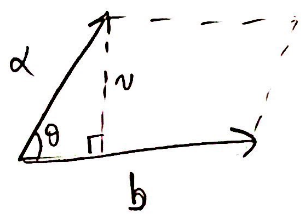
Εργαστήριο 2

1.3

(5) Βρείτε το εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\vec{\alpha}=(1,-2,1)$ και $\vec{b}=(2,1,1)$

$$\hat{\alpha}\times\hat{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 1, 5)$$

$$\text{Εμβαδόν} = \|(-3,1,5)\| = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$



$$\text{Εμβ} = \|b\|\cdot\upsilon$$

όμως $\sin\vartheta = \dfrac{\upsilon}{\|a\|} \Rightarrow \upsilon = \sin\vartheta\cdot\|a\|$ όπου ϑ η γωνία των $\vec{\alpha},\vec{b}$

άρα $\text{Εμβ} = \|b\|\cdot\|a\|\sin\vartheta = \|\vec{\alpha}\times\vec{b}\|$

(6) Ένα τρίγωνο έχει κορυφές τα $\underset{A}{(0,0,0)}$, $\underset{B}{(1,1,1)}$ και $\underset{C}{(0,-2,3)}$

Βρείτε το εμβαδόν του

$$\vec{AB} = (1,1,1)$$

$$\vec{AC} = (0,-2,3)$$

Εμβ. (παραλληλογράμμου) $= \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$

άρα Εμβ (τριγώνου) $= \dfrac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (5,-3,-2)$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38}$$

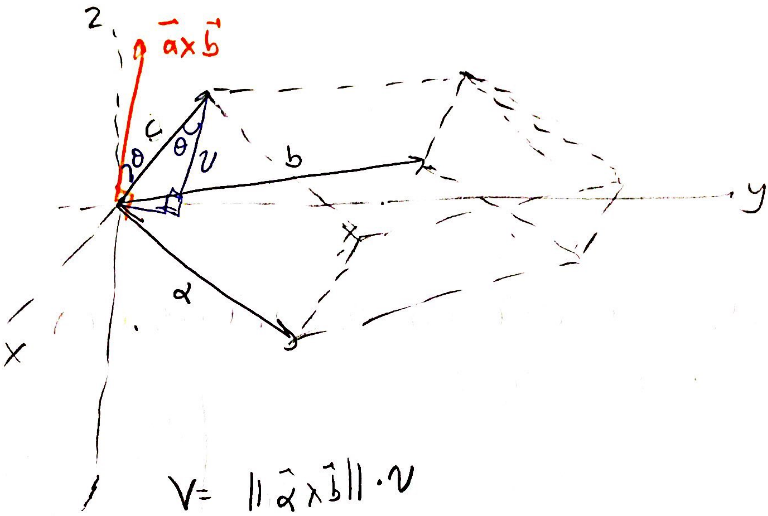
άρα Εμβ. (τριγώνου) $= \dfrac{\sqrt{38}}{2}$

Όγκος παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2i+j-k$, $5i-3k$ και $i-2j+k$

$$V = \Big|\underbrace{(2,1,-1)}_{\vec{a}} \times \underbrace{(5,0,-3)}_{\vec{b}} \cdot \underbrace{(1,-2,1)}_{\vec{c}}\Big| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-12-8+10| = 10$$

Όγκος παραλληλεπιπέδου = (Εμβαδόν βάσης) · ύψος



$$V = \|\vec{\alpha} \times \vec{b}\| \cdot \upsilon$$

όμως $\cos\theta = \dfrac{\upsilon}{\|c\|} \Rightarrow \upsilon = \cos\theta \, \|c\|$

άρα $V = \|\vec{\alpha} \times \vec{b}\| \, \|c\| \cos\theta$

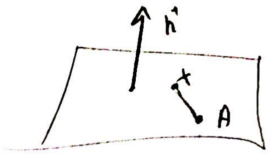
Επίσης $(\vec{\alpha} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \|\vec{\alpha} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos\theta$

άρα $V = |(\vec{\alpha} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

(15) Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο το οποίο:

α) είναι κάθετο στο $\vec{v}=(1,1,1)$ και περνάει από το $(1,0,0)=A$

$$(x-1,\ y-0,\ z-0)\cdot(1,1,1)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-1+y+z=0$$
$$\Rightarrow \quad x+y+z-1=0$$

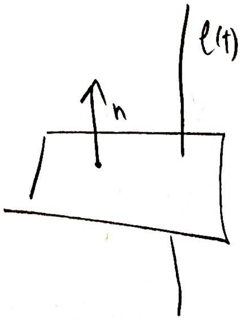


$\vec{AX} \perp \hat{n}$

b) είναι κάθετο στο $\vec{v}=(1,2,3)$ και περνάει από το $(1,1,1)$

$$(x-1,\ y-1,\ z-1)\cdot(1,2,3)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-1+2y-2+3z-3=0$$
$$\Rightarrow \quad x+2y+3z-6=0$$

c) είναι κάθετο στην ευθεία $l(t)=(5,0,2)t+(3,-1,1),\ t\in\mathbb{R}$ και περνάει από το $(5,-1,0)$



άρα $\vec{n} \parallel (3,-1,1)$

άρα

$$\varepsilon: (x-5,\ y+1,\ z)\cdot(5,0,2)=0$$
$$\Rightarrow \quad 5x-25+2z=0 \Rightarrow 5x+2z-25=0$$

είναι κάθετο στην ευθεία $l(t)=(-1,-2,3)t+(0,7,1)$, $t\in\mathbb{R}$ και περνάει από το $(2,4,-1)$

$$\varepsilon: (x-2, y-4, z+1)(-1,-2,3)=0$$

$$\Rightarrow -x+2-2y+8+3z+3=0$$

$$\Rightarrow -x-2y+3z+13=0$$

$$\Rightarrow x+2y-3z-13=0$$

(21) Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το $(1,2,-3)$ και είναι κάθετο στην $\hat{r}=(0,-2,1)+t(1,-2,3)$, $t\in\mathbb{R}$

$$\varepsilon: (x-1, y-2, z+3)\cdot(1,-2,3)=0$$

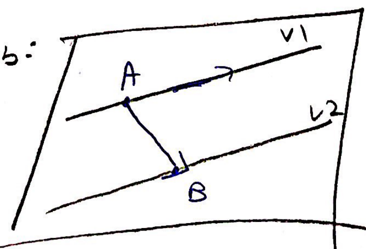
$$\Rightarrow x-1-2y+4+3z+9=0$$

$$\Rightarrow x-2y+3z+12=0$$

(23) Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες $V_1=(0,1,-2)+t(2,3,-1)$, $A=(0,1,-2)$

και $V_2=(2,-1,0)+t(2,3,-1)$, $B=(2,-1,0)$

Παρατηρώ ότι είναι παράλληλες:



Το $\vec{AB}$ δεν είναι παράλληλο με το διάνυσμα διεύθυνσης της v_1 (δηλ. το $(2,3,-1)$) οπότε για να βρω το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχω:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times (2,3,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4, 6, 10)$$

άρα $\varepsilon: (x-0, y-1, z+2)\cdot(-4,6,10)=0$

$$\Rightarrow -4x+6y-6+10z+20=0$$

$$\Rightarrow 4x-6y-10z-14=0$$

α) Δείξτε τις ταυτότητες i) $(A\times B)\times C = (A\cdot C)B - (B\cdot C)A$

και ii) $A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$

$$A\times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2 b_3 - b_2\alpha_3, \alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3, b_1\alpha_2 - \alpha_1 b_2)$$

$$(A\times B)\times C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_2 b_3 - b_2\alpha_3 & \alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3 & b_1\alpha_2 - \alpha_1 b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(c_3(\alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3) - c_2(b_1\alpha_2 - \alpha_1 b_2),\ c_1(b_1\alpha_2 - \alpha_1 b_2) - c_3(\alpha_2 b_3 - b_2\alpha_3),$$
$$c_2(\alpha_2 b_3 - b_2\alpha_3) - c_1(\alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3)\big) =$$

$$= (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$$

) νδο $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$ αν και μονο αν

$(u \times w) \times v = 0$

απο (α) $(u \times v) \times w = (u \cdot w) v - (v \cdot w) u$

και $u \times (v \times w) = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w$

αρα έχω $(u \cdot w) v - (v \cdot w) u = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w$

$\Rightarrow (v \cdot w) u = (u \cdot v) w$ δηλ.

$(u \times w) \times v = (u \cdot v) w - (w \cdot v) u = 0$

και αντίστροφα

$(u \times w) \times v = 0 \Rightarrow (u \cdot v) w - (w \cdot v) u = 0$

$\Rightarrow (u \cdot w) v - (v \cdot w) u = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w$

$\Rightarrow (u \times v) \times w = u \times (v \times w)$

c) νδο $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$ (Ταυτότητα Jacobi)

$\cancel{(u \cdot w) v} - \cancel{(v \cdot w) u} + \cancel{(v \cdot u) w} - \cancel{(w \cdot u) v} + \cancel{(w \cdot v) u} - \cancel{(u \cdot v) w} =$

$= 0$

(18) α) νδο $u\cdot(v\times w) = v\cdot(w\times u) = w\cdot(u\times v) =$

$= -u\cdot(w\times v)$

$= -w\cdot(v\times u) = -v(u\times w)$

$$u\cdot(v\times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Όταν αντιμεταθέτω γραμμές στην ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

$v\cdot(w\times u)$: αλλάζω την 1η με την 2η

και μετά 2η με 3η

άρα $$u\cdot(v\times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = v\cdot(w\times u)$$

κ.ο.κ.

b) δείξε ότι

$$(u\times v)\cdot(u'\times v') = (u\cdot u')(v\cdot v') - (u\cdot v')(u'\cdot v) =$$

$$= \begin{vmatrix} u\cdot u' & u\cdot v' \\ v\cdot u' & v\cdot v' \end{vmatrix}$$

από (α)

$$(u\times v)\cdot(u'\times v') = u'\cdot(v'\times(u\times v)) =$$

$$\overset{17\alpha}{=} u'\cdot((v'\cdot v)u - (v'\cdot u)v) =$$

$$= (v'\cdot v)(u'\cdot u) - (v'\cdot u)(v\cdot u')$$

(28) Αν δοθούν τα α και b είναι σωστό ότι οι εξισώσεις $x\times\alpha = b$ και $x\cdot\alpha = \|\alpha\|$ ορίζουν μοναδικό κάποιο σημείο x;

$$x\times\alpha = b \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = b$$

$$\Rightarrow (x_2\alpha_3 - \alpha_2 x_3,\ \alpha_1 x_3 - x_1\alpha_3,\ x_1\alpha_2 - \alpha_1 x_2) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2\alpha_3 - \alpha_2 x_3 = b_1 \\ \alpha_1 x_3 - x_1\alpha_3 = b_2 \\ x_1\alpha_2 - \alpha_1 x_2 = b_3 \end{cases}$$

για

$x \cdot \alpha = \|\alpha\|$

$\rightarrow \quad x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$

άρα έχω σύστημα εξισώσεων

Γεωμετρικά

$x \times \alpha = b$ ~~άρα~~ $x \perp b$

και $x \cdot \alpha = \|\alpha\|$

όμως $x \cdot \alpha = \|x\| \|\alpha\| \cos\theta$ (θ η γωνία των x, α)

άρα $\cancel{\|\alpha\|} = \|x\| \cancel{\|\alpha\|} \cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\|x\|}$

(5) vδυ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2+\lambda\alpha_1 & b_2+\lambda b_1 & c_2+\lambda c_1 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = $$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2+\lambda\alpha_1 & b_2+\lambda b_1 & c_2+\lambda c_1 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda\alpha_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \to 0$$

9) Δείξτε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες:

(α) ρ είναι το μήκος του $xi+yj+zk$

$$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi} =$$

$$= \rho\sqrt{\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\varphi} = \rho$$

(b) $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{r\cdot k}{\|r\|}\right)$ οπου $r = xi+yj+zk$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{r\cdot k}{\|r\|}$$

ομως $z = \rho\cos\varphi \Rightarrow z = \|r\|\cdot\cos\varphi$

Επισης $r\cdot k = (x,y,z)\cdot(0,0,1) = z$

αρα $\cos\varphi = \frac{z}{\|r\|} \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{r\cdot k}{\|r\|}\right) = \varphi$

(c) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u\cdot i}{\|u\|}\right)$ οπου $u = xi+yj$

$$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta} = r$$

$x = r\cos\theta$

ομως $a\cdot i = (x,y)(1,0) = x$

αρα $\frac{u\cdot i}{\|u\|} = \frac{x}{r} = \cos\theta$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{u\cdot i}{\|u\|}\right)$$

9. Χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς k για να δείξετε ότι αν $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$ τότε $\|x_1+\dots+x_k\| \le \|x_1\|+\dots+\|x_k\|$

για $k=2$: $\|x_1+x_2\| \le \|x_1\|+\|x_2\|$ από τριγωνική ανισότητα

Έστω ότι για $k=i$ ισχύει

$$\|x_1+\dots+x_i\| \le \|x_1\|+\dots+\|x_i\|$$

Τότε για $k=i+1$

$$\|x_1+\dots+x_{i+1}\| = \|(x_1+\dots+x_i)+x_{i+1}\| \le \|x_1+\dots+x_i\| + \|x_{i+1}\| \le \|x_1\|+\dots+\|x_i\|+\|x_{i+1}\|$$

10. Αποδείξτε με χρήση άλγεβρας την ταυτότητα του Lagrange: Για οποιουσδήποτε πραγματικούς $x_1,\dots,x_n$ και $y_1,\dots,y_n$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - \sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2$$

$$\sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2 = \sum_{i<j} x_i^2y_j^2 - 2\sum_{i<j} x_iy_jx_jy_i + \sum_{i<j} x_j^2y_i^2 \quad (1)$$

όμως παρατηρώ ότι $\sum_{1\le i<j\le n} x_iy_j = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\ne j}} x_iy_j$

άρα η (1) γίνεται $\sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2 = \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\ne j}} x_i^2y_j^2 - \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\ne j}} x_iy_jx_jy_i$

Επίσης

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} x_i^2 y_j^2$$

και

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} x_i y_i x_j y_j$$

άρα

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} x_i^2 y_j^2-\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} x_i^2 y_j^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} x_i y_j x_j y_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2+\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} x_i y_i x_j y_j=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

CamScanner