Εργαστήριο 4

2.3

1. β) βρείτε $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ αν $f(x,y) = e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$$

2. β) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ -

για $z = \log \sqrt{1+xy}$ στα $(1,2)$
$(0,0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+xy}} \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = \frac{2}{\sqrt{1+2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$$

3) β. $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ για $w = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x(x^2-y^2) - (x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2xy^2 - 2x^3 - 2xy^2}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2y(x^2-y^2) - (x^2+y^2)(-2y)}{(x^2-y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2y - 2y^3 + 2x^2y + 2y^3}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$$

4) β) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

για $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy\cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - 2yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-x^2y + y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy\cdot 2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-y^2x + x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ συνεχείς $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$$

$$= 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = I}$$

για $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = 1$

για $y=0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

} άρα το I δεν υπάρχει

άρα η $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$

Βρείτε την εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου της

$z = x^2 + y^3$ στο $(3, 1, 10)$

$f(x,y) = x^2 + y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 3$

$$z = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y-1)$$

$$\Rightarrow z = 10 + 6(x-3) + 3(y-1)$$

$$\Rightarrow 6x + 3y - z - 11 = 0$$

8. Υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο της $z = e^{xy}$ στο $(0,1)$

$f(x,y) = e^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

$f(0,1) = 1$

$$z = 1 + 1\cdot(x-0) + 0(y-1)$$

$$\Rightarrow z = x + 1$$

9. β) Υπολογίστε τον πίνακα μερικών παραγώγων

της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (\underbrace{xe^y + \cos y}_{f_1}, \underbrace{x}_{f_2}, \underbrace{x + e^y}_{f_3})$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^y & xe^y - \sin y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix}$$

10. πίνακα μερικών παραγώγων

$$f(x,y) = (\overbrace{x+y}^{f_1}, \overbrace{x-y}^{f_2}, \overbrace{xy}^{f_3})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{bmatrix}$$

Βρειτε την εξισωση εφαπτομενου επιπεδου της $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2$ που εχει κλιση 2 κατα τη θετική κατευθυνση x και κλιση 4 κατά τη θετική κατευθυνση y

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 2x_0 - 2y_0 = 2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 4y_0 - 2x_0 = 4$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_0 - y_0 = 1 \\ 2y_0 - x_0 = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2y_0 - (1+y_0) = 2$$

$$2y_0 - 1 - y_0 = 2$$

$$\Rightarrow y_0 = 3$$

και $x_0 = 4$

αρα

$$z = f(4,3) + 2(x-4) + 4(y-3)$$

$$= 10 + 2(x-4) + 4(y-3)$$

17. Έστω P εφαπτ. επίπεδο του γραφήματος της $g(x,y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$ στο $(1,2,-6)$.

Έστω $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Βρείτε το σημείο του γραφήματος της f που έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο P.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -4x \quad , \frac{\partial g}{\partial y} = -6y$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(1,2)} = -4 \quad , \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(1,2)} = -12$$

$$z = -6 - 4(x-1) - 12(y-2)$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 12y + z - 22 = 0$$

Έχει κάθετο διάνυσμα το: $(4,12,1)$

άρα τώρα, αν $\vec{v}$ το κάθετο διάνυσμα του εφαπτ. επιπέδου του γραφήματος της f, να ισχύει: $\vec{v} \parallel (4,12,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad , \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = -2x_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad , \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -2y_0$$

Άρα πρέπει $4 = \lambda(-2x_0)$ $\quad(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0)$

$12 = \lambda(-2y_0)$

$x_0, y_0 \neq 0$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x_0} = -\frac{6}{y_0}$$

$$\Rightarrow y_0 = 3x_0$$

και $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

$$\Rightarrow -z - x^2 - y^2 + 4 = 0 \Rightarrow h(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -1$$

Άρα $1 = \lambda(-1)$

$\Rightarrow \lambda = -1$

Άρα $x_0 = 2$

$y_0 = -6$

$$f(2,6) = 4 - 4 - 36 = -36$$

Άρα $(2, 6, -36)$

18. Έστω $f(x,y)=xe^{y^2}-ye^{x^2}$

α) Βρείτε την εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο (1, 2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{y^2}-2xye^{x^2}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)}=e^4-4e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2yxe^{y^2}-e^{x^2}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)}=4e^4-e$$

$$f(1,2)=e^4-2e$$

$$E_1: z=e^4-2e+(e^4-4e)(x-1)+(4e^4-e)(y-2)$$

β) Ποιο σημείο της $z=x^2-y^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο E_2 παράλληλο στο E_1;

E_1: κάθετο διάνυσμα: $(e^4-4e,\ 4e-e,\ -1)$

Για την $h(x,y,z)=x^2-y^2-z$ έχουμε

κάθετο διάνυσμα: $\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)=(2x,-2y,-1)$

άρα πρέπει

$$(e^4-4e,\ 4e^4-e,\ -1)=\lambda(2x_0,-2y_0,-1)$$

άρα $\lambda=1$

άρα $x_0=\frac{e^4-4e}{2}$

και $y_0 = \frac{4e^4 - e}{2}$

και $z_0 = x_0^2 - y_0^2 = (x_0 + y_0)(x_0 - y_0) =$

$$= \left(\frac{e^4 - 4e}{2} + \frac{4e^4 - e}{2}\right)\left(\frac{e^4 - 4e}{2} - \frac{(4e^4 - e)}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{5e^4 - 5e}{2}\right)\left(\frac{-3e^4 - 3e}{2}\right) =$$

$$= -\frac{15}{4}(e^4 - e)(e^4 + e) = \frac{-15}{4}(e^8 - e^2)$$

19. β) υπολογίστε την κλίση της $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{yz(x^2+y^2+z^2) - xyz \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{xz(x^2+y^2+z^2) - xyz \cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{xy(x^2+y^2+z^2) - xyz\, 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(-x^2yz + y^3z + z^3y, -y^2xz + x^3z + z^3x, -xyz^2 + y^3x + x^3y\right)$$

Έστω $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^4+6y^8} & αν\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & αν\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

α) νδο $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ υπάρχουν

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4\cdot 0}{0+6h^8} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

β) νδο η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$

αποδεικνύοντας ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$

για $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} 0 = 0$$

για $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} 0 = 0$$

για $y=\alpha x$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\alpha^4x^4}{x^4+6\alpha^8x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^4x^4}{(1+6\alpha^8x^4)} = 0$

για $x=\alpha y^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^2y^4y^4}{\alpha^4y^8+6y^8} = \frac{\alpha^2}{\alpha^4+6}$$ δεν υπάρχει

άρα f όχι συνεχής στο $(0,0)$ άρα όχι παραγωγίσιμη

23. Έστω P το εφαπτόμενο επίπεδο της $f(x,y) = x^2y^3$ στο $(1,2,8)$. Έστω ℓ η ευθεία που περιέχεται στο P και διέρχεται από το $(1,3,20)$ και διέρχεται ακριβώς πάνω από το $(2,1)$. Δηλ. η ℓ περιέχει το $(1,3,20)$ και ένα σημείο της μορφής $(2,1,z)$. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της ℓ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot1\cdot8 = 16$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot1\cdot4 = 12$$

άρα $P: \; z = 8 + 16(x-1) + 12(y-2)$

$\Rightarrow P: 16x + 12y - z - 32 = 0$

$(1,3,20) \in \ell$

επίσης $(2,1,z) \in \ell$ όμως $(2,1,z) \in P$.

αφού η ευθεία περιέχεται στο επίπεδο

άρα $z = -32 + 16\cdot2 + 12\cdot1 =$
$= 12$

άρα $A = (1,3,20) \in \ell$, $B = (2,1,12) \in \ell$

άρα $\vec{AB} = (1,-2,-8)$ διάνυσμα διεύθυνσης

$l: (x, y, z) = (1, 3, 20) + t(1, -2, -8) \quad t \in R$

28. Υποθέσεις ότι η $f: R^n \to R^m$ είναι γραμμική απεικόνιση. Ποια είναι η παράγωγος της;

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} x_1 + \cdots + \alpha_{1n} x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \cdots + \alpha_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

ο πίνακας μερικών παραγώγων της f είναι

$$Df = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$