Εργαστήριο 5

$\boxed{2.5}$

1. Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη νδο η $x \mapsto f^2(x) + 2f(x)$ επίσης παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης της $Df(x)$.

αφού $f$ παραγωγίσιμη
και $2f$ " (κανόνας σταθερού πολλαπλασίου)
Επίσης $f$ παραγωγίσιμη άρα και $f \cdot f$ παραγωγίσιμη
(κανόνας γινομένου)

Άρα και $f^2 + 2f$ παραγωγίσιμη
(κανόνας αθροίσματος)

Παράγωγος: $2f \cdot Df + 2Df = 2(f+1)Df$

2. Νδο οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και να βρείτε την παράγωγο τους σε τυχόν σημείο

β) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto x+y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ Οι μερικές παράγωγοι

είναι συνεχείς $\forall (x,y)$ άρα $f$ παραγωγίσιμη

S.
A $\quad Df = [1 \quad 1]$

στ) $f: U \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$ όπου

$U = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$ συνεχής στο $U$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$ — // —

άρα $f$: παραγωγίσιμη

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} & \dfrac{-y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{bmatrix}$$

Επαληθεύστε την 2η ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f \circ c$

γ) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}$ , $c(t) = (e^t, e^{-t})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\log\sqrt{x^2+y^2} + \frac{(x^2+y^2)x}{(x^2+y^2)} = x\left(2\log\sqrt{x^2+y^2}+1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\log\sqrt{x^2+y^2} + y = y\left(2\log\sqrt{x^2+y^2}+1\right)$$

άρα αν $h(t) = f(c(t))$

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t) =$$

$$= \left(e^t\left(2\log\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}+1\right), e^{-t}\left(2\log\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}+1\right)\right)\cdot(e^t, -e^{-t})$$

$$= e^{2t}\,2\log\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}} + e^{2t} - e^{-2t}\cdot 2\log\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}} - e^{-2t}$$

$$h(t) = f(c(t)) = (e^{2t}+e^{-2t})\log\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$h'(t) = (2e^{2t}-2e^{-2t})\log\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}} + 2e^{2t} - 2e^{-2t}$$

5. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

παραγωγίσιμες. ΝΔΟ

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

Εστω $h(x) = f(x)g(x)$

από ιδιότητα του γινομένου

$$\nabla h = \nabla(fg) = f\nabla g + g \cdot \nabla f$$

6. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Εφαρμόζοντας στην $f(x,y,z)$ την αντικατάσταση $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$

υπολογίστε $\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z}(\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\sin\theta\cos\varphi) - \frac{\partial f}{\partial z}(\rho\sin\varphi)$$

$f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$

$g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$

$f \circ g$ on $D(f \circ g)(1,1)$

$g(1,1) = (1,0)$

$D(f \circ g)(1,1) =$

$= Df(1,0) \cdot Dg(1,1)$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(u-1)} & -e^v \\ 2u & -2v \end{bmatrix}$$

$$Dg = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$D(f \circ g)(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

1. $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

α) $T'(t)$

$T(\sigma(t)) = t^2$

$T'(t) = 2t$

β) $t = (\frac{\pi}{2}) + 0{,}01$

$T(\frac{\pi}{2}) = [\frac{\pi}{2} + 0{,}01]^2$

11. $f(x,y,z) = (3y+2, x^2+y^2, x+z^2)$

$C(t) = (\cos t, \sin t, t)$

α) $p = f \circ c = (3\sin t + 2, 1, \cos t + t^2)$

$p'(\pi) = ;$

$p'(t) = (3\cos t, 0, 2t - \sin t)$

$p'(\pi) = (-3, 0, 2\pi)$

CamScanner

β) $c(\pi) = (-1, 0, \pi)$

$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$c'(\pi) = (0, -1, 1)$

$Df(-1, 0, \pi)$

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

$$Df(-1, 0, \pi) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

γ) $Df(-1, 0, \pi)(c'(\pi)) =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

2. $h(x,y,z) = (xyz, e^{xz}, x\sin y, -\frac{9}{x}, 17)$

$g(u,v) = (v^2 + 2u, \pi, 2\sqrt{u})$

$D\, h \circ g\, (1,1)$

$$Dh = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ ze^{xz} & 0 & xe^{xz} \\ \sin y & x\cos y & 0 \\ \frac{9}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$g(1,1) = (3, \pi, 2)$

$$Dh(3,\pi,2) = \begin{bmatrix} 2\pi & 6 & 3\pi \\ 2e^6 & 0 & 3e^6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dg = \begin{bmatrix} 2 & 2v \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{u}} & 0 \end{bmatrix}$$



CamScanner

άρα

$D\,h_{o}g\,(1,1) =$

$$= \begin{bmatrix} 2\pi & 6 & 3\pi \\ 2e^{6} & 0 & 3e^{6} \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$= \ldots$

17. Κανόνας αλυσίδας

θ) $\frac{dh}{dx}$ όπου $h(x) = f(x, u(x), v(x))$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}v'(x)$$

9. $G(x, y(x)) = 0$

α) ισο αν οι $y(x)$ και $G$ παραγωγίσιμες

τότε $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y}$ αν $\dfrac{\partial G}{\partial y} \neq 0$

$G(x, y(x)) = 0$ άρα

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

β) $G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$

$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial G_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial G_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} = 0.$$

γ) $x^2 + y^3 + e^y = 0$

$$\frac{d(x^2 + y^3 + e^y)}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + 3y^2 \cdot y'(x) + e^y \cdot y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'(x)\left[e^y + 3y^2\right] = -2x$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x}{e^y + 3y^2}$$

22.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

α) ν.δ.ο $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

β) αν $g(t) = (\alpha t, bt)$ τότε $f \circ g$ παραγωγίσιμη

και $(f \circ g)'(0) = \dfrac{\alpha b^2}{\alpha^2 + b^2}$

αλλά $\nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0$

$$f(g(t)) = \frac{\alpha t \cdot b^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + b^2 t^2} = \frac{\alpha t b^2}{\alpha^2 + b^2}$$

$$f(g(t))' = \frac{\alpha b^2}{\alpha^2 + b^2}$$

$\nabla f(0,0) = 0$ άρα $\nabla f(0,0)\, g'(0) = 0$

3. Ndo αν η $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

παραγ. στο $x_0 \in U$, υπάρχει μια γειτονιά $V$ του $0 \in \mathbb{R}^n$

και μια συνάρτηση $R_1 : V \to \mathbb{R}$ τ.ω $\forall h \in V$

να ισχύει $x_0 + h \in V$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + [Df(x_0)]h + R_1(h)$$

και $\dfrac{R_1(h)}{\|h\|} \to 0$ καθώς $h \to 0$

θέτουμε $R_1(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h$

$\dfrac{R_1(h)}{\|h\|} \to 0$ αφού $f$ παραγωγίσιμη

32: $g(u,v) = (e^u, u + \sin v)$

και $f(x,y,z) = (xy, yz)$

Υπολογίστε την $D(g \circ f)$ στο $(0,1,0)$

$f(0,1,0) = (0,0)$

$Dg = \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ 1 & \cos v \end{bmatrix}$, $Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$Df = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$$

$$Df(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4α

$$D(g \circ f)(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

α) Τι πρέπει να ισχύει για $m, n, p$ και $q$ ώστε η $f \circ g$ να έχει νόημα;

$f(g(x))$

$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$

$g(x_1, \dots, x_p) = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_q)$

πρέπει $n = q$

β) η $g \circ f$;

πρέπει $m = p$

γ) $f \circ f$;

όταν $m = n$

35.

Αν $z = f(x-y)$ νδο $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} (-1)$$

αρα $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$