

ΑΛΓΕΒΡΑ – 7^η σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

Άσκηση 1 (1, 8, 10 σελ. 143, 144). Εξετάστε αν η απεικόνιση ϕ που δίνεται είναι ομομορφισμός. Αν ναι, είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή ισομορφισμός;

α'. $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ (με πράξη την πρόσθεση), με $\phi(n) = n$.

β'. Έστω G τυχούσα ομάδα και $\phi : G \rightarrow G$, με $\phi(g) = g^{-1}$.

γ'. Έστω F η προσθετική ομάδα όλων των συνεχών συναρτήσεων, με τις οποίες απεικονίζεται το \mathbb{R} στο \mathbb{R} και \mathbb{R} η ομάδα των πραγματικών αριθμών με πράξη την πρόσθεση. Θεωρούμε την $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$, με $\phi(f) = \int_0^4 f(x) dx$.

Άσκηση 2 (18, 19, 20 σελ. 144). Πόσοι ομομορφισμοί και πόσοι επιμορφισμοί υπάρχουν από το \mathbb{Z} στο \mathbb{Z} και πόσοι ομομορφισμοί υπάρχουν από το \mathbb{Z} στην \mathbb{Z}_2 ;

Άσκηση 3 (25, 27 σελ. 145). Δώστε ένα παράδειγμα μη τετριμμένου ομομορφισμού ϕ για τις ομάδες που δίνονται. Αν δεν υπάρχει κανείς τέτοιος ομομορφισμός εξηγήστε γιατί.

α'. $\phi : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_4$.

β'. $\phi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}$.

Άσκηση 4 (35, 36 σελ. 145). Έστω $\phi : G \rightarrow G'$ ομομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι

α'. αν η $|G|$ είναι πεπερασμένη, τότε και η $|\phi(G)|$ είναι πεπερασμένη και διαιρεί την $|G|$ και ότι

β'. αν η $|G'|$ είναι πεπερασμένη, τότε και η $|\phi(G)|$ είναι πεπερασμένη και διαιρεί την $|G'|$.

Άσκηση 5 (12 σελ. 158, 159). Σημειώστε αν είναι σωστό ή λάθος.

α'. Οποιοσδήποτε ομάδες τάξης 3 είναι ισόμορφες.

β'. Υπάρχει, ως προς ισομορφισμό, μόνο μια κυκλική ομάδα δεδομένης πεπερασμένης τάξης.

γ'. Οποιοσδήποτε δύο ομάδες που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων είναι ισόμορφες.

δ'. Κάθε ισομορφισμός είναι 1-1 συνάρτηση.

ε'. Κάθε 1-1 συνάρτηση ανάμεσα σε δύο ομάδες είναι ισομορφισμός.

ς'. Η ιδιότητα του να είναι μια ομάδα κυκλική είναι μια δομική ιδιότητα.

ζ'. Κάθε δομική ιδιότητα μιας ομάδας πρέπει να ισχύει και για κάθε ισόμορφη ομάδα.

η'. Μια αβελιανή ομάδα δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με μια μη αβελιανή ομάδα.

θ'. Μια προσθετική ομάδα δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με μια πολλαπλασιαστική ομάδα.

Άσκηση 6 (13, 14 σελ. 159). Δείξτε ότι η ομάδα U όλων των μιγαδικών αριθμών $\cos \theta + i \sin \theta$ μέτρου 1 με πράξη τον πολλαπλασιασμό δεν είναι ισόμορφη ούτε με το \mathbb{R} με πράξη την πρόσθεση, ούτε με το \mathbb{R}^* με πράξη τον πολλαπλασιασμό.