Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 1
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Να παραμετρίσετε τον κύκλο $X^2 + Y^2 = 1$.

2. Ομοίως τον $X^2 + Y^2 = 5$

3. Αν p πρώτος αριθμός, να πειραματιστείτε για ποιούς πρώτους η καμπύλη $X^2 + Y^2 = p$ παραμετρίζεται και για ποιούς όχι.

4. Αν K σώμα με άπειρο πλήθος στοιχείων και $f \in K[X_1, X_2, ..., X_n]$, να αποδειχθεί ότι η $f = 0$ στο δακτύλιο $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ τότε και μόνο τότε όταν η απεικόνιση $f : K^n \longrightarrow K$, όπου $(a_1, a_2, ..., a_n) \longrightarrow f(a_1, a_2, ..., a_n)$ είναι η μηδενική συνάρτηση.

5. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $X = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3(K) \mid t \in K\}$ είναι αλγεβρικό σύνολο.

6. Ομοίως για το σύνολο $X = \{(cost, sint) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

7. Ομοίως για το σύνολο των σημείων του $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ των οποίων οι πολικές συντεταγμένες (r, ϑ) επαληθεύουν την εξίσωση $r = sin(\vartheta)$.

8. Αν V και W αλγεβρικά σύνολα του $\mathbb{A}^n(K)$, να αποδείξετε ότι και τα σύνολα $V \cup W$,$V \cap W$ είναι επίσης αλγεβρικά σύνολα.

9. Αν K πεπερασμένο σώμα, τότε να αποδείξετε ότι κάθε υποσύνολο του $\mathbb{A}^n(K)$ είναι αλγεβρικό σύνολο.

10. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $X = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}, (x, x) \neq (1, 1)\} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ δεν είναι αλγεβρικό σύνολο.

11. Ομοίως το σύνολο $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})\}$ δεν είναι αλγεβρικό.