Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 5
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Αν $X = V(F)$ αλγεβρική καμπύλη και $P = (a, b) \in X$ απλό σημείο αυτής, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της X στο P δίνεται από την εξίσωση $F_X(P)(X - a) + F_Y(P)(Y - b) = 0$

2. Να βρείτε όλα τα ιδιάζοντα σημεία και τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά των παρακάτω καμπυλών $X = V(F)$ όπου $F = Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$, $F = X^4 + Y^4 - X^2Y^2$, $F = X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$ και $F = Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

3. Να σκιτσάρετε την πραγματική εικόνα των παρακάτω αλγεβρικών καμπυλών του $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, να υπολογίσετε τα ιδιάζοντα σημεία της κάθε μιας από αυτές, την πολλαπλότητα κάθε ιδιάζοντος σημείου, να υπολογίσετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά καθώς και την πολλαπλότητα των εφαπτομένων: $X = V(F)$ όπου $F = X^3 + X^2 + Y^2$, $F = X^4 - X^2 + Y^2$, $F = X^5 + X^4 + Y^2$, $F = X^6 - X^4 + Y^2$, $F = X^n + Y^n - 1$ όπου $n \in \mathbb{N}$.

4. Αν η καμπύλη $X = V(F) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ είναι βαθμού n και έχει ένα σημείο $P \in X$ πολλαπλότητας n να αποδείξετε ότι η X αποτελείται από n ευθείες οι οποίες περνούν από το σημείο P.

5. Αν P διπλό σημείο της καμπύλης $X = F(V) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ να αποδείξετε ότι το P είναι βρόγχος ακριβώς τότε όταν $F_{XY}(P)^2 \neq F_{XX}(P)F_{YY}(P)$.