1 Γένος καμπύλης

Σκόπος μας σε αυτήν τη διάλεξη είναι να δείξουμε ότι το γένος μίας καμπύλης είναι τοπολογική αναλλοίωτη.

Πρόταση 1.1 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη, μη σταθερή απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann και $p \in X$. Τότε υπάρχει μοναδικός φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε για κάθε χάρτη $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ στην Y με $\phi_2(F(p)) = 0$, να υπάρχει χάρτης $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ της X με $\phi_1(p) = 0$ τέτοιος ώστε $\phi_2(F(\phi_1(z))) = z^m$.*

Απόδειξη: Έστω χάρτης ϕ_2 στο Y με κέντρο το $F(p)$ (δηλαδή $\phi_2(F(p)) = 0$), και $\psi : U \longrightarrow V$ χάρτης της X με κέντρο το p. Τώρα, αν πάρουμε $T(w) = \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$, είναι $T(0) = \phi_2(F(\psi^{-1}(0))) = \phi_2(F(p)) = 0$. Άρα, το ανάπτυγμα Taylor της T γύρω από το 0 είναι της μορφής $T(w) = \displaystyle\sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$ όπου $c_m \neq 0$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε $T(w) = w^m S(w)$, όπου S ολόμορφη και $S(0) \neq 0$. Τότε, υπάρχει ολόμορφη $R(w)$ με $R(w)^m = S(w)$. Και τότε $T(w) = (wR(w))^m$. Θέτουμε $\eta(w) = wR(w)$. Παρατηρούμε τώρα ότι $\eta'(0) \neq 0$ άρα η συνάρτηση η αντιστρέφεται γύρω από το 0 και είναι ολόμορφη. Οπότε και η σύνθεση $\phi_1 = \eta \circ \psi$ είναι χάρτης της X γύρω από το p. Η συνάρτηση η ορίζει μία καινούρια συντεταγμένη $z = \eta(w)$. Και έχουμε:

$$\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) =$$

$$T(\eta^{-1}(z)) = T(w) = (wR(w))^m = z^m,$$

που είναι της μορφής που θέλαμε.

Το m αυτό είναι μοναδικό, διότι αν υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες γύρω από τα p και $F(p)$ ώστε η F να έχει τοπικά την μορφή $z \longmapsto z^m$ γύρω από το p θα υπάρχουν m διαφορετικές εικόνες του $F(p)$. Επομένως, ο αριθμός m είναι ένα τοπολογικό χαρακτηριστικό και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή τοπικών συντεταγμένων. □

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να γράφουμε κάθε ολόμορφη απεικόνιση $F : X \longrightarrow Y$ τοπικά γύρω από κάποιο $p \in X$, στην μορφή $z \longmapsto z^m$. Μάλιστα, αν οι επιφάνειες είναι συμπαγείς, ο αριθμός m είναι ο ίδιος για όλα τα σημεία.

Ορισμός 1.1 *Η πολλαπλότητα της απεικόνισης F στο σημείο p της X, συμβολίζεται με $mult_p(F)$ και είναι ο μοναδικός ακέραιος m τέτοιος ώστε κοντά στα p και $F(p)$ η απεικόνιση να έχει την μορφή $z \longmapsto z^m$.*

Η πολλαπλότητα υπολογίζεται αρκετά εύκολα, όπως φαίνεται και από το παρακάτω λήμμα. Κατ' αρχήν, θεωρούμε μιά τοπική συντεταγμένη z γύρω από το p και αντίστοιχα w γύρω από το $F(p)$. Έστω ότι το p αντιστοιχεί στο z_0 και το $F(p)$ στο w_0 και $w = h(z)$ η ολόμορφη συνάρτηση από την αλλαγή χαρτών που συνδέει τις δύο συντεταγμένες.

Λήμμα 1.1 *Με τους παραπάνω συμβολισμούς*

$$mult_p(F) = 1 + ord_{z_0}(dh/dz).$$

Ή αλλιώς, αν αναπτύξουμε κατά Taylor την h γύρω από το z_0: $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$, με $m \geq 1$ και $c_m \neq 0$, τότε $mult_p(F) = m$.

Απόδειξη: Όπως είδαμε και στην απόδειξη της πρότασης ;;, η πολλαπλότητα της F σε ένα σημείο p είναι ο μικρότερος όρος του αναπτύγματος Taylor της F, αν έχουμε επιλέξει τοπικές συντεταγμένες με κέντρο p και $F(p)$ αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτές οι συντεταγμένες είναι οι $z-z_0$ και $w-w_0$. Επομένως, αφου $w-w_0 = h(z)-h(z_0)$, η πολλαπλότητα της F θα είναι ο μικρότερος όρος του αναπτύγματος της $h(z)-h(z_0)$ ως πρός $z-z_0$. Και, από το θεώρημα Taylor, αυτό είναι ένα παραπάνω από την τάξη μηδενισμόυ της h στο z_0. □

Από το παραπάνω λήμμα βλέπουμε ότι τα σημεία με πολλαπλότητα ≥ 2 αποτελούν διακριτό σύνολο. Αυτό διότι αν $mult_p(F) \geq 2$ τότε $ord_{z_0}(dh/dz) \geq 1$. Επομένως το z_0 είναι ρίζα της h'. Αλλά, η h' είναι ολόμορφη, διότι η h είναι ολόμορφη. Και το σύνολο ριζών μίας ολομορφης συνάρτησης είναι διακριτό.

Ορισμός 1.2 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ μη σταθερή, ολόμορφη συνάρτηση. Ένα σημείο $p \in X$ με $mult_p(F) \geq 2$ λέγεται ramification σημείο.Ένα σημείο $y \in Y$ λέγεται branch σημείο, αν είναι εικόνα ramification σημείου.*

Πρόταση 1.2 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ μη σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann. Για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F).$$

Τότε, ο αριθμός $d_y(F)$ είναι σταθερός, ανεξάρτητος από το y.

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι η συνάρτηση $y \longmapsto d_y(F)$ είναι τοπικά σταθερή, από την Y στο $\mathbb{Z}$. Τότε, αφού το Y είναι συνεκτικό, μία τοπικά σταθερή συνάρτηση θα είναι παντού σταθερή και θα έχουμε τελειώσει.

Πρίν ξεκινήσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Θεωρούμε τον δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \parallel z \parallel < 1\}$ και την απεικόνιση $f : D \longrightarrow D$ με $f(z) = z^m$, $m \geq 1$. Αυτή η απεικόνιση είναι ολόμορφη και επί και το μοναδικό ramification σημείο είναι το $z = 0$ με $mult_0(f) = m$. Όλα τα υπόλοιπα σημεία είναι απλά. Δηλαδή, αν $w = 0$, η μοναδική προεικόνα είναι το $z = 0$ με πολλαπλότητα m, ενώ αν $w \neq 0$ έχουμε ακριβώς m προεικόνες με πολλαπλότητα 1. Επομένως, η συνάρτηση f περιορισμένη στον μοναδιαίο δίσκο, ικανοποιεί την συνθήκη ότι το άθροισμα των πολλαπλοτήτων των προεικόνων ενός σημείου είναι σταθερό.

Τώρα, αν έχουμε ξένη ένωση τέτοιων απεικονίσεων, δηλαδή μία απεικόνιση από ένωση ξένων δίσκων (ενδεχομένως με διαφορετική δύναμη m σε κάθε δίσκο), η παραπάνω συνθήκη και πάλι ικανοποιείται. Ο σκοπός μας, λοιπόν, είναι να δείξουμε ότι κάθε ολόμορφη, μη σταθερή $F : X \longrightarrow Y$ είναι τοπικά ξένη ένωση από απεικονίσεις της παραπάνω μορφής.

Έστω $y \in Y$ και $F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Παίρνουμε w τοπική συντεταγμένη με κέντρο το y. Τότε, από ;; μπορούμε να βρούμε τοπικές συντεταγμένες z_i με κέντρο x_i στην X με $i = 1, \ldots, n$, τέτοιες ώστε η F να είναι τοπικά της μορφής $z_i \longmapsto w = z_i^{m_i}$. Και επιπλέον, σε μικρές περιοχές γύρω από τα x_i έχουμε ακριβώς συνάρτηση της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω(ξένη ένωση από απεικονίσεις της μορφής $z \longmapsto z^m$).

Το μόνο που μένει να δείξουμε, είναι ότι γύρω από το y δεν έχουμε άλλες προεικόνες, εκτός από τις περιοχές των x_i. Εδώ χρησιμοποιούμε την συμπάγεια του X.

Υποθέτουμε ότι οσοδήποτε κοντά στο y μπορούμε να βρούμε προεικόνα που δεν ανήκει σε καμία περιοχή των x_i. Επομένως, μπορούμε να βρούμε ολόκληρη ακολουθία σημείων της X, τα οποία δεν βρίσκονται σε καμία γειτονιά των x_i, τέτοια ώστε όλα αυτά τα σημεία να είναι προεικόνες του y μέσω της F. Λόγω συμπάγειας του X μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{p_n\}$ των παραπάνω σημείων, η οποία συγκλίνει (σε κάποιο $x \in X$). Τότε $F(p_n) \rightarrow y$. Και αφού η F είναι συνεχής, θα πρέπει $F(x) = y$. Τότε, από υπόθεση, το x θα πρέπει να είναι κάποιο από τα x_i, το οποίο είναι άτοπο. Δηλαδή, όλες οι προεικόνες του y εξαντλούνται σε περιοχές γύρω από τα x_i.

Επομένως, η F είναι της μορφής που θέλαμε. Άρα $d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F)$ σταθερό, ο.ε.δ. □

Ορισμός 1.3 *Ο αριθμός $d_y(F)$, όπου $y \in Y$ τυχόν, ονομάζεται βαθμός της απεικόνισης.*

Απο τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν έχουμε μια ολόμορφη απεικόνιση $F : X \longrightarrow Y$, βαθμού N μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann, σε όλα εκτός από πεπερασμένα branch σημεία, θα έχουμε $mult_p(F) = 1$, και από το **;;** συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση θα έχει N διαφορετικές προεικόνες.

Οπότε, αν αφαιρέσουμε τα branch σημεία και τις εικόνες τους, έχουμε μία απεικόνιση κάλυψης.Αλλά και στα υπόλοιπα σημεία που αφαιρέσαμε, η απεικόνιση έχει καλή συμπεριφορά.

• **Τριγωνοποιήσεις**

Ένα τρίγωνο σε μία επιφάνεια Riemann είναι η εικόνα T μέσω ενός ομοιομορφισμού, ενός τριγώνου του Ευκλείδιου χώρου. Η εικόνα μίας κορυφής λεγεται κορυφή του T και η εικόνα μίας πλευράς λέγεται πλευρά του T.

Ορισμός 1.4 *Μία τριγωνοποίηση μίας συμπαγούς επιφάνειας Riemann S είναι μία οικογένεια τριγώνων $\{T_i\}$ στην S τα οποία ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:*
(1) $S = \cup T_i$
και (2) Αν δύο τρίγωνα τέμνονται, θα έχουν μία κοινή πλευρά ή μία κοινή κορυφή.

Επειδή η επιφάνεια είναι συμπαγής, η τριγωνοποίηση είναι πεπερασμένη.

Θεώρημα 1.1 *Κάθε επιφάνεια Riemann είναι τριγωνοποιήσιμη*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι δύσκολη, οπότε θα το θεωρήσουμε δεδομένο.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μία καινούρια έννοια: Τον αριθμό Euler μιας επιφάνειας.

Ορισμός 1.5 *Έστω συμπαγής επιφάνεια Riemann S και $\{T_i\}$ μία τριγωνοποίηση αυτής με v κορυφές, e ακμές και t τρίγωνα. Ο αριθμός $e(S) = v - e + t$ λέγεται αριθμός Euler της επιφάνειας S και είναι ανεξάρτητος από την τριγωνοποίηση.*

Στη συνέχεια, θα βρούμε μία σχέση που σύνδεει το $e(S)$ με το γένος της επιφάνειας. Και επειδή ο αριθμός $e(S)$ είναι μία τοπολογική αναλλοίωτη, το ίδιο θα συμβαίνει και με το γένος $g(S)$. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το παρακάτω

Θεώρημα 1.2 *Ο αριθμός Euler μίας συμπαγούς επιφάνειας Riemann S είναι ανεξάρτητος της τριγωνοποίησης, ίσος με $e(S) = 2 - 2g(S)$.*

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε για αυτήν την απόδειξη θα είναι τα παρακάτω:
(1) Βρίσκουμε τριγωνοποίηση του $\mathbb{P}^1$ και έπειτα τον αριθμό Euler $e(\mathbb{P}^1)$,
(2) Παίρνουμε μία μη σταθερή ρητή συνάρτη f στην S και στην συνέχεια την επαγώμενη ολόμορφη $F : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Η ύπαρξη μίας τέτοιας f δεν είναι τετριμένη και είναι συνέπεια του θεωρήματος Riemann Roch
(3) Δείχνουμε ότι,αν F^* το pull back της F, η τριγωνοποίηση του $\mathbb{P}^1$ μέσω της F^* μας δίνει μία τριγωνοποίηση T της S. Αν θυμηθούμε τώρα την τοπική μορφή της F, τα branch σημεία και τί ακριβώς γίνεται με τις προεικόνες τους, μπορούμε να βρούμε τα $v(T)$, $e(T)$, $t(T)$ της τριγωνοποίησης T και έπειτα τον αριθμό $e(S)$.

• **Μία τριγωνοποίηση του $\mathbb{P}^1$**

Θα ταυτίσουμε το προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^1$ με την σφαίρα S^2 και θα τριγωνοποιήσουμε την σφαίρα. Αυτό γίνεται ως εξής: Εγγράφουμε ένα κανονικό οκτάεδρο μέσα στην S^2. Αυτό χωρίζει την σφαίρα σε οκτώ κομμάτια τα οποία αποτελούν μία τριγωνοποίηση. Εύκολα φαίνεται από το σχήμα ότι θα έχουμε $t(T) = 8$ τρίγωνα, $v(T) = 6$ κορυφές και $e(T) = 12$ ακμές.

Οπότε, $e(\mathbb{P}^1) = v - e + t = 6 - 12 + 8 = 2$. $\square$

• **Από την τριγωνοποίηση του $\mathbb{P}^1$ παίρνουμε μία τριγωνοποίηση της επιφάνειας S μέσω της F^***

Κατ' αρχήν εισάγουμε την έννοια της εκλέπτυνσης μίας τριγωνοποίησης. Έστω ότι έχουμε μία τριγωνοποίηση της S.Αν T ένα τρίγωνο στην S, μπορούμε:
(1) να προσθέσουμε μία κορυφή στο εσωτερικό του T.Τότε αν ενώσουμε την κορυφή αυτή με τις κορυφές του T θα έχουμε προσθέσει στην τριγωνοποίηση 2 τρίγωνα, 1 κορυφή και 3 πλευρές.
(2) να πάρουμε δύο τρίγωνα με κοινή ακμή E και στο εσωτερικό της E να προσθέσουμε μία κορυφή.Στη συνέχεια ενώνουμε αυτήν την κορυφή με τις απέναντι κορυφές του κάθε τριγώνου αντίστοιχα.Έτσι, προσθέτουμε στην τριγωνοποίηση 2 τρίγωνα, 1 κορυφή και 3 ακμές.

Αυτές οι πράξεις ονομάζονται εκλεπτύνσεις της τριγωνοποίησης και παρατηρούμε ότι διατηρούν τον αριθμό Euler της επιφάνειας.

Τώρα ξαναγυρίζουμε στο πρόβλημα μας. Έχουμε την $F : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ και μία τριγωνοποίηση του $\mathbb{P}^1$. Θέλουμε να τροποποιήσουμε την τριγωνοποίηση του $\mathbb{P}^1$ ώστε τα branch σημεία να είναι κορυφές της τριγωνοποίησης. Αυτό γίνεται πολύ εύκολα αν σε κάθε branch σημείο που δεν είναι κορυφή εφαρμόζουμε κάποιο από τα (1) ή (2) και το κάνουμε κορυφή ενός τριγώνου εκλέπτυσμένης τριγωνοποίησης.

Επίσης, μικραίνουμε αρκετά τα τρίγωνα ώστε κάθε ένα να περιέχεται σε ένα ακριβώς χάρτη του $\mathbb{P}^1$.

Από το θεώρημα ;; και αν $deg(F) = m$, θα έχουμε ότι ένα $y \in \mathbb{P}^1$ δεν είναι branch σημείο αν και μόνο αν $F^{-1}(y)$ έχει ακριβώς m προεικόνες. Ενώ, αν y είναι branch σημείο, τότε $F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ με $k < deg(F)$. Αν κάθε x_i έχει πολλαπλότητα k_i, θα είναι $\sum_i k_i = deg(F)$ και σε κάθε περιοχή U_i του x_i η F θα έχει την μορφή $z \longmapsto z^{k_i}$. Δηλαδή, το pull back της F σε ένα απλό σημείο θα δίνει m ξένες ανά δύο περιοχές, ενώ στην δεύτερη περίπτωση θα δίνει k ξένες περιοχές, κάθε φορά μεσω μίας $z \longmapsto \sqrt[k_i]{z} \quad i = 1, \ldots, k$.

Επειδή τώρα, πήραμε τα τρίγωνα στο $\mathbb{P}^1$ τόσο μικρά ώστε να περιέχονται σε ένα ακριβώς χάρτη, θα έχουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Το τρίγωνο δεν έχει καμία κορυφή που να είναι branch σημείο. Τότε, μέσω της F^* παίρνουμε ακριβώς m τρίγωνα στην S τα οπόια δεν έχουν καμία κοινή κορυφή ή πλευρά. (βλ.σχήμα)

(2) Το τρίγωνο έχει μία κορυφή που είναι branch σημείο. Επίσης, υποθέτουμε χ.β.γ. ότι όλες οι άλλες κορυφές είναι απλά σημεία, αλλίως το επιτυχγάνουμε αυτό κάνοντας κάποιες από τις δύο στοιχειώδεις πράξεις εκλέπτυνσης της τριγωνοποίησης. Τότε, η F^* θα ανυψώνει το τρίγωνο σε k περιοχές, κάθε φορά μέσω της $\sqrt[k_i]{z}$. (βλ.σχήμα)

Δηλαδή, ανυψώνοντας ένα τρίγωνο, θα παίρνουμε m πλευρές, m τρίγωνα αλλά $n - \sum_{i=1}^{k}(k_i - 1)$ κορυφές. (Κάθε φορά που εφαρμόζουμε την $\sqrt[k_i]{z}$ 'χάνουμε' $k_i - 1$ κορυφές.)

Τώρα, η δεύτερη περίπτωση θα συμβεί τόσες φορές όσες είναι και τα branch σημεία της F. Δηλαδή πεπερασμένες φορές. Συγκεκριμένα, αν y είναι branch σημείο και $F^{-1}(y) = \{x_1(y), \ldots, x_{k(y)}\}$ οι προεικόνες του (με $\sum_{i=1}^{k(y)} mult_{x_i(y)} = deg(F)$), τότε

$$\sum_{y \in B} \sum_{i=1}^{k(y)} (k_i(y) - 1) = \sum_{p \in S} (mult_p(F) - 1),$$

όπου B το σύνολο των branch σημείων της F.

Οπότε, συνολικά έχουμε: Αν $t(\mathbb{P}^1)$ το πλήθος τριγώνων της τριγωνοποίησης του $\mathbb{P}^1$, $a(\mathbb{P}^1)$ οι ακμές και $v(\mathbb{P}^1)$ οι κορυφές, η τριγωνοποίηση της S που παίρνουμε μέσω της F^* θα έχει $t(S) = m \cdot t(\mathbb{P}^1)$ τρίγωνα, $a(S) = m \cdot a(\mathbb{P}^1)$ ακμές και $v(S) =$

$m \cdot v(\mathbb{P}^1) - \sum_{y\in B}\sum_{i=1}^{k(y)}(k_i(y)-1)$ κορυφές. Επομένως θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e(S) &= e(\mathbb{P}^1)\cdot m - \sum_{y\in B}\sum_{i=1}^{k(y)}(k_i(y)-1) \\ &= e(\mathbb{P}^1)\cdot m - \sum_{p\in S}(mult_p(F)-1). \quad (*) \end{aligned}$$

Τώρα, για να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα, θα χρειαστούμε κάποια λήμματα.

Λήμμα 1.2 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann και ω μία μερόμορφη 1-μορφή στην U. Έστω σημείο $p \in X$. Τότε*

$$ord_p(F^*\omega) = (1 + ord_{F(p)}(\omega))mult_p(F) - 1.$$

Απόδειξη: Έστω τοπικές συντεταγμένες, w γύρω από το p και z γύρω από το $F(p)$, τέτοιες ώστε η F να είναι τοπικά $z = w^n$ όπου $n = mult_p(F)$. Τώρα, αν αναπτύξουμε την μορφή ω γύρω από το $F(p)$ θα πάρουμε

$$(cz^k + \text{ όροι μεγαλύτερων δυνάμεων })dz,$$

όπου $k = ord_{F(p)}(\omega)$. Τότε, το $F^*(\omega)$ γύρω από το p θα είναι

$$(cw^{nk} + \text{όροι μεγαλύτερων δυνάμεων })(nw^{n-1})dw.$$

Και από αυτό, βλέπουμε εύκολα ότι $ord_p(F^*\omega) = nk + n - 1$. □

Λήμμα 1.3 *Έστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann. Έστω ω μερόμορφη 1-μορφή στην U. Τότε ισχύει*

$$div(F^*\omega) = F^*(div(\omega)) + \sum_{p\in X}[mult_p(F) - 1]\cdot p.$$

Απόδειξη: Κατ' αρχήν υπενθυμίζουμε ότι

$$div(\omega)(p) = ord_p\omega \cdot p \;\text{ και }\; F^*(D)(p) = mult_p(F)\cdot D(F(p)).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} div(F^*\omega) &= \sum_{p\in X} ord_p(F^*\omega)\cdot p \\ &\overset{\text{ii}}{=} \sum_{p\in X}[(1 + ord_{F(p)}\omega)\ mult_p(F) - 1]\cdot p \\ &= \sum_{p\in X}(mult_p(F)-1)\cdot p + \sum_{p\in X} ord_{F(p)}\omega\ mult_p(F)\cdot p \\ &= \sum_{p\in X}(mult_p(F)-1)\cdot p + F^*(div(\omega)). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1.1 *(**Τύπος Hurwitz**)*

Έστω $F : X \longrightarrow Y$ ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ συμπαγών επιφανειών Rieman-n.Τότε ισχύει

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1).$$

Απόδειξη: Η ισότητα αυτή προκύπτει εύκολα, αν πάρουμε βαθμούς στον τύπο του λήμματος ;; και επιπλέον χρησιμοποιήσουμε ότι: το pull back μέσω ολόμορφης συνάρτησης κανονικού διαιρέτη είναι κανονικός διαιρέτης, ο βαθμός κανονικού διαιρέτη είναι $2g - 2$ και $deg(F^*(D)) = deg(F)deg(D)$.

Τότε, αφού $div(\omega)$ κανονικός στην Q, ο διαιρέτης $F^*(div(\omega))$ θα είναι κανονικός στην Y και παίρνωντας βαθμούς θα έχουμε

$$deg(div(F^*\omega)) = deg(F^*(div(\omega))) + deg(\sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1) \cdot p)$$

δηλαδή,

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1).$$

□

Ο τύπος του Hurwitz στην περίπτωση που $Y = \mathbb{P}^1$, γίνεται

$$2g(X) - 2 = -2deg(F) + \sum_{p \in X} (mult_p(F) - 1). \qquad (**)$$

Τώρα, ξαναγυρνάμε στον τύπο (*) :

$$e(S) = e(\mathbb{P}^1) \cdot m - \sum_{p \in S} (mult_p(F) - 1)$$

Έχουμε υπολογίσει ότι $e(\mathbb{P}^1) = 2$, οπότε ο (*) γίνεται

$$e(S) = 2m - \sum_{p \in S} (mult_p(F) - 1).$$

Όμως, $m = deg(F)$ οπότε συνδυάζοντας με το (**) προκύοπτει ότι $e(S) = 2 - 2g$ που είναι αυτό που θέλαμε.