Ασκήσεις

1. Βρείτε τις $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ αν
   (α) $f(x,y) = xy$
   (β) $f(x,y) = e^{xy}$
   (γ) $f(x,y) = x\cos x\cos y$
   (δ) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται.
   (α) $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$· $(0,0)$, $(a/2,a/2)$
   (β) $z = \log\sqrt{1+xy}$· $(1,2)$, $(0,0)$
   (γ) $z = e^{ax}\cos(bx+y)$· $(2\pi/b,0)$

3. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε τις μερικές παραγώγους $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$.
   (α) $w = xe^{x^2+y^2}$
   (β) $w = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
   (γ) $w = e^{xy}\log(x^2+y^2)$
   (δ) $w = x/y$
   (ε) $w = \cos(ye^{xy})\sin x$

4. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι C^1 αν η $f(0,0)$ ορίζεται να είναι 0.
   (α) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
   (β) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (γ) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

5. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = x^2+y^3$ στο $(3,1,10)$.

6. Έστω $f(x,y) = e^{x+y}$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0)$.

7. Έστω $f(x,y) = e^{x-y}$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(1,1)$.

8. Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις της Άσκησης 1, υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο των γραφημάτων στα υποδεικνυόμενα σημεία.
   (α) $(0,0)$
   (β) $(0,1)$
   (γ) $(0,\pi)$
   (δ) $(0,1)$

9. Υπολογίστε τον πίνακα μερικών παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,y)$
   (β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xe^y+\cos y, x, x+e^y)$
   (γ) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+e^z+y, yx^2)$
   (δ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xye^{xy}, x\sin y, 5xy^2)$

10. Υπολογίστε τον πίνακα μερικών παραγώγων των
    (α) $f(x,y) = (e^x, \sin xy)$
    (β) $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$
    (γ) $f(x,y) = (x+y, x-y, xy)$
    (δ) $f(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y)$

11. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $f(x,y) = x^2-2xy+2y^2$ που έχει κλίση 2 κατά τη θετική κατεύθυνση x και κλίση 4 κατά τη θετική κατεύθυνση y.

12. Έστω $f(x,y) = e^{(2x+3y)}$.
    (α) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(0,0)$.
    (β) Χρησιμοποιήστε το για να προσεγγίσετε τα $f(0{,}1,0)$ και $f(0,0{,}1)$.
    (γ) Χρησιμοποιώντας κομπιουτεράκι, βρείτε τις ακριβείς τιμές των $f(0{,}1,0)$ και $f(0,0{,}1)$.

13. Που τέμνει τον άξονα z το εφαπτόμενο επίπεδο της $z = e^{x-y}$ στο $(1,1,1)$;

14. Γιατί είναι λογικό να αποκαλέσουμε τα γραφήματα των $f(x,y) = x^2+y^2$ και $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$ «εφαπτόμενα» στο $(0,0)$;

15. Έστω $f(x,y) = e^{xy}$. Δείξτε ότι $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

16. Χρησιμοποιώντας τη γραμμική προσέγγιση, προσεγγίστε κατάλληλη συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε να εκτιμήσετε τα παρακάτω:
    (α) $(0{,}99e^{0{,}02})^8$
    (β) $(0{,}99)^3+(2{,}01)^3-6(0{,}99)(2{,}01)$
    (γ) $\sqrt{(4{,}01)^2+(3{,}98)^2+(2{,}02)^2}$

17. Έστω P το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $g(x,y) = 8-2x^2-3y^2$ στο σημείο $(1,2,-6)$. Έστω $f(x,y) = 4-x^2-y^2$. Βρείτε το σημείο του γραφήματος της f που έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο P.

18. Έστω $f(x,y) = xe^{y^2}-ye^{x^2}$.
    (α) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο $(1,2)$.
    (β) Ποιο σημείο της επιφάνειας $z = x^2-y^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο που βρήκατε στο ερώτημα (α);

19. Υπολογίστε την κλίση των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y, z) = x\exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ (Προσέξτε ότι $\exp u = e^u$.)

(β) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

(γ) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$

20. Υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1, 0, 1)$ για καθεμία από τις συναρτήσεις της Άσκησης 19. [Ο Οδηγός μελέτης περιέχει μόνο τη λύση του ερωτήματος (γ).]

21. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $z = x^2 + 2y^3$ στο $(1, 1, 3)$.

22. Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^4+6y^8} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ υπάρχουν.

(β) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αποδεικνύοντας ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

23. Έστω P το εφαπτόμενο επίπεδο της $f(x, y) = x^2y^3$ στο $(1,\ 2,\ 8)$. Έστω l η ευθεία που περιέχεται στο P και διέρχεται από το σημείο $(1, 3, 20)$ και διέρχεται ακριβώς πάνω από το $(2, 1)$. Δηλαδή η l περιέχει το σημείο $(1, 3, 20)$ και ένα σημείο της μορφής $(2, 1, z)$. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της l.

24. Υπολογίστε το $\nabla h(1, 1, 1)$ αν $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$.

25. Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Υπολογίστε το $\nabla f(0, 0, 1)$.

26. Υπολογίστε την κλίση της $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ στο $(1, 0, 1)$.

27. Περιγράψτε όλες τις συνεχείς κατά Hölder συναρτήσεις με $\alpha > 1$ (βλ. Άσκηση 33, Ενότητα 2.2). (Υπόδειξη: Ποια είναι η παράγωγος μιας τέτοιας συνάρτησης;)

28. Υποθέστε ότι η $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση. Ποια είναι η παράγωγος της f;