ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω D ο μοναδιαίος δίσκος. Υπολογίστε το

$$\int_D \exp(x^2 + y^2)dxdy$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες.

2. Έστω D το χωρίο $0 \leq y \leq x$ και $0 \leq x \leq 1$. Υπολογίστε το

$$\int_D (x + y)dxdy$$

κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $x = u+v, y = u - v$. Ελέγξτε την απάντησή σας υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα απ' ευθείας με χρήση διαδοχικής ολοκλήρωσης.

3. Έστω $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ η απεικόνιση που ορίζεται από την $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Έστω D^* το ορθογώνιο $[0, 1] \times [0, 2]$. Βρείτε το $D = T(D^*)$ και υπολογίστε τα
(a) $\int_D xydxdy$ (b) $\int_D (x - y)dxdy$
κάνοντας αλλαγή μεταβλητών έτσι ώστε να τα υπολογίσετε σαν ολοκληρώματα στο D^*.

4. Επαναλάβετε την Άσκηση 3 για την $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.

5. Υπολογίστε το

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 + x + 2y}}$$

όπου $D = [0, 1] \times [0, 1]$, θέτοντας $T(u, v) = (u, v/2)$ και υπολογίζοντας ένα ολοκλήρωμα πάνω στο D^*, όπου $T(D^*) = D$.

6. Ορίζουμε $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Θέτουμε D^* το σύνολο των (u, v) με $u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0$. Βρείτε το $T(D^*) = D$. Υπολογίστε το $\int_D dxdy$.

7. Θέτουμε $T(u, v)$ όπως στην Άσκηση 6. Κάνοντας αυτή την αλλαγή μεταβλητών υπολογίστε το

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. Υπολογίστε το $\int_R \frac{1}{x + y} dydx$, όπου R είναι το χωρίο που φράσσεται από τις $x = 0, y = 0, x + y = 1, x + y = 4$, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

9. Υπολογίστε το $\int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dxdy$ όπου D είναι ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq 4$.

10. Έστω D^* ένα χωρίο τύπου 1 στο επίπεδο uv, το οποίο φράσσεται από τις

$$v = g(u), \qquad v = h(u) \leq g(u)$$

για $a \leq u \leq b$. Έστω $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ο μετασχηματισμός που δίνεται από τις

$$x = u, \qquad y = \psi(u, v),$$

όπου η ψ είναι της κλάσεως C^1 και η $\partial\psi/\partial v$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Υποθέτουμε ότι το $T(D^*) = D$ είναι ένα χωρίο τύπου 1· δείξτε ότι αν η $f : D \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής, τότε ισχύει ο τύπος

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{D^*} f(u, \psi(u,v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| dudv.$$

11. Χρησιμοποιώντας διπλά ολοκληρώματα βρείτε το εμβαδόν του εσωτερικού της καμπύλης $r = 1 + \sin\theta$.

12. (a) Εκφράστε το $\int_0^1 \int_0^{x^2} xydydx$ σαν ένα ολοκλήρωμα πάνω στο τρίγωνο D^*, το οποίο είναι το σύνολο των (u,v) με $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Βρείτε μια ένα-προς-ένα απεικόνιση T του D^* επί του δοσμένου πεδίου ολοκλήρωσης.)
(b) Υπολογίστε αυτό το ολοκλήρωμα απ' ευθείας πάνω στο D^*.

13. Ολοκληρώστε την $ze^{x^2+y^2}$ πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$.

14. Έστω D ο μοναδιαίος δίσκος. Εκφράστε το $\int_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dxdy$ σαν ένα ολοκλήρωμα πάνω στο ορθογώνιο $[0,1] \times [0, 2\pi]$ και υπολογίστε το.

15. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τον *λημνίσκο* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

16. Επαναλάβετε την Άσκηση 11 της Παραγράφου 5.3 χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητών και κάντε σύγκριση των δύο μεθόδων από άποψη δυσκολίας.

17. Υπολογίστε το $\int_R (x + y)^2 e^{x-y} dxdy$ όπου R είναι το χωρίο που φράσσεται από τις $x + y = 1, x + y = 4, x - y = -1$ και $x - y = 1$.

18. Έστω ότι η $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ορίζεται από τη σχέση

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w).$$

(a) Δείξτε ότι η T είναι επί της μοναδιαίας σφαίρας· δηλαδή, κάθε (x, y, z) με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ γράφεται σαν $(x, y, z) = T(u, v, w)$ για κάποιο (u, v, w).
(b) Δείξτε ότι η T δεν είναι ένα-προς-ένα.

19. Ολοκληρώστε την $x^2 + y^2 + z^2$ πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq y \leq 3$.

20. Δείξτε ότι η απεικόνιση της αλλαγής σε σφαιρικές συντεταγμένες $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$ είναι ένα-προς-ένα εκτός από ένα σύνολο που είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων.

21. Έστω B η μοναδιαία μπάλα. Υπολογίστε το

$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

22. Υπολογίστε το $\int\int_A 1/(x^2 + y^2)^2 dxdy$ όπου το A ορίζεται από τις συνθήκες $x^2 + y^2 \leq 1$ και $x + y \geq 1$.

23. Υπολογίστε το $\displaystyle\int_S \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ όπου S είναι το στερεό που περιβάλλεται από τις δύο σφαίρες $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, όπου $0 < b < a$.

24. Υπολογίστε το $\int\int_D x^2 dxdy$ όπου το D ορίζεται από τις δύο συνθήκες $0 \leq x \leq y$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.

25. Ολοκληρώστε την $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ πάνω στο χωρίο που περιγράφεται στην Άσκηση 23.

26. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογίστε τα εξής:
(a) $\int\int\int_B zdxdydz$ όπου B είναι το χωρίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$, πάνω από το επίπεδο xy και κάτω από τον κώνο $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
(b) $\int\int\int_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dxdydz$ όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

27. Υπολογίστε το $\int\int_B (x + y)dxdy$ όπου B είναι το ορθογώνιο στο επίπεδο xy με κορυφές τα (0, 1), (1, 0), (3, 4) και (4, 3).

28. Υπολογίστε το $\int\int_D (x + y)dxdy$ όπου D είναι το τετράγωνο με κορυφές τα (0, 0), (1, 2), (3, 1) και (2, −1).

29. Έστω E το ελλειψοειδές $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$, όπου οι a, b και c είναι θετικοί.

(a) Βρείτε τον όγκο του E.

(b) Υπολογίστε το $\int\int\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] dxdydz$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αλλάξτε μεταβλητές και μετά χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες.)

30. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (βλέπε Παράγραφο 1.4), υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(\rho, \phi, \theta) = 1/\rho$ πάνω στο χωρίο του πρώτου ογδοημορίου του $\mathbf{R}^3$, το οποίο φράσσεται από τους κώνους $\phi = \pi/4, \phi = \arctan 2$ και τη σφαίρα $\rho = \sqrt{6}$.

***31.** Η απεικόνιση $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ μετασχηματίζει το ορθογώνιο $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$ του επιπέδου uv σε ένα χωρίο R του επιπέδου xy.

(a) Δείξτε ότι η T είναι ένα-προς-ένα.

(b) Βρείτε το εμβαδόν του R χρησιμοποιώντας τον τύπο της αλλαγής μεταβλητών.

***32.** Με R συμβολίζουμε το χωρίο στο εσωτερικό του $x^2 + y^2 = 1$, αλλά έξω από την $x^2 + y^2 = 2y$ με $x \geq 0, y \geq 0$.

(a) Σχεδιάστε αυτό το χωρίο.

(b) Θέτουμε $u = x^2 + y^2, v = x^2 + y^2 - 2y$. Σχεδιάστε το χωρίο D στο επίπεδο uv, το οποίο αντιστοιχεί στο R κάτω απ' αυτή την αλλαγή συντεταγμένων.

(c) Υπολογίστε το $\int_R xe^y dxdy$ κάνοντας αυτή την αλλαγή μεταβλητών.

***33.** Έστω D το χωρίο που φράσσεται από την $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ με $x \geq 0, y \geq 0$, και τους άξονες συντεταγμένων $x = 0, y = 0$. Εκφράστε το $\int_D f(x, y) dxdy$ σαν ένα ολοκλήρωμα πάνω στο τρίγωνο D^*, το οποίο είναι το σύνολο των σημείων (u, v), όπου $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a - u$. (Μην επιχειρήσετε να το υπολογίσετε.)