Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας, Φυλλάδιο 6
Εαρινό εξάμηνο του έτους 2002
Καθηγητής Γιάννης Α. Αντωνιάδης

1. Δύο διακεκριμένα σημεία του $P^2(\mathbb{R})$ ορίζουν μοναδική προβολική ευθεία που διέρχεται από αυτά. Δύο διακεκριμένες προβολικές ευθείες του $P^2(\mathbb{R})$ τέμνονται πάντα σε ακριβώς ένα σημείο.

2. Θεωρούμε την παραμέτρηση $(x, y) = (\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ της υπερβολής $X^2 - Y^2 = 1$.
   - Αν δοθεί το t, να αποδείξετε ότι (x, y) είναι το σημείο τομής της υπερβολής με την ευθεία κλίσης t που διέρχεται από το σημείο$(-1, 0)$.
   - Εξηγείστε γιατί, για $t = \pm 1$, παίρνουμε την ασύμπτωτη της υπερβολής.
   - Να χρησιμοποιήσετε ομογενείς συντεταγμένες για να εξηγήσετε τι συμβαίνει όταν $t = \pm 1$.
   - Τι γίνεται όταν $t \to \infty$

3. Για κάθε $i = 0, 1, ...n$ ορίζουμε $U_i = \{[x_0, x_1, ..., x_n] \in P^n(K)/x_i \neq 0\}$. Να αποδείξετε ότι:
   - Οι απεικονίσεις $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(K)$ που ορίζονται από την απεικόνιση $[x_0, x_1, ..., 1, ..., x_n] \mapsto (x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ είναι ένα προς ένα και επί.
   - Ισχύει
   $$P^n(K) = \cup_{i=0}^n U_i$$
   - Ισχύει
   $$P^n(K) = U_0 \cup H_0$$

4. Στον προβολικό χώρο $P^4(K)$
   - Ποιά είναι τα σημεία που ανήκουν στα υποσύνολα U_2, $U_2 \cap U_3$, $U_1 \cap U_3 \cap U_4$·
   - Να εκφράσετε τα σύνολα $P^4(K) - U_2$, $P^4(K) - (U_2 \cup U_3)$ και $P^4(K) - (U_1 \cup U_3 \cup U_4)$ σαν αντίγραφα άλλου προβολικού χώρου.
   - Ποιά είναι τα σημεία του συνόλου
   $$\cap_{i=1}^4 U_i$$
   - Γενικά να περιγράψετε τα υποσύνολα $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap ... \cap U_{i_r}$, όπου $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$.

5. Αν $X = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq P^2(\mathbb{R})$, να βρείτε εξισώσεις για τα σύνολα $X \cap U_0$ και $X \cap U_2$. Να ζωγραφίσετε αυτές τις καμπύλες και να βγάλετε συμπεράσματα για την X.

6. Στον δακτύλιο $R = K[X_0, X_1, ..., X_n]$ θεωρούμε το ιδεώδες $A =< X_0, X_1, ..., X_n >$
   - Να αποδείξετε ότι κάθε γνήσιο ομογενές ιδεώδες του R περιέχεται στο A.
   - Να αποδείξετε ότι η r-στή δύναμη του A, A^r είναι ιδεώδες το οποίο περάγεται από όλα τα μονώνυμα βαθμού r του R.Συμπεράνετε ότι κάθε ομογενές πολυώνυμο του R βαθμού $\geq r$ περιέχεται στο A^r.

7. Δίνεται το ομογενές ιδεώδες I του δακτυλίου $R = K[X_0, X_1, ..., X_n]$, όπου K αλγεβρικά κλειστό σώμα. Να αποδείξετε ότι $V(I) = \emptyset$ στον προβολικό χώρο $P^n(K)$ είναι ισοδύναμο με μία από τις ακόλουθες δύο συνθήκες.
   - Υπάρχει $r \geq 1$ τέτοιο ώστε κάθε ομογενές πολυώνυμο βαθμού $\geq r$ περιέχεται στο I.
   - Το ριζικό του I είναι ή το $A =< X_0, X_1, ..., X_n >$ ή ο δακτύλιος R.