5.1



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Υπολογίστε τα ακόλουθα διαδοχικά ολοκληρώματα:

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4 y + y^2)dydx$

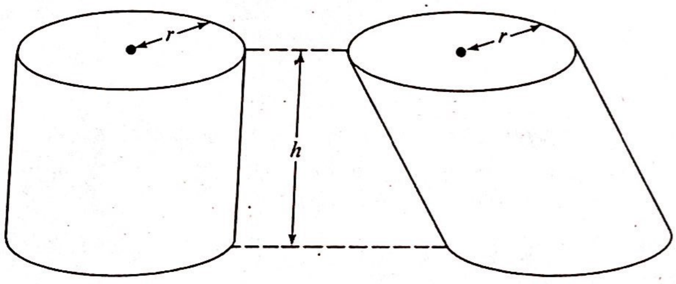
(b) $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1}(y\cos x + 2)dydx$

(c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(xye^{x+y})dydx$

(d) $\int_{-1}^{0}\int_{1}^{2}(-x\log y)dydx$

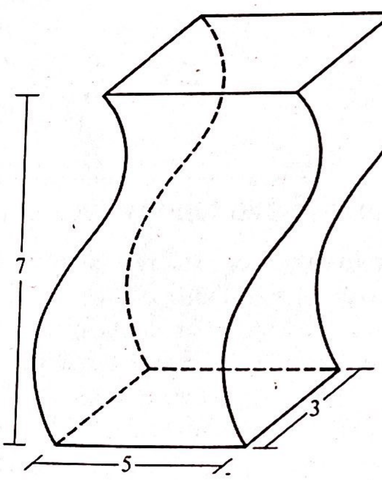
**2.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στην Άσκηση 1 ολοκληρώνοντας ως προς $x$ και μετά ως προς $y$.

**3.** Χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavalieri δείξτε ότι οι όγκοι δύο κυλίνδρων με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος είναι ίσοι (βλέπε Σχήμα 5.1.10).



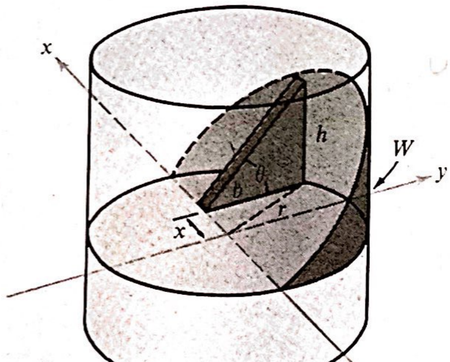

**Σχήμα 5.1.10** Δύο κύλινδροι με την ίδια βάση και ύψος έχουν τον ίδιο όγκο.

**4.** Χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavalieri υπολογίστε τον όγκο της κατασκευής που βλέπετε στο Σχήμα 5.1.11· κάθε διατομή είναι ένα ορθογώνιο μήκους 5 και πλάτους 3.




**Σχήμα 5.1.11** Υπολογίστε αυτόν τον όγκο. 7.

**5.** Ένας υλοτόμος κόβει ένα σφηνοειδές κομμάτι από ένα κυλινδρικό δέντρο ακτίνας $r$, χτυπώντας δύο φορές με το τσεκούρι του ώς το κέντρο του δέντρου, τη μια φορά οριζόντια και την άλλη με γωνία $\theta$. Υπολογίστε τον όγκο της σφήνας $W$ χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavalieri. (Δείτε το Σχήμα 5.1.12.)



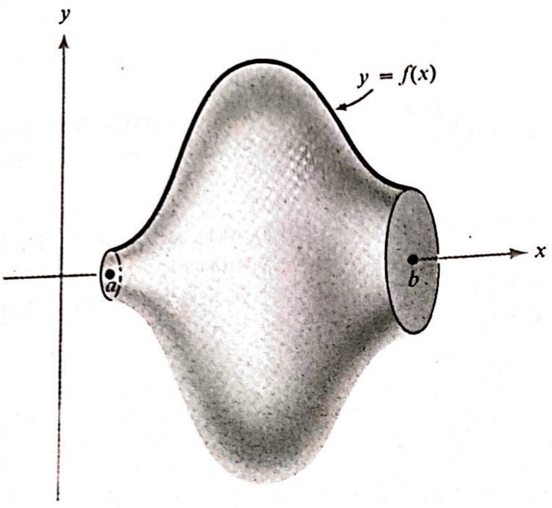

**Σχήμα 5.1.12** Βρείτε τον όγκο του $W$.

**6.** (a) Αποδείξτε (όχι αυστηρά) ότι ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής που φαίνεται στο Σχήμα 5.1.13 είναι

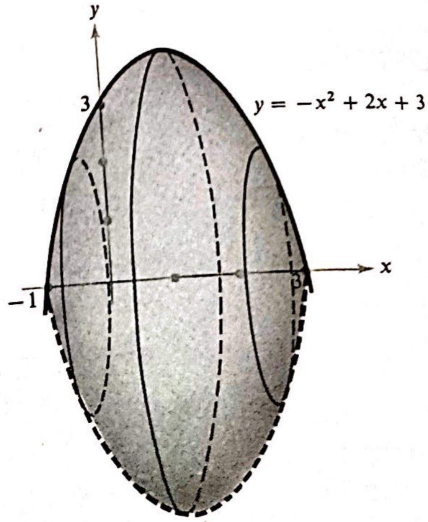
$$\pi\int_{a}^{b}[f(x)]^2dx.$$

5.1






**Σχήμα 5.1.13** Αυτό το στερεό εκ περιστροφής έχει όγκο $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.




**Σχήμα 5.1.14** Περιστροφή του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα της $y = -x^2 + 2x + 3$ και τον άξονα $x$ γύρω από τον άξονα $x$.

(b) Δείξτε ότι ο όγκος του χωρίου που παίρνουμε αν περιστρέψουμε το χωρίο κάτω από το γράφημα της παραβολής $y = -x^2 + 2x + 3, -1 \leq x \leq 3$, γύρω από τον άξονα $x$ είναι $512\pi/15$ (βλέπε Σχήμα 5.1.14).

*Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 7 ώς 9, όπου $R$ είναι το ορθογώνιο* $[0,2] \times [-1,0]$.

**7.** $\int_R (x^2y^2 + x) dydx$

**8.** $\int_R (|y| \cos \frac{1}{4}\pi x) dydx$

**9.** $\int_R (-xe^x \sin \frac{1}{2}\pi y) dydx$

**10.** Βρείτε τον όγκο που περικλείεται ανάμεσα στο γράφημα της $f(x,y) = 1+2x+3y$, το ορθογώνιο $[1,2] \times [0,1]$, και τις τέσσερις κατακόρυφες πλευρές του ορθογωνίου $R$ όπως στο Σχήμα 5.1.1.

**11.** Επαναλάβετε την Άσκηση 10 για την επιφάνεια $f(x,y) = x^4 + y^2$ και το ορθογώνιο $[-1,1] \times [-3,-2]$.

# 5.2

## Το Διπλό Ολοκλήρωμα Πάνω από ένα Ορθογώνιο

Είμαστε έτοιμοι να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό του διπλού ολοκληρώματος σαν το όριο μιας ακολουθίας αθροισμάτων. Μετά, θα τον χρησιμοποιήσουμε για να *ορίσουμε* τον όγκο του χωρίου κάτω από το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x,y)$. Δεν θα απαιτήσουμε να ισχύει $f(x,y) \geq 0$, αλλά αν η $f(x,y)$ παίρνει αρνητικές τιμές θα ερμηνεύσουμε το ολοκλήρωμα σαν προσημασμένον όγκο, όπως ακριβώς κάνουμε για το εμβαδόν κάτω από το γράφημα μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Επίσης, θα συζητήσουμε μερικές από τις θεμελιώδεις αλγεβρικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος και θα αποδείξουμε το θεώρημα του Fubini, σύμφωνα με το οποίο το διπλό ολοκλήρωμα είναι δυνατόν να υπολογιστεί σαν διαδοχικό ολοκλήρωμα. Για να ξεκινήσουμε, ας δώσουμε τον απαραίτητο συμβολισμό για τις διαμερίσεις και τα αθροίσματα.

5.2

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα αν $R = [0,1] \times [0,1]$.
   (a) $\int_R (x^3 + y^2) dA$ (b) $\int_R y e^{xy} dA$
   (c) $\int_R (xy)^2 \cos x^3 dA$ (d) $\int_R \ln[(x+1)(y+1)] dA$

2. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα αν $R = [0,1] \times [0,1]$.
   (a) $\int_R (x^m y^n) dx dy$, όταν $m, n > 0$
   (b) $\int_R (ax + by + c) dx dy$
   (c) $\int_R \sin(x + y) dx dy$
   (d) $\int_R (x^2 + 2xy + y\sqrt{x}) dx dy$

3. Έστω $f$ συνεχής, $f \geq 0$, στο ορθογώνιο $R$. Αν $\int_R f dA = 0$, αποδείξτε ότι $f = 0$ στο $R$.

4. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται ανάμεσα στο επίπεδο $xz$, το επίπεδο $yz$, το επίπεδο $xy$, τα επίπεδα $x = 1$ και $y = 1$, και την επιφάνεια $z = x^2 + y^4$.

5. Έστω $f$ συνεχής στο $[a, b]$ και $g$ συνεχής στο $[c, d]$. Δείξτε ότι

$$\int_R [f(x)g(y)] dx dy = \left[\int_a^b f(x) dx\right] \left[\int_c^d g(y) dy\right],$$

όπου $R = [a, b] \times [c, d]$.

6. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από την επιφάνεια $z = \sin y$, τα επίπεδα $x = 1, x = 0, y = 0$ και $y = \pi/2$ και το επίπεδο $xy$.

7. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από το γράφημα $z = x^2 + y$, το ορθογώνιο $R = [0,1] \times [1,2]$ και τις "κατακόρυφες πλευρές" του $R$.

8. Έστω $f$ συνεχής στο $R = [a, b] \times [c, d]$. Για $a < x < b, c < y < d$, ορίζουμε

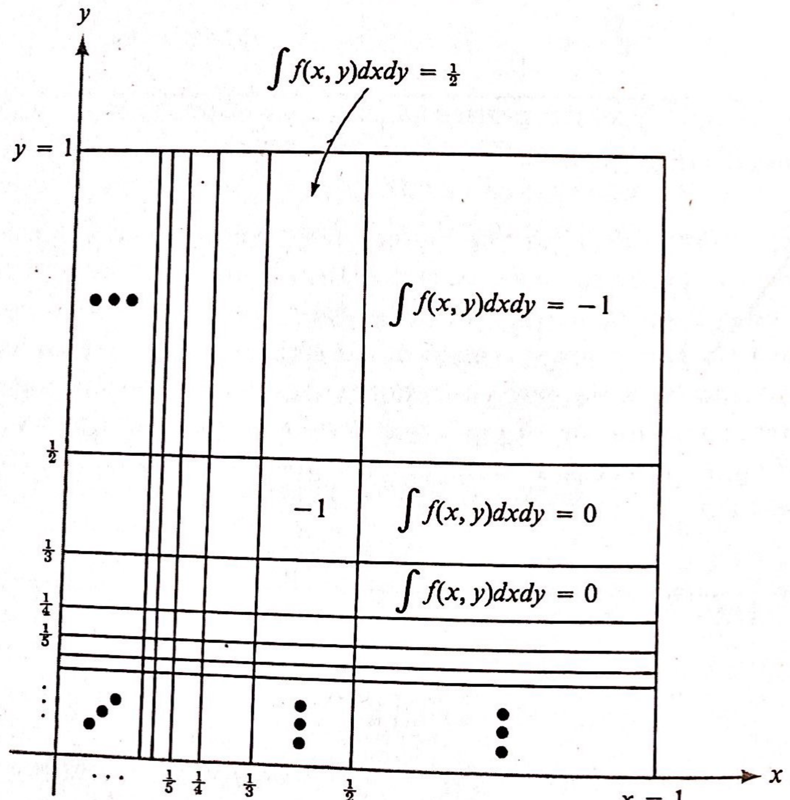
$$F(x, y) = \int_a^x \int_b^y f(u, v) dv du.$$

Δείξτε ότι $\partial^2 F/\partial x \partial y = \partial^2 F/\partial y \partial x = f(x, y)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το παράδειγμα, συζητήστε τη σχέση του θεωρήματος του Fubini με την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων (δείτε την Παράγραφο 2.6).

*9. Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ ρητός} \\ 2y & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Δείξτε ότι το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) dy] dx$ υπάρχει, αλλά η $f$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.




**Σχήμα 5.2.9** Κατασκευή μιας συνάρτησης που δεν ικανοποιεί το θεώρημα του Fubini (Άσκηση 11).

5.2



***10.** Εκφράστε το $\int_R \cosh xy dx dy$ σαν μια συγκλίνουσα σειρά, όπου $R = [0,1] \times [0,1]$.

***11.** Αν και το θεώρημα του Fubini ισχύει για τις περισσότερες συναρτήσεις που συναντάμε στην πράξη, πρέπει να είμαστε και λίγο προσεκτικοί. Σίγουρα δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις. Για παράδειγμα, φανταστείτε ότι χωρίζουμε το μοναδιαίο τετράγωνο σε άπειρα το πλήθος ορθογώνια της μορφής $[1/(m+1), 1/m] \times [1/(n+1), 1/n]$, όπως στο Σχήμα 5.2.9. Ορίστε μετά την $f$ με τέτοιο τρόπο ώστε ο όγκος κάτω από το γράφημα της $f$ σε κάθε ορθογώνιο να παίρνει τιμές σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cdots$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| $\cdots$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $0$ |
| $\cdots$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Ορίζουμε την $f$ να παίρνει την τιμή μηδέν στο (0, 0). Το άθροισμα σε κάθε γραμμή είναι μηδέν, οπότε προσθέτοντας πρώτα κατά γραμμές και μετά κατά στήλες, παίρνουμε σαν αποτέλεσμα μηδέν. Από την άλλη πλευρά τα αθροίσματα κατά στήλες είναι τα

$$\cdots \quad -\tfrac{1}{32} \quad -\tfrac{1}{16} \quad -\tfrac{1}{8} \quad -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{2} \quad -1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά στήλες και μετά κατά γραμμές παίρνουμε σαν αποτέλεσμα $-2$. Γιατί το θεώρημα του Fubini δεν ισχύει γι' αυτή την συνάρτηση;

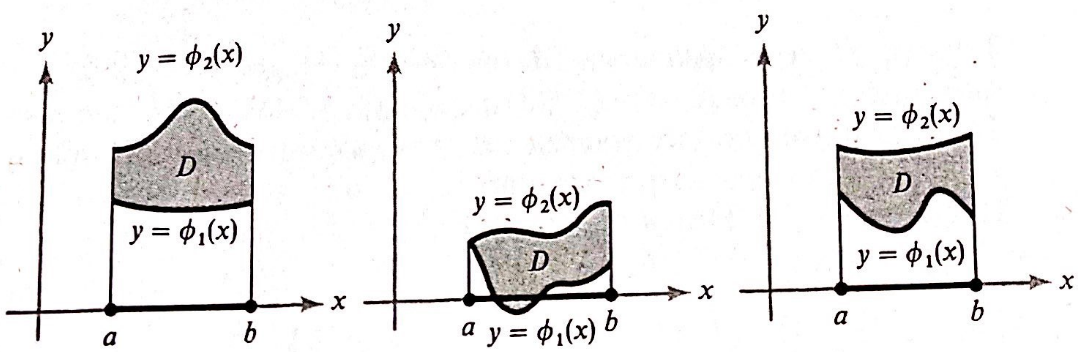
# 5.3

## Το Διπλό Ολοκλήρωμα Πάνω από πιο Γενικά Χωρία

Ο στόχος μας σ' αυτή την παράγραφο είναι διπλός: πρώτα, θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)dA$ για χωρία $D$ πιο γενικά από ορθογώνια· και, δεύτερον, θέλουμε να αναπτύξουμε μια τεχνική για να υπολογίζουμε τέτοιου είδους ολοκληρώματα. Για να το πετύχουμε, θα ορίσουμε τρεις ειδικούς τύπους υποσυνόλων του επιπέδου $xy$, και μετά θα επεκτείνουμε την έννοια του διπλού ολοκληρώματος σ' αυτά.

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνουν δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $\phi_1 : [a,b] \to \mathbf{R}, \phi_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$, που ικανοποιούν την $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ για κάθε $x$ στο $[a,b]$. Έστω $D$ το σύνολο όλων των σημείων $(x,y)$ για τα οποία

$$x \in [a,b], \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x).$$




**Σχήμα 5.3.1** Μερικά χωρία τύπου 1.