Σημειώσεις μαθήματος ΜΕΜ 233

Γεωμετρία

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2018

Εισαγωγή

Θα συμπληρωθεί

Κεφάλαιο 1

Μετασχηματισμοί της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θα συμπληρωθεί

Κεφάλαιο 2

Ομοπαραλληλική Γεωμετρία

Σύνοψη Κεφαλαίου 2: Ομοπαραλληλική Γεωμετρία

Γεωμετρία και μετασχηματισμοί

1. Μία ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ είναι μία απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που διατηρεί αποστάσεις.
Κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

- μετατόπιση κατά μήκος μίας ευθείας στο $\mathbb{R}^2$
- ανάκλαση σε μία ευθεία το $\mathbb{R}^2$
- περιστροφή γύρω από ένα σημείο στο $\mathbb{R}^2$
- μία σύνθεση από μετατοπίσεις, ανακλάσεις και περιστροφές στο $\mathbb{R}^2$.

Το σύνολο όλων των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$ αποτελεί μία ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων· ειδικότερα, η σύνθεση δύο ισομετριών είναι ισομετρία.

2. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αμετάβλητες από την ομάδα ισομετριών.
Αυτές οι ιδιότητες ονομάζονται Ευκλείδειες ιδιότητες, και περιλαμβάνουν την απόσταση, τη γωνία, τη συγγραμμικότητα σημείων και την ιδιότητα ευθειών να συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

3. Η σκοπιά του Klein στη γεωμετρία είναι η ιδέα οτι η γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ως η μελέτη μίας ομάδας μετασχηματισμών που δρα σε ένα χώρο.

4. Οι μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^2$ που δίδονται από

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \text{ και}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

είναι ισομετρίες και αναπαριστούν, αντίστοιχα, την περιστροφή γύρω από το σημείο αναφοράς κατά γωνία ϑ αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού και κατόπιν μετατόπιση κατά το διάνυσμα $(e,\, f)$ την ανάκλαση σε μία ευθεία που περνάειαπό το σημείο αναφοράς και σχηματίζει γωνία $\frac{\vartheta}{2}$ με τον x-άξονα και κατόπιν μετατόπιση κατά το διάνυσμα $(e,\, f)$.
Κάθε ισομετρία έχει μία από αυτές τις δύο μορφές.

5. Ένας Ευκλείδειος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι μία απεικόνιση $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της μορφής $t(x) = Ux + a$, όπου U είναι ορθογώνιος 2×2 πίνακας και $a \in \mathbb{R}^2$. Το σύνολο όλων των Ευκλείδειων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ συμβολίζεται $E(2)$.

6. Κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ είναι Ευκλείδειος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$, και το αντίστροφο.

7. Το σύνολο όλων των Ευκλείδειων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ αποτελεί μία ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.

8. Η αντίστροφη απεικόνιση ενός Ευκλείδειου μετασχηματισμού $t(x) = Ux + a$ δίδεται από $t^{-1}(x) = U^{-1}x - U^{-1}a$.

9. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αμετάβλητες από Ευκλείδειους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^2$.

10. Ένα σχήμα F_1 είναι ίσο στην Ευκλείδεια γεωμετρία με ένα σχήμα F_2 εάν υπάρχει ένας Ευκλείδειος μετασχηματισμός που απεικονίζει το F_1 στο F_2.
Η ισότητα στην Ευκλείδεια γεωμετρία είναι μία σχέση ισοδυναμίας.
Ένα σχήμα F_1 είναι G-ισοδύναμο με ένα σχήμα F_2 σε κάποια γεωμετρία ορισμένη από μία ομάδα μετασχηματισμών G που δρουν στο χώρο της γεωμετρίας εάν υπάρχει ένας μετασχηματισμός στην G που απεικονίζει το F_1 στο F_2.
Η G-ισοδυναμία είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί και παράλληλες προβολές

1. Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι μία απεικόνιση $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της μορφής $t(x) = Ax + b$, όπου A είναι αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας και $b \in \mathbb{R}^2$. Το σύνολο όλων των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ συμβολίζεται $A(2)$.
Κάθε Ευκλείδειος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός.

2. Το σύνολο όλων των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών $A(2)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.
Η αντίστροφη απεικόνιση ενός ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού $t(x) = Ax + b$ δίδεται από $t^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$.

3. Η ομοπαραλληλική γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων (που ονομάζονται ομοπαραλληλικές ιδιότητες) οι οποίες παραμένουν αμετάβλητες από ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^2$.
Βασικές ιδιότητες ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών: Οι ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί

α'. απεικονίζουν ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές

β'. απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες

γ'. διατηρούν το λόγο των μηκών κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής.

4. Μία παράλληλη προβολή είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$ στο εαυτό του που ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε π_1 και pi_2 επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$, και παράλληλες ακτίνες φωτός που τα διαπερνούν. Τότε τη απεικόνιση p που στέλνει κάθε σημείο P τοψ π_1 στο αντίστοιχο σημείο P' τοψ π_2 είναι η παράλληλη προβολή από το π_1 στο π_2.
Εάν τα επίπεδα π_1 και π_2 είναι παράλληλα, τότε η παράλληλη προβολή από το π_1 στο π_2 είναι ισομετρία.

5. Βασικές ιδιότητες παράλληλων προβολών: Οι παράλληλες προβολές

α'. απεικονίζουν ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές

β'. απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες

γ'. διατηρούν το λόγο των μηκών κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής.

6. Διάμετρος μίας έλλειψης είναι μία χορδή της έλλειψης που περνάει από το κέντρο.

Θεώρημα μέσων. Έστω ℓ μία χορδή μιας έλλειψης. Τότε τα μέσα των χορδών που είναι παράλληλες προς την ℓ βρίσκονται σε μία διάμετρο της έλλειψης.

7. Θεώρημα συζυγών διαμέτρων. Έστω ℓ μία διάμετρος μιας έλλειψης. Τότε υπάρχει μία άλλη διάμετρος m της έλλειψης τέτοια ώστε

α'. τα μέσα όλων των χορδών που είναι παράλληλες προς την ℓ βρίσκονται στην m.

β'. τα μέσα όλων των χορδών που είναι παράλληλες προς την m βρίσκονται στην ℓ.

Οι διευθύνσεις αυτών των δύο διαμέτρων ονομάζονται συζυγείς διευθύνσεις, και οι διάμετροι ονομάζονται συζυγείς διάμετροι.

8. Για μία δεδομένη έλλειψη, υπάρχει παράλληλη προβολή που απεικονίζει την έλλειψη σε έναν κύκλο.

9. Κάποιες ιδιότητες των σχημάτων, όπως τα μήκη και οι γωνίες, δεν διατηρούνται από παράλληλες προβολές. Αυτή είναι μία διαφορά μεταξύ της Ευκλείδειας και της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας.

10. Κάθε παράλληλη προβολή είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός. Όμως ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός δεν είναι απαραιτήτως παράλληλη προβολή: για παράδειγμα η απεικόνιση διπλασιασμού, $t(v) = 2v$ είναι ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ που δεν αποτελεί παράλληλη προβολή.

11. Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός t προσδιοριζεται απόλυτα από τις εικόνες των τριών μη συγγραμμικών σημείων $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Άρα εάν γνωρίζουμε τα σημεία στα οποία απεικονίζει ο t τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα A και το διάνυσμα b στην έκφραση $t(x) = Ax + b$.

12. Κάθε ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο παράλληλων προβολών.

Ιδιότητες ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών

1. Μέθοδος: Για να βρούμε την εικόνα μίας ευθείας ή μίας κωνικής στο $\mathbb{R}^2$ από έναν ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από $t(x) = Ax + b$, συμβολίζουμε x το σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο πεδίο ορισμού και x' με συντεταγμένες (x', y') στο πεδίο τιμών. Τότε

α'. Εκφράζουμε τη σχέση μεταξύ των x και x' στη μορφή $x = A^{-1}x' - A^{-1}b$

β'. Βρίσκουμε εκφράσεις για τα x και y συναρτήσει των x' και y'

γ'. Αντικαθιστούμε με αυτές τις εκφράσεις τα x και y στην εξίσωση της ευθείας ή της κωνικής

δ'. Αφαιρούμε τους τόνους από τα x' και y'.

Η εξίσωση που προκύπτει είναι η εξίσωση της εικόνας από τον t.

2. Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε τον μοναδικό ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό $t(x) = Ax + b$ που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα τρία μη συγγραμμικά σημεία p, q και r, αντίστοιχα,

α'. Θέτουμε $b = p$

β′. Θεωρούμε τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $q-p$ και $r-p$.

Παρατήρηση: Αυτή η μέθοδος ισχύει μόνο όταν τα p, q και r δεν είναι συγγραμμικά. Εάν είναι συγγραμμικά, τότε ο πίνακας A που περιγράφεται στη Μέθοδο δεν είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς ο μετασχηματισμός που δίδει η Μέθοδος δεν είναι ομοπαραλληλικός.

3. Θεμελιώδες Θεώρημα Ομοπαραλληλικής Γεωμετρίας. Θεωρούμε p, q, r και p', q', r' δύο σύνολα από τρία μη συγγραμμικά σημεία στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

α′. υπάρχει ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός t που απεικονίζει τα σημεία p, q και r στα p', q' και r', αντίστοιχα

β′. αυτός ο ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός είναι μοναδικός.

Μέθοδος:Για να προσδιορίσουμε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό t που απεικονίζει τα μη συγγραμμικά σημεία p, q και r στα μη συγγραμμικά σημεία p', q' και r', αντίστοιχα

α′. Προσδιορίζουμε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό t_1 που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα σημεία p, q και r, αντίστοιχα

β′. Προσδιορίζουμε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό t_2 που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα σημεία p', q' και r', αντίστοιχα

γ′. Υπολογίζουμε τη σύνθεση $t = t_2 \circ t_1^{-1}$.

4. Δύο σχήματα είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμα εάν υπάρχει ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το ένα στο άλλο.

Όλα τα τρίγωνα είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμα.

5. Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός διατηρεί τους λόγους μηκών κατά μήκος παράλληλων ευθειών.

Εφαρμογές του Θεμελιώδους Θεωρήματος

1. Θεώρημα Διαμέσων. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο.

2. Το σημείο R διαιρεί το διάστημα PQ σε λόγο $(1-\lambda) : \lambda$ εάν $\frac{PR}{RQ} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$. Το μέγεθος του λόγου είναι ισο με το λόγο των μηκών των PR, RQ, και ο λόγος είναι θετικός εάν $0 < \lambda < 1$, οπότε $\overrightarrow{PR}$ και $\overrightarrow{RQ}$ είναι ομόρροπα, ενώ είναι αρνητικός όταν $\lambda < 0$ ή $\lambda > 1$, οπότε $\overrightarrow{PR}$ και $\overrightarrow{RQ}$ είναι αντίρροπα.

Εάν τα P, Q, R έχουν συντεταγμένες (x_P, y_P), (x_Q, y_Q) και (x_R, y_R) αντίστοιχα, τότε $\frac{PR}{RQ} = \frac{x_R - x_P}{x_Q - x_R}$ και $\frac{PR}{RQ} = \frac{y_R - y_P}{y_Q - y_R}$. Εάν ένας από τους παρονομαστές είναι μηδέν, χρησιμοποιούμε το άλλο κλάσμα για τον υπολογισμό.

3. Θεώρημα Ceva. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και σημείο X που δεν βρίσκεται σε κάποια από τις επεκτεταμένες πλευρές του τριγώνου. Εάν AX τέμνει την BC στο P, BX τέμνει την CA στο Q και CX τέμνει την AB στο R, τότε

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1\,.$$

4. Αντίστροφο Θεωρήματος Ceva. Θεωρούμε σημεία P, Q και R, διαφορετικά από τις κορυφές, στις επεκτεταμένες πλευρές BC, CA και AB του τριγώνου ABC, τέτοια ώστε $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$. Τότε οι ευθείες AP, BQ και CR τέμνονται σε ένα σημείο.

5. Θεώρημα Μενελάου. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και ευθεία ℓ η οποία τέμνει τις επεκτεταμένες πλευρές του τριγώνου BC, CA και AB σε τρία διαφορετικά σημεία P, Q και R αντίστοιχα. Τότε $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$.

6. Αντίστροφο Θεωρήματος Μενελάου. Θεωρούμε σημεία P, Q και R, διαφορετικά από τις κορυφές, στις επεκτεταμένες πλευρές BC, CA και AB του τριγώνου ABC, τέτοια ώστε $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$. Τότε τα σημεία P, Q και R βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

7. Πολλά αποτελέσματα για ιδιότητες τριγώνων που διατηρούνται από ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς (όπως οι σχέσεις σημείων και ευθειών, η παραλληλία, οι λόγοι μηκών πάνω στην ίδια ευθεία) αποδεικνύονται με την ακόλουθη μέθοδο.
Πρώτα επιλέγουμε ένα κατάλληλο τρίγωνο, στο οποίο είναι εύκολο να αποδειχθεί το αποτέλεσμα. Κατόπιν, επικαλούμενοι την ύπαρξη ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού που απεικονίζει αυτό το τρίγωνο σε οποιοδήποτε άλλο, συμπεραίνουμε οτι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί και κωνικές

1. Κάθε έλλειψη είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμη με τον μοναδιαίο κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.
Κάθε υπερβολή είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμη με την ορθή υπερβολή με εξίσωση $xy = 1$.
Κάθε παραβολή είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμη με την παραβολή με εξίσωση $y^2 = x$.

2. Ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν ελλείψεις σε ελλείψεις, παραβολές σε παραβολές και υπερβολές σε υπερβολές.
Στην Ομοπαραλληλική Γεωμετρία:

α΄. Όλες οι ελλείψεις είναι ισοδύναμες

β΄. Όλες οι υπερβολές είναι ισοδύναμες

γ΄. Όλες οι παραβολές είναι ισοδύναμες

Μη εκφυλισμένες κωνικές είναι ισοδύναμες μόνο με μη εκφυλισμένες κωνικές του ίδιου τύπου.

3. Εάν t είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός και C είναι έλλειψη ή υπερβολή με κέντρο P, τότε $t(C)$ είναι έλλειψη ή υπερβολή με κέντρο $t(P)$.

4. Εάν t είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός και H είναι υπερβολή με ασύμπτωτες ℓ_1 και ℓ_2, τότε $t(H)$ είναι υπερβολή με ασύμπτωτες $t(\ell_1)$ και $t(\ell_2)$.

5. Εάν t είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός και ℓ είναι εφαπτομένη στην κωνική C, τότε $t(\ell)$ είναι εφαπτομένη στην κωνική $t(C)$.

6. Στην ομοπαραλληλική γεωμετρία μπορούμε να μελετήσουμε προβλήματα με κωνικές που αναφέρονται σε ομοπαραλληλικές ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε έναν ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό για να απεικονίσουμε την κωνική σε μία από τις κανονικές μορφές, λύνουμε το πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση και μετά επιστρέφουμε στην αρχική κωνική.

7. Για κάθε υπερβολή και σημείο P της υπερβολής υπάρχει ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την υπερβολή στην ορθή υπερβολή $xy = 1$, και το σημείο P στο $(1, 1)$.

Κεφάλαιο 3

Προβολική Γεωμετρία

Σύνοψη Κεφαλαίου 3: Προβολική Γεωμετρία

Προοπτική

1. Εάν π_1 και π_2 είναι δύο επίπεδα που δεν περνάνε από την αρχή O στο $\mathbb{R}^3$, λέμε οτι τα σημεία P στο π_1 και Q στο π_2 βρίσκονται σε προοπτική από το O εάν η ευθεία από το P στο Q περνάει από το O.

2. Μία κεντρική προβολή από το π_1 στο π_2 με κέντρο στο O είναι η απεικόνιση που στέλνει το σημείο P του π_1 στο σημείο Q του π_2 όποτε τα σημεία P και Q βρίσκονται σε προοπτική από το O. (Τα επίπεδα π_1 και π_2 μπορεί να βρίσκονται στην ίδια ή σε αντίθετες πλευρές του O.)

3. Το πεδίο ορισμού μίας κεντρικής προβολής μπορεί να μην είναι όλο το π_1: εάν P είναι τέτοιο ώστε OP είναι παράλληλη στο επίπεδο π_2, το P δεν έχει εικόνα στο π_2. Η εικόνα μίας ευθείας από μία κεντρική προβολή είναι μία ευθεία, ίσως μείον ένα σημείο.

Το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$

1. Ένα προβολικό σημείο είναι μία ευθεία στο $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή του $\mathbb{R}^3$. Το προβολικό επίπεδο είναι το σύνολο όλων αυτών των προβολικών σημείων.

2. Η έκφραση $[a, b, c]$ όπου οι αριθμοί a, b, c δεν είναι όλοι 0, αναπαριστά ένα προβολικό σημείο P του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ που αποτελείται από τη μοναδική ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που περνάει από το $(0, 0, 0)$ και το (a, b, c). Λέμε οτι $[a, b, c]$ είναι οι ομογενείς συντεταγμένες του προβολικού σημείου P.
Εάν (a, b, c) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος v, μπορούμε να συμβολίσουμε το προβολικό σημείο P με $[v]$. Τότε λέμε οτι το προβολικό σημείο P αντιπροσωπεύεται

από το διάνυσμα v.
Η έκφραση $[0,\,0,\,0]$ δεν έχει νόημα, αφού οι αριθμοί a, b, c δεν μπορούν να είναι όλοι μηδέν.

3. Οι ομογενείς συντεταγμένες $[a,\,b,\,c]$ και $[\lambda a,\,\lambda b,\,\lambda c]$, όπου $\lambda \neq 0$, αναπαριστούν το ίδιο προβολικό σημείο στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $[a,\,b,\,c] = [\lambda a,\,\lambda b,\,\lambda c]$ για $\lambda \neq 0$.
Εάν δεν υπάρχει μη μηδενικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $[a,\,b,\,c] = [\lambda a',\,\lambda b',\,\lambda c']$, οι ομογενείς συντεταγμένες $[a,\,b,\,c]$ και $[a',\,b',\,c']$ αναπαριστούν διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.
Επίσης, $[a,\,b,\,1] = [a',\,b',\,1]$ εάν και μόνον εάν $a = a'$ και $b = b'$.

4. Ένα προβολικό σχήμα είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

5. Μία προβολική ευθεία στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ είναι ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή. Προβολικά σημεία είναι συγγραμμικά εάν βρίσκονται σε μία προβολική ευθεία.

6. Η γενική εξίσωση μίας προβολικής ευθείας στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ είναι $ax + by + cz = 0$, όπου a, b, c δεν είναι όλα μηδέν.

7. Ιδιότητα συγγραμμικότητας: Κάθε δύο προβολικά σημεία στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ βρίσκονται σε μία μοναδική προβολική ευθεία.
Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση της προβολικής ευθείας στην οποία βρίσκονται τα προβολικά σημεία $[d,\,e,\,f]$ και $[g,\,h,\,k]$,

α΄. γράφουμε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0$

β΄. αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, για να βρουμε τη ζητούμενη εξίσωση στη μορφή $ax + by + cz = 0$.

Μερικές φορές μπορούμε να ‘‘δούμε’’ την εξίσωση μίας προβολικής ευθείας χωρίς να υπολογίσουμε στην ορίζουσα.

8. Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε εάν τρία προβολικά σημεία $[a,\,b,\,c]$, $[d,\,e,\,f]$ και $[g,\,h,\,k]$ είναι συγγραμμικά

α΄. υπολογίζουμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

β΄. Τα προβολικά σημεία $[a,\,b,\,c]$, $[d,\,e,\,f]$ και $[g,\,h,\,k]$ είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν η ορίζουσα είναι 0.

9. Τα προβολικά σημεία $[1,\,0,\,0]$, $[0,\,1,\,0]$ και $[0,\,0,\,1]$ ονομάζονται το τρίγωνο αναφοράς.
Το προβολικό σημείο $[1,\,1,\,1]$ ονομάζεται μοναδιαίο σημείο.

10. Ιδιότητα σύμπτωσης στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$: Καθε δύο προβολικές ευθείες στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ τέμνονται σε ένα μοναδικό προβολικό σημείο του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

11. Έστω π επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που δεν περνάει από την αρχή O. Τότε υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του π και των προβολικών σημείων του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ που τέμνουν το επίπεδο π. Τα προβολικά σημεία του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ που δεν τέμνουν το π λέγονται ιδεατά σημεία του π.

12. Ένα επίπεδο εμφύτευσης είναι ένα επίπεδο π που δεν περνάει από την αρχή, μαζί με το σύνολο όλων των ιδεατών σημείων του π.
Το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $z = 1$ ονομάζεται κανονικό επίπεδο εμφύτευσης. Η απεικόνιση του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ στο κανονικό επίπεδο εμφύτευσης ονομάζεται κανονική εμφύτευση του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

13. Η παραλληλία δεν είναι προβολική ιδιότητα.

Προβολικοί μετασχηματισμοί

1. Ένας προβολικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ είναι μία απεικόνιση $t : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ της μορφής $t : [x] \mapsto [Ax]$, όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας. Λέμε οτι A είναι ο πίνακας που συνδέεται με την απεικόνιση t. Το σύνολο όλων των προβολικών μετασχηματισμών συμβολίζεται $P(2)$.
Εάν ο πίνακας A συνδέεται με τον t, τότε για κάθε μη μηδενικό αριθμό λ, λA επίσης συνδέεται με τον μετασχηματισμό t.

2. Το σύνολο των προβολικών μετασχηματισμών $P(2)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Ειδικότερα, εάν t_1 και t_2 είναι προβολικοί μετασχηματισμοί συνδεδεμένοι με τους πίνακες A_1 και A_2, αντίστοιχα, τότε $t_1 \circ t_2$ και t^{-1} είναι προβολικοί μετασχηματισμοί συνδεδεμένοι με τους πίνακες $A_1 A_2$ και A^{-1}.
Μέθοδος: Για να συνθέσουμε τους προβολικούς μετασχηματισμούς t_1 και t_2:

α΄. γράφουμε τους πίνακες A_1 και A_2 που συνδέονται με τους t_1 και t_2,

β΄. υπολογίζουμε το γινόμενο $A_1 A_2$,

γ΄. γράφουμε τη σύνθεση $t_1 t_2$ που συνδέεται με τον $A_1 A_2$.

Μέθοδος: Για να βρούμε τον αντίστροφο του προβολικού μετασχηματισμού t:

α΄. γράφουμε τον πίνακα A που συνδέεται με τον t,

β΄. υπολογίζουμε τον A^{-1},

γ΄. γράφουμε τον t^{-1} που συνδέεται με τον A^{-1}.

3. Μέθοδος: Για να βρούμε την εικόνα της προβολικής ευθείας $ax + by + cz = 0$ από τον προβολικό μετασχηματισμό $t : [x] \mapsto [Ax]$:

α′. γράφουμε την εξίσωση της προβολικής ευθείας στη μορφή $Lx = 0$, όπου L είναι ο πίνακας $[a\ b\ c]$,

β′. βρίσκουμε έναν πίνακα B συνδεδεμένο με τον t^{-1},

γ′. γράφουμε την εξίσωση της εικόνας $(LB)x = 0$.

4. Η προβολική γεωμετρία είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ που είναι αναλλοίωτες από προβολικούς μετασχηματισμούς.
Η συγγραμμικότητα σημείων και οι ιδιότητες τομής ευθειών είναι προβολικές ιδιότητες.

5. Ένα προβολικό τετράπλευρο είναι ένα σύνολο από τέσσερα προβολικά σημεία A, B, C και D, κάθε τρία από τα οποία δεν είναι συγγραμμικά, μαζί με τις προβολικές ευθείες AB, BC, CD και DA.
Όλα τα προβολικά τετράπλευρα είναι προβολικά ισοδύναμα.

6. Μέθοδος: Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το $[1,\, 0,\, 0]$ στο $[a_1,\, a_2,\, a_3]$, το $[0,\, 1,\, 0]$ στο $b_1,\, b_2,\, b_3]$, το $[0,\, 0,\, 1]$ στο $[c_1,\, c_2,\, c_3]$, το $[1,\, 1,\, 1]$ στο $[d_1,\, d_2,\, d_3]$, όπου κάθε τρία από τα $[a_1,\, a_2,\, a_3]$, $b_1,\, b_2,\, b_3]$, $[c_1,\, c_2,\, c_3]$, $[d_1,\, d_2,\, d_3]$ δεν είναι συγγραμμικά,

α′. βρίσκουμε u, v, w τέτοια ώστε $\begin{bmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$,

β′. γράφουμε το ζητούμενο προβολικό μετασχηματισμό στη μορφή $t : [x] \mapsto [Ax]$, όπου A είναι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του πίνακα $\begin{bmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{bmatrix}$.

7. Θεμελιώδες Θεώρημα Προβολικής Γεωμετρίας. Θεωρούμε δύο προβολικά τετράπλευρα $ABCD$ και $A'B'C'D'$ στο $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Τότε:

α′. υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός t που απεικονίζει το A στο A', το B στο B', το C στο C' και το D στο D',

β′. ο μετασχηματισμός t είναι μοναδικός.

8. Μέθοδος: Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τις κορυφές του τετραπλεύρου $ABCD$ στις αντίστοιχες κορυφές του τετραπλεύρου $A'B'C'D'$:

α′. βρίσκουμε τον προβολικό μετασχηματισμό t_1 που απεικονίζει το τρίγωνο αναφοράς και το μοναδιαίο σημείο στα προβολικά σημεία A, B, C, D αντίστοιχα, β′. βρίσκουμε τον προβολικό μετασχηματισμό t_2 που απεικονίζει το τρίγωνο αναφοράς και το μοναδιαίο σημείο στα προβολικά σημεία A', B', C', D' αντίστοιχα,

γ′. υπολογίζουμε τον $t = t_2 \circ t_1^{-1}$.

9. Για κάθε κεντρική προβολή σ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν μετασχηματισμό προοπτικής, δηλαδή μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\pi \cup \{$ιδεατά προβολικά σημεία του $\pi\}$ στο $\pi' \cup \{$ιδεατά προβολικά σημεία του $\pi'\}$. Αυτός είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{RP}^2$ στον εαυτό του.
Κάθε προβολικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως σύνθεση τριών μετασχηματισμών προοπτικής.

Εφαρμογές του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Προβολικής Γεωμετρίας

1. Θεώρημα Desargues. Θεωρούμε τρίγωνα ABC και $A'BC'$ στο $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε οι ευθείες AA', BB' και CC' τέμνονται στο σημείο U. Εάν BC και $B'C'$ τέμνονται στο P, CA και $C'A'$ τέμνονται στο Q, AB και $A'B'$ τέμνονται στο R, τότε τα P, Q και R είναι συγγραμμικά.

2. Το Θεμελιώδες Θεώρημα χρησιμοποιείται συχνά για να απλοποιήσουμε αποδείξεις στην προβολική γεωμετρία, όπου οι εμπλεκόμενες ιδιότητες είναι προβολικές ιδιότητες. Γενικά, δεν αναφερόμαστε ρητά στον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό t, αλλά απλώς παρατηρούμε οτι ‘‘Από το Θεμελιώδες Θεώρημα, επιλέγουμε τα τέσσερα σημεία … (κάθε τρία από τα οποία δεν είναι συγγραμμικά) να είναι το τρίγωνο αναφοράς και το μοναδιαίο σημείο, με ομογενείς συντεταγμένες $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$’’.

3. Θεώρημα Πάππου. Θεωρούμε τρία σημεία A, B και C σε μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$, και A', B' και C' τρία σημεία σε μία άλλη ευθεία. Εάν BC' και BC τέμνονται στο P, CA' και $C'A$ τέμνονται στο Q, AB' και $A'B$ τέμνονται στο R, τότε τα P, Q και R είναι συγγραμμικά.

4. Κάθε Ευκλείδειο σχήμα σε ένα επίπεδο εμφύτευσης αντιστοιχεί σε ένα προβολικό σχήμα στο $\mathbb{RP}^2$. Έπεται οτι ένα Ευκλείδειο θεώρημα που αναφέρεται σε προβολικές ιδιότητες (όπως η συγγραμμικότητα ή η σύμπτωση σημείων) ισχύει εάν και μόνο εάν ισχύει το αντίστοιχο προβολικό θεώρημα.

Ο διπλός λόγος

1. Θεωρούμε τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία A, B, C, D στο $\mathbb{RP}^2$, που αντιπροσωπεύονται από τα (συνεπίπεδα) διανύσματα a, b, c, d στο $\mathbb{R}^3$, και αριθμούς α,

β, γ, δ τέτοιους ώστε $c = \alpha a + \beta b$ και $d = \gamma a + \delta b$. Ορίζουμε το διπλό λόγο των A, B, C, D να είναι $(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} \Big/ \frac{\delta}{\gamma}$.
Ο διπλός λόγος $(ABCD)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή των διανυσμάτων που αντιπροσωπεύουν τα προβολικά σημεία A, B, C, D.

2. Θεωρούμε τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία A, B, C, D του $\mathbb{RP}^2$, και $(ABCD) = k$. Τότε

$$(BACD) = (ABDC) = \frac{1}{k} \qquad \text{και} \qquad (ACBD) = (DBCA) = 1 - k\,.$$

3. Ο διπλός λόγος είναι αμετάβλητος από προβολικούς μετασχηματισμούς: εάν t είναι προβολικός μετασχηματισμός και A, B, C, D είναι τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{RP}^2$, και $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$, $D' = t(D)$, τότε $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

4. Εάν A, B, C, D είναι τέσσερα προβολικά σημεία σε μία προβολική ευθεία στο $\mathbb{RP}^2$ και A', B', C', D' είναι τέσσερα προβολικά σημεία σε μία άλλη προβολική ευθεία στο $\mathbb{RP}^2$, τέτοια ώστε οι τέσσερεις προβολικές ευθείες AA', BB', CC', DD' τέμνονται στο ίδιο σημείο U, τότε $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

5. Θεώρημα μοναδικού τέταρτου σημείου. Εάν A, B, C, X, Y είναι συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{RP}^2$, τέτοια ώστε $(ABCX) = (ABCY)$, τότε $X = Y$.

6. Εάν A, B, C, D, και A, E, F, G είναι δύο τετράδες από συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{RP}^2$, σε δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες, τέτοια ώστε $(ABCD) = (AEFG)$. Τότε οι προβολικές ευθείες BE, CF και DG περνάνε απο το ίδιο προβολικό σημείο.

7. Θεωρούμε τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{RP}^2$ που διαπερνούν ένα επίπεδο εμφύτευσης στα σημεία A, B, C, D, με διανύσματα θέσης (ως προς το σύστημα αναφοράς του επιπέδου) a, b, c, d αντίστοιχα. Τότε, εάν μπορούμε να εκφράσουμε τα c και d ως $c = \lambda a + (1-\lambda) b$ και $d = \mu a + (1-\mu) b$, έχουμε

$$(ABCD) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \Big/ \frac{1-\mu}{\mu} = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}\;.$$

8. Μέθοδος: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα επίπεδο εμφύτευσης για να υπολογίσουμε το διπλό λόγο τεσσάρων συγγραμμικών σημείων:

α′. εάν τα τέσσερα προβολικά σημεία διαπερνούν το επίπεδο εμφύτευσης στα σημεία A, B, C, D αντίστοιχα, τότε $(ABCD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$,

β′. εάν ένα από τα προβολικά σημεία είναι ιδεατό σημείο για το επίπεδο εμφύτευσης, τότε

$$(ABCD) = \frac{DB}{CB} \quad \text{εάν } A \text{ είναι ιδεατό,}$$

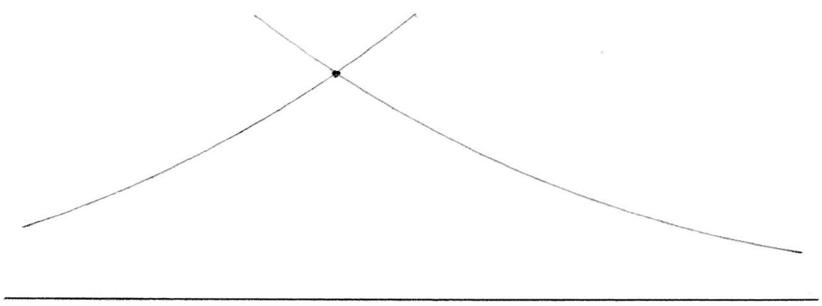
$$(ABCD) = \frac{CA}{DA} \quad \text{εάν } B \text{ είναι ιδεατό,}$$
$$(ABCD) = \frac{BD}{AD} \quad \text{εάν } C \text{ είναι ιδεατό,}$$
$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \quad \text{εάν } D \text{ είναι ιδεατό.}$$

9. Ο διπλός λόγος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσουμε αποστάσεις στο έδαφος σε αεροφωτογραφίες, αφού ο διπλός λόγος οποιωνδήποτε τεσσάρων σημείων σε μία ευθεία στο έδαφος είναι ίσος με το διπλό λόγο των εικόνων τους στην αεροφωτογραφία.

Κεφάλαιο 4

Υπερβολική Γεωμετρία

Η υπερβολική γεωμετρία αρχικά αναπτύχθηκε αξιωματικά από τον Lobachevsky και τον Bolyai, στις αρχές του 19ου αιώνα, μελετώντας τις συνέπειες της υπόθεσης οτι υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες προς μία ευθεία ε από σημείο εκτός της ε.



Σχήμα 4.1: Δύο παράλληλες από ένα σημείο προς μία ευθεία.

Κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα ανακαλύφθηκαν μοντέλα της υπερβολικής γεωμετρίας μέσα στην ευκλείδεια γεωμετρία. Αυτό διευκόλυνε πολύ τη μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας. Ταυτόχρονα έδειξε οτι η υπερβολική γεωμετρία είναι ελεύθερη από αντιφάσεις εάν η ευκλείδεια γεωμετρία είναι ελεύθερη από αντιφάσεις.

Σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου του Poincaré.

Το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου $\mathcal{H}$ για το υπερβολικό επίπεδο

Ως επίπεδο της υπερβολικής γεωμετρίας θα θεωρήσουμε άνω ημιεπίπεδο του Poincaré, δηλαδή το σύνολο

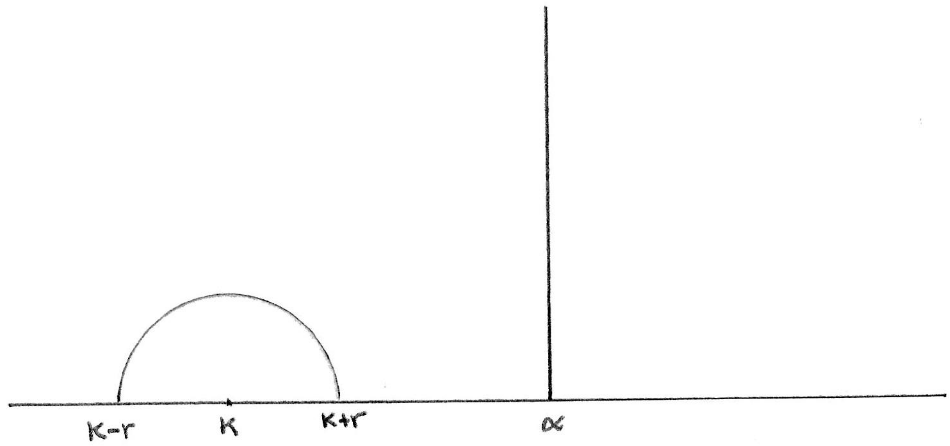
$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Σημεία του υπερβολικού επιπέδου είναι τα σημεία $z \in \mathbb{C}$, για τα οποία $\operatorname{Im} z > 0$.

Ευθείες του υπερβολικού επιπέδου, ή υ-ευθείες, είναι

α΄. ημιευθείες στο $\mathcal{H}$, κάθετες στο σύνορο, δηλαδή σύνολα της μορφής $\varepsilon_\alpha = \{\alpha + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$, για $\alpha \in \mathbb{R}$.

β΄. ημικύκλια στο $\mathcal{H}$ ορθογώνια στο σύνορο, δηλαδή σύνολα της μορφής $\varepsilon_{\kappa,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| = r, \operatorname{Im} z > 0\}$.



Σχήμα 4.2: Ευθείες του υπερβολικού επιπέδου.

Κάθε ευθεία έχει δύο **πέρατα** στο σύνορο του $\mathcal{H}$.

α΄. Η ε_α έχει πέρατα α και ∞.

β΄. Η $\varepsilon_{\kappa,r}$ έχει πέρατα $\kappa - r$ και $\kappa + r$.

Τα πέρατα μίας υ-ευθείας δεν είναι σημεία του υπερβολικού επιπέδου. Ορίζουμε το **σύνορο** του υπερβολικού επιπέδου

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{H} &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\} \\ &= \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε $\overline{\mathcal{H}}$ το υπερβολικό επίπεδο μαζί με το σύνορό του,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{H}} &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\} \\ &= \mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}\,.\end{aligned}$$

Τα σημεία στο σύνορο $\partial\mathcal{H}$ δεν είναι σημεία της υπερβολικής γεωμετρίας, αλλά θα δούμε οτι είναι χρήσιμα στους υπολογισμούς.

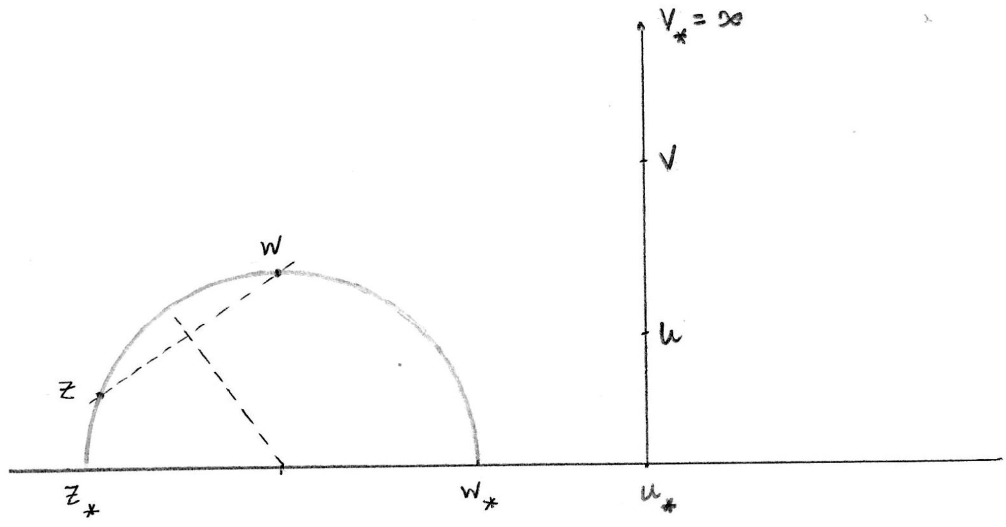
Πρόταση 4.1 *Από δύο διαφορετικά σημεία z, $w \in \mathcal{H}$, περνάει μοναδική υ-ευθεία.*

Απόδειξη. Εάν $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w = \alpha$ τότε ε_α είναι η μοναδική υ-ευθεία που περιέχει τα z και w.

Εάν $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w$, υπάρχει μοναδικός κύκλος με κέντρο $\kappa \in \mathbb{R}$ που περνάει από τα z και w. Μπορούμε να κατασκευάσουμε γεωμετρικά το κέντρο κ ως το σημείο τομής της ευκλείδειας μεσοκαθέτου των σημείων z, w με το $\mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε το κ παρατηρούμε οτι $|z - \kappa| = |w - \kappa|$, και αφού $\kappa = \bar{\kappa}$,

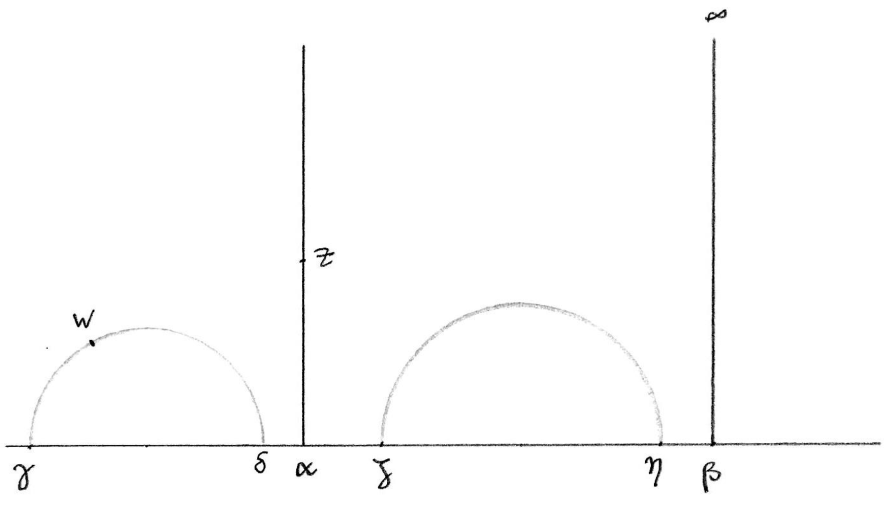
$$\kappa = \frac{z\bar{z} - w\bar{w}}{(z + \bar{z}) - (w + \bar{w})}\,.$$

□



Σχήμα 4.3: Δύο σημεία του $\mathcal{H}$ ορίζουν μία υ-ευθεία.

Γενικότερα, δύο διαφορετικά σημεία στο $\overline{\mathcal{H}}$ ορίζουν μοναδική υ-ευθεία.



Σχήμα 4.4: Δύο σημεία του $\overline{\mathcal{H}}$ ορίζουν μία υ-ευθεία.

Εάν ε είναι η υ-ευθεία που ορίζουν τα σημεία z, $w \in \mathcal{H}$, συμβολίζουμε z^* το πέρας της ημιευθείας της ε από το z που δεν περιέχει το w, και w^* το πέρας της ημιευθείας της ε από το w που δεν περιέχει το z.

Σε κάθε υ-ευθεία μπορούμε να ορίσουμε δύο αντίθετες φορές ή προσανατολισμούς. Οι **προσανατολισμένες ευθείες** που αντιστοιχούν σε μία υ-ευθεία συμβολίζονται με τα διατεταγμένα ζεύγη των περάτων της. Η υ-ευθεία ε_α αντιστοιχεί στις προσανατολισμένες υ-ευθείες (α, ∞) και (∞, α). Η υ-ευθεία $\varepsilon_{\kappa,r}$ αντιστοιχεί στις προσανατολισμένες υ-ευθείες $(\kappa - r, \kappa + r)$ και $(\kappa + r, \kappa - r)$.

Παράλληλες ευθείες

Στην υπερβολική γεωμετρία είναι συχνά χρήσιμο να διακρίνουμε τις υ-ευθείες που δεν έχουν κοινά σημεία στο $\mathcal{H}$, τις ‘‘παράλληλες’’ ευθείες, σε δύο κατηγορίες.

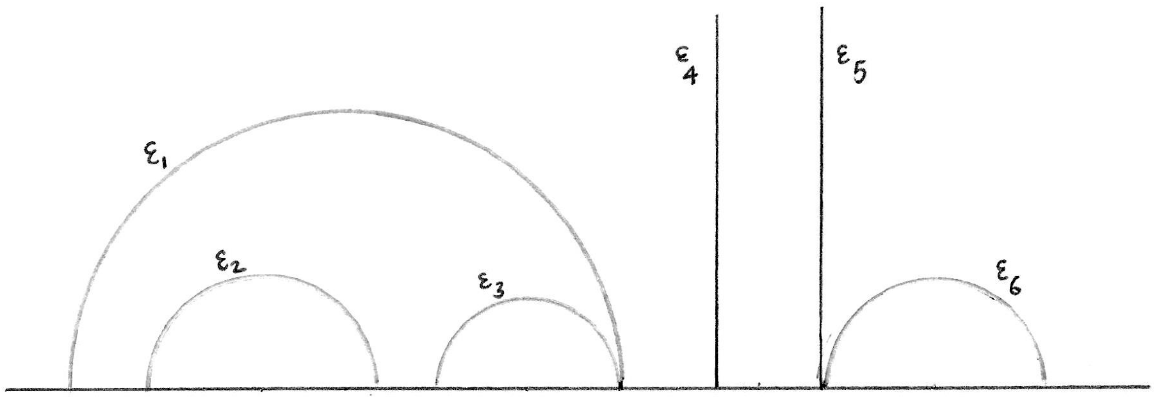
Δύο υ-ευθείες λέγονται **παράλληλες** όταν δεν έχουν κοινά σημεία στο $\mathcal{H}$ και έχουν ένα κοινό πέρας.

Δύο υ-ευθείες λέγονται **υπερπαράλληλες** όταν δεν έχουν κοινά σημεία στο $\overline{\mathcal{H}}$.

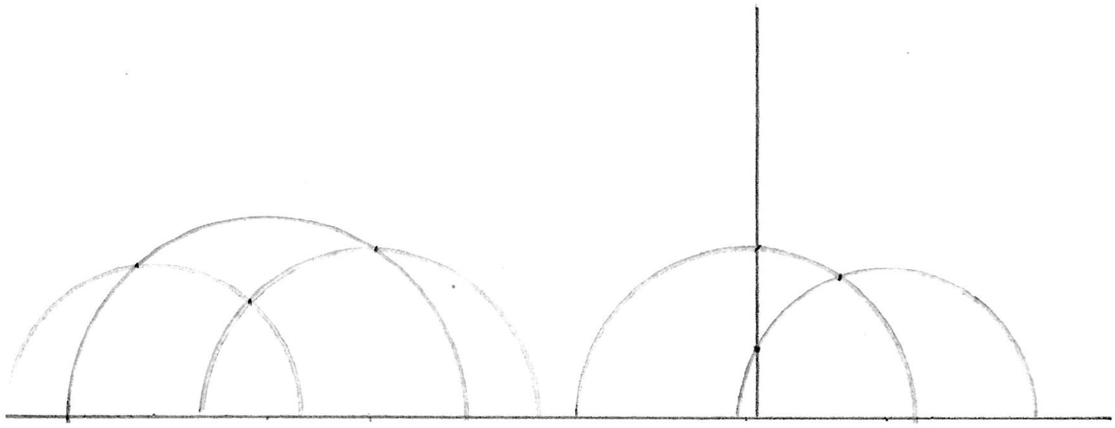
Υπερβολικά σχήματα

Ένα υπερβολικό σχήμα είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Θα ορίσουμε κάποια σχήματα που εμφανίζονται στη μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας.

Τρία σημεία του $\mathcal{H}$ και οι τρεις υ-ευθείες που διέρχονται από αυτά ορίζουν ένα **υπερβολικό τρίγωνο**.



Σχήμα 4.5: Παράλληλες και υπερπαράλληλες ευθείες στο $\mathcal{H}$.

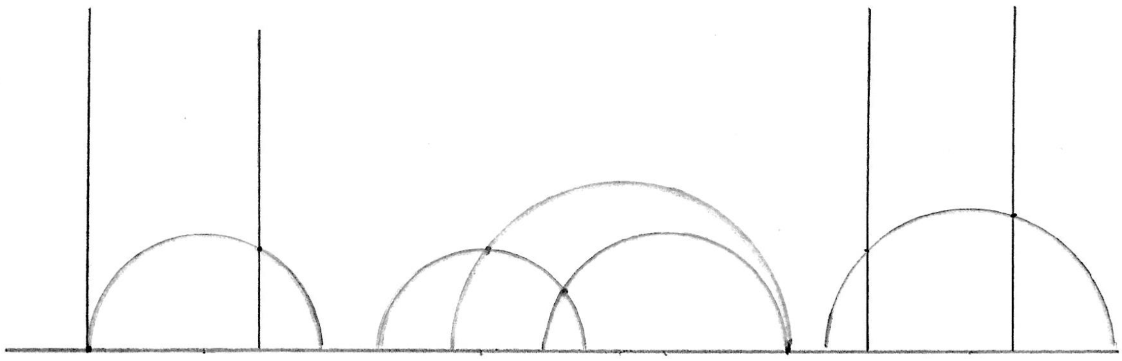


Σχήμα 4.6: Υπερβολικά τρίγωνα.

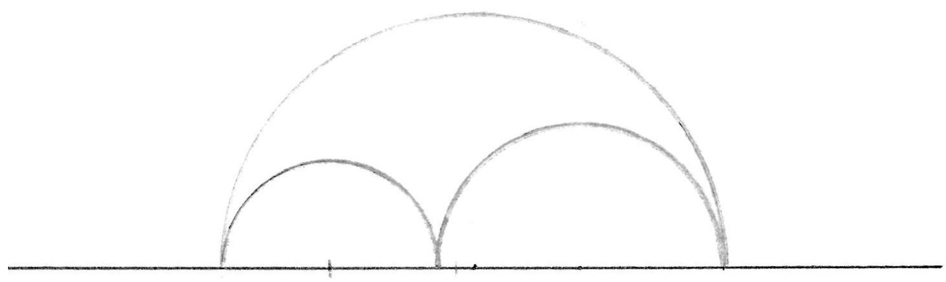
Θα θεωρήσουμε επίσης **ιδεατά (υπερβολικά) τρίγωνα**, με μία, δύο ή τρείς κορυφές στο $\partial\mathcal{H}$.

Ένας **υπερβολικός κύκλος** είναι ένας ευκλείδειος κύκλος που περιέχεται στο $\mathcal{H}$. Θα δούμε οτι ένας υπερβολικός κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του $\mathcal{H}$ που απέχουν σταθερή υπερβολική απόσταση από ένα σημείο, που όμως είναι διαφορετικό από το ευκλείδειο κέντρο του κύκλου.

Ένας **ορίκυκλος** είναι ένας ευκλείδειος κύκλος στο $\overline{\mathcal{H}}$ που εφάπτεται στο $\partial\mathcal{H}$. Ειδική περίπτωση ορίκυκλου είναι οι ευθείες $\{z \in \mathcal{H} : \operatorname{Im} z = \lambda\}$, που εφάπτονται στο ∞.



Σχήμα 4.7: Ιδεατά υπερβολικά τρίγωνα.



Σχήμα 4.8: Ιδεατό υπερβολικό τρίγωνο, με τρεις κορυφές στο $\partial\mathcal{H}$.

Ένας **υπέρκυκλος** είναι το τόξο ενός κύκλου με κέντρο $z_0 \notin \mathbb{R}$ που περιέχεται στο $\mathcal{H}$. Ειδική περίπτωση υπέρκυκλου είναι και οι ημιευθείες που περιέχονται στο $\mathcal{H}$, ευθειών που δεν είναι κάθετες στο $\partial\mathcal{H}$.

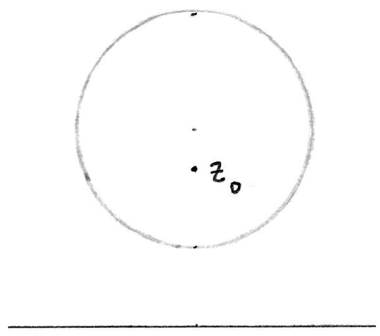
Μετασχηματισμοί της υπερβολικής γεωμετρίας.

Οι μετασχηματισμοί της υπερβολικής γεωμετρίας, ή **υπερβολικοί μετασχηματισμοί** είναι απεικονίσεις $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ της μορφής

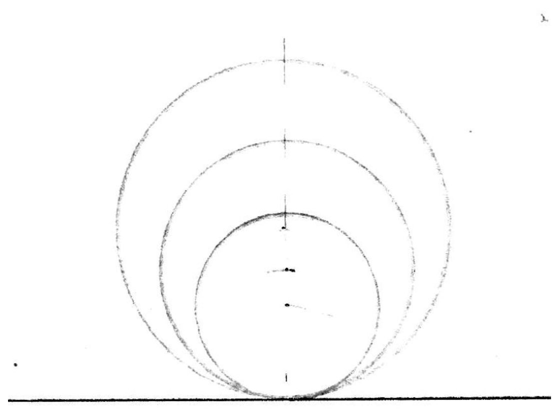
$$\text{α}')\quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{ή} \qquad \text{β}')\quad f(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z}+d}\,,$$

όπου a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc > 0$.

Παράδειγμα 4.1



Σχήμα 4.9: Υπερβολικός κύκλος.



Σχήμα 4.10: Ορίκυκλοι στο υπερβολικό επίπεδο.

α′. $f(z) = 2z = \dfrac{2z+0}{0z+1}$,

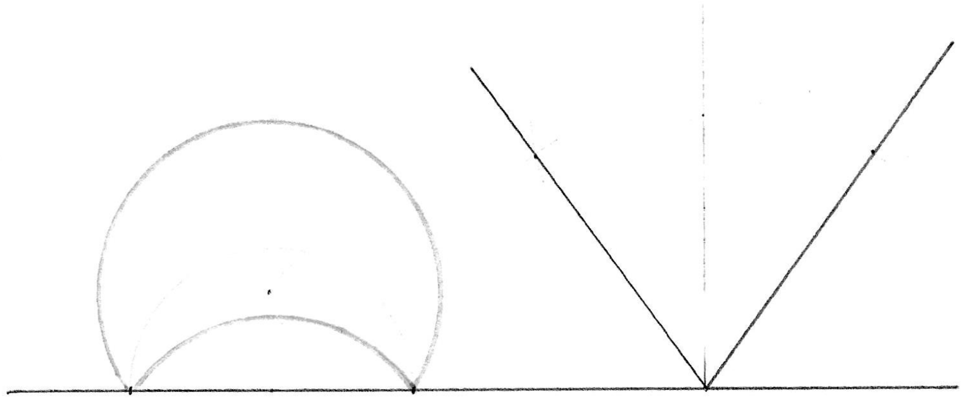
β′. $f(z) = -\dfrac{1}{z} = \dfrac{0z-1}{1z+0}$,

γ′. $f(z) = 3z+2 = \dfrac{3z+2}{0z+1}$,

δ′. $f(z) = -\dfrac{1}{3z+2} = \dfrac{0z-1}{3z+2}$.

Μπορούμε πάντα να υποθέσουμε οτι $ad - bc = 1$, αρκεί να διαιρέσουμε όλους τους συντελεστές με $\sqrt{ad-bc}$.

Άσκηση 4.1 Ελέγξτε οτι απεικονίσεις f της μορφής (α′) ή της μορφής (β′) είναι



Σχήμα 4.11: Υπέρκυκλοι στο υπερβολικό επίπεδο.

αμφιμονοσήμαντες, και οτι εάν $\mathrm{Im}\, z > 0$, τότε $\mathrm{Im}\, f(z) > 0$.

Οι μετασχηματισμοί της μορφής (α΄) διατηρούν τον προσανατολισμό του υπερβολικού επιπέδου, και ονομάζονται **μετασχηματισμοί Möbius** του υπερβολικού επιπέδου $\mathcal{H}$.

Οι μετασχηματισμοί της μορφής (β΄) αντιστρέφουν τον προσανατολισμό του υπερβολικού επιπέδου.

Οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί επεκτείνονται στο σύνορο $\partial\mathcal{H}$.

- Εάν $\mathrm{Im}\, z = 0$ και $z \neq -\frac{d}{c}$, τότε $\mathrm{Im}\, f(z) = 0$,
- Εάν $z = -\frac{d}{c}$, τότε $f(z) = \infty$,
- Εάν $z = \infty$, τότε $f(z) = \frac{a}{c}$.

Επισημαίνουμε οτι οι μετασχηματισμοί αυτής της μορφής ορίζονται σε όλη τη σφαίρα του Riemann, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, αλλά σε αυτό το μάθημα δεν θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς του $\hat{\mathbb{C}}$.

Θεώρημα 4.2 *Οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.*

Απόδειξη. Πρέπει να ελέγξουμε οτι το σύνολο των υπερβολικών μετασχηματισμών είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων, και οτι περιέχει ουδέτερο στοιχείο και αντίστροφα στοιχεία. Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει για τη σύνθεση οποιωνδήποτε απεικονίσεων.

Θεωρούμε υπερβολικούς μετασχηματισμούς

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{pz+q}{rz+s}\,.$$

Τότε η σύνθεση είναι

$$\begin{aligned} f\circ g(z) &= \frac{a\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right)+b}{c\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right)+d} \\ &= \frac{(ap+br)z+aq+bs}{(cp+dr)z+cq+ds} \\ &= \frac{Az+B}{Cz+D}\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι A, B, C, D είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, εάν $ad-bc>0$ και $ps-qr>0$, ισχύει επίσης $AD-BC>0$, και η σύνθεση δύο υπερβολικών μετασχηματισμών της μορφής (α′) είναι μετασχηματισμός της μορφής (α′).

Παρόμοια ελέγχουμε τις συνθέσεις με τον υπερβολικό μετασχηματισμό $z \longmapsto -\bar{z}$. Βλέπουμε οτι η σύνθεση δύο μετασχηματισμών της μορφής (β′) είναι μετασχηματισμός της μορφής (α′), ενώ η σύνθεση ενός μετασχηματισμού της μορφής (α′) και ενός μετασχηματισμού της μορφής (β′) είναι μετασχηματισμός της μορφής (β′). Άρα το σύνολο όλων των υπερβολικών μετασχηματισμών είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση.

Η ταυτοτική απεικόνιση είναι υπερβολικός μετασχηματισμός, $\mathrm{id}(z) = \frac{1z+0}{0z+1}$.

Η αντίστροφη απεικόνιση του υπερβολικού μετασχηματισμού $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Η αντίστροφη απεικόνιση του υπερβολικού μετασχηματισμού $h(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ είναι $h^{-1}(z) = \frac{d(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z}+a}$.

Άρα το σύνολο των υπερβολικών μετασχηματισμών του $\mathcal{H}$ αποτελεί ομάδα, την οποία συμβολίζουμε $\mathrm{G}_{\mathcal{H}}$. Το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius του $\mathcal{H}$ αποτελεί υποομάδα $\mathrm{Möb}_{\mathcal{H}}$.

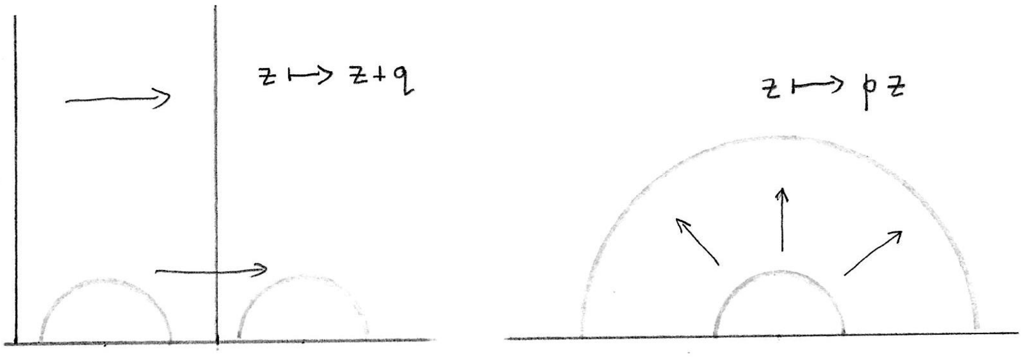
□

Παρατηρούμε επίσης οτι έχουμε έναν ομομορφισμό ομάδων από την ομάδα $\mathrm{SL}(2,\,\mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές και ορίζουσα 1, στην ομάδα $\mathrm{Möb}_{\mathcal{H}}$. Ο πυρήνας του ομομορφισμού είναι $\{\mathrm{I},\,-\mathrm{I}\}$, αφού $\frac{az+b}{cz+d} = z$ για κάθε $z\in\mathcal{H}$ μόνον όταν $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm\mathrm{I}$. Άρα η ομάδα των μετασχηματισμών Möbius είναι ισομορφική με την ‘‘προβολική ειδική γραμμική ομάδα’’,

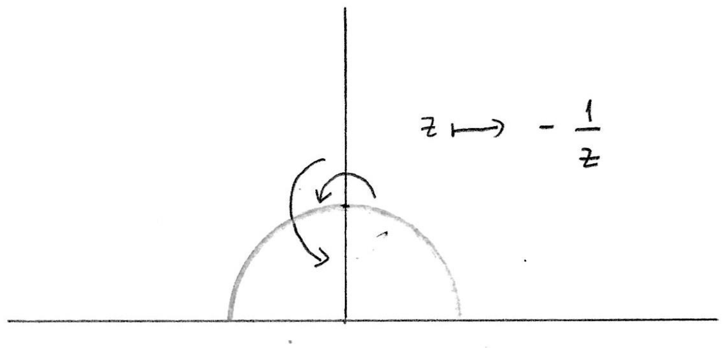
$$\mathrm{Möb}_{\mathcal{H}} \cong \mathrm{SL}(2,\,\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{I}\} = \mathrm{PSL}(2,\,\mathbb{R})\,.$$

Πρόταση 4.3 *Κάθε μετασχηματισμός Möbius εκφράζεται ως σύνθεση απεικονίσεων της μορφής*

$$\begin{aligned} g(z) &= z+q\,, \quad q \in \mathbb{R}\,, \\ h(z) &= pz\,, \quad p \in \mathbb{R}, p>0\,, \\ k(z) &= -\frac{1}{z}\,. \end{aligned}$$



Σχήμα 4.12: Οι μετασχηματισμοί Möbius g και h.



Σχήμα 4.13: Ο μετασχηματισμός Möbius k.

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι g, h, k είναι μετασχηματισμοί Möbius. Άρα οι συνθέσεις τους είναι επίσης μετασχηματισμοί Möbius. Πρέπει να δείξουμε οτι κάθε μετασχηματισμός Möbius εκφράζεται ως σύνθεση τέτοιων απεικονίσεων. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$.

Εάν $c = 0$, τότε $\frac{a}{d} > 0$, και $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ είναι προφανώς σύνθεση απεικονίσεων $g \circ h$, για κατάλληλα p, q.

Εάν $a = 0$, τότε $\frac{c}{b} < 0$, και $f(z) = \frac{-1}{-\frac{c}{b}z - \frac{d}{b}}$ είναι προφανώς σύνθεση απεικονίσεων $k \circ g \circ h$, για κατάλληλα p, q.

Εάν $ac \neq 0$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $c > 0$. Θα βρούμε p, q, r, $s \in \mathbb{R}$, με p, $r > 0$, ώστε f να εκφράζεται ως σύνθεση των $z \mapsto pz + q$ και $z \mapsto \frac{-1}{rz+s}$, δηλαδή

$$\frac{az+b}{cz+d} = p\left(\frac{-1}{rz+s}\right) + q\,.$$

Πράγματι, $p\left(\frac{-1}{rz+s}\right) + q = \frac{-p+qrz+qs}{rz+s}$, άρα αρκεί να θέσουμε $r = c$, $s = d$, $q = \frac{a}{c}$ και $qs - p = b$, δηλαδή $p = \frac{ad}{c} - b = \frac{1+bc}{c} - b = \frac{1}{c}$.

□

Ένας υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό είναι σύνθεση ενός μετασχηματισμού Möbius με την απεικόνιση $j(z) = -\bar{z}$. Άρα κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως σύνθεση των απεικονίσεων g, h, k και j.

Πρόταση 4.4 *Υπερβολικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν υ-ευθείες σε υ-ευθείες.*

Απόδειξη. Αφού κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως σύνθεση των απεικονίσεων g, h, k και j, αρκεί να ελέγξουμε οτι αυτοί οι μετασχηματισμοί απεικονίζουν υ-ευθείες σε υ-ευθείες. Αυτό είναι προφανές για τις απεικονίσεις g, h και j.

Θα δείξουμε οτι η εικόνα μίας υ-ευθείας από την απεικόνιση k είναι μία υ-ευθεία. Θεωρούμε την υ-ευθεία $\varepsilon_{\kappa,r} = \{z \in \mathcal{H} : |z - \kappa| = r\}$. Η εικόνα της από την απεικόνιση $k(z) = -\frac{1}{z}$ είναι το σύνολο

$$\left\{w \in \mathcal{H} : w = -\frac{1}{z},\ |z-\kappa| = r\right\} = \left\{w \in \mathcal{H} : \left|-\frac{1}{w} - \kappa\right| = r\right\}.$$

Δηλαδή, τα σημεία της εικόνας $k(\varepsilon_{\kappa,r})$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{w} - \kappa\right)\left(-\frac{1}{\bar{w}} - \kappa\right) &= r^2 \\ \text{ή} \qquad \frac{1 + \kappa w + \kappa\bar{w}}{w\bar{w}} &= r^2 - \kappa^2\end{aligned}$$

Εάν $r^2 - \kappa^2 \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $w\bar{w} = \frac{1+\kappa w+\kappa\bar{w}}{r^2-\kappa^2}$ και τελικά

$$\left(w - \frac{\kappa}{r^2-\kappa^2}\right)\left(\bar{w} - \frac{\kappa}{r^2-\kappa^2}\right) = \frac{r^2}{(r^2-\kappa^2)^2}\,,$$

δηλαδή παριστάνει την υ-ευθεία $\varepsilon_{\lambda,s}$, με $\lambda = \frac{\kappa}{r^2-\kappa^2}$ και $s = \frac{r}{r^2-\kappa^2}$.

Εάν $r^2-\kappa^2=0$, δηλαδή εάν ένα από τα πέρατα της $\varepsilon_{\kappa,r}$ είναι το 0, η εξίσωση γίνεται $1+\kappa(w+\bar{w})=0$ και παριστάνει την υ-ευθεία ε_α, με $\alpha=-\frac{1}{2\kappa}$.

Παρόμοια για υ-ευθείες της μορφής $\varepsilon_\alpha=\{z\in\mathcal{H}:\ \mathrm{Re}\, z=\alpha\}$, εάν $\alpha\neq 0$ η υ-ευθεία ε_α απεικονίζεται στην υ-ευθεία $\varepsilon_{\lambda,s}$, με $\lambda=-\frac{1}{2\alpha}$ και $s=\left|\frac{1}{2\alpha}\right|$.

Τέλος η υ-ευθεία ε_0 απεικονίζεται στον εαυτό της (με την αντίθετη φορά).

Προσπαθήστε να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες των υπολογισμών. Εάν χρειαστεί ανατρέξτε στις σημειώσεις ‘‘Επίπεδο και Χώρος’’, σελ.43.

□

Παράδειγμα 4.2 Ο μετασχηματισμός Möbius $f(z)=az+b$ απεικονίζει την υ-ευθεία $\varepsilon_{0,1}$ στην υ-ευθεία $\varepsilon_{b,a}$, και ειδικότερα την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(-1,\,1)$ στην $(b-a,\,b+a)$. Επίσης απεικονίζει την $(\alpha,\,\infty)$ στην $(a\alpha+b,\,\infty)$.

Παράδειγμα 4.3 Θα βρούμε ένα μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0,\,\infty)$, στην προσανατολισμένη υ-ευθεία $(\lambda,\,\mu)$. Θέλουμε $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ τέτοιο ώστε $f(0)=\lambda$ και $f(\infty)=\mu$ και $ad-bc=1$. Άρα $b=d\lambda$, $a=c\mu$ και $cd=\frac{1}{\mu-\lambda}$. Μπορούμε να θέσουμε $c=1$, $d=\frac{1}{\mu-\lambda}$, $a=\mu$ και $b=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

Για παράδειγμα, ένας μετασχηματισμός Möbius f που απεικονίζει την υ-ευθεία $(0,\,\infty)$, στην υ-ευθεία $(2,\,4)$ έχει συντελεστές

$$c=1,\quad d=\frac{1}{2},\quad a=4,\quad b=1\quad \text{και}\quad f(z)=\frac{4z+1}{z+\frac{1}{2}}\,.$$

Ένας μετασχηματισμός Möbius g που απεικονίζει την υ-ευθεία $(0,\,\infty)$ στην υ-ευθεία $(1,\,-1)$ έχει συντελεστές

$$c=1,\quad d=\frac{1}{-2},\quad a=-1,\quad b=\frac{1}{-2}\quad \text{και}\quad g(z)=\frac{-z-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\,.$$

Άρα ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(2,\,4)$ στην προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1,\,-1)$ είναι ο

$$g\circ f^{-1}(z)=\frac{0z-1}{1z-3}=\frac{1}{3-z}\,.$$

Παράδειγμα 4.4 Γεωμετρικά μπορούμε να συνθέσουμε το μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την $(0,\,\infty)$ στην $(\lambda,\,\mu)$ από τους ακόλουθους μετασχηματισμούς

α΄. Ευκλείδεια μεταφορά κατά 1, $z\mapsto z+1$, ώστε η $(0,\,\infty)$ να απεικονισθεί στην $(1,\,\infty)$.

β΄. Το μετασχηματισμό $z\mapsto -\frac{1}{z}$, ώστε η $(1,\,\infty)$ να απεικονισθεί στην $(-1,\,0)$.

γ'. Ευκλείδεια διαστολή κατά $|\lambda - \mu|$, $z \mapsto z + 1$, ώστε η $(-1,\, 0)$ να απεικονισθεί στην $(-|\lambda - \mu|,\, 0)$.

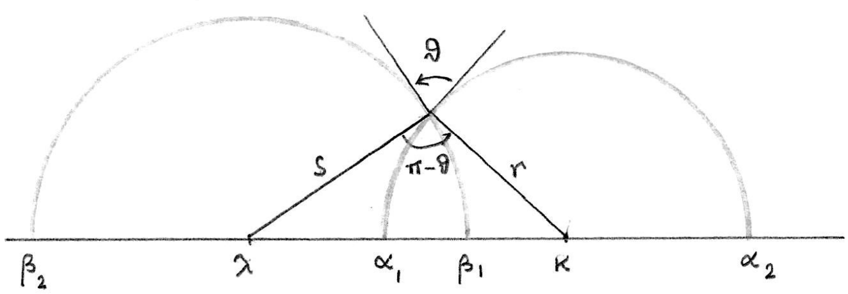
δ'. Μεταφορά κατά $\frac{1}{2}(\lambda+\mu+|\lambda-\mu|$, $z \mapsto z+\frac{1}{2}(\lambda+\mu+|\lambda-\mu|$, ώστε η $(-|\lambda-\mu|,\, 0)$ να απεικονισθεί στην $(\lambda,\, \mu)$.

Γωνίες μεταξύ υ-ευθειών.

Δύο προσανατολισμένες υ-ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο $z \in \mathcal{H}$, σχηματίζουν γωνία ϑ, $-\pi < \vartheta < \pi$, ίση με τη γωνία μεταξύ των ευκλείδειων εφαπτομένων τους. Θα δείξουμε οτι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν το μέγεθος των γωνιών.

Πρόταση 4.5 *Θεωρούμε προσανατολισμένες υ-ευθείες $(\alpha_1,\, \alpha_2)$ και $(\beta_1,\, \beta_2)$ που τέμνονται στο $z \in \mathcal{H}$, και η γωνία από την $(\alpha_1,\, \alpha_2)$ στην $(\beta_1,\, \beta_2)$ είναι ϑ.*
Εάν g είναι μετασχηματισμός Möbius, τότε η γωνία από την $(g(\alpha_1),\, g(\alpha_2))$ στην $(g(\beta_1),\, g(\beta_2))$ είναι ϑ.
Εάν h είναι υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε η γωνία από την $(h(\alpha_1),\, h(\alpha_2))$ στην $(h(\beta_1),\, h(\beta_2))$ είναι $-\vartheta$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση των μετασχηματισμών $g(z) = z + q$, $q \in \mathbb{R}$, $h(z) = pz$, $p > 0$, $k(z) = -\frac{1}{z}$ και $j(z) = -\bar{z}$. Είναι προφανές οτι οι μετασχηματισμοί g και h διατηρούν τις γωνίες, ενώ ο j διατηρεί το μέγεθος και αντιστρέφει το πρόσημο της γωνίας. Απομένει να δείξουμε οτι ο k διατηρεί τις γωνίες.



Σχήμα 4.14: Η γωνία μεταξύ δύο υ-ευθειών.

Όταν δύο υ-ευθείες $\varepsilon_{\kappa,r}$ και $\varepsilon_{\lambda,s}$ τέμνονται σε γωνία ϑ, τα κέντρα των ευκλείδειων φορέων των υ-ευθειών και το σημείο τομής σχηματίζουν τρίγωνο με πλευρές $|\lambda - \kappa|$,

r, s και γωνία $\pi - \vartheta$. Σε αυτό το τρίγωνο εφαρμόζουμε τον κανόνα του ημιτόνου

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &= -\cos(\pi-\vartheta) \\ &= \frac{(\lambda-\kappa)^2 - r^2 - s^2}{2rs} \end{aligned}$$

Για τις ευθείες $(\alpha_1,\, \alpha_2)$ και $(\beta_1,\, \beta_2)$, έχουμε

$$\kappa = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \quad \lambda = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}, \quad r = \frac{|\alpha_1-\alpha_2|}{2}, \quad s = \frac{|\beta_1-\beta_2|}{2},$$

ενώ για τις ευθείες $(k(\alpha_1),\, k(\alpha_2))$ και $(k(\beta_1),\, k(\beta_2))$, όπου $k(z) = -\frac{1}{z}$, έχουμε

$$\kappa' = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad \lambda' = -\frac{\beta_1+\beta_2}{2\beta_1\beta_2}, \quad r' = \frac{|\alpha_1-\alpha_2|}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s' = \frac{|\beta_1-\beta_2|}{2\beta_1\beta_2}.$$

Αντικαθιστώντας και υπολογίζοντας βρίσκουμε

$$\frac{(\lambda-\kappa)^2 - r^2 - s^2}{2rs} = \frac{4\alpha_1\alpha_2 + 4\beta_1\beta_2 - 2(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)}{2|\alpha_1-\alpha_2|\,|\beta_1-\beta_2|}$$

και

$$\frac{(\lambda'-\kappa')^2 - r'^2 - s'^2}{2r's'} = \frac{\frac{4}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{4}{\beta_1\beta_2} - 2\frac{(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)}{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}}{\frac{2|\alpha_1-\alpha_2|\,|\beta_1-\beta_2|}{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}},$$

τα οποία είναι ίσα.

□

Μοναδικότητα και σταθερά σημεία.

Θεώρημα 4.6 *Εάν ένας μετασχηματισμός Möbius f αφήνει σταθερά τρία διαφορετικά σημεία $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \overline{\mathcal{H}}$, δηλαδή εάν*

$$f(z_1) = z_1, \qquad f(z_2) = z_2, \qquad f(z_3) = z_3\,,$$

τότε f είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, $f = \mathrm{id}$.

Απόδειξη. Έστω $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Τα σταθερά σημεία του f ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(z) = z, \quad \text{ή} \quad az + b = cz^2 + dz\,,$$

δηλαδή είναι ρίζες του τριωνύμου $p(z) = cz^2 + (d-a)z - b$. Όμως γνωρίζουμε οτι ένα πολυώνυμο βαθμού 2 έχει μία ή δύο ρίζες στο $\mathbb{C}$. Αφού $p(z)$ έχει τουλάχιστον τρείς ρίζες, είναι το μηδενικό πολυώνυμο, και $d - a = b = c = 0$. Άρα $a = d = 1$ και

$f(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z$.

□

Παρατηρούμε οτι ο υπερβολικός μετασχηματισμός $j(z) = -\bar{z}$ αφήνει σταθερά όλα τα σημεία της υ-ευθείας ε_0. Άρα η Πρόταση 4.6 δεν ισχύει για μετασχηματισμούς που δεν διατηρούν τον προσανατολισμό. Εάν $g(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ αφήνει σταθερά τρία διαφορετικά σημεία z_1, z_2, $z_3 \in \overline{\mathcal{H}}$ τα οποία βρίσκονται στην ίδια υ-ευθεία ε (ως σημεία της ευθείας ή ως πέρατα) τότε σύνθεση της g με την ανάκλαση j_ε στην υ-ευθεία ε δίδει ένα μετασχηματισμό Möbius, ο οποίος αφήνει σταθερά τα σημεία z_1, z_2, z_3 και σύμφωνα με την Πρόταση 4.6, $j_\varepsilon \circ g = \mathrm{id}$. Και αφού $j_\varepsilon^{-1} = j_\varepsilon$, έχουμε $g = j_\varepsilon$. Μπορούμε να δείξουμε οτι εάν τα σημεία z_1, z_2, $z_3 \in \overline{\mathcal{H}}$ δεν βρίσκονται στην ίδια υ-ευθεία, τότε δεν υπάρχει υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό και αφήνει τα τρία σημεία σταθερά.

Πρόταση 4.7 *Εάν p, q, $r \in \partial\mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικός υπερβολικός μετασχηματισμός που τα απεικονίζει αντίστοιχα στα 0, 1, ∞.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Για να απεικονίζει τα p, q, $r \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα στα 0, 1, ∞ πρέπει

$$\begin{aligned}
f(p) &= \frac{ap+b}{cp+d} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad b = -ap \\
f(r) &= \frac{ar+b}{cr+d} = \infty, \quad \text{δηλαδή} \quad d = -cr \\
f(q) &= \frac{aq+b}{cq+d} = \frac{a(q-p)}{c(q-r)} = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad a = c\frac{q-r}{q-p}\,.
\end{aligned}$$

Τελικά, $a(q-p) = c(q-r)$, $b(q-p) = -cp(q-r)$ και $d(q-p) = -cr(q-p)$. Για να δίδουν αυτά τα a, b, c, d το ζητούμενο μετασχηματισμό πρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε το c ώστε να ισχύει $ad - bc = 1$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned}
(q-p)^2(ad-bc) &= \begin{vmatrix} c(q-r) & -cp(q-r) \\ c(q-p) & -cr(q-p) \end{vmatrix} \\
&= c^2(q-r)(q-p)(p-r)\,.
\end{aligned}$$

Εάν $(q-r)(q-p)(p-r) > 0$, υπάρχει c τέτοιο ώστε $c^2 = \frac{q-p}{(q-r)(p-r)}$, και συνεπώς $ad - bc = 1$.

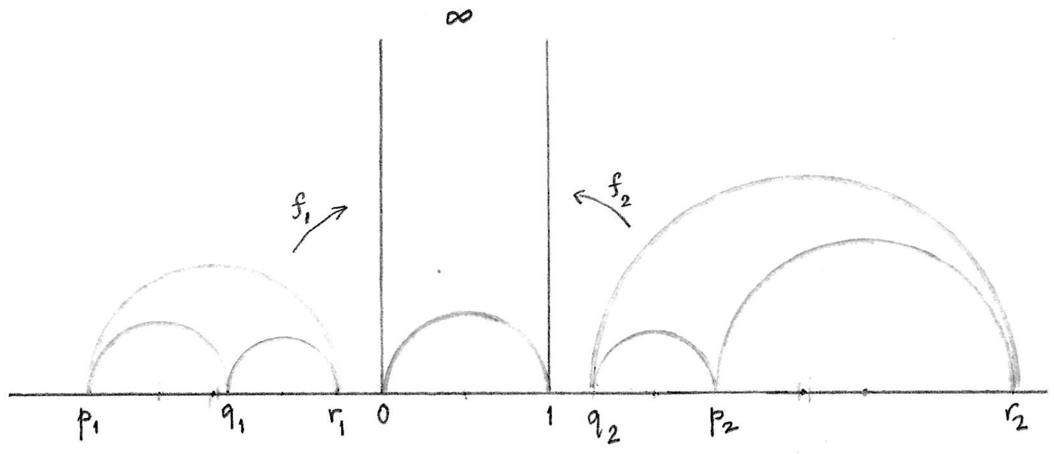
Εάν $(q-r)(q-p)(p-r) < 0$, βρίσκουμε το μετασχηματισμό Möbius f που απεικονίζει τα $-p$, $-q$, $-r$ στα 0, 1, ∞ αντίστοιχα. Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $g(z) = f(-\bar{z})$.

□

Πόρισμα 4.8 *Εάν p_1, q_1, r_1 και p_2, q_2, r_2 είναι τριάδες διαφορετικών (σε κάθε τριάδα) σημείων του $\partial\mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικός υπερβολικός μετασχηματισμός $f : \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}$ τέτοιος ώστε*

$$f(p_1) = p_2, \qquad f(q_1) = q_2, \qquad f(r_1) = r_2 .$$

□



Σχήμα 4.15: Μετασχηματισμός μεταξύ τριάδων σημείων στο $\partial\mathcal{H}$.

Για σημεία στο $\mathcal{H}$ δεν υπάρχει πάντα υπερβολικός μετασχηματισμός που να απεικονίζει 3 οποιαδήποτε σημεία σε 3 άλλα, αφού θα δούμε οτι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του $\mathcal{H}$.

Λέμε οτι η ομάδα $\mathrm{G}_{\mathcal{H}}$ των υπερβολικών μετασχηματισμών δρα **μεταβατικά** και με **μοναδικότητα** στο σύνολο των διατεταγμένων τριάδων διαφορετικών σημείων του $\partial\mathcal{H}$. Αυτό δεν ισχύει για την ομάδα $\mathrm{Möb}_{\mathcal{H}}$, όπως δεν ισχύει και για τριάδες σημείων του $\overline{\mathcal{H}}$.

Ας δούμε ακόμη κάποια παρόμοια αποτελέσματα.

Πρόταση 4.9 *Εάν u, $w \in \mathcal{H}$, υπάρχει μετασχηματισμός Möbius g, όχι μοναδικός, τέτοιος ώστε $g(u) = w$. Δηλαδή, $\mathrm{Möb}_{\mathcal{H}}$ και $\mathrm{G}_{\mathcal{H}}$ δρουν μεταβατικά στο $\mathcal{H}$, αλλά όχι με μοναδικότητα.*

Απόδειξη. Έστω $u = b + \mathrm{i}a$. Τότε $f(z) = az + b$ απεικονίζει το $\mathrm{i} \in \mathcal{H}$ στο u. Παρόμοια, υπάρχει g τέτοιος ώστε $g(\mathrm{i}) = w$, και $g \circ f^{-1}(u) = w$.

□

Πρόταση 4.10 *Εάν (α, β), (γ, δ) είναι προσανατολισμένες υ-ευθείες, υπάρχει μετασχηματισμός Möbius g που απεικονίζει την (α, β) στη (γ, δ), και διατηρεί τον προσανατολισμό της ευθείας.*

Απόδειξη. Εάν $\beta - \alpha > 0$, $g(z) = \frac{\beta z+\alpha}{z+1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius και απεικονίζει την υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην (α, β).

Εάν $\beta - \alpha < 0$, $f(z) = \frac{\beta z-\alpha}{z-1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius και απεικονίζει την υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην (α, β).

Συνθέτοντας τέτοιους μετασχηματισμούς Möbius βρίσκουμε τη ζητούμενη απεικόνιση.

□

Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Möbius ως απεικόνιση $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1\,.$$

Το σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι σταθερό σημείο της f εάν $f(z_0) = z_0$, δηλαδή εάν $az_0 + b = (cz_0 + d)z_0$.

Εάν $c \neq 0$, τα σταθερά σημεία της f στο $\mathbb{C}$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου

$$cz^2 + (d-a)z - b\,.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα, λαμβάνοντας υπ' όψιν οτι $ad - bc = 1$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (d-a)^2 + 4bc \\ &= (a+d)^2 - 4\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς

- εάν $(a+d)^2 > 4$, η f έχει δύο σταθερά σημεία στο $\mathbb{R} \subseteq \partial\mathcal{H}$,
- εάν $(a+d)^2 = 4$, η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathbb{R} \subseteq \partial\mathcal{H}$, και
- εάν $(a+d)^2 < 4$, η f έχει δύο συζυγή σταθερά σημεία στο $\mathbb{C}$, δηλαδή ένα σταθερό σημείο στο $\mathcal{H}$ (και ένα στο κάτω ημιεπίπεδο).

Εάν $c = 0$, από $ad - bc = 1$ έχουμε $d = \frac{1}{a}$, συνεπώς $(a+d)^2 \geq 4$. Σε αυτή την περίπτωση

- εάν $(a+d)^2 = 4$, $a = d = 1$ και $f(z) = z + 1$ που δεν έχει σταθερό σημείο στο $\mathbb{C}$. Έχει μοναδικό σταθερό σημείο το $\infty \in \partial\mathcal{H}$.
- εάν $(a+d)^2 > 4$, τότε $f(z) = a^2 z + ab$ που έχει δύο σταθερά σημεία στο $\partial\mathcal{H}$, τα $z = \frac{ab}{1-a^2}$ και $z = \infty$.

Άσκηση 4.2 Δείξτε οτι για κάθε $a \neq 0$, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 4$, με ισότητα εάν και μόνον εάν $|a| = 1$.

Διατυπώνουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα ως ένα θεώρημα.

Θεώρημα 4.11 *Ένας μετασχηματισμός Möbius $f : \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}$, $f \neq \mathrm{id}$,*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1\,,$$

*α΄. Έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathcal{H}$ εάν και μόνον εάν $(a+d)^2 < 4$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius**.*

*β΄. Έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\partial\mathcal{H}$ εάν και μόνον εάν $(a+d)^2 = 4$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **παραβολικός μετασχηματισμός Möbius**.*

*γ΄. Έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία στο $\partial\mathcal{H}$ εάν και μόνον εάν $(a+d)^2 > 4$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **υπερβολικός μετασχηματισμός Möbius**.*

Παρατηρούμε οτι η ποσότητα που χαρακτηρίζει τον τύπο ενός μετασχηματισμού Möbius είναι το ίχνος, $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$, του πίνακα που παριστάνει το μετασχηματισμό, όταν η ορίζουσα του πίνακα είναι 1, $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = 1$.

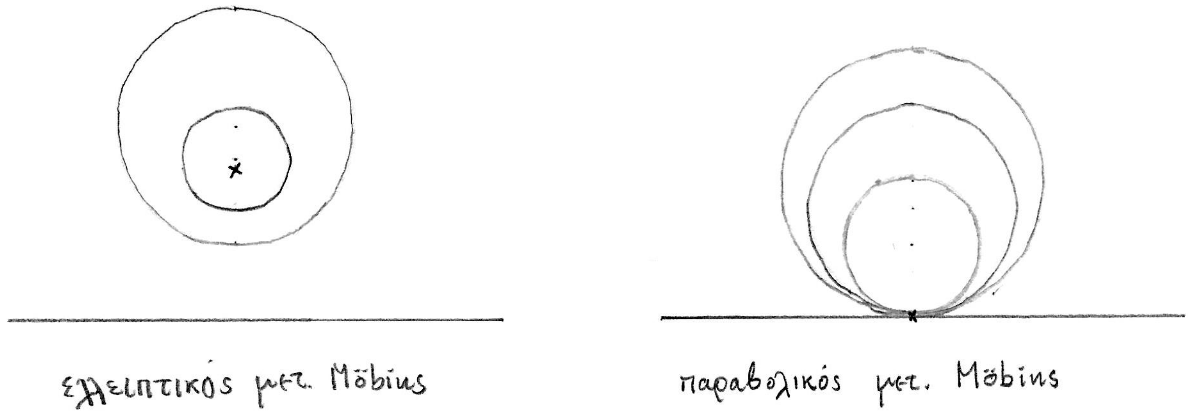
Στην γενική περίπτωση όπου $ad - bc > 0$, ορίζουμε την παράμετρο $\tau(f) = \frac{(a+d)^2}{ad-bc}$. Ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι ελλειπτικός, παραβολικός ή υπερβολικός αντίστοιχα εάν $0 \leq \tau(f) < 4$, $\tau(f) = 4$ και $f \neq \mathrm{id}$, ή $\tau(f) > 4$.

Συζυγείς μετασχηματισμοί.

Θεωρούμε δύο μετασχηματισμούς Möbius, f και h. Ο μετασχηματισμός $h \circ f \circ h^{-1}$ είναι ο **συζυγής** μετασχηματισμός του f μέσω του h. Η συζυγία μετασχηματισμών είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των στοιχείων της ομάδας $\mathrm{M\ddot{o}b}_{\mathcal{H}}$. Η ταυτοτική απεικόνιση αποτελεί μία κλάση συζυγίας. Θα δούμε οτι οι υπόλοιπες κλάσεις συζυγίας χαρακτηρίζονται από την παράμετρο τ.

Παράδειγμα 4.5 Εάν $f(z) = az$ και $h(z) = z + b$,

$$\begin{aligned} g(z) &= h \circ f \circ h^{-1}(z) \\ &= h \circ h(z - b) \end{aligned}$$



Σχήμα 4.16: Ταξινόμηση των μετασχηματισμών Möbius.

$$\begin{aligned} &= h(az - ab) \\ &= az - (a-1)b\,. \end{aligned}$$

Σταθερά σημεία του $h \circ f \circ f^{-1}$ είναι τα b και ∞. Αντίθετα,

$$f \circ h \circ f^{-1} = f \circ h(\frac{z}{a}) = f(\frac{z}{a} + b) = z + ab\,,$$

με μοναδικό σταθερό σημείο το ∞.

Παράδειγμα 4.6 Εάν $f(z) = az$ και $h(z) = \frac{z+1}{-z+1}$, με $h^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$,

$$\begin{aligned} g(z) &= h \circ f \circ h^{-1}(z) \\ &= \frac{a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1}{-a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} \\ &= \frac{(a+1)z - (a-1)}{-(a-1)z + a + 1}\,. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.3 Δείξτε οτι η συζυγία μετασχηματισμών Möbius είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$.

Λήμμα 4.12 *Εάν z_0 είναι σταθερό σημείο του f, τότε $h(z_0)$ είναι σταθερό σημείο του $h \circ f \circ h^{-1}$.*

Απόδειξη. Εάν z_0 είναι σταθερό σημείο του f,

$$h \circ f \circ h^{-1}(h(z_0)) = h \circ f(z_0) = h(z_0)\,.$$

□

Συμπεραίνουμε οτι συζυγείς μετασχηματισμοί έχουν το ίδιο πλήθος σταθερών σημείων, και συνεπώς ανήκουν στον ίδιο τύπο. Αυτό μπορούμε εύκολα να το διαπιστώσουμε και από το την παράμετρο τ. Συζυγείς μετασχηματισμοί αντιστοιχούν σε όμοιους πίνακες στο $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, και αφού

$$\det(ABA^{-1}) = \det B \quad \text{και} \quad \mathrm{tr}\,(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}\, B\,,$$

$\tau(h \circ f \circ h^{-1}) = \tau(f)$. Θα δούμε οτι ισχύει και το αντίστροφο: μετασχηματισμοί Möbius, διαφορετικοί από τον ταυτοτικό, με το ίδιο τ, είναι συζυγείς.

Θεώρημα 4.13 *Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius* $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $f \neq \mathrm{id}$.

α΄. Εάν f είναι παραβολικός, $\tau(f) = 4$, τότε f είναι συζυγής προς τον μετασχηματισμό $z \longmapsto z + 1$ ή τον μετασχηματισμό $z \longmapsto z - 1$

β΄. Εάν f είναι υπερβολικός, $\tau(f) > 4$, τότε f είναι συζυγής προς ένα μετασχηματισμό της μορφής $z \longmapsto a^2 z$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

γ΄. Εάν f είναι ελλειπτικός, $0 \leq \tau(f) < 4$, τότε f είναι συζυγής προς ένα μετασχηματισμό της μορφής $z \longmapsto \frac{\cos\vartheta\, z + \sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z + \cos\vartheta}$, $0 < \vartheta < \pi$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι f είναι παραβολικός μετασχηματισμός Möbius, με σταθερό σημείο $\alpha \in \partial\mathcal{H}$. Θεωρούμε $\beta \in \partial\mathcal{H}$, $\beta \neq \alpha$, και τον μοναδικό μετασχηματισμό Möbius h ο οποίος απεικονίζει τα β, $f(\beta)$, α στα 0, 1, ∞ εάν $(\alpha - \beta)(f(\beta) - \beta)(\alpha - f(\beta)) > 0$, και στα 0, -1, ∞ εάν $(\alpha-\beta)(f(\beta)-\beta)(\alpha-f(\beta)) < 0$. Τότε $g = h \circ f \circ h^{-1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius με μοναδικό σταθερό σημείο το ∞.

Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Αφού $g(\infty) = \infty$, $c = 0$ και $d = \frac{1}{a}$. Άρα $g(z) = a^2 z + ab$. Αφού g δεν έχει άλλο σταθερό σημείο, η εξίσωση $a^2 z + ab = z$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$, και συνεπώς $a^2 = 1$. Αλλά $g(0) = h \circ f(\beta) = \pm 1$, και συνεπώς $b = \pm d$.

Θέτουμε $d = 1$ και έχουμε, ανάλογα με το πρόσημο του $(\alpha-\beta)(f(\beta)-\beta)(\alpha-f(\beta))$, είτε $a = d = b = 1$ ή $a = d = 1$, $b = -1$. Συνεπώς $g(z) = z + 1$ ή $g(z) = z - 1$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε οτι f είναι υπερβολικός μετασχηματισμός Möbius, με σταθερά σημεία α και $\beta \in \partial\mathcal{H}$. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius τέτοιο ώστε $h(\alpha) = 0$ και $h(\beta) = \infty$, και εξετάζουμε το συζυγή μετασχηματισμό $g = h \circ f \circ h^{-1}$, που έχει σταθερά σημεία 0 και ∞.

Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Αφού $g(\infty) = \infty$, $c = 0$ και $d = \frac{1}{a}$. Αφού $g(0) = 0$, $b = 0$. Συμπεραίνουμε οτι $g(z) = a^2 z$, για $a \neq 0$, $a \neq 1$.

Τέλος, υποθέτουμε οτι f είναι ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius, με σταθερό σημείο $z_0 \in \mathcal{H}$. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius τέτοιο ώστε $h(z_0) = \mathrm{i} \in \mathcal{H}$, και εξετάζουμε το συζυγή μετασχηματισμό $g = h \circ f \circ h^{-1}$, που έχει σταθερό σημείο i.

Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Αφού $\frac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d} = \mathrm{i}$, $a\mathrm{i} + b = d\mathrm{i} - c$, δηλαδή $a = d$ και $b = -c$. Αλλά τότε $a^2 + b^2 = 1$, και υπάρχει $\vartheta \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $a = \cos\vartheta$ και $b = \sin\vartheta$. Άρα $g(z) = \frac{\cos\vartheta\, z+\sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z+\cos\vartheta}$.

□

Παράδειγμα 4.7 Εξετάζουμε τον μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Μοναδικό σταθερό σημείο του fείναι το 0. Θέτουμε $\beta = \infty$, οπότε $f(\beta) = 1$ και “$(0-\infty)(1-\infty)(0-1) < 0$”. Θεωρούμε το μετασχηματισμό Möbius h που στέλνει το ∞, 1, 0 στο 0, -1, ∞. Αυτός είναι ο $h(z) = \frac{-1}{z}$, για τον οποίο $h^{-1} = h$. Άρα

$$g(z) = h \circ f \circ h(z) = \frac{-1}{\frac{-\frac{1}{z}}{-\frac{1}{z}+1}} = z - 1\,.$$

Παράδειγμα 4.8 Εξετάζουμε τον μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Τα σταθερά σημεία είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2z + 1 = z^2 + z$, δηλαδή $z = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ένας μετασχηματισμός Möbius h που απεικονίζει το $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ στο 0 και το $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ στο ∞ είναι ο $h(z) = \frac{2z-1-\sqrt{5}}{2z-1+\sqrt{5}}$. Ο μετασχηματισμός Möbius $g = h \circ f \circ h^{-1}$ έχει σταθερά σημεία 0 και ∞, άρα είναι της μορφής $g(z) = az$.

Μπορούμε να αποφύγουμε να υπολογίσουμε το h^{-1} και το $h \circ f \circ h^{-1}$. Παρατηρούμε οτι $h(\infty) = 1$, άρα $h^{-1}(1) = \infty$, και οτι

$$a = g(1) = h \circ f \circ h^{-1}(1) = h \circ f(\infty) = h(2) = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\,.$$

Άρα $g(z) = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\, z$.

Η υπερβολική απόσταση

Ορίζουμε την **υπερβολική απόσταση** μεταξύ σημείων του υπερβολικού επιπέδου και δείχνουμε οτι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί είναι **ισομετρίες** του υπερβολικού επιπέδου.

Πρώτα θεωρούμε δύο σημεία z_0, w_0, με $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re} w_0 = 0$. Για κάθε $a > 0$, $z \mapsto az$ είναι μετασχηματισμός Möbius, άρα η απόσταση $d(z_0, w_0)$ πρέπει να είναι ίση προς την $d(az_0, aw_0)$. Συμπεραίνουμε οτι $d(z_0, w_0)$ πρέπει να είναι συνάρτηση του $\frac{w_0}{z_0}$.

Επίσης η απόσταση κατά μήκος μίας υπερβολικής ευθείας πρέπει να είναι προσθετική, δηλαδή εάν u_0 βρίσκεται μεταξύ των z_0 και w_0 πρέπει να ισχύει

$$d(z_0,\, w_0) = d(z_0,\, u_0) + d(u_0,\, w_0)\,.$$

Άρα θέλουμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(\frac{w_0}{z_0}) = f(\frac{u_0}{z_0}) + f(\frac{w_0}{u_0})\,.$$

Μία προφανής τέτοια συνάρτηση είναι ο λογάριθμος:

$$\log\frac{u_0}{z_0} + \log\frac{w_0}{u_0} = \log\frac{u_0 w_0}{z_0 u_0} = \log\frac{w_0}{z_0}\,.$$

Για να επεκτείνουμε αυτό τον ορισμό σε κάθε ζεύγος σημείων του $\mathcal{H}$, ώστε να είναι καλά ορισμένη η απόσταση, πρέπει να δείξουμε οτι όποιο υπερβολικό μετασχηματισμό και να χρησιμοποιήσουμε που απεικονίζει δύο σημεία $w,\, z \in \mathcal{H}$ σε σημεία $w_0,\, z_0$ με $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re} w_0 = 0$, η τιμή του $\left|\log\frac{w_0}{z_0}\right|$ θα είναι η ίδια.

Υποθέτουμε οτι $z_*,\, w_*$ είναι τα πέρατα της υ-ευθείας που ορίζουν τα $z,\, w$, και θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει το z_* στο 0 και το w_* στο ∞:

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{u - z_*}{u - w_*} \qquad \text{εάν } z_* - w_* > 0 \\ g(u) &= \frac{-u + z_*}{u - w_*} \qquad \text{εάν } z_* - w_* < 0\,. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε οτι $z_* - w_* < 0$. Εάν h είναι οποιοσδήποτε άλλος μετασχηματισμός που απεικονίζει τα $z_*,\, w_*$ στα $0,\, \infty$ αντίστοιχα, $g \circ h^{-1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius με σταθερά σημεία $0,\, \infty$, άρα είναι της μορφής $u \mapsto au$. Αλλά τότε $g(z) = ah(z)$ και $g(w) = ah(w)$, άρα

$$\left|\log\frac{g(w)}{g(z)}\right| = \left|\log\frac{h(w)}{h(z)}\right|\,.$$

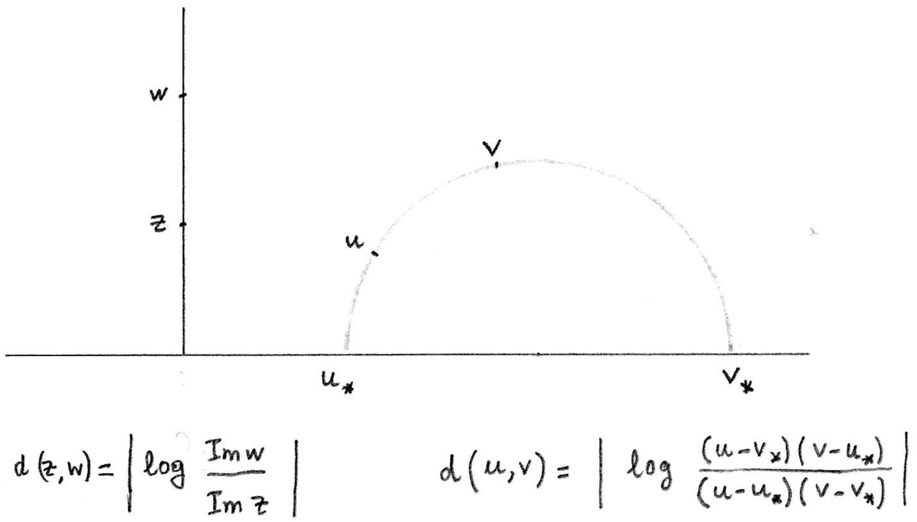
Θέτουμε για κάθε $z,\, w \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $z_* - w_* < 0$,

$$\begin{aligned} d(z,\, w) &= d(g(z),\, g(w)) \\ &= \left|\log\left(\frac{g(w)}{g(z)}\right)\right| \\ &= \left|\log\frac{(z - w_*)(w - z_*)}{(z - z_*)(w - w_*)}\right|\,, \end{aligned}$$

και παρόμοια, εάν $z_* - w_* > 0$,

$$\begin{aligned} d(z,\, w) &= d(f(z),\, f(w)) \\ &= \left|\log\frac{(z - w_*)(w - z_*)}{(z - z_*)(w - w_*)}\right|\,. \end{aligned}$$

Ορισμός. Η **υπερβολική απόσταση** μεταξύ των σημείων $z,\, w \in \mathcal{H}$ είναι $d(z,\, w)$, όπου η συναρτηση $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως:



Σχήμα 4.17: Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο σημείων.

α′. εάν $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w$, και z_*, w_* τα πέρατα της υ-ευθείας από το z στο w,

$$d(z,\, w) = \left| \log \frac{(z - w_*)(w - z_*)}{(z - z_*)(w - w_*)} \right| ,$$

β′. εάν $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$,

$$d(z,\, w) = \left| \log \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z} \right| .$$

Πρόταση 4.14 *Η $d(z,\, w)$ είναι αναλλοίωτη από υπερβολικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή εάν $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ είναι υπερβολικός μετασχηματισμός, $d(f(z),\, f(w)) = d(z,\, w)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε οτι η ισότητα ισχύει για τους μετασχηματισμούς g, h, k, j της Πρότασης 4.3. Αυτό είναι προφανές για τα g και h, και ένας απλός υπολογισμός δείχνει οτι ισχύει για το k.

Για το $j(z) = -\bar{z}$, παρατηρούμε οτι αφού τα z_*, z, w, w_* βρίσκονται στην ίδια υ-ευθεία $(z_*,\, w_*)$, τα $\frac{w - z_*}{w - w_*}$ και $\frac{z - z_*}{z - w_*}$ βρίσκονται στην υ-ευθεία $(0,\, \infty)$, και

$$\frac{j(w) - j(z_*)}{j(w) - j(w_*)} = \frac{-\bar{w} + z_*}{-\bar{w} + w_*} = \overline{\left(\frac{w - z_*}{w - w_*} \right)} = -\frac{w - z_*}{w - w_*}$$

και παρόμοια

$$\frac{j(z)-j(z_*)}{j(z)-j(w_*)} = -\frac{z-z_*}{z-w_*}\,.$$

Άρα $d(j(z,\, j(w)) = d(z,\, w)$.

□

Θεώρημα 4.15 *Η συνάρτηση $d:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι μετρική, δηλαδή*

α΄. $d(z,\, w)\geq 0$ και $d(z,\, w)=0$ εάν και μόνον εάν $z=w$.

β΄. $d(z,\, w)=d(w,\, z)$.

γ΄. $d(z,\, w)=d(z,\, u)+d(u,\, w)$.

Απόδειξη. Τα (α΄) και (β΄) είναι προφανή από τον ορισμό. Θα δείξουμε αργότερα την τριγωνική ανισότητα (γ΄).

□

Στην υπερβολική γεωμετρία εμφανίζονται συχνά οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις,

$$\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,,$$

$$\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}\,,$$

$$\tanh t = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,.$$

Η βασική ταυτότητα της υπερβολικής τριγωνομετρίας είναι

$$\cosh^2 t - sinh^2 t = 1\,.$$

Χρήσιμοι είναι οι κανόνες του αθροίσματος,

$$\cosh(s+t) = \cosh s\cosh t + \sinh s\sinh t\,,$$

$$\sinh(s+t) = \cosh s\sinh t + \sinh s\cosh t\,.$$

Άσκηση 4.4 Βρείτε τους τύπους για $\cosh 2t$, $\sinh 2t$ και αποδείξτε τους τύπους

$$\cosh(t/2) = \sqrt{\frac{\cosh t+1}{2}}\,,\qquad \sinh(t/2) = \sqrt{\frac{\cosh t+1}{2}}\,.$$

Πρόταση 4.16

$$\cosh d(z,\, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}\, z\mathrm{Im}\, w}\,.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι για κάθε μετασχηματισμό Möbius f, $\cosh d(f(z),\, f(w)) = d(z,\, w)$. Πρώτα θα δείξουμε οτι και η δεξιά πλευρά είναι αναλλοίωτη. Παρατηρούμε οτι $\frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}\, z\mathrm{Im}\, w}$ είναι αναλλοίωτο από τους μετασχηματισμούς g, h, k της Πρότασης 4.3. Απομένει να δείξουμε οτι είναι αναλλοίωτο και από τον j:

$$\begin{aligned} \frac{|j(z)-j(w)|^2}{\mathrm{Im}\, j(z)\mathrm{Im}\, j(w)} &= \frac{\left|\frac{-1}{z}-\frac{-1}{w}\right|^2}{\mathrm{Im}\,\frac{-1}{z}\mathrm{Im}\,\frac{-1}{w}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{\bar z}-\frac{1}{\bar w}\right)}{\frac{\mathrm{Im}\, z}{z\bar z}\frac{\mathrm{Im}\, w}{w\bar w}} \\ &= \frac{|z-w|^2}{\mathrm{Im}\, z\mathrm{Im}\, w}\,. \end{aligned}$$

Αφού για κάθε $z,\, w \in \mathcal{H}$ υπάρχει μετασχηματισμός Möbius που τα απεικονίζει στα $\mathrm{i}s$, $\mathrm{i}t$ αντίστοιχα, αρκεί να αποδείξουμε την ισότητα για $z = \mathrm{i}s$, $w = \mathrm{i}t$. Πράγματι,

$$\cosh d(\mathrm{i}s,\, \mathrm{i}t) = \cosh\left|\log\frac{t}{s}\right| = \frac{e^{\log\frac{t}{s}}+e^{-\log\frac{t}{s}}}{2} = \frac{\frac{t}{s}+\frac{s}{t}}{2} = \frac{s^2+t^2}{2st}\,,$$

και

$$1+\frac{|\mathrm{i}s-\mathrm{i}t|^2}{2st} = 1+\frac{(s-t)^2}{2st} = \frac{s^2+t^2}{2st}\,.$$

□

Άλλες εκφράσεις για την υπερβολική απόσταση:

α′. $d(z,\, w) = \log\dfrac{|z-\bar w|+|z-w|}{|z-\bar w|-|z-w|}$,

β′. $\sinh\dfrac{1}{2}d(z,\, w) = \dfrac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}\, z\mathrm{Im}\, w)^{1/2}}$,

γ′. $\cosh\dfrac{1}{2}d(z,\, w) = \dfrac{|z-\bar w|}{2(\mathrm{Im}\, z\mathrm{Im}\, w)^{1/2}}$,

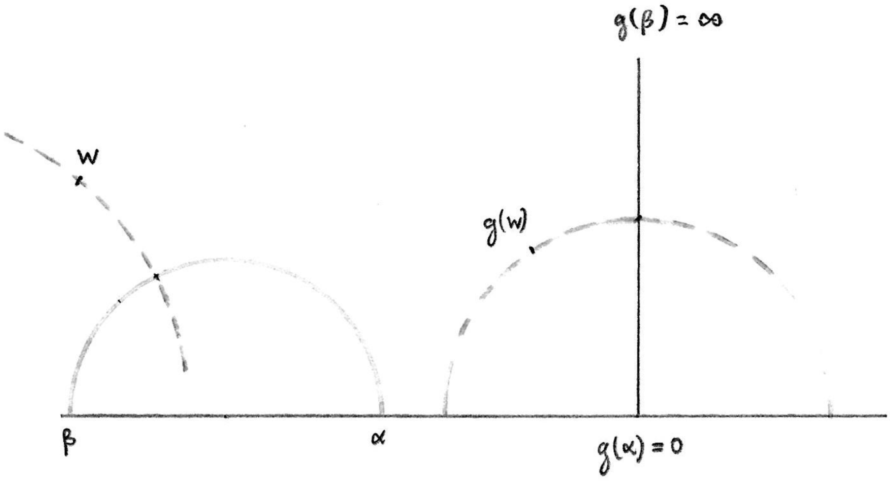
δ′. $\tanh\dfrac{1}{2}d(z,\, w) = \dfrac{|z-w|}{|z-\bar w|}$.

Για να επαληθεύσουμε την (α′) υπολογίζουμε το υπερβολικό συνημίτονο της δεξιάς πλευράς, και βρίσκουμε οτι είναι ίσο με $1+\frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}\, z\mathrm{Im}\, w}$. Για τις άλλες εκφράσεις χρησιμοποιούμε τους τύπους της Άσκησης 4.4.

Θεώρημα 4.17 *Η ομάδα των ισομετριών του υπερβολικού επιπέδου είναι η ομαδα $G_{\mathcal{H}}$. Δηλαδή οι μόνες απεικονίσεις $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ που διατηρούν την απόσταση είναι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί.*

Κάθετος από σημείο προς ευθεία

Θεωρούμε σημείο w του υπερβολικού επιπέδου, υ-ευθεία $(\alpha,\, \beta)$, και υποθέτουμε $\alpha > \beta$, και μετασχηματισμό Möbius g τέτοιο ώστε $g(\alpha) = 0$, $g(\beta) = \infty$, για παράδειγμα τον $g(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Τότε η υ-ευθεία $(\alpha,\, \beta)$ απεικονίζεται από τον g στην $(0,\, \infty)$ και το σημείο w στο $g(w) = \frac{w-\alpha}{w-\beta}$.



Σχήμα 4.18: Κάθετος από σημείο προς ευθεία.

Η υ-ευθεία $(-|g(w)|,\, |g(w)|)$ είναι κάθετος από το $g(w)$ προς την $(0,\, \infty)$. Άρα η υ-ευθεία με πέρατα $g^{-1}(-|g(w)|)$ και $g^{-1}(|g(w)|)$ είναι κάθετος από το w στην $(\alpha,\, \beta)$. Υπολογίζουμε τα πέρατα αυτής της υ-ευθείας: $g^{-1}(z) = \frac{-\beta z+\alpha}{-z+1}$ και

$$g^{-1}(-|g(w)|) = \frac{-\beta\left(-\left|\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right|\right)+\alpha}{\left|\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right|+1} = \frac{\beta|w-\alpha|+\alpha|w-\beta|}{|w-\alpha|+|w-\beta|}\,.$$

Άρα η κάθετος από το σημείο w προς την υ-ευθεία $(\alpha,\, \beta)$ είναι η υ-ευθεία

$$\left(\frac{\beta|w-\alpha|+\alpha|w-\beta|}{|w-\alpha|+|w-\beta|},\, \frac{-\beta|w-\alpha|+\alpha|w-\beta|}{-|w-\alpha|+|w-\beta|}\right)\,.$$

Η απόσταση από το σημείο w στην υ-ευθεία ε είναι

$$d(w,\, \varepsilon) = \inf\{d(w,\, z) :\, z \in \varepsilon\}\,.$$

Θα δείξουμε οτι αυτό είναι ίσο με το μήκος της καθέτου από το w στην ε. Εάν ε είναι η υ-ευθεία $(0,\, \infty)$ και $w = u+\mathrm{i}v$, $d(w,\, \varepsilon) = \inf\{d(w,\, \mathrm{i}t) :\, t > 0\}$. Αφού η $\cosh t$

είναι αύξουσα για $t > 0$, αρκεί να βρούμε το $\inf\{\cosh d(w, \mathrm{i}t) : t > 0\}$. Υπολογίζουμε

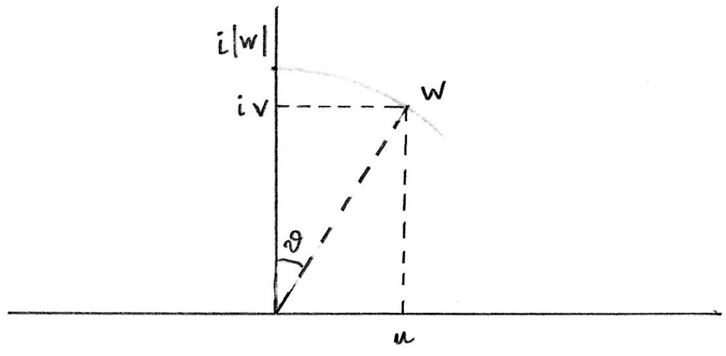
$$\cosh d(w, \mathrm{i}t) = \frac{|w|}{2v}\left(\frac{|w|}{t} + \frac{t}{|w|}\right).$$

Αλλά $(a + 1/a) \geq 2$ για κάθε $a > 0$, και συνεπώς $\cosh d(w, \mathrm{i}t) \geq \frac{|w|}{v}$ με ισότητα ακριβώς όταν $t = |w|$, δηλαδή όταν $\mathrm{i}t$ βρίσκεται στην κάθετο από το w.

Εάν $\cos\vartheta = \frac{v}{|w|}$, έχουμε

$$\cosh d(w, \varepsilon) = \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Παρατηρούμε οτι τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση από την υ-ευθεία $(0, \infty)$ βρίσκονται στους υπέρκυκλους $\{x + \mathrm{i}y \in \mathcal{H} : \frac{x}{y} \text{ σταθερό}\}$.



Σχήμα 4.19: Απόσταση σημείου από ευθεία.

Άσκηση 4.5 Δείξτε οτι με τον παραπάνω συμβολισμό,

$$\sinh d(w, \varepsilon) = \tan\vartheta \quad \text{και} \quad \tanh d(w, \varepsilon) = \sin\vartheta.$$

Αναλλοίωτα σύνολα

Θα εξετάσουμε τα σύνολα που παραμένουν αναλλοίωτα από ένα μετασχηματισμό Möbius.

Εάν f είναι ελλειπτικός μετασχηματισμός, με σταθερό σημείο $z_0 \in \mathcal{H}$, ο f διατηρεί αμετάβλητη την απόσταση μεταξύ του z_0 και άλλων σημείων του $\mathcal{H}$. Συνεπώς ο f απεικονίζει κάθε υπερβολικό κύκλο με κέντρο z_0 στον εαυτό του.

Θα προσδιορίσουμε τον υπερβολικό κύκλο C με υπερβολικό κέντρο το σημείο $\mathrm{i} \in \mathcal{H}$ και ακτίνα $r > 0$. Εάν f_ϑ, για $0 < \vartheta < \pi$, είναι ο ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius

$$f_\vartheta(z) = \frac{\cos\vartheta\, z + \sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z + \cos\vartheta}\,,$$

ο οποίος έχει σταθερό σημείο i, τότε για κάθε ϑ η απόσταση του σημείου $f_\vartheta(e^r\mathrm{i})$ από το i είναι ίση με $d(\mathrm{i},\, e^r\mathrm{i}) = |\log e^r| = r$. Δηλαδή όλα τα σημεία $f_\vartheta(e^r\mathrm{i})$, για $0 < \vartheta < \pi$, ανήκουν στον υπερβολικό κύκλο C.

Αντίστροφα, εάν $d(z,\, \mathrm{i}) = r$ και η υπερβολική ημιευθεία από το i στο z σχηματίζει γωνία φ με την ημιευθεία από το i στο ∞, τέτοια ώστε $0 < \varphi < 2\pi$, μπορούμε να δείξουμε οτι $z = f_\vartheta(e^r\mathrm{i})$ για $\vartheta = \varphi/2$. Συμπεραίνουμε οτι $C = \{\Psi_\vartheta(e^r\mathrm{i}) : 0 \leq \vartheta < \pi\}$.

Άσκηση 4.6 Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ της υ-ευθείας $(0,\, \infty)$ και της εικόνας της από τον ελλειπτικό μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{\cos\vartheta\, z + \sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z + \cos\vartheta}\,.$$

Λήμμα 4.18 *Ο υπερβολικός κύκλος C με υπερβολικό κέντρο το σημείο $\mathrm{i} \in \mathcal{H}$ και ακτίνα $r > 0$ συμπίπτει με τον ευκλείδειο κύκλο με διάμετρο το διάστημα $[e^r\mathrm{i},\, e^{-r}\mathrm{i}]$, δηλαδή*

$$C = \{z \in \mathcal{H} : |z - \mathrm{i}\cosh r| = \sinh r\}\,.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε την ευκλείδεια απόσταση από το $f_\vartheta(e^r\mathrm{i})$ στο $\mathrm{i}\cosh r$, και δείχνουμε οτι είναι $\sinh r$. Παρατηρούμε οτι $e^r = \cosh r + \sinh r$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
f_\vartheta(e^r\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{i}\,\cos\vartheta(\cosh r + \sinh r) + \sin\vartheta}{-\mathrm{i}\,\sin\vartheta(\cosh r + \sinh r) + \cos\vartheta}\,,\\
f_\vartheta(e^r\mathrm{i}) - \mathrm{i}\cosh r &= \frac{-\sin\vartheta(\cosh r\sinh r + \sinh^2 r) + \mathrm{i}\cos\vartheta\sinh r}{\cos\vartheta - \sin\vartheta(\sinh r + \cosh r)\mathrm{i}}\,,\\
|f_\vartheta(e^r\mathrm{i}) - \mathrm{i}\cosh r|^2 &= \frac{\sin^2\vartheta\sinh^2 r(\cosh r + \sinh r)^2 + \cos^2\vartheta\sinh^2 r}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta(\sinh r + \cosh r)^2}\,,
\end{aligned}$$

και καταλήγουμε οτι $|f_\vartheta(e^r\mathrm{i}) - \mathrm{i}\cosh r| = \sinh r$.

□

Εάν f είναι παραβολικός μετασχηματισμός, τότε f είναι συζυγής προς τον $z \mapsto z+1$, ο οποίος αφήνει αμετάβλητους τους ορίκυκλους $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = a\}$ για $a > 0$. Έπεται οτι ο μετασχηματισμός f αφήνει αμετάβλητους τους ορίκυκλους που έχουν πέρας στο σταθερό του σημείο. Αυτοί είναι οι ευκλείδειοι κύκλοι που εφάπτονται στο $\partial\mathcal{H}$ στο σταθερό σημείο του f.

Εάν ο μετασχηματισμός Möbius f είναι υπερβολικός, ο f είναι συζυγής προς τον $h_d : z \mapsto e^d z$, που έχει σταθερά σημεία τα 0 και ∞. Ο h_d αφήνει αμετάβλητη την υ-ευθεία $(0, \infty)$. Κάθε σημείο της μετατοπίζεται σταθερή απόσταση d, αφού $d(z, h_d(z)) = |\log(e^d z/z)| = d$. Ο h_d αφήνει επίσης αμετάβλητους τους υπέρκυκλους με πέρατα 0 και ∞

$$\sigma_\vartheta = \{te^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\vartheta)} : t > 0\}\,, \text{ για } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\,, \vartheta \neq 0\,.$$

Οι υπέρκυκλοι σ_ϑ και $\sigma_{-\vartheta}$ είναι το σύνολο των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση a από την υ-ευθεία $(0, \infty)$ όπου $\cosh a = \frac{1}{\cos\vartheta}$.

Ο συζυγής μετασχηματισμός $f = g \circ h_d \circ g^{-1}$ έχει σταθερά σημεία $\alpha = g(0)$ και $\beta = g(\infty)$, αφήνει αμετάβλητη την υ-ευθεία (α, β) και μετατοπίζει κάθε της σημείο σταθερή απόσταση d. Επίσης αφήνει αμετάβλητους τους υπέρκυκλους με πέρατα α και β. Ένας τέτοιος υπέρκυκλος $g(\sigma_\vartheta)$ είναι το τόξο που περιέχεται στο $\mathcal{H}$ ενός ευκλείδειου κύκλου που περνάει από τα σημεία α και β και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ με το $\partial\mathcal{H}$. Οι υπέρκυκλοι $g(\sigma_\vartheta)$ και $g(\sigma_{-\vartheta})$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση a, $\cosh a = \frac{1}{\cos\vartheta}$, από την υ-ευθεία (α, β).

Η γωνία παραλληλισμού

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία η παράλληλος προς την ευθεία ε από το σημείο A είναι μοναδική, και είναι η κάθετος προς την κάθετο από το A προς την ε. Στην υπερβολική γεωμετρία μια παράλληλος από το σημείο w προς την υ-ευθεία ε δεν είναι μοναδική, και δεν σχηματίζει ορθή γωνία με την κάθετο από το w προς την ε.

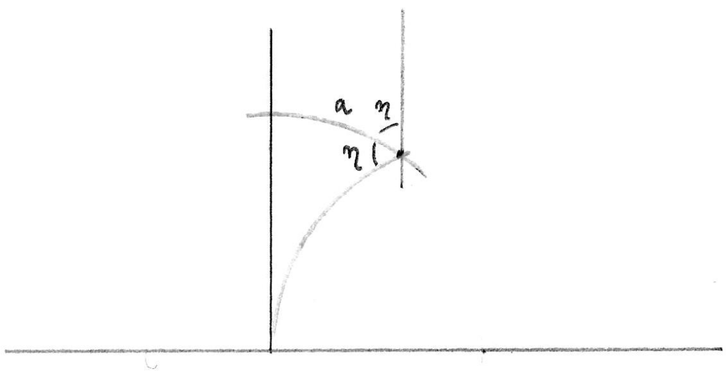
Ορισμός. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ μίας παραλλήλου από το σημείο w προς την υ-ευθεία ε και της καθέτου από το w προς την ε ονομάζεται **γωνία παραλληλισμού**.

Πρόταση 4.19 *Η γωνία παραλληλισμού η εξαρτάται μόνον από την απόσταση a από το σημείο w προς την υ-ευθεία ε, και δίδεται από τη σχέση*

$$\cosh a \sin\eta = 1\,.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μία ισομετρία για να μεταφέρουμε την υ-ευθεία ε στην $(0, \infty)$ και το σημείο w σε ένα σημείο της μορφής $e^{\mathrm{i}\eta}$, για $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Η κάθετος από το z προς την $(0, \infty)$ είναι η υ-ευθεία $(1, -1)$ και μία παράλληλος είναι η ημιευθεία $[z, \infty)$, η οποία σχηματίζει γωνία η με την κάθετο. Εάν η απόσταση του σημείου z από την υ-ευθεία $(0, \infty)$ είναι a,

$$\cosh a = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - \eta)} = \frac{1}{\sin\eta}\,.$$



Σχήμα 4.20: Γωνία παραλληλισμού.

□

Τρίγωνα στην υπερβολική γεωμετρία

Θα βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών υπερβολικών τριγώνων. Θεωρούμε υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές A, B, C, γωνίες α, β, γ και μήκη των απέναντι πλευρών a, b, c αντίστοιχα.

Τρίγωνα με μία ιδεατή κορυφή

Η σχέση της γωνίας παραλληλισμού δίδει τη σχέση μεταξύ των στοιχείων ενός ορθογωνίου τριγώνου με μία ιδεατή κορυφή. Εάν $\gamma = \pi/2$ και $B \in \partial\mathcal{H}$,

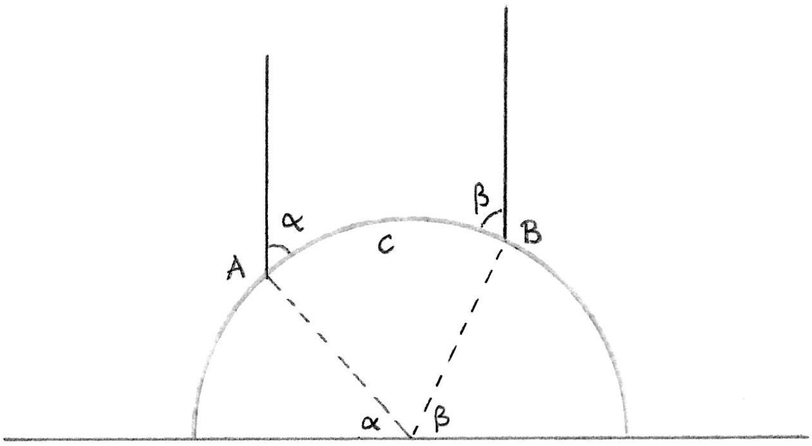
$$\cosh b \sin\alpha = 1\,.$$

Για το γενικό τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή, έχουμε το μήκος της μη άπειρης πλευράς b και τις γωνίες α και γ.

Πρόταση 4.20 *Σε ένα τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή B, μήκος της μη άπειρης πλευράς b και γωνίες α και γ,*

α΄. $\cosh b sin\gamma \sin\alpha = 1 + \cos\gamma\cos\alpha$,

β΄. $\sinh b \sin\gamma\sin\alpha = \cos\gamma + \cos\alpha$.



Σχήμα 4.21: Τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν μετασχηματισμό Möbius για να φέρουμε τις κορυφές A και C στα σημεία $A = e^{\mathrm{i}\vartheta}$ και $C = e^{\mathrm{i}\varphi}$, με $0 < \vartheta < \varphi < \pi$, και την ιδεατή κορυφή στο σημείο $B = \infty$. Τότε $\alpha = \vartheta$ και $\gamma = \pi - \varphi$, $\operatorname{Im} A = \sin\vartheta$, $\operatorname{Im} C = \sin\varphi$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
\cosh b &= \cosh d(e^{\mathrm{i}\vartheta}, e^{\mathrm{i}\varphi}) \\
&= 1 + \frac{|e^{\mathrm{i}\vartheta} - e^{\mathrm{i}\varphi}|^2}{2\sin\vartheta\sin\varphi} \\
&= 1 + \frac{\cos\vartheta - \cos\varphi)^2 + (\sin\vartheta - \sin\varphi)^2}{2\sin\vartheta\sin\varphi} \\
&= \frac{1 - \cos\vartheta\cos\varphi}{\sin\vartheta\sin\varphi} \\
&= \frac{1 + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}\,.
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε την (β′), αντικαθιστούμε την (α′) στην ταυτότητα $\sinh^2 b = \cosh^2 b - 1$, και έχουμε

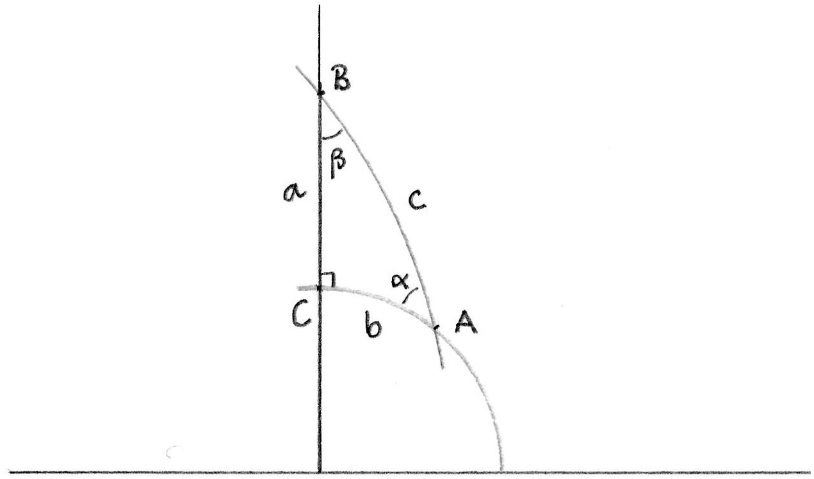
$$\begin{aligned}
\sinh^2 b &= \frac{(1 + \cos\gamma\cos\alpha)^2 - \sin^2\gamma\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma\sin^2\alpha} \\
&= \frac{(\cos\gamma + \cos\alpha)^2}{\sin^2\gamma\sin^2\alpha}\,.
\end{aligned}$$

□

Φραγμένα τρίγωνα

Θεώρημα 4.21 (Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα) *Σε ένα τρίγωνο ABC στο υπερβολικό επίπεδο, με $\gamma = \pi/2$,*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b \,.$$



Σχήμα 4.22: Ορθογώνιο τρίγωνο.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν υπερβολικό μετασχηματισμό για να φέρουμε την κορυφή C στο i και την κορυφή B στο $k\mathrm{i}$. Τότε $A = s + \mathrm{i}t$ με $s^2 + t^2 = 1$. Έχουμε

$$\cosh a = \cosh d(k\mathrm{i},\, \mathrm{i}) = 1 + \frac{|k\mathrm{i} - \mathrm{i}|^2}{2k} = \frac{k^2+1}{2k}\,,$$

$$\cosh b = \cosh d(\mathrm{i},\, s+\mathrm{i}t) = 1 + \frac{|s + \mathrm{i}(t-1)|^2}{2t} = \frac{1}{t}\,,$$

και

$$\cosh c = \cosh d(k\mathrm{i},\, s+\mathrm{i}t) = 1 + \frac{|s + \mathrm{i}(t-k)|^2}{2kt} = \frac{k^2+1}{2k}\,\frac{1}{t}\,.$$

□

Οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός γενικού τριγώνου στο υπερβολικό επίπεδο δίνονται από Κανόνες Συνημιτόνων και Ημιτόνων, ανάλογους προς τους αντίστοιχους της ευκλείδειας γεωμετρίας. Στην υπερβολική γεωμετρία υπάρχει και ένας δεύτερος Κανόνας Συνημιτόνων, που εκφράζει το μήκος μίας πλευράς του τριγώνου συναρτήσει των γωνιών του. Αυτό εκφράζει το γεγονός οτι στην υπερβολική γεωμετρία δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ ίσων και ομοίων τριγώνων.

Θεώρημα 4.22 *Σε ένα τρίγωνο ABC με γωνίες α, β, γ και μήκη των απέναντι πλευρών a, b, c ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις*

α′. ***Κανόνας Συνημιτόνων I***

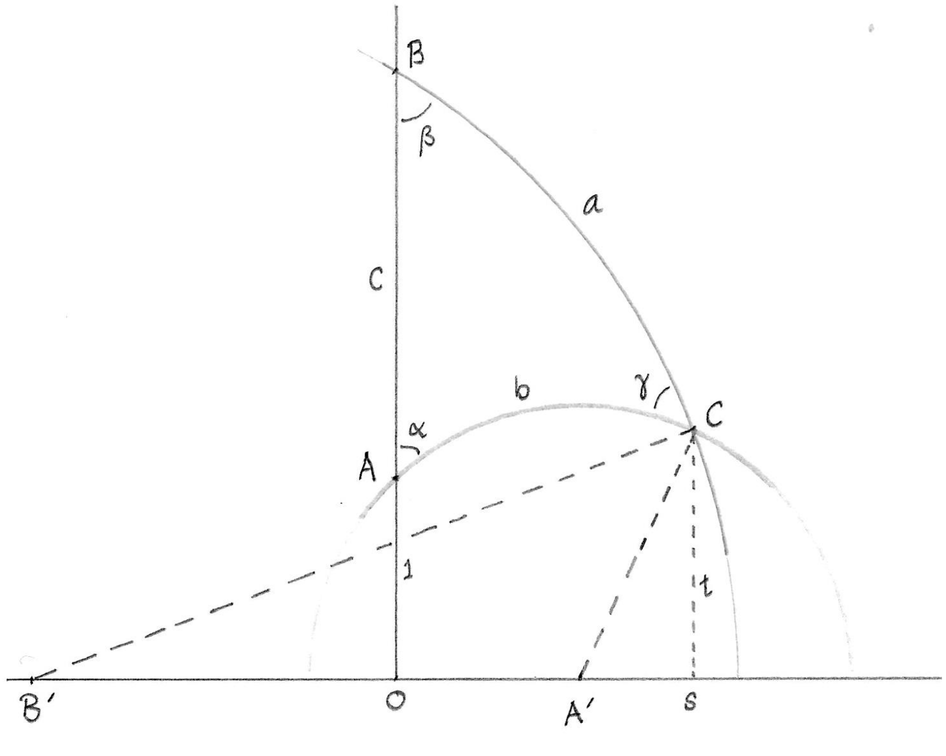
$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \, .$$

β′. ***Κανόνας Συνημιτόνων II***

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \, .$$

γ′. ***Κανόνας Ημιτόνων***

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma} \, .$$



Σχήμα 4.23: Σκαληνό τρίγωνο.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν υπερβολικό μετασχηματισμό για να φέρουμε την κορυφή A στο i και την κορυφή B στο ki. Τότε $C = s + it$. Θεωρούμε το σημείο $A' = x_1$, το κέντρο του κύκλου που είναι φορέας της υ-ευθείας από τα A και C, και το σημείο $B' = x_2$, το κέντρο του κύκλου που είναι φορέας της υ-ευθείας από τα B και C. Παρατηρούμε οτι η γωνία $A'CB'$ είναι ίση με τη γωνία γ. Για να αποδείξουμε τον Κανόνα Συνημιτόνων I, εφαρμόζουμε τον ευκλείδειο κανόνα συνημιτόνων στο τρίγωνο $A'B'C$.

$$(A'B')^2 = (A'C)^2 + (B'C)^2 - 2(A'C)\,(B'C)\cos\gamma\,,$$

$$(x_1-x_2)^2 = ((s-x_1)^2+t^2)+((s-x_2)^2+t^2)-2\sqrt{(s-x_1)^2+t^2}\sqrt{(s-x_2)^2+t^2}\cos\gamma\,.$$

Αφού $A'A = A'C$, έχουμε $x_1^2 + 1 = (s - x_1)^2 + t^2$. Αφού $B'B = B'C$, έχουμε $x_2^2 + k^2 = (s - x_2)^2 + t^2$. Άρα

$$x_1 = \frac{s^2+t^2-1}{2s} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{s^2+t^2-k^2}{2s}\,.$$

Για τα μήκη των πλευρών του τριγώνου έχουμε

$$\begin{aligned}
\cosh c &= 1 + \frac{(k-1)^2}{2k} = \frac{1+k^2}{2k}\,,\\
\cosh b &= 1 + \frac{s^2+(t-1)^2}{2t} = \frac{s^2+t^2+1}{2t}\,,\\
\cosh a &= 1 + \frac{s^2+(k-t)^2}{2kt} = \frac{s^2+t^2+k^2}{2kt}\,.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στον ευκλείδειο κανόνα συνημιτόνου, μετά από μακροσκελείς υπολογισμούς, καταλήγουμε στο ζητούμενο. (Σε άλλα μοντέλα του υπερβολικού επιπέδου η απόδειξη του Κανόνα Συνημιτόνων I απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς.)

Για να αποδείξουμε τον Κανόνα των Ημιτόνων, αρκεί να βρούμε μία έκφραση για το $\frac{\sinh c}{\sin\gamma}$ που να μην αλλάζει όταν εναλλάσσουμε τις κορυφές του τριγώνου.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 &= \frac{\sinh^2 c}{1-\cos^2\gamma}\\
&= \frac{\sinh^2 c}{1-\left(\frac{\cosh a\cosh b-\cosh c}{\sinh a\sinh b}\right)^2}\\
&= \frac{\sinh^2 a\sinh^2 b\sinh^2 c}{2\cosh a\cosh b\cosh c-\cosh^2 a-\cosh^2 b\cosh^2 c}\,.
\end{aligned}$$

□