Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 2
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Αν A ιδεώδες του αντιμεταθετικού δακτυλίου με μοναδιαίο στοιχείο R, να αποδείξετε ότι το A είναι ριζικό τότε και μόνο τότε όταν ο δακτύλιος πηλίκων R/A είναι *reduced*, δηλαδή δεν περιέχει, μη-μηδενικά, μηδενοδύναμα στοιχεία.

2. Αν A, B ιδεώδη του R, τότε να αποδείξετε ότι $rad(A \cap B) = radA \cap radB$,καθώς και ότι $rad(A + B) = rad(radA + radB)$.

3. Αν A και B ριζικά ιδεώδη του δακτυλίου R, τότε και το ιδεώδες $A \cap B$, είναι επίσης ριζικό.

4. Να αποδείξετε ότι τα ιδεώδη $A =< X^2 - Y >$ και $B =< X^2 + Y >$ είναι πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου $K[X, Y]$.

5. Να αποδείξετε ότι αν A και B ριζικά ιδεώδη του δακτυλίου R τότε το ιδεώδες $A + B$ δεν είναι, κατ ανάγκη, ριζικό.

6. Αν M ένα *maximal* ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{R}[X_1, X_2, ..., X_n]$ να αποδείξετε ότι $V(M)$ είναι ή κενό ή περιέχει ένα ακριβώς σημείο του $\mathbb{R}^n$. Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο το $V(M)$ να είναι το κενό σύνολο.

7. Αποδείξτε την παραπάνω άσκηση για K σώμα το οποίο δεν είναι αλγεβρικά κλειστό.Να συμπεράνετε ότι αν K σώμα όχι αλγεβρικά κλειστό, τότε υπάρχει πάντοτε ένα *maximal* ιδεώδες αυτού το οποίο δεν είναι της μορφής $< X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n >$.

8. Να αποδείξετε ότι το ιδεώδες $A =< X^2 + 1 >$ του δακτυλίου $\mathbb{R}[X]$ είναι ριζικό ιδεώδες και ότι δεν είναι αντίστοιχο ιδεώδες κανενός συνόλου του $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$.

9. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $\varphi(X, Y) = Y^2 + X^2(X - 1)^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο ενώ το $V(\varphi)$ όχι.

10. Να αποδείξετε ότι σε δακτύλιο μονοσήμαντης ανάλυσης R ένα μονικό πολυώνυμο βαθμού 3 είναι ανάγωγο τότε και μόνο τότε όταν δεν έχει ρίζα στον R. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το

$V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ είναι ανάγωγο για κάθε αλγεβρικά κλειστό σώμα K και κάθε $\lambda \in K$.