$\boxed{7.1}$

(3) b) $f(x,y,z) = yz$

$\sigma : t \to (t, 3t, 2t) \quad , t \in [1,3]$

$\sigma'(t) = (1, 3, 2) \quad , \quad \|\sigma'(t)\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$f(\sigma(t)) = 3t \cdot 2t = 6t^2$

$$\int_1^3 6t^2 \sqrt{14}\, dt = 6\sqrt{14} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=1}^{t=3} = 6\sqrt{14} \cdot \frac{26}{3} = 52\sqrt{14}.$$

(5) $f(x,y,z) = 1/y^3$

$\sigma : [1, e] \to R^3 \quad , \sigma(t) = \log t\, i + t j + 2k$

$\sigma'(t) = \left(\frac{1}{t}, 1, 0 \right), \quad \|\sigma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}$

$f(\sigma(t)) = \frac{1}{t^3}$

$$\int_1^e \sqrt{\frac{1}{t^2}+1} \cdot \frac{1}{t^3}\, dt = \left[\frac{(t^{-2}+1)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{(-2)} \right]_1^e =$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)^{3/2} - 2^{3/2} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{1+e^2}}{3e^3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

(12) $f:[\alpha,b]\to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 συνεχώς παραγωγίσιμη. Το μήκος του γραφήματος f στο $[\alpha,b]$ είναι το μήκος της καμπύλης $t\to(t,f(t))$, $t\in[\alpha,b]$

α) νδο το μήκος του γραφήματος της f είναι

$$\int_\alpha^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

β) μήκος της $y=\log x$ από $x=1$ έως $x=2$

α) $\gamma(t)=(t,f(t))$

$$L(\gamma(t))=\int_\alpha^b \|\gamma'(t)\|\,dt=\int_\alpha^b \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$

β) $\gamma(t)=(t,\log t)$, $t\in[1,2]$

$$L(\gamma(t))=\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt =$$

$$=\int_1^2 \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt$$

Θέτω $\sqrt{t^2+1}=u$

$$du=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

για $t=1$, $u=\sqrt{2}$

$t=2$, $u=\sqrt{5}$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2+1-1}{(u-1)(u+1)}\,du =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{(u-1)(u+1)} + 1 \; du$$

$$* \quad \frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$A(u+1) + B(u-1) = 1 \Rightarrow (A+B)u + A-B = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A-B=1 \\ A+B=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1/2 \\ B=-1/2 \end{array}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} + 1 \; du =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u+1) + u\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\ln(\sqrt{5}-1)}{2} - \frac{\ln(\sqrt{5}+1)}{2} + \sqrt{5} - \frac{1}{2}\left(\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1)\right) - \sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\ln 1}^{\,0} - \sqrt{2} + \sqrt{5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) + \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

(13) Μάζα σύρματος που έχει το σχήμα της τομής της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ με το επίπεδο $x+y+z=0$ αν η πυκνότητα μάζας δίνεται από την $\rho(x,y,z)=x^2$ gr ανά μονάδα σύρματος

η τομή είναι δίσκος κέντρου $(0,0,0)$ με σύνορο μέγιστο κύκλο της σφαίρας.

το επίπεδο έχει παραμέτρηση

$$\varphi(x,y)=(x,y,-x-y)$$

$$\varphi_x=(1,0,-1),\quad \varphi_y=(0,1,-1)$$

$$\varphi_x\times\varphi_y=(1,1,1),\quad \|\varphi_x\times\varphi_y\|=\sqrt{3}$$

$$x^2+y^2+(x+y)^2\leq 1 \quad \text{οπου}$$

$$I=\sqrt{3}\iint\limits_{x^2+y^2+(x+y)^2\leq 1} x^2\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2+xy=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{τριώνυμο ως προς } y$$

$$y^2+xy+x^2-\frac{1}{2}=0,\quad \Delta=2-3x^2\geq 0$$

$$\Delta>0,\ y=\frac{-x\pm\sqrt{2-3x^2}}{2}$$

$$\text{αν } \Delta=0,\quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$I = \sqrt{3} \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \int_{\frac{-x-\sqrt{2-3x^2}}{2}}^{\frac{-x+\sqrt{2-3x^2}}{2}} x^2 \, dy \, dx = \ldots$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin t}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \, (\sin t)' \, dt = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Scanned with CamScanner