ΑΛΓΕΒΡΑ – 8^{η} σειρά ασκήσεων

Οι αριθμοί ασκήσεων και σελίδων αντιστοιχούν στο βιβλίο *Εισαγωγή στην Άλγεβρα* του J. Fraleigh (μτφ. Α. Γιαννόπουλος).

Άσκηση 1 (11 σελ. 158)**.** Διαμερίστε την παρακάτω συλλογή ομάδων σε υποσυλλογές ισόμορφων ομάδων.

$\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση	S_2
$\mathbb{R}^*$ με τον πολλαπλασιαμό	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{R}^+$ με τον πολλαπλασιασμό	S_6
$17\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση	$\mathbb{C}^*$ με τον πολλαπλασιασμό
$< \pi >$ με τον πολλαπλασιασμό	$3\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση
$\mathbb{R}$ με την πρόσθεση	

Άσκηση 2 (19 σελ. 159)**.** Έστω G μια αβελιανή ομάδα. Αποδείξτε ότι η ιδιότητα του να είναι αβελιανή είναι δομική, δείχνοντας ότι αν η G' είναι ισόμορφη με την G, τότε και η G' είναι αβελιανή.

Άσκηση 3 (20 σελ. 159)**.** Έστω G μια κυκλική ομάδα. Αποδείξτε ότι η ιδιότητα του να είναι κυκλική είναι δομική, δείχνοντας ότι αν η G' είναι ισόμορφη με την G, τότε και η G' είναι κυκλική.

Άσκηση 4 (21 σελ. 159)**.** Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Θεωρούμε τη διμελή πράξη $*$ στο σύνολο G που ορίζεται από την

$$a * b = b \cdot a$$

για κάθε $a, b \in G$. Δείξτε ότι η $(G, *)$ είναι ομάδα, και μάλιστα ισόμορφη με την $(G, \cdot)$ [*Υπόδειξη*: Θεωρήστε την ϕ, με $\phi(a) = a^{-1}$ για $a \in G$.]

Άσκηση 5 (23 σελ. 160)**.** Έστω G ομάδα και g δεδομένο στοιχείο της. Δείξτε ότι η απεικόνιση i_g, που ορίζεται από την $i_g(x) = gxg^{-1}$ για $x \in G$, είναι ένας ισομορφισμός της G με τον εαυτό της, δηλαδή ένας αυτομορφισμός της G.

Άσκηση 6 (24 σελ. 160)**.** Έστω $(S, *)$ η ομάδα όλων των πραγματικών αριθμών εκτός από τον -1 με την πράξη $*$ που ορίζεται από την $a*b = a+b+ab$. Δείξτε ότι η $(S, *)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{R}^*$. Κάνετέ το, ορίζοντας έναν ισομορφισμό $\phi : \mathbb{R}^* \to S$.