~~Απ/κ~~ ~~Εργαστήριο 1~~

~~23/2/22~~

$\boxed{1.1.}$

7) Ποιους περιορισμούς πρέπει να βάλετε στα x, y και z ώστε η τριάδα (x, y, z) να παριστάνει

i) ένα σημείο στον άξονα y;

Πρέπει $x = z = 0$, $y \in R$

ii) — // — z;

πρέπει $x = y = 0$, $z \in R$

iii) στο επίπεδο xz;

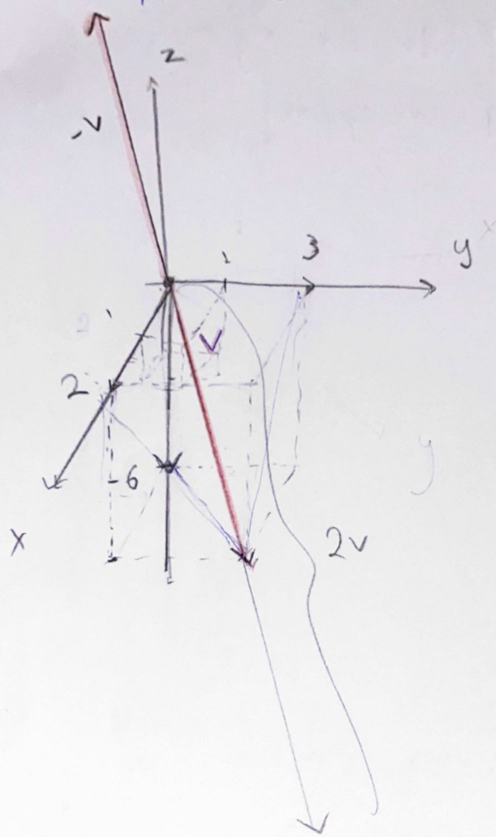
$y = 0$, $x, z \in R$

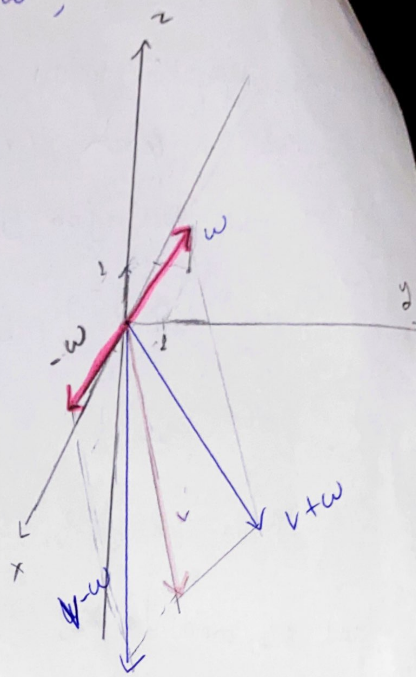
iv) // yz;

$x = 0$, $y, z \in R$

8) Σχεδιάστε τα $\vec{v}=(2,3,-6)$ και $\vec{w}=(-1,1,1)$.

Στο σχήμα κατασκευάστε τα: $-v$, $v+w$, $2v$ και $v-w$





Το επίπεδο που παράγεται από τα $v_1 = (2,7,0)$ και $v_2 = (0,2,7)$

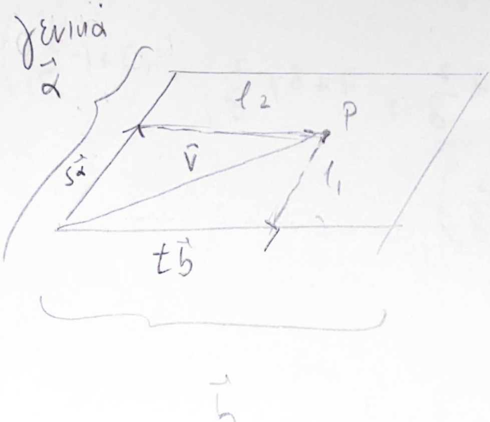
$$\{ s v_1 + t v_2 \mid s,t \in R \} = \{ (2s, 7s, 0) + (0, 2t, 7t) \mid s,t \in R \} =$$

$$= \{ (2s, 7s+2t, 7t) \mid s,t \in R \}$$

(14) Την ευθεία που περνάει από το $(0,2,1)$ στη διεύθυνση του $2i-k$

$$\ell(t) = (0,2,1) + t(2,0,-1), \quad t \in R$$

(17) Το παραλληλόγραμμο με προσκείμενες πλευρές τα $i+3k$ και $-2j$;



$\vec{v} = s\vec{\alpha} + t\vec{b}$

$s,t \in [0,1]$

άρα $\{ s(1,0,3) + t(0,-2,0) \mid 0 \le s \le 1, \ 0 \le t \le 1 \} =$

$$= \{ (s, -2t, 3s) \mid 0 \le s \le 1, \ 0 \le t \le 1 \}$$

(18) Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας

$x = 3+2t$, $y = 7+8t$, $z = -2+t$ με τα

επίπεδα συντεταγμένων

i) με το xy: (δηλ. $z=0$)

$z=-2+t \Rightarrow 0=-2+t \Rightarrow t=2$

άρα το σημείο $(3+2\cdot 2,\ 7+8\cdot 2,\ -2+2) =$

$= (7,\ 23,\ 0)$

ii) με το xz: ($y=0$)

$7+8t=0 \Rightarrow t=-\frac{7}{8}$

άρα το σημείο: $\left(3-2\cdot\frac{7}{8},\ 7+8\cdot\left(-\frac{7}{8}\right),\ -2+\left(-\frac{7}{8}\right)\right) =$

$= \left(\frac{5}{4},\ 0,\ -\frac{23}{8}\right)$

iii) με το yz: ($x=0$)

$3+2t=0 \Rightarrow t=-\frac{3}{2}$

άρα το σημείο : $\left(0,\ 7-\frac{8\cdot 3}{2},\ -2-\frac{3}{2}\right) = \left(0, -5, -\frac{7}{2}\right)$

Δείξτε ότι καθε σημείο της ευθείας $\vec{r} = (1,-1,2) + t(2,3,1)$ ικανοποιεί την $5x - 3y - z - 6 = 0$

$$\vec{r} = (1+2t, -1+3t, 2+t)$$

$$5x - 3y - z - 6 = 5(1+2t) - 3\cdot(-1+3t) - (2+t) - 6 =$$

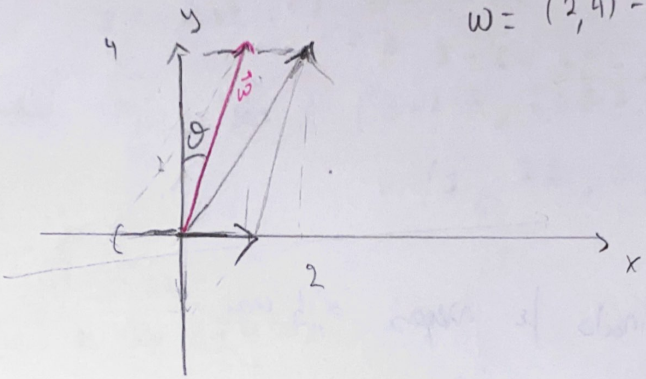
$$= 5 + 10t + 3 - 9t - 2 - t - 6 =$$

$$= 0$$

με το βορρά στη θετική

(25) Ένα πλοίο που βρίσκεται στη θέση (1,0) ενός ναυτικού χάρτη βλέπει ένα βράχο στη θέση (2,4). Ποιο διάνυσμα συνδέει το πλοίο με το βράχο; Ποια γωνία θ, σχηματίζει το διάνυσμα αυτό με τη διεύθυνση του βορρά;

$$\hat{\omega} = (2,4) - (1,0) = (1,4)$$

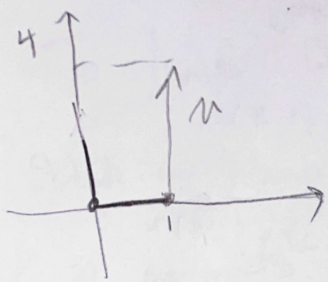


$$\sin\theta = \frac{1}{\|\hat{\omega}\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \theta \simeq 0{,}24$$

6) Το πλοίο στο άσκ. 25 κατευθύνεται προς το Βορρά και ταξιδεύει με ταχύτητα 4 κόμβων σε σχέση με το νερό. Υπάρχει ένα ρεύμα 1 κόμβου κατευθυνόμενο ανατολικά. Οι κόμβοι πάνω στο χάρτη είναι ναυτικά μίλια · 1 κόμβος = = 1 ναυτικό μίλι ανά ώρα

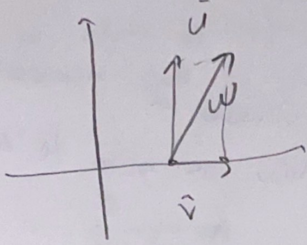
α) αν δεν υπήρχε το ρεύμα ποιο διάνυσμα u θα περιέγραφε την ταχύτητα του πλοίου σε σχέση με το βυθό της θάλασσας;



$|\vec{u}| = 4$

b) Αν το πλοίο απλώς ακολουθούσε το ρεύμα ποιο διάνυσμα $\vec{v}$ θα περιέγραφε την ταχύτητα του σε σχέση με το βυθό της θάλασσας;

c) ποιο διάνυσμα ω περιγράφει τη συνολική τροχιά του πλοίου;



d) που θα βρίσκεται το πλοίο μετά 1 ώρα;

$$\hat{w} = \vec{v} + \hat{u} = (1, 0) + (0, 4) = (1, 4)$$

$$(x, y) = (1, 0) + 1 \cdot \hat{w} = (1, 0) + (1, 4) =$$
$$= (2, 4)$$

27) Ένα αεροπλάνο βρίσκεται στη θέση $(3,4,5)$ το μεσημέρι και ταξιδεύει με ταχύτητα $400i + 500j - k$ χλμ/ώρα. Ο πιλότος εντοπίζει ένα αεροδρόμιο στη θέση $(23,29,0)$.

α) Ποια χρ. στιγμή το αεροπλάνο θα περάσει ακριβώς πάνω από το αεροδρόμιο; (υποθέστε ότι η Γη είναι επίπεδη και ότι το διάνυσμα k δείχνει προς τα πάνω)

Το μεσημέρι (12:00) βρίσκεται στη θέση $(3,4,5)$

Θέλουμε να περάσει πάνω από το αεροδρόμιο άρα οι συντεταγμένες (x,y) να είναι $(23,29)$.

Το διάνυσμα μετατόπισης από τη θέση $(3,4,5)$ μετά από 1 ώρα είναι το $(400,500,-1)$

άρα μετά από $\frac{t}{60}$ λεπτά θα είναι

$$\frac{t}{60}(400,500) = (23,29)$$

$$\Rightarrow t = \frac{23 \cdot 60}{400} = 3,45 \simeq 3 \text{ λεπτά}$$

άρα ώρα → 12:03 μ.μ.

b) Σε ποιο υψος θα βρισκεται το αεροπλάνο οταν θα περάσει πανω απο αυτή

υψος → z συντεταγμένη

μετά απο 3 λεπτά
θα εχω για την z συντεταγμένη

$$5 + \frac{3}{60} \cdot (-1) = 5 - \frac{3}{60} = \frac{300-3}{60} = \frac{297}{60} = 4,95 \text{ χλμ}$$

1.2.

(1) α) Απόδειξη της ιδιότητας (ii) και (iii) του Εσωτερικού γινομένου

b) ν.δ.ο $\alpha \cdot b = b \cdot \alpha$

α) iii) $\vec{\alpha}(\vec{b}+\vec{c}) = \alpha \cdot b + \alpha \cdot c$

και $(\vec{\alpha}+\vec{b})\vec{c} = \vec{\alpha}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{\alpha}(\vec{b}+\vec{c}) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)[(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)] =$

$= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3) =$

$= \alpha_1(b_1+c_1) + \alpha_2(b_2+c_2) + \alpha_3(b_3+c_3) =$

$= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 =$

$= \vec{\alpha}\cdot\vec{b} + \vec{\alpha}\cdot\vec{c}$

ii) $\alpha\,\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})$ και $\vec{\alpha}\cdot\beta\vec{b} = \beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})$

$\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot(b_1,b_2,b_3) = \alpha[(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3)]$

$= \alpha\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})$

$\vec{\alpha}\cdot\beta\vec{b} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\beta(b_1,b_2,b_3) =$

$= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(\beta b_1, \beta b_2, \beta b_3) =$

$= \alpha_1\beta b_1 + \alpha_2\beta b_2 + \alpha_3\beta b_3 =$

$= \beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})$

b) $\vec{\alpha} \cdot \vec{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(b_1, b_2, b_3) =$

$= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 =$

$= b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3 = \vec{b} \cdot \vec{\alpha}$

(14) Βρείτε την προβολή του $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ πάνω στο $\vec{v} = (2, 1, -3)$

γενικά

$$Pr_{\vec{b}} \vec{\alpha} = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \cdot \vec{b}$$

$$Pr_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} =$$

$$= \frac{(-1, 1, 1)(2, 1, -3)}{4 + 1 + 9} (2, 1, -3) =$$

$$= \frac{-2 + 1 - 3}{14} (2, 1, -3) = -\frac{4}{14} (2, 1, -3) =$$

$$= -\frac{2}{7} (2, 1, -3) = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

(18) Βρείτε την ευθεία που περνάει από το $(3, 1, -2)$ και τέμνει υπό ορθή γωνία την $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$

$\varepsilon: (x, y, z) = (3, 1, -2) + t(u_1, u_2, u_3)$, $t \in R$

Επίσης $\vec{u} \perp (1, 1, 1)$

$\Rightarrow \boxed{u_1 + u_2 + u_3 = 0}$ (1)

σημείο τομής:

$$\left.\begin{aligned} -1 + s &= 3 + u_1 t \quad (\alpha) \\ -2 + s &= 1 + u_2 t \quad (\beta) \\ -1 + s &= -2 + u_3 t \quad (\gamma) \end{aligned}\right\}$$

(α), (β)

$4+u_1t=3+u_2t \Rightarrow \boxed{u_2t-u_1t=1}$ (A)

(α), (γ) $4+u_1t=-1+u_3t \Rightarrow u_3t-u_1t=5$

όμως $u_3=-u_1-u_2$ (από (1))

άρα $-u_1t-u_2t-u_1t=5 \Rightarrow \boxed{-u_2t-2u_1t=5}$ (B)

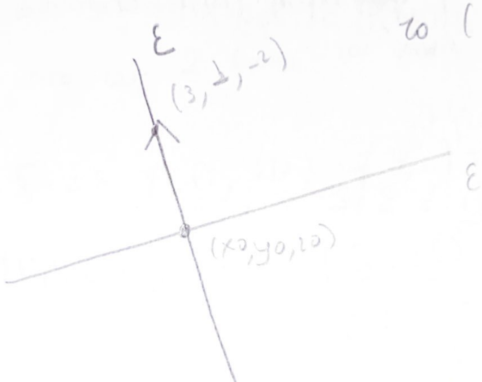
A+B : $-3u_1t=6 \Rightarrow u_1t=-2$

και $u_2t=1+u_1t=1-2=-1$

και $u_3t=5+u_1t=5-2=3$

άρα σημείο τομής

$(x_0,y_0,z_0)=(3,1,-2)+(-2,-1,3)=(1,0,1)$

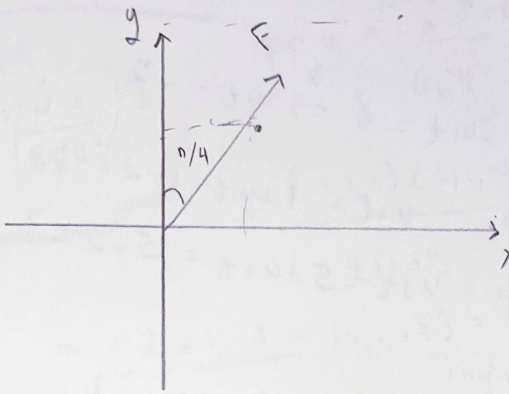


το $(3,1,-2)-(1,0,1)=(2,1,-3)$ θα είναι διάνυσμα διεύθ. της ε άρα

ε: $(x,y,z)=(3,1,-2)+t(2,1,-3)$, $t\in R$

(21) Μια δύναμη 6N σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα y, δείχνοντας προς τα δεξιά. Η δύναμη αναπτύσσεται στην κίνηση ενός αντικειμένου κατά μήκος της ευθείας που συνδέει το $(1,2)$ με το $(5,4)$.

α) Βρείτε τύπο για το διάνυσμα-δύναμη F.



$\|\vec{F}\| = 6$ άρα $\sqrt{x^2+y^2} = 6$ αν $\vec{F} = (x,y)$

επίσης $(0,1)\cdot(x,y) = \|(0,1)\|\cdot\|(x,y)\|\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow \quad y = 6\cdot\cos(\pi/4)$

$\Rightarrow \quad y = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

και

$x^2 = 36 - y^2 = 36 - 9\cdot 2 = 18$

$\Rightarrow \quad x = \pm 3\sqrt{2}$ κρατάω το

$x = 3\sqrt{2}$ διότι $\vec{F}$ δείχνει προς τα δεξιά ορα $\vec{F} = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

b) Βρείτε τη γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα της κατεύθυνσης της κίνησης $D = (5-1)i + (4-2)j$ και η κατεύθυνση της $\vec{F}$

$$\vec{F} = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

$$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \cdot (4,2) = \|F\| \|(4,2)\| \cos\theta$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{20} \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{20}} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{10} = \cos\theta \Rightarrow \theta \simeq 0{,}32$$

c) Το έργο που παράγεται είναι $F \cdot d$ ή ισοδύναμα $\|F\| \cdot \|D\| \cos\theta$. Υπολογίστε το έργο και από τους 2 τρόπους και κάνετε τη σύγκριση

$$F \cdot d = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \cdot (4,2) = 18\sqrt{2}$$

$$\|F\| \|D\| \cos\theta = 6 \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = 18\sqrt{2}$$