ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε το $\int_S xy dS$, όπου S είναι η επιφάνεια του τετραέδρου με πλευρές $z = 0, y = 0, x + z = 1$ και $x = y$.

2. Έστω $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση μιας επιφάνειας S που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

(a) Θέτουμε

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

δηλαδή, $\partial \mathbf{\Phi}/\partial u = \mathbf{T}_u$ και $\partial \mathbf{\Phi}/\partial v = \mathbf{T}_v$ καθώς και

$$E = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}, \quad G = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2.$$

Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας S είναι $\int_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv$. Μ' αυτό τον συμβολισμό, πώς μπορούμε να εκφράσουμε το $\int_S f dS$ για μια γενική συνάρτηση f;

(b) Ποιά μορφή παίρνει ο τύπος αν τα διανύσματα $\partial \mathbf{\Phi}/\partial u$ και $\partial \mathbf{\Phi}/\partial v$ είναι ορθογώνια;

(c) Χρησιμοποιώντας τα μέρη (a) και (b) υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας a.

3. Υπολογίστε το $\int_S z dS$, όπου S είναι το άνω ημισφαίριο ακτίνας a, δηλαδή, το σύνολο των (x, y, z) με $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

4. Υπολογίστε το $\int_S (x+y+z) dS$, όπου S είναι το σύνορο της μοναδιαίας μπάλας B, δηλαδή S είναι το σύνολο των (x, y, z) με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του προβλήματος.)

5. Υπολογίστε το $\int_S xyz dS$, όπου S είναι το τρίγωνο με κορυφές τα (1, 0, 0), (0, 2, 0) και (0, 1, 1).

* **6.** Έστω ότι μία επιφάνεια S ορίζεται πεπλεγμένα από την $F(x, y, z) = 0$ για (x, y) σε ένα χωρίο D του $\mathbf{R}^2$. Δείξτε ότι

$$\int_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dS = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\, dx dy$$

Συγκρίνατε με την Άσκηση 18 της Παραγράφου 7.4.

7. Υπολογίστε το $\int_S z dS$, όπου S είναι η επιφάνεια $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$.

8. Υπολογίστε το $\int_S z^2 dS$, όπου S είναι το σύνορο του κύβου $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Υπολογίστε για κάθε έδρα χωριστά και προσθέστε τα αποτελέσματα.)

9. Βρείτε τη μάζα μιας σφαιρικής επιφάνειας S ακτίνας R, αν σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in S$ η πυκνότητα είναι ίση με την απόσταση του (x, y, z) από κάποιο σταθερό σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

10. Μια μεταλλική επιφάνεια S έχει το σχήμα ημισφαιρίου με εξίσωση $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. Η πυκνότητα στο $(x, y, z) \in S$ δίνεται από την $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Βρείτε τη συνολική μάζα της S.

11. Έστω S η σφαίρα ακτίνας R. Βινιζω

(a) Δείξτε ότι, λόγω συμμετρίας,

$$\int_S x^2 dS = \int_S y^2 dS = \int_S z^2 dS.$$

(b) Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός και το κατάλληλο τέχνασμα, υπολογίστε, με πολύ λίγες πράξεις, το ολοκλήρωμα

$$\int_S x^2 dS.$$

(c) Σας βοηθάει αυτό για την Άσκηση 10;

12. (a) Χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann δικαιολογήστε τον τύπο ισχυαί

$$\frac{1}{A(S)} \int_S f(x, y, z) dS$$

σαν τη *μέση τιμή* της f πάνω στην επιφάνεια S.

(b) Στο Παράδειγμα 3 αυτής της παραγράφου, δείξτε ότι η μέση τιμή της $f(x, y, z) = z^2$ είναι $\frac{1}{3}$.

(c) Ορίζουμε το *κέντρο βάρους* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ μιας επιφάνειας S να είναι τέτοιο ώστε τα $\bar{x}, \bar{y}$ και $\bar{z}$ να είναι οι μέσες τιμές των συντεταγμένων x, y και z στη S. Δείξτε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου του Παραδείγματος 4 αυτής της παραγράφου είναι το $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

13. Βρείτε τις συντεταγμένες x, y και z του κέντρου βάρους του ογδοημορίου της σφαίρας ακτίνας ποίηση μιας επιφάνειας S που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

(a) Θέτουμε

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

δηλαδή, $\partial \mathbf{\Phi}/\partial u = \mathbf{T}_u$ και $\partial \mathbf{\Phi}/\partial v = \mathbf{T}_v$ καθώς και

$$E = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}, \quad G = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2.$$

Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας S είναι $\int_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$. Μ' αυτό τον συμβολισμό, πώς μπορούμε να εκφράσουμε το $\int_S f\,dS$ για μια γενική συνάρτηση f;

(b) Ποιά μορφή παίρνει ο τύπος αν τα διανύσματα $\partial \mathbf{\Phi}/\partial u$ και $\partial \mathbf{\Phi}/\partial v$ είναι ορθογώνια;

(c) Χρησιμοποιώντας τα μέρη (a) και (b) υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας a.

3. Υπολογίστε το $\int_S z\,dS$, όπου S είναι το άνω ημισφαίριο ακτίνας a, δηλαδή, το σύνολο των (x, y, z) με $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

4. Υπολογίστε το $\int_S (x+y+z)\,dS$, όπου S είναι το σύνορο της μοναδιαίας μπάλας B, δηλαδή S είναι το σύνολο των (x, y, z) με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του προβλήματος.)

5. Υπολογίστε το $\int_S xyz\,dS$, όπου S είναι το τρίγωνο με κορυφές τα (1, 0, 0), (0, 2, 0) και (0, 1, 1).

* **6.** Έστω ότι μία επιφάνεια S ορίζεται πεπλεγμένα από την $F(x, y, z) = 0$ για (x, y) σε ένα χωρίο D του $\mathbf{R}^2$. Δείξτε ότι

$$\int_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dS = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dy$$

Συγκρίνατε με την Άσκηση 18 της Παραγράφου 7.4.

7. Υπολογίστε το $\int_S z\,dS$, όπου S είναι η επιφάνεια $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

8. Υπολογίστε το $\int_S z^2\,dS$, όπου S είναι το σύνορο του κύβου $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Υπολογίστε για κάθε έδρα χωριστά και προσθέστε τα αποτελέσματα.)

9. Βρείτε τη μάζα μιας σφαιρικής επιφάνειας S ακτίνας R, αν σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in S$ η πυκνότητα είναι ίση με την απόσταση του (x, y, z) από κάποιο σταθερό σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

10. Μια μεταλλική επιφάνεια S έχει το σχήμα ημισφαιρίου με εξίσωση $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$. Η πυκνότητα στο $(x, y, z) \in S$ δίνεται από την $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Βρείτε τη συνολική μάζα της S.

11. Έστω S η σφαίρα ακτίνας R. βινιω

(a) Δείξτε ότι, λόγω συμμετρίας,

$$\int_S x^2\,dS = \int_S y^2\,dS = \int_S z^2\,dS.$$

(b) Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός και το κατάλληλο τέχνασμα, υπολογίστε, με πολύ λίγες πράξεις, το ολοκλήρωμα

$$\int_S x^2\,dS.$$

(c) Σας βοηθάει αυτό για την Άσκηση 10;

12. (a) Χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann δικαιολογήστε τον τύπο

$$\frac{1}{A(S)} \int_S f(x, y, z)\,dS$$

σαν τη *μέση τιμή* της f πάνω στην επιφάνεια S.

(b) Στο Παράδειγμα 3 αυτής της παραγράφου, δείξτε ότι η μέση τιμή της $f(x, y, z) = z^2$ είναι $\frac{1}{3}$.

(c) Ορίζουμε το *κέντρο βάρους* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ μιας επιφάνειας S να είναι τέτοιο ώστε τα $\bar{x}, \bar{y}$ και $\bar{z}$ να είναι οι μέσες τιμές των συντεταγμένων x, y και z στη S. Δείξτε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου του Παραδείγματος 4 αυτής της παραγράφου είναι το $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

13. Βρείτε τις συντεταγμένες x, y και z του κέντρου βάρους του ογδοημορίου της σφαίρας ακτίνας

R που ορίζεται από τις $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Γράψτε το ογδοημόριο σαν παραμετρικοποιημένη επιφάνεια –δείτε το Παράδειγμα 3 αυτής της παραγράφου και την Άσκηση 12.)

14. Βρείτε τη συντεταγμένη z του κέντρου βάρους (τη μέση συντεταγμένη z) της επιφάνειας ενός ημισφαιρίου ($z \leq 0$) ακτίνας r (δείτε την Άσκηση 12). Δείξτε ότι, λόγω συμμετρίας, οι μέσες συντεταγμένες x και y είναι ίσες με μηδέν.

***15.** Ορίζουμε το *συναρτησοειδές του Dirichlet* μιας παραμετρικοποιημένης επιφάνειας $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ μέσω της

$$J(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2}\int_D \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\|^2 \right) du dv.$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 15, της Παραγράφου 1.5, αποδείξτε ότι για το εμβαδόν ισχύει η ανισότητα $A(\mathbf{\Phi}) \leq J(\mathbf{\Phi})$ και ισότητα ισχύει αν

$$\text{(a)} \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\|^2 \quad \text{και (b)} \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = 0.$$

Συγκρίνατε αυτές τις εξισώσεις με την Άσκηση 2 και τις παρατηρήσεις στο τέλος της Παραγράφου 7.4. Μια παραμετρικοποίηση $\mathbf{\Phi}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (a) και (b) λέγεται *σύμμορφη*.

***16.** Έστω $D \subset \mathbf{R}^2$ και $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^2$ μία ομαλή συνάρτηση $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (a) και (b) της Άσκησης 15. Δείξτε ότι οι x και y ικανοποιούν τις εξισώσεις *Cauchy-Riemann* $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v, \partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$ ή τις συζυγείς εξισώσεις *Cauchy-Riemann* $\partial x/\partial u = -\partial y/\partial v, \partial x/\partial v = \partial y/\partial u$. Συμπεράνατε ότι $\nabla^2 \mathbf{\Phi}$=0 (δηλαδή, κάθε συνιστώσα της $\mathbf{\Phi}$ είναι αρμονική).

17. (a) Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος του κώνου $x^2 + y^2 = z^2$ με $z \geq 0$, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, R > 0$.

(b) Ποιό είναι το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας που βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου;

***18.** Εστω S μια σφαίρα ακτίνας r και $\mathbf{p}$ ένα σημείο μέσα ή έξω από τη σφαίρα (όχι όμως πάνω σ' αυτήν). Δείξτε ότι

$$\int_S \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{αν το } \mathbf{p} \text{ είναι μέσα στην } S \\ 4\pi r^2/d & \text{αν το } \mathbf{p} \text{ είναι έξω από την } S \end{cases}$$

όπου d είναι η απόσταση του $\mathbf{p}$ από το κέντρο της σφαίρας και η ολοκλήρωση είναι ως προς $\mathbf{x}$.

19. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του τμήματος του κυλίνδρου $x^2 + z^2 = a^2$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2ay$ και στο θετικό ογδοημόριο ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Υποθέτουμε ότι $a > 0$.