G$  αβελιανή ομάδα και  $H$  και  $K$  πεπερασμένες κυκλικές υποομάδες με  $|H| = r$  και  $|K| = s$ .

α'. Δείξτε ότι αν οι  $r$  και  $s$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η  $G$  περιέχει μια κυκλική υποομάδα τάξης  $rs$ .

β'. Γενικεύοντας το προηγούμενο μέρος, δείξτε ότι η  $G$  περιέχει μια κυκλική υποομάδα με τάξη το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $r$  και  $s$ .

**Άσκηση 7** (16, 20 σελ. 68). Βρείτε την τάξη της κυκλικής υποομάδας της δοθείσας ομάδας, που παράγεται από το στοιχείο που σας υποδεικνύουμε.

α'. Η υποομάδα της  $\mathbb{Z}_4$  που παράγεται από το 3.

β'. Η υποομάδα της  $U_8$  που παράγεται από το  $\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$ .