Ετσι, αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, διαλέγουμε $\delta = \varepsilon$· τότε, από την $0 < \|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ έπεται ότι $|y| < \delta$, και άρα

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \varepsilon. \ \square$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό έψιλον-δέλτα, οδηγούμαστε στην εξής διατύπωση του ορισμού της συνέχειας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Εστω $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{αν } \ \mathbf{x} \in A \ \text{ και } \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \qquad \text{τότε} \qquad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Η απόδειξη είναι σχεδόν άμεση. Παρατηρήστε ότι στο Θεώρημα 6 επιμέναμε να είναι $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$, δηλαδή $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Αυτός ο όρος δεν επιβάλλεται εδώ· πραγματικά, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7 είναι προφανώς σωστό όταν $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, άρα δεν υπάρχει κανένας λόγος να αποκλείσουμε αυτή την περίπτωση. Εδώ μάλιστα, ενδιαφερόμαστε για την τιμή της f στο $\mathbf{x}_0$. Θέλουμε η f στα γειτονικά σημεία να είναι κοντά σ' αυτή την τιμή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στις ασκήσεις που ακολουθούν, ο αναγνώστης μπορεί να υποθέσει ότι η εκθετική συνάρτηση και οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου είναι συνεχείς· μπορεί επίσης να χρησιμοποιεί ελεύθερα τεχνικές από τον Λογισμό μιας μεταβλητής.

1. Δείξτε ότι τα παρακάτω υποσύνολα του επιπέδου είναι ανοιχτά:
 (a) $A = \{(x,y) | -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1\}$
 (b) $B = \{(x,y) | y > 0\}$
 (c) $C = \{(x,y) | 2 < x^2 + y^2 < 4\}$
 (d) $A \cup B \cup C$, όπου τα σύνολα A, B και C είναι αυτά που ορίστηκαν στα ερωτήματα (a), (b) και (c).
 (e) $D = \{(x,y) | x \neq 0 \text{ και } y \neq 0\}$

2. (a) Αποδείξτε ότι αν $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ και $s < t$, $D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.
 (b) Αποδείξτε ότι αν U και V είναι περιοχές του $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $U \cap V$ και $U \cup V$.
 (c) Αποδείξτε ότι τα συνοριακά σημεία ενός ανοιχτού διαστήματος $(a,b) \subset \mathbf{R}$ είναι τα a και b.

***3.** Χρησιμοποιήστε τον ορισμό $\varepsilon - \delta$ των ορίων για να δείξετε ότι $x^2 \to 4$ όταν $x \to 2$. Δώστε μια συντομότερη απόδειξη χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.

4. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια:
 (a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3y$
 (b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^xy$
 (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$
 (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια:
 (a) $\lim_{x\to 3}(x^2 - 3x + 5)$
 (b) $\lim_{x\to 0} \sin x$
 (c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$
 (d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$
 (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

6. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2+3)$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x y}{x+1}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4+y^4}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

7. Υπολογίστε το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, αν υπάρχει, στις εξής περιπτώσεις:

(a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x\to|x|, \quad x_0=1$

(b) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, \quad \mathbf{x}\to||\mathbf{x}||, \quad$ τυχόν $\mathbf{x}_0$

(c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2, \quad x\to(x^2,e^x), \quad x_0=1$

(d) $f:\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbf{R}^2, \quad (x,y)\to(\sin(x-y), \quad e^{x(y+1)}-x-1)/||(x,y)||, \quad \mathbf{x}_0=(0,0)$

8. Εστω $A\subset\mathbf{R}^2$ ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος $D_1(0,0)$ στον οποίο έχουμε προσθέσει το σημείο $\mathbf{x}_0=(1,0)$ και $f:A\to\mathbf{R}, \mathbf{x}\to f(\mathbf{x})$ η σταθερή συνάρτηση $f(\mathbf{x})=1$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} f(\mathbf{x})=1$.

9. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sin xy)/xy = 1$.

10. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, x\to x^2e^x/(2-\sin x)$ είναι συνεχής.

11. Εστω $f(x,y,z)=(x^2+3y^2)/(x+1)$. Υπολογίστε το

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z).$$

12. Δείξτε ότι η $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, x\to(1-x)^8+\cos(1+x^3)$ είναι συνεχής.

13. Αν η $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ και η $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ είναι συνεχείς, δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$f^2g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, \mathbf{x}\to[f(\mathbf{x})]^2g(\mathbf{x})$$

και

$$f^2g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, \mathbf{x}\to[f(\mathbf{x})]^2+g(\mathbf{x})$$

είναι συνεχείς.

14. Αποδείξτε ότι η $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}, (x,y)\to ye^x+\sin x+(xy)^4$ είναι συνεχής.

15. (a) Μπορούμε να κάνουμε την $[\sin(x+y)]/(x+y)$ συνεχή, ορίζοντάς την κατάλληλα στο $(0,0)$;

(b) Μπορούμε να κάνουμε την $xy/(x^2+y^2)$ συνεχή ορίζοντάς την κατάλληλα στο $(0,0)$;

16. (a) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του l' Hôpital υπολογίστε το $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{x^3}$.

(b) Υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin 2x - 2x + y}{x^3+y}$;

17. Υποθέτουμε ότι τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι στον $\mathbf{R}^n$ και $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ με $f(\mathbf{x})=1$, $f(\mathbf{y})=0$, και $0\le f(\mathbf{z})\le1$ για κάθε $\mathbf{z}$ στον $\mathbf{R}^n$.

***18.** Δίνεται η $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ και ένα συνοριακό σημείο $\mathbf{x}_0$ του A. Λέμε ότι $\lim_{x\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=\infty$ αν για κάθε $N>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $0<||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||<\delta$ να είναι $f(\mathbf{x})>N$.

(a) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to1}(x-1)^{-2}=\infty$.

(b) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0} 1/|x|=\infty$. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to0} 1/x=\infty$;

(c) Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x^2+y^2)=\infty$.

***19.** Εστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μία συνάρτηση. Γράφουμε $\lim_{x\to b-} f(x)=L$ και λέμε ότι το L είναι το *όριο από αριστερά* της f στο b, αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για $x<b$ με $0<|x-b|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-L|<\varepsilon$.

(a) Δώστε έναν ορισμό του *ορίου από δεξιά*, δηλαδή του $\lim_{x\to b+} f(x)$.

(b) Βρείτε το $\lim_{x\to0-} 1/(1+e^{1/x})$ και το $\lim_{x\to0+} 1/(1+e^{1/x})$.

(c) Σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα της $1/(1+e^{1/x})$.

***20.** Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν

ΠΡ

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} ||f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)||=0.$$

***21.** Εστω ότι η $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ ικανοποιεί την $||f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})||\le K||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^a$ για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο A, όπου K και a είναι θετικές σταθερές. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής. (Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται *Hölder - συνεχείς* ή, αν $a=1$, *Lipschitz - συνεχείς*).

***22.** Δείξτε ότι η $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτή.

***23.** (a) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε αν

$$|a| < \delta, \text{ τότε } |a^3 + 3a^2 + a| < 1/100.$$

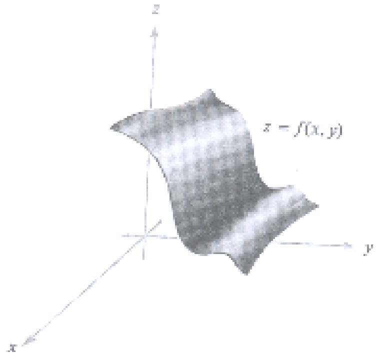
(b) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε αν $x^2 + y^2 < \delta^2$, τότε

$$|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10.000.$$

2.3 Παραγώγιση

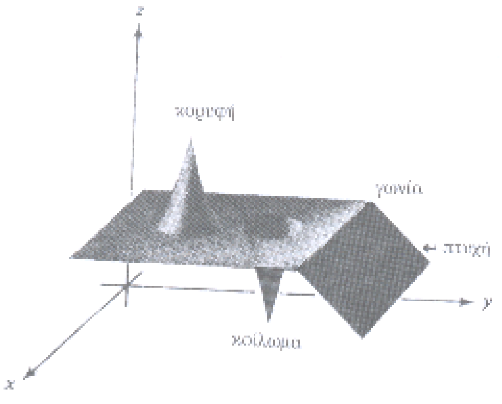
Στην Παράγραφο 2.1 μελετήσαμε κάποιες μεθόδους που μας επιτρέπουν να σχεδιάζουμε πρόχειρα συναρτήσεις. Μ' αυτές τις μεθόδους και μόνο, είναι μάλλον αδύνατον να συλλέξουμε αρκετές πληροφορίες, που να μας δίνουν τα γενικά έστω χαρακτηριστικά μιας πολύπλοκης συνάρτησης. Από τον στοιχειώδη Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι η έννοια της παραγώγου μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη γι' αυτόν το σκοπό: για παράδειγμα, μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τα μέγιστα και τα ελάχιστα και να υπολογίσουμε τους ρυθμούς μεταβολής. Η παράγωγος έχει και πολλές άλλες εφαρμογές εκτός από αυτές, όπως θα έχει σίγουρα ανακαλύψει ο αναγνώστης στον στοιχειώδη Απειροστικό Λογισμό.

Διαισθητικά, ξέρουμε από τη δουλειά που κάναμε στην Παράγραφο 2.2 ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι αυτή που δεν έχει "διακοπές" στο γράφημά της. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση από τον $\mathbf{R}^2$ στον $\mathbf{R}$ πρέπει να είναι τέτοια ώστε όχι μόνο να μην υπάρχουν "διακοπές" στο γράφημά της, αλλά και να υπάρχει ένα καλά ορισμένο επίπεδο εφαπτόμενο στο γράφημά της, για κάθε σημείο αυτού. Ετσι, δεν θα πρέπει να υπάρχουν πτυχές, γωνίες ή αιχμές στο γράφημα (βλέπε Σχήματα 2.3.1 και 2.3.2). Μ' άλλα λόγια, το γράφημα πρέπει να είναι *λείο*.



Σχήμα 2.3.1 Ένα λείο γράφημα.

Για να δώσουμε αυστηρή μορφή σ' αυτές τις ιδέες, χρειαζόμαστε έναν στέρεο ορισμό του τί εννοούμε λέγοντας "η $f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.". Στην πράξη, αυτός ο ορισμός



Σχήμα 2.3.2 Αυτό το γράφημα δεν είναι λείο.