

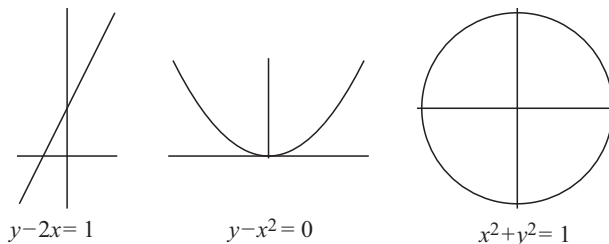
1

Καμπύλες στο επίπεδο και στον χώρο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διατυπώσουμε μαθηματικά, με δύο τρόπους, τη διαισθητική έννοια της καμπύλης. Όπως θα διαπιστώσουμε, η ακριβής σχέση μεταξύ των δύο μορφών καμπύλης που θα παρουσιάσουμε είναι πολύ λεπτή, γι' αυτό θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας μερικά παραδείγματα καμπυλών από την κάθε μορφή καθώς και πρακτικούς τρόπους για να μεταβαίνουμε από τη μία μορφή καμπύλης στην άλλη.

1.1 Τι είναι καμπύλη;

Εάν μας ζητηθεί να δώσουμε ένα παράδειγμα καμπύλης, μπορούμε να σκεφτούμε μια ευθεία, έστω την $y - 2x = 1$ (αν και αυτή δεν είναι «καμπυλωμένη»!), έναν κύκλο, έστω τον $x^2 + y^2 = 1$, ή ίσως μια παραβολή, έστω την $y - x^2 = 0$.



Σχήμα 1.1.

Όλες αυτές οι καμπύλες περιγράφονται μέσω της καρτεσιανής τους εξίσωσης

$$f(x, y) = c,$$

όπου f είναι μια συνάρτηση των x και y , και c μια σταθερά. Από αυτήν την άποψη μια καμπύλη είναι ένα σύνολο σημείων, δηλαδή

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}. \quad (1.1)$$

Όλα τα παραπάνω είναι παραδείγματα καμπυλών του επιπέδου \mathbb{R}^2 , αλλά μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε καμπύλες στο \mathbb{R}^3 –για παράδειγμα, ο άξονας x του \mathbb{R}^3 είναι η ευθεία που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Γενικότερα, μια καμπύλη του \mathbb{R}^3 μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος εξισώσεων

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2.$$

Οι καμπύλες αυτού του είδους καλούνται *καμπύλες στάθμης*, διότι η καμπύλη της Εξ. 1.1 για παράδειγμα είναι το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου στα οποία η «στάθμη» της ποσότητας $f(x, y)$ φτάνει την τιμή c .

Μια καμπύλη μπορεί όμως να περιγραφεί και με έναν άλλον τρόπο, ο οποίος αποδεικνύεται πιο χρήσιμος σε πολλές περιπτώσεις: μπορούμε να θεωρήσουμε ως καμπύλη τον δρόμο που διαγράφει ένα κινούμενο σημείο. Έτσι, εάν $\gamma(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου τη χρονική στιγμή t , η καμπύλη περιγράφεται από μία διανυσματική συνάρτηση γ της αριθμητικής παραμέτρου t (στο \mathbb{R}^2 αν πρόκειται για επίπεδη καμπύλη, και στο \mathbb{R}^3 αν πρόκειται για καμπύλη του χώρου). Βασιζόμενοι σε αυτήν την ιδέα θα δώσουμε τον πρώτο αυστηρό ορισμό μιας καμπύλης του \mathbb{R}^n (μας ενδιαφέρουν μόνο οι περιπτώσεις $n = 2$ και 3 , αλλά είναι βολικό να πραγματευόμαστε και τις δύο περιπτώσεις ταυτόχρονα).

Ορισμός 1.1.1

Μια *παραμετρημένη* καμπύλη του \mathbb{R}^n είναι μια απεικόνιση $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου α, β είναι τέτοια ώστε $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Με (α, β) συμβολίζουμε το ανοικτό διάστημα

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R} \mid \alpha < t < \beta\}.$$

Μια παραμετρημένη καμπύλη της οποίας η εικόνα περιέχεται σε μια καμπύλη στάθμης C ονομάζεται *παραμέτρηση* (ενός τμήματος) της C . Στα ακόλουθα παραδείγματα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μεταβαίνουμε στην πράξη από τις καμπύλες στάθμης στις παραμετρημένες καμπύλες και αντίστροφα.

Παράδειγμα 1.1.2

Ας βρούμε μια παραμέτρηση $\gamma(t)$ της παραβολής $y = x^2$. Εάν $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, οι συνιστώσες γ_1 και γ_2 της γ πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \quad (1.2)$$

για όλες τις τιμές του t στο διάστημα (α, β) όπου ορίζεται η γ (ακόμα δεν έχει αποφασιστεί ποιο είναι αυτό), ενώ στην ιδανική περίπτωση κάθε σημείο της παραβολής πρέπει να ισούται με $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ για κάποιο $t \in (\alpha, \beta)$. Ασφαλώς, υπάρχει μια προφανής λύση της Εξ. 1.2: $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = t^2$. Για να πάρουμε όλα τα σημεία της παραβολής πρέπει να επιτρέψουμε στο t να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές (αφού η τετμημένη της $\gamma(t)$

είναι απλώς t και η τετμημένη ενός σημείου της παραβολής μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός), κατά συνέπεια πρέπει να επιλέξουμε ως (α, β) το διάστημα $(-\infty, \infty)$. Επομένως η επιθυμητή παραμέτρηση είναι η εξής:

$$\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2).$$

Αυτή δεν είναι όμως η μόνη παραμέτρηση της παραβολής. Μία άλλη επιλογή είναι η $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ (με $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$). Ακόμα μία είναι η $(2t, 4t^2)$, και ασφαλώς υπάρχουν και (άπειρες) άλλες. Συμπεραίνουμε ότι η παραμέτρηση μιας δεδομένης καμπύλης στάθμης δεν είναι μοναδική.

Παράδειγμα 1.1.3

ΑΣ προσπαθήσουμε να παραμετρήσουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Μπορεί να μπούμε στον πειρασμό να πάρουμε $x = t$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ώστε να έχουμε $y = \sqrt{1 - x^2}$ (θα μπορούσαμε επίσης να πάρουμε $y = -\sqrt{1 - x^2}$). Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την παραμέτρηση

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Αυτή όμως είναι μια παραμέτρηση μόνο του άνω ημικυκλίου, διότι το $\sqrt{1 - x^2}$ είναι πάντα ≥ 0 . Αντίστοιχα, εάν παίρναμε $y = -\sqrt{1 - x^2}$, θα καλύπταμε μόνο το κάτω ημικύκλιο.

Εάν θέλουμε μία παραμέτρηση ολόκληρου του κύκλου, πρέπει να ξαναπροσπαθήσουμε. Χρειαζόμαστε συναρτήσεις $\gamma_1(t)$ και $\gamma_2(t)$ τέτοιες ώστε

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \tag{1.3}$$

για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$, και για τις οποίες κάθε σημείο του κύκλου να είναι ίσο με $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ για κάποιο $t \in (\alpha, \beta)$. Υπάρχει μια προφανής λύση της Εξ. 1.3: $\gamma_1(t) = \cos t, \gamma_2(t) = \sin t$ (εφόσον $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ για κάθε t). Μπορούμε να πάρουμε $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, αν και αυτό είναι υπερβολικό: οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα (α, β) με μήκος μεγαλύτερο από 2π είναι αρκετό.

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μεταβαίνουμε από μια παραμετρημένη καμπύλη σε μια καμπύλη στάθμης.

Παράδειγμα 1.1.4

ΑΣ θεωρήσουμε την παραμετρημένη καμπύλη (που ονομάζεται *αστροειδής*)

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Εφόσον $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ για κάθε t , οι συντεταγμένες $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ του σημείου $\gamma(t)$ ικανοποιούν την

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Αυτή η καμπύλη στάθμης συμπίπτει με την εικόνα της απεικόνισης γ . Για το σχήμα του αστροειδούς βλ. Άσκηση 1.1.5.

Σε αυτό το βιβλίο θα μελετήσουμε παραμετρημένες καμπύλες (και αργότερα επιφάνειες) χρησιμοποιώντας μεθόδους του απειροστικού λογισμού. Οι καμπύλες και οι επιφάνειες αυτές θα περιγράφονται σχεδόν αποκλειστικά μέσω *λείων* συναρτήσεων: λέμε ότι

μια συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία εάν η παράγωγος $\frac{d^n f}{dt^n}$ υπάρχει για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$. Εάν οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι λείες συναρτήσεις, από γνωστά αποτελέσματα του απειροστικού λογισμού έπεται ότι το άθροισμα $f(t) + g(t)$, το γινόμενο $f(t)g(t)$, το πηλίκο $f(t)/g(t)$ και η σύνθεση $f(g(t))$ είναι λείες συναρτήσεις εκεί όπου ορίζονται.

Για να παραγωγίσουμε μια *διανυσματική* συνάρτηση σαν την $\boldsymbol{\gamma}(t)$ (όπως στον Ορισμό 1.1.1), την παραγωγίζουμε κατά συνιστώσες: εάν

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

τότε

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \dots, \frac{d\gamma_n}{dt} \right), \quad \frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\gamma_n}{dt^2} \right), \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Για οικονομία χώρου, συχνά θα συμβολίζουμε την $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ με $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, την $d^2\boldsymbol{\gamma}/dt^2$ με $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, κλπ. Λέμε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι *λεία* αν οι παράγωγοι $d^n\boldsymbol{\gamma}/dt^n$ υπάρχουν για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$. Ισοδύναμα, αν όλες οι συνιστώσες $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι λείες.

Στο εξής όλες οι παραμετρημένες καμπύλες που μελετώνται σε αυτό το βιβλίο θα θεωρούνται λείες.

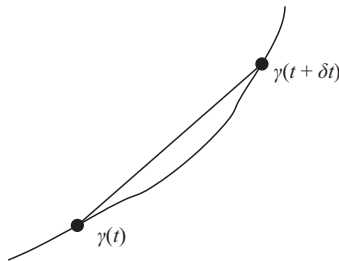
Ορισμός 1.1.5

Εάν $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μια παραμετρημένη καμπύλη, η πρώτη της παράγωγος $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ ονομάζεται *εφαπτόμενο διάνυσμα* της $\boldsymbol{\gamma}$ στο σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

Για να καταλάβετε γιατί ονομάζεται έτσι, παρατηρήστε ότι το διάνυσμα

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t)}{\delta t}$$

είναι παράλληλο στη χορδή που συνδέει τα σημεία $\boldsymbol{\gamma}(t)$ και $\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t)$ της εικόνας \mathcal{C} της $\boldsymbol{\gamma}$ (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2. Χορδή που συνδέει δύο σημεία μιας καμπύλης.

Καθώς το δt τείνει στο μηδέν, το μήκος της χορδής τείνει επίσης στο μηδέν, αλλά η *κατεύθυνση* της χορδής θα πρέπει να γίνεται παράλληλη στην κατεύθυνση της εφαπτομένης της \mathcal{C} στο $\boldsymbol{\gamma}(t)$. Η κατεύθυνση της χορδής είναι όμως ίδια με αυτήν του διανύσματος

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t)}{\delta t},$$

η οποία τείνει στο $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ καθώς το δt τείνει στο μηδέν. Βέβαια, με αυτόν τον τρόπο προκύπτει μία καλά ορισμένη κατεύθυνση εφαπτόμενη στην καμπύλη μόνο εάν η $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ είναι διάφορη του μηδενός. Εάν ισχύει η συνθήκη αυτή, ορίζουμε ως *εφαπτόμενη ευθεία* της \mathcal{C} στο σημείο \boldsymbol{p} της \mathcal{C} την ευθεία που διέρχεται από το \boldsymbol{p} και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $d\boldsymbol{\gamma}/dt$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι διαισθητικά προφανές:

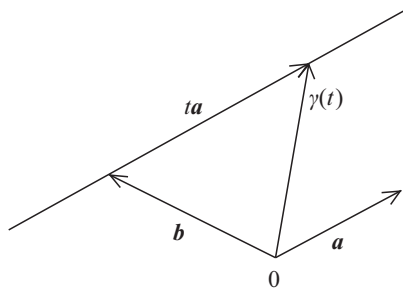
Πρόταση 1.1.6

Εάν το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας παραμετρημένης καμπύλης είναι σταθερό, η εικόνα της καμπύλης είναι ευθεία (ή τμήμα ευθείας).

Απόδειξη Εάν $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{a}$ για κάθε t , όπου \boldsymbol{a} είναι ένα σταθερό διάνυσμα, ολοκληρώνοντας κατά συνιστώσες παίρνουμε

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \int \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} dt = \int \boldsymbol{a} dt = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

όπου \boldsymbol{b} είναι ένα άλλο σταθερό διάνυσμα. Εάν $\boldsymbol{a} \neq 0$, η παραπάνω είναι η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στο \boldsymbol{a} και διέρχεται από το σημείο \boldsymbol{b} (Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3.

Εάν $\boldsymbol{a} = 0$, η εικόνα της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ένα μόνο σημείο (συγκεκριμένα το \boldsymbol{b}). □

Πριν προχωρήσουμε περισσότερο στη μελέτη των καμπυλών, πρέπει να επιστημονοποιήσουμε μια εν δυνάμει πηγή σύγχυσης που ανακύπτει κατά την περιγραφή των παραμετρημένων καμπυλών και αφορά το ερώτημα τι είναι «σημείο» μιας τέτοιας καμπύλης. Η δυσκολία φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.7

Η *κοχλιοειδής*¹ είναι η παραμετρημένη καμπύλη

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = ((1 + 2 \cos t) \cos t, (1 + 2 \cos t) \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(Σχήμα 1.4). Παρατηρήστε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ έχει μία αυτοτομή στην αρχή των αξόνων, με την έννοια ότι $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ για $t = 2\pi/3$ και για $t = 4\pi/3$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το

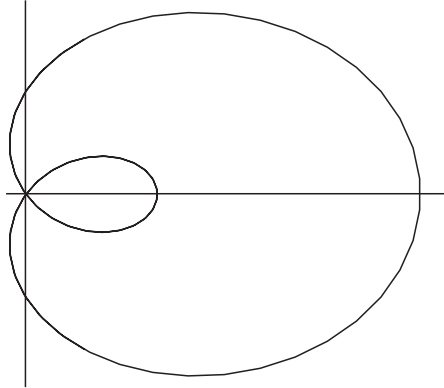
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-\sin t - 2 \sin 2t, \cos t + 2 \cos 2t).$$

¹Σ.τ.Μ. Limaçon από το λατινικό limax που σημαίνει σαλιγκάρι, κοχλίας.

Ειδικότερα,

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(2\pi/3) = (\sqrt{3}/2, -3/2), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(4\pi/3) = (-\sqrt{3}/2, -3/2).$$

Επομένως ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της κοχλιοειδούς στην αρχή των αξόνων; Παρότι το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ είναι καλά ορισμένο για όλες τις τιμές του t , παίρνει διαφορετικές τιμές για $t = 2\pi/3$ και για $t = 4\pi/3$, που αντιστοιχούν αμφότερες στο σημείο $\mathbf{0}$ της καμπύλης.



Σχήμα 1.4. Κοχλιοειδής.

Από το παράδειγμα αυτό διαπιστώνουμε ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν αναφερόμαστε σε κάποιο «σημείο» μιας παραμετρημένης καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$: μιλώντας αυστηρά, αυτό θα πρέπει να είναι το ίδιο πράγμα με μια τιμή της παραμέτρου t της καμπύλης, και όχι με το αντίστοιχο γεωμετρικό σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$. Επομένως, ο Ορισμός 1.1.5 πρέπει να διατυπωθεί σωστότερα ως εξής: «Εάν $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μια παραμετρημένη καμπύλη, η πρώτη της παράγωγος $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ ονομάζεται *εφαπτόμενο διάνυσμα* της $\boldsymbol{\gamma}$ για την παραμετρική τιμή t ». Ωστόσο, φαίνεται πως, αν επιμείνουμε σε αυτήν τη διάκριση, θα απομακρυνθούμε από τη γεωμετρική θεώρηση των καμπυλών· γι' αυτό μερικές φορές θα επαναλαμβάνουμε το «σφάλμα» που κάναμε κατά τη διατύπωση του Ορισμού 1.1.5. Αν όμως έχουμε στο νου μας τα παραπάνω σχόλια δεν θα οδηγούμαστε σε σύγχυση.

Ασκήσεις

1.1.1 Είναι η $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2, t^4)$ παραμέτρηση της παραβολής $y = x^2$;

1.1.2 Βρείτε παραμετρήσεις των ακόλουθων καμπυλών στάθμης:

(i) $y^2 - x^2 = 1$,

(ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1.1.3 Βρείτε τις καρτεσιανές εξισώσεις των ακόλουθων παραμετρημένων καμπυλών:

(i) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$,

(ii) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (e^t, t^2)$.

1.1.4 Υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών της Άσκησης 1.1.3.

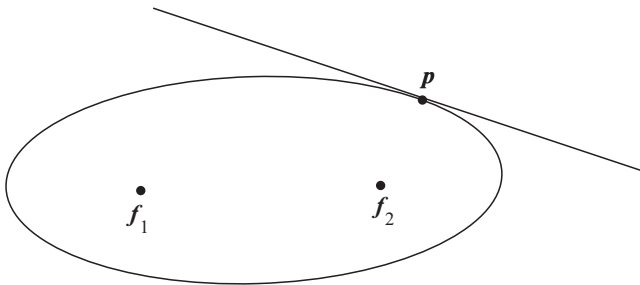
1.1.5 Σχεδιάστε πρόχειρα το αστροειδές του Παραδείγματος 1.1.4. Υπολογίστε το εφαπτόμενο διάνυσμά του σε κάθε σημείο. Σε ποια σημεία μηδενίζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα;

1.1.6 Θεωρήστε την έλλειψη

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

όπου $p > q > 0$ (Σχήμα 1.5). Η εκκενρότητα της έλλειψης είναι $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}$, και τα σημεία $(\pm \epsilon p, 0)$ του άξονα x ονομάζονται εστίες της έλλειψης, τις οποίες συμβολίζουμε με f_1 και f_2 . Επιβεβαιώστε ότι η $\gamma(t) = (p \cos t, q \sin t)$ είναι παραμέτρηση της έλλειψης. Αποδείξτε ότι:

- (i) Το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείου p της έλλειψης από τις f_1 και f_2 δεν εξαρτάται από το p .
- (ii) Το γινόμενο των αποστάσεων της εφαπτόμενης ευθείας σε τυχόν σημείο p της έλλειψης από τις f_1 και f_2 δεν εξαρτάται από το p .
- (iii) Εάν p είναι τυχόν σημείο της έλλειψης, η ευθεία που συνδέει την εστία f_1 με το p και η ευθεία που συνδέει την f_2 με το p σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτόμενη ευθεία της έλλειψης στο σημείο p .

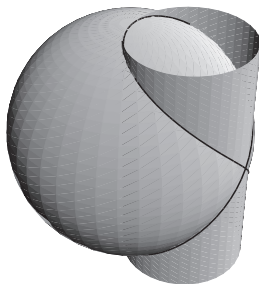


Σχήμα 1.5.

1.1.7 Ένα κυκλοειδές είναι η επίπεδη καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου καθώς αυτός κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε μία ευθεία. Δείξτε ότι, εάν η ευθεία είναι ο άξονας x και ο κύκλος έχει ακτίνα $a > 0$, τότε το κυκλοειδές μπορεί να παραμετρηθεί ως εξής:

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t).$$

1.1.8 Έστω η σφαίρα ακτίνας 1 και κέντρου $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$, και ο κυκλικός κύλινδρος ακτίνας $\frac{1}{2}$ του οποίου ο κατακόρυφος άξονας είναι ο άξονας z . Δείξτε ότι η $\gamma(t) = (\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t)$ είναι παραμέτρηση της καμπύλης που ορί-



Σχήμα 1.6.

ζει η τομή των δύο αυτών επιφανειών. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται *καμπύλη του Viviani*² (Σχήμα 1.6).

- 1.1.9 Η *κάθετη ευθεία* μιας καμπύλης σε ένα σημείο \mathbf{p} είναι η ευθεία που διέρχεται από το \mathbf{p} και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία στο \mathbf{p} . Βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη ευθεία της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$ στο σημείο που αντιστοιχεί σε $t = \pi/4$.

1.2 Μήκος τόξου

Υπενθυμίζουμε ότι εάν $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ είναι ένα διάνυσμα του \mathbb{R}^n , το μήκος του είναι

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Εάν \mathbf{u} είναι ένα άλλο διάνυσμα του \mathbb{R}^n , τότε $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία \mathbf{u} και \mathbf{v} του \mathbb{R}^n .

Για να βρούμε έναν τύπο για το μήκος μιας παραμετρημένης καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ παρατηρούμε ότι, εάν το δt είναι πολύ μικρό, το τμήμα της εικόνας \mathcal{C} της $\boldsymbol{\gamma}$ μεταξύ των $\boldsymbol{\gamma}(t)$ και $\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t)$ είναι σχεδόν ευθύγραμμο, οπότε το μήκος του είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\|\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t)\|.$$

Πάλι επειδή το δt είναι μικρό, το $(\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t)) / \delta t$ είναι περίπου ίσο με $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, οπότε το μήκος του είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \delta t. \quad (1.4)$$

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος ενός (όχι κατ' ανάγκη μικρού) τμήματος της \mathcal{C} , μπορούμε να το διαιρέσουμε σε τμήματα, καθένα από τα οποία να αντιστοιχεί σε μια μικρή αύξηση δt του t , να υπολογίσουμε το μήκος κάθε τμήματος χρησιμοποιώντας την (1.4), και να αθροίσουμε τα αποτελέσματα. Αν θεωρήσουμε ότι το δt τείνει στο μηδέν θα πάρουμε το ακριβές μήκος.

²Σ.τ.Μ. Ο Vincenzo Viviani (1622–1703) ήταν Ιταλός μαθηματικός και φυσικός. Μαθήτευσε στους Torricelli και Γαλιλαίο. Εκτός της καμπύλης της Άσκησης 1.9 που φέρει το όνομά του, ο Viviani είναι γνωστός και για το εξής θεώρημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας: Σε ισόπλευρο τρίγωνο, το άθροισμα των αποστάσεων σημείου του εσωτερικού του τριγώνου από τις πλευρές ισούται με το ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 1.7. Διαμέριση τόξου.

Η σκέψη αυτή μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.2.1

Το μήκος τόξου μιας καμπύλης γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma(t_0)$ είναι η συνάρτηση $s(t)$ που δίνεται από την

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du.$$

Συνεπώς, $s(t_0) = 0$ και η $s(t)$ είναι θετική ή αρνητική ανάλογα με τον εάν το t είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του t_0 . Εάν επιλέξουμε ένα διαφορετικό σημείο εκκίνησης $\gamma(\tilde{t}_0)$, το νέο μήκος τόξου \tilde{s} θα διαφέρει από το s κατά τη σταθερά $\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\dot{\gamma}(u)\| du$ διότι

$$\int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_{\tilde{t}_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\dot{\gamma}(u)\| du.$$

Παράδειγμα 1.2.2

Για τη λογαριθμική σπείρα

$$\gamma(t) = (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t),$$

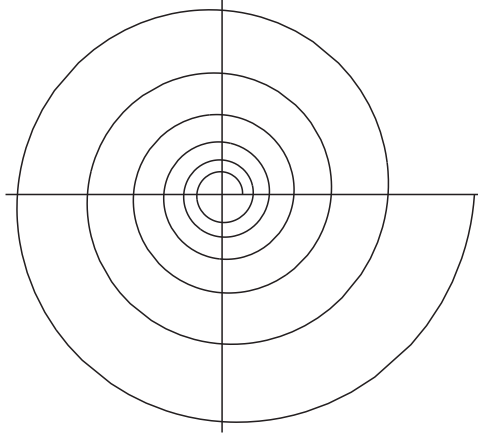
όπου k είναι μια μη μηδενική σταθερά, έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (e^{kt}(k \cos t - \sin t), e^{kt}(k \sin t + \cos t)), \\ \therefore \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= e^{2kt}(k \cos t - \sin t)^2 + e^{2kt}(k \sin t + \cos t)^2 = (k^2 + 1)e^{2kt}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το μήκος τόξου της γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma(0) = (1, 0)$ (για παράδειγμα) είναι

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{k^2 + 1} e^{ku} du = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{kt} - 1).$$

Το μήκος τόξου είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Πράγματι, εάν s είναι το μήκος τόξου



Σχήμα 1.8. Λογαριθμική σπείρα.

μιας καμπύλης γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma(t_0)$, έχουμε

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du = \|\dot{\gamma}(t)\|. \quad (1.5)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\gamma(t)$ είναι η θέση ενός κινούμενου σημείου τη χρονική στιγμή t , η ds/dt είναι η ταχύτητα του σημείου (ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης κατά μήκος της καμπύλης). Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.3

Εάν $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια παραμετρημένη καμπύλη, η ταχύτητά της στο σημείο $\gamma(t)$ είναι $\|\dot{\gamma}(t)\|$. Λέμε ότι η γ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας εάν το $\dot{\gamma}(t)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$.

Πολλοί από τους τύπους και τις ιδιότητες των καμπυλών που θα δούμε στη συνέχεια παίρνουν πολύ απλούστερη μορφή όταν η καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Ο λόγος για αυτήν την απλούστευση δίνεται στην επόμενη πρόταση. Αν και ομολογουμένως εκ πρώτης όψεως δείχνει αδιάφορη, θα φανεί πολύ χρήσιμη στη συνέχεια.

Υπενθυμίζουμε ότι το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ και $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ του \mathbb{R}^n είναι

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Εάν τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι λείες συναρτήσεις μιας παραμέτρου t , θα χρησιμοποιούμε τον «τύπο του γινομένου»

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του βαθμωτού γινομένου και τον τύπο

του συνήθους γινομένου για αριθμητικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dt}(a_i b_i) = \frac{da_i}{dt} b_i + a_i \frac{db_i}{dt}.$$

Πρόταση 1.2.4

Εάν $\mathbf{n}(t)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που είναι λεία συνάρτηση της παραμέτρου t , τότε

$$\dot{\mathbf{n}}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$$

για κάθε t , δηλαδή το $\dot{\mathbf{n}}(t)$ είναι μηδενικό ή κάθετο στο $\mathbf{n}(t)$ για κάθε t .

Ειδικότερα, εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε το $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι μηδενικό ή κάθετο στο $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$.

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας τον τύπο του γινομένου για να παραγωγίσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ως προς t , παίρνουμε

$$\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0,$$

δηλαδή $2\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0$. Το τελευταίο σκέλος προκύπτει αμέσως αν πάρουμε $\mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$. □

Ασκήσεις

1.2.1 Υπολογίστε το μήκος τόξου της αλυσσοειδούς $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$ με σημείο εκκίνησης το $(0, 1)$. Η αλυσσοειδής έχει το σχήμα μιας βαριάς αλυσίδας που κρέμεται από τα άκρα της (βλ. Άσκηση 2.2.4).³

1.2.2 Δείξτε ότι οι ακόλουθες καμπύλες είναι μοναδιαίας ταχύτητας:

$$(i) \boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right),$$

$$(ii) \boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right).$$

1.2.3 Μία επίπεδη καμπύλη δίνεται από την

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

όπου r είναι μια λεία συνάρτηση του θ (έτσι ώστε οι (r, θ) να είναι οι πολικές συντεταγμένες της $\boldsymbol{\gamma}(\theta)$). Υπό ποιες συνθήκες είναι κανονική η $\boldsymbol{\gamma}$?⁴ Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $r(\theta)$ για τις οποίες η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Δείξτε ότι, εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, η εικόνα της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κύκλος. Ποια είναι η ακτίνα του;

³Σ.τ.Μ. Υπάρχει μία ενδιαφέρουσα ιστορία πίσω από την αλυσσοειδή καμπύλη. Ο Γαλιλαίος υποστήριξε ότι, για να πάρουμε το σχήμα μιας οποιασδήποτε παραβολής, αρκεί να κρεμάσουμε μία αλυσίδα από τα άκρα της, σε διαφορετικό ύψος κάθε φορά. Περίπου έναν αιώνα μετά τον Γαλιλαίο, όμως, ο Jacob Bernoulli απέδειξε ότι μία αλυσίδα κρεμασμένη από τα άκρα της είναι το γράφημα της εξίσωσης $y = a \cosh x$, $a =$ σταθερά.

Παρατηρήστε ότι $\cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$ όπως προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor 2ου βαθμού της $\cosh x$. Ίσως ο Γαλιλαίος τελικά δεν είχε πολύ άδικο που μπερδευτηκε!

⁴Σ.τ.Μ. Βλ. Ορισμό 1.3.3.

1.2.4 Σε αυτήν την άσκηση καλείστε να αποδείξετε ότι η ευθεία είναι η συντομότερη καμπύλη που συνδέει δύο δοθέντα σημεία. Έστω \mathbf{p} και \mathbf{q} τα δύο σημεία, έστω γ μια καμπύλη που διέρχεται από αμφότερα τα σημεία, και ας υποθέσουμε ότι $\gamma(a) = \mathbf{p}$, $\gamma(b) = \mathbf{b}$, όπου $a < b$. Δείξτε ότι, εάν \mathbf{u} είναι τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα, τότε

$$\dot{\gamma} \cdot \mathbf{u} \leq \|\dot{\gamma}\|$$

και συμπεράνετε ότι

$$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Παίρνοντας $\mathbf{u} = (\mathbf{q} - \mathbf{p})/\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$, δείξτε ότι το μήκος του τμήματος της γ μεταξύ των \mathbf{p} και \mathbf{q} έχει μήκος τουλάχιστον ίσο με την ευθειακή απόσταση $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$.

1.3 Αναπαραμέτρηση

Στα Παραδείγματα 1.1.2 και 1.1.3 είδαμε ότι μία δοθείσα καμπύλη στάθμης μπορεί να έχει πολλές παραμετρήσεις. Γι' αυτό είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τη μεταξύ τους σχέση.

Ορισμός 1.3.1

Μια παραμετρημένη καμπύλη $\tilde{\gamma} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *αναπαραμέτρηση* της παραμετρημένης καμπύλης $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχει μια λεία 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow (\alpha, \beta)$ (η *απεικόνιση αναπαραμέτρησης*) τέτοια ώστε η αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ να είναι επίσης λεία και

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t})) \quad \text{για κάθε } \tilde{t} \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}). \quad (1.6)$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή η ϕ έχει λεία αντίστροφη, η γ είναι αναπαραμέτρηση της $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma}(\phi^{-1}(t)) = \gamma(\phi(\phi^{-1}(t))) = \gamma(t) \quad \text{για κάθε } t \in (\alpha, \beta).$$

Δύο καμπύλες που είναι αναπαραμετρήσεις η μία της άλλης έχουν την ίδια εικόνα, επομένως πρέπει να έχουν τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες.

Παράδειγμα 1.3.2

Στο Παράδειγμα 1.1.3 είδαμε ότι μια παραμέτρηση του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ είναι η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Μια άλλη παραμέτρηση είναι η

$$\tilde{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t)$$

(εφόσον $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Για να αποδείξουμε ότι η $\tilde{\gamma}$ είναι αναπαραμέτρηση της γ , πρέπει να βρούμε μια απεικόνιση αναπαραμέτρησης ϕ τέτοια ώστε

$$(\cos \phi(t), \sin \phi(t)) = (\sin t, \cos t).$$

Μια λύση είναι η $\phi(t) = \pi/2 - t$.

Όπως επισημάναμε στην Ενότητα 1.2, η ανάλυση μιας καμπύλης απλουστεύεται όταν είναι γνωστό ότι είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Είναι συνεπώς σημαντικό να γνωρίζουμε ποιες ακριβώς καμπύλες έχουν αναπαραμετρήσεις μοναδιαίας ταχύτητας.

Ορισμός 1.3.3

Ένα σημείο $\gamma(t)$ μιας παραμετρημένης καμπύλης γ ονομάζεται *κανονικό σημείο* εάν $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ διαφορετικά το $\gamma(t)$ ονομάζεται *ιδιάζον σημείο* της γ . Μία καμπύλη είναι *κανονική*⁵ εάν όλα τα σημεία της είναι κανονικά.

Πριν αποδείξουμε τη σχέση μεταξύ κανονικότητας και αναπαραμέτρησης μοναδιαίας ταχύτητας, θα παρουσιάσουμε δύο απλές ιδιότητες των κανονικών καμπυλών. Παρότι τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστικά, θα αποδειχθούν πολύ σημαντικά για τη συνέχεια.

Πρόταση 1.3.4

Κάθε αναπαραμέτρηση μιας κανονικής καμπύλης είναι κανονική.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι οι γ και $\tilde{\gamma}$ σχετίζονται όπως στον Ορισμό 1.3.1, και έστω $t = \phi(\tilde{t})$ και $\psi = \phi^{-1}$ έτσι ώστε $\tilde{t} = \psi(t)$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης $\phi(\psi(t)) = t$ ως προς t και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}} \frac{d\psi}{dt} = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $d\phi/d\tilde{t}$ δεν είναι ποτέ μηδέν. Εφόσον $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t}))$, εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\phi}{d\tilde{t}},$$

απ' όπου προκύπτει ότι η $d\tilde{\gamma}/d\tilde{t}$ δεν είναι ποτέ μηδέν αν η $d\gamma/dt$ δεν είναι ποτέ μηδέν. \square

Πρόταση 1.3.5

Εάν η $\gamma(t)$ είναι κανονική καμπύλη, το μήκος τόξου της s (βλ. Ορισμό 1.2.1), με σημείο εκκίνησης ένα τυχόν σημείο της γ , είναι λεία συνάρτηση του t .

Απόδειξη Έχουμε ήδη αναφέρει ότι (είτε η γ είναι κανονική είτε όχι) η s είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του t και

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό, στο εξής θα υποθέσουμε ότι η γ είναι επίπεδη καμπύλη, έστω

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)),$$

⁵Σ.τ.Μ. Οι όροι *κανονικό σημείο* και *κανονική καμπύλη* αντιστοιχούν στα *regular point* και *regular curve* αντίστοιχα. Επίσης, ο όρος *ιδιάζον σημείο* αντιστοιχεί στο *singular point*.

όπου u και v είναι λείες συναρτήσεις του t , ώστε να έχουμε

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}.$$

Το κρίσιμο σημείο είναι ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι λεία συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα $(0, \infty)$. Πράγματι, αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι

$$\frac{d^n f}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} x^{-(2n+1)/2}.$$

Αφού οι u και v είναι λείες συναρτήσεις του t , το ίδιο ισχύει για τις \dot{u} και \dot{v} , άρα και για την $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$. Εφόσον η γ είναι κανονική, έχουμε $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 > 0$ για κάθε t , άρα η σύνθετη συνάρτηση

$$\frac{ds}{dt} = f(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$$

είναι λεία συνάρτηση του t , επομένως η s είναι και η ίδια λεία. □

Το βασικό αποτέλεσμα που θέλουμε είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.6

Μια παραμετρημένη καμπύλη έχει αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας αν και μόνο αν είναι κανονική.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η παραμετρημένη καμπύλη $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας $\tilde{\gamma}$ με απεικόνιση αναπαραμέτρησης ϕ . Θέτοντας $t = \phi(\tilde{t})$ έχουμε $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(t)$, άρα

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} &= \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}}, \\ \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} \right\| &= \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{d\tilde{t}} \right|. \end{aligned}$$

Αφού η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, έχουμε $\|d\tilde{\gamma}/d\tilde{t}\| = 1$, και συνεπώς η $d\gamma/dt$ δεν μπορεί να είναι μηδέν.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $d\gamma/dt$ δεν είναι ποτέ μηδέν. Από την Εξ. 1.5 έπεται ότι $ds/dt > 0$ για κάθε t , όπου s είναι το μήκος τόξου της γ με σημείο εκκίνησης ένα τυχόν σημείο της καμπύλης, ενώ σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.5 η s είναι λεία συνάρτηση του t . Από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης (του απειροστικού λογισμού πολλών μεταβλητών) προκύπτει ότι η $s : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, ότι η εικόνα της είναι ένα ανοικτό διάστημα $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, και ότι η αντίστροφη απεικόνιση $s^{-1} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow (\alpha, \beta)$ είναι λεία. (Οι αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης θα πρέπει να δεχθούν τα παραπάνω προς το παρόν· το θεώρημα θα παρουσιαστεί με μη αυστηρό τρόπο στην Ενότητα 1.5 και με αυστηρό τρόπο στην Ενότητα 5.6.) Παίρνουμε $\phi = s^{-1}$, και έστω $\tilde{\gamma}$ η αντίστοιχη αναπαραμέτρηση της

γ ώστε να έχουμε $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$ (βλ. Εξ 1.6). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \frac{ds}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt}, \\ \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| \frac{ds}{dt} &= \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \frac{ds}{dt}, \quad (\text{λόγω της Εξ. 1.5}), \\ \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| &= 1. \quad \square \end{aligned}$$

Από την απόδειξη της Πρότασης 1.3.6 προκύπτει ότι το μήκος τόξου είναι ουσιαστικά η μόνη αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας μιας κανονικής καμπύλης.

Πόρισμα 1.3.7

Έστω γ μια κανονική καμπύλη και $\tilde{\gamma}$ μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ :

$$\tilde{\gamma}(u(t)) = \gamma(t) \quad \text{για κάθε } t,$$

όπου u είναι μια λεία συνάρτηση του t . Εάν s είναι το μήκος τόξου της γ (με σημείο εκκίνησης ένα τυχόν σημείο της), τότε

$$u = \pm s + c, \quad (1.7)$$

όπου c είναι μια σταθερά. Αντιστρόφως, εάν η u δίνεται από την Εξ. 1.7 για κάποια τιμή της c και με οποιοδήποτε πρόσημο, τότε η $\tilde{\gamma}$ είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ .

Απόδειξη Από τους υπολογισμούς του πρώτου σκέλους της απόδειξης της Πρότασης 1.3.6 προκύπτει ότι η u δίνει μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ αν και μόνο αν

$$\frac{du}{dt} = \pm \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \pm \frac{ds}{dt} \quad (\text{λόγω της Εξ. 1.5}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $u = \pm s + c$ για κάποια σταθερά c . □

Παρότι κάθε κανονική καμπύλη έχει μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας, αυτή μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκο έως και αδύνατο να γραφεί «επακριβώς», όπως φαίνεται από τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3.8

Για τη λογαριθμική σπείρα $\gamma(t) = (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$, στο Παράδειγμα 1.2.2 βρήκαμε ότι $\|\dot{\gamma}\|^2 = (k^2 + 1)e^{2kt}$. Αυτό δεν είναι ποτέ μηδέν, άρα η γ είναι κανονική. Το μήκος τόξου της γ με σημείο εκκίνησης το σημείο $(1, 0)$ βρέθηκε ότι είναι $s = \sqrt{k^2 + 1}(e^{kt} - 1)/k$.⁶

Άρα $t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{ks}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right)$, οπότε μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ δί-

⁶Σ.τ.Μ. Από το Παράδειγμα 1.2.2.

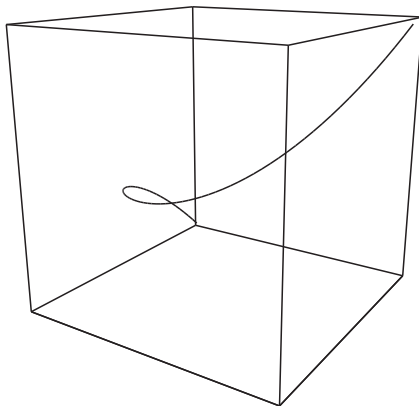
νεται από τον μάλλον δύσχρηστο τύπο

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \cos \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \right), \right. \\ \left. \left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \sin \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \right) \right).$$

Παράδειγμα 1.3.9

Η στρεβλωμένη κυβική⁷ είναι η καμπύλη του χώρου

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 1.9. Η στρεβλωμένη κυβική.

Έχουμε $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t, 3t^2)$, άρα

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

Αυτό δεν είναι ποτέ μηδέν, άρα η γ είναι κανονική. Το μήκος τόξου με σημείο εκκίνησης το $\gamma(0) = \mathbf{0}$ είναι

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω γνωστών συναρτήσεων όπως της λογαριθμικής, της εκθετικής και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. (Είναι παράδειγμα ελλειπτικού ολοκληρώματος.)

Στο τελευταίο μας παράδειγμα θα δούμε ότι μια καμπύλη στάθμης μπορεί να έχει τόσο κανονικές όσο και μη κανονικές παραμετρήσεις.

⁷Σ.τ.Μ. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον όρο twisted cubic.

Παράδειγμα 1.3.10

Για την παραμέτρηση $\gamma(t) = (t, t^2)$ της παραβολής $y = x^2$, το $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$ προφανώς δεν είναι ποτέ μηδενικό, άρα η γ είναι κανονική. Η $\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$ είναι όμως μια άλλη παραμέτρηση της ίδιας παραβολής. Αυτή τη φορά έχουμε $\dot{\tilde{\gamma}} = (3t^2, 6t^3)$, το οποίο είναι μηδενικό όταν $t = 0$, συνεπώς η $\tilde{\gamma}$ δεν είναι κανονική.

Ασκήσεις

1.3.1 Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι κανονικές;

- (i) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ όπου $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) Η ίδια καμπύλη όπως στο (i) αλλά με $0 < t < \pi/2$.
- (iii) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ όπου $t \in \mathbb{R}$.

Βρείτε αναπαράμετρήσεις μοναδιαίας ταχύτητας για τις κανονικές καμπύλες.

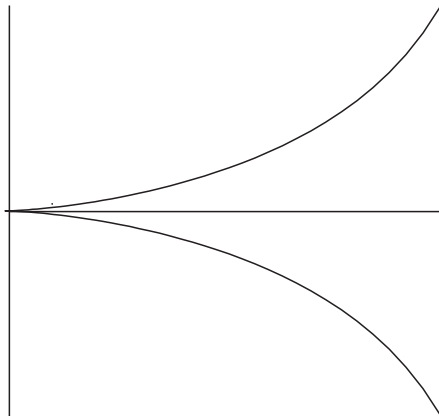
1.3.2 Η κισσοειδής του Διοκλέους⁸ (Σχήμα 1.10) είναι η καμπύλη που σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) έχει εξίσωση

$$r = \sin \theta \tan \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Βρείτε μια παραμέτρηση της κισσοειδούς χρησιμοποιώντας το θ σαν παράμετρο και δείξτε ότι η

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \right), \quad -1 < t < 1,$$

είναι μια αναπαράμετρησή της.



Σχήμα 1.10. Η κισσοειδής του Διοκλέους.

⁸Σ.τ.Μ. Ο Διοκλής (240–180 π.Χ.) ήταν Έλληνας γεωμέτρης για τον οποίο ελάχιστα είναι γνωστά. Σπαράγματα του έργου του διασώθηκαν από τον Ευτόκιο, στα σχόλιά του στο *Περί σφαιρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη.

1.3.3 Το απλούστερο είδος ιδιάζοντος σημείου μιας καμπύλης γ είναι η *συνήθης ακίδα*: ένα σημείο p της γ , που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή έστω την t_0 , είναι συνήθης ακίδα αν $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ και τα διανύσματα $\ddot{\gamma}(t_0)$ και $\ddot{\gamma}(t_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ειδικότερα, τα διανύσματα αυτά πρέπει να είναι αμφότερα μη μηδενικά). Δείξτε ότι:

- (i) Η καμπύλη $\gamma(t) = (t^m, t^n)$, όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι, έχει μια συνήθη ακίδα στην αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $(m, n) = (2, 3)$ ή $(3, 2)$.
- (ii) Η κισσοειδής της Άσκησης 1.3.2 έχει μία συνήθη ακίδα στην αρχή των αξόνων.
- (iii) Εάν η γ έχει μία συνήθη ακίδα στο σημείο p , το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε αναπαράμετρήσή της.

1.3.4 Δείξτε ότι:

- (i) Εάν $\tilde{\gamma}$ είναι μια αναπαράμετρηση μιας καμπύλης γ , τότε η γ είναι αναπαράμετρηση της $\tilde{\gamma}$.
- (ii) Εάν $\tilde{\gamma}$ είναι μια αναπαράμετρηση της γ και $\hat{\gamma}$ μια αναπαράμετρηση της $\tilde{\gamma}$, τότε η $\hat{\gamma}$ είναι αναπαράμετρηση της γ .

1.4 Κλειστές καμπύλες

Είναι προφανές ότι κάποιες καμπύλες «κλείνουν», όπως ένας κύκλος ή μία έλλειψη, ενώ κάποιες άλλες όχι, όπως μία ευθεία ή μία παραβολή. Εάν ένα σημείο κινείται, έστω με σταθερή ταχύτητα, πάνω σε μία καμπύλη που κλείνει, θα επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης του ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα και κατόπιν θα διανύσει την ίδια καμπύλη ξανά από την αρχή. Από την άλλη, εάν ένα σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μία ευθεία ή σε μία παραβολή, δεν επιστρέφει ποτέ στο σημείο εκκίνησης του. Υπάρχουν όμως μερικές ενδιάμεσες περιπτώσεις όπως η καμπύλη (Σχήμα 1.11)

$$\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - 1).$$

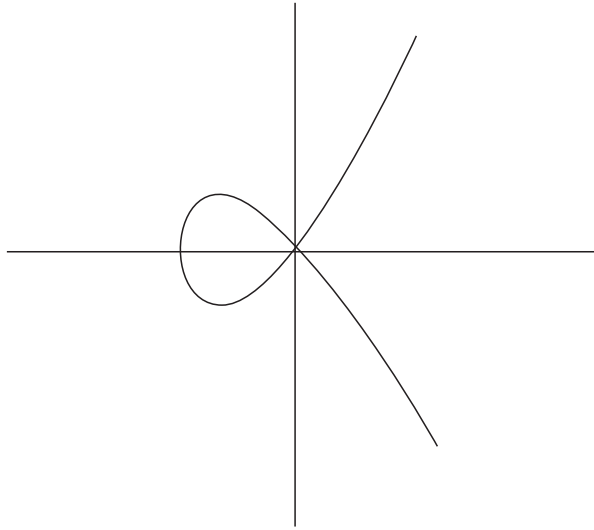
Ένα σημείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε αυτήν την καμπύλη μπορεί να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης του εάν το σημείο εκκίνησης είναι η αρχή των αξόνων, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση δεν θα επιστρέψει. Συνεπώς, πρέπει να ορίσουμε με προσοχή τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια καμπύλη «κλείνει».

Ορισμός 1.4.1

Έστω $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια λεία καμπύλη και έστω $T \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η γ είναι T -περιοδική αν

$$\gamma(t + T) = \gamma(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Εάν η γ δεν είναι σταθερή και είναι T -περιοδική για κάποιο $T \neq 0$, τότε λέμε ότι η γ είναι *κλειστή*.



Σχήμα 1.11. Μη κλειστή καμπύλη με μία αυτοτομή.

Συνεπώς, εάν η γ είναι T -περιοδική, ένα σημείο που κινείται πάνω στην γ επιστρέφει στο σημείο εκκίνησής του ύστερα από χρονικό διάστημα T , οποιοδήποτε και αν είναι το σημείο εκκίνησης. Ασφαλώς, κάθε καμπύλη είναι 0-περιοδική.

Παρατήρηση

Εάν η γ είναι T -περιοδική, είναι προφανές ότι η γ ορίζεται πλήρως από τον περιορισμό της σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους $|T|$. Αντιστρόφως, οι κλειστές καμπύλες συχνά μας δίνονται σαν καμπύλες που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα, έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Εάν η γ και όλες οι παράγωγοί της παίρνουν την ίδια τιμή στα a και b ,⁹ υπάρχει μοναδικός τρόπος να επεκτείνουμε την γ σε μία $(b - a)$ -περιοδική (λεία) καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Κατά συνέπεια, όσα θα αναφερθούν παρακάτω αφορούν και καμπύλες που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα.

Είναι προφανές ότι εάν μια καμπύλη γ είναι T -περιοδική τότε είναι $(-T)$ -περιοδική, αφού

$$\gamma(t - T) = \gamma((t - T) + T) = \gamma(t).$$

Έπεται ότι εάν η γ είναι T -περιοδική για κάποιο $T \neq 0$, τότε είναι T -περιοδική για κάποιο $T > 0$.

Ορισμός 1.4.2

Η *περίοδος* μίας κλειστής καμπύλης γ είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός T για τον οποίο η γ είναι T -περιοδική.

Η ύπαρξη του αριθμού T δεν είναι και τόσο προφανής (υπενθυμίζουμε ότι δεν έχουν ελάχιστο στοιχείο όλα τα σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών). Μία απόδειξη της ύπαρξης του T περιλαμβάνεται στις ασκήσεις.

⁹Οι παράγωγοι στα άκρα a και b πρέπει να ορίζονται με την πλευρική έννοια.

Παράδειγμα 1.4.3

Η έλλειψη $\boldsymbol{\gamma}(t) = (p \cos t, q \sin t)$ (Άσκηση 1.1.6) είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π , διότι και οι δύο συνιστώσες της είναι 2π -περιοδικές συναρτήσεις (όπως προκύπτει από γνωστές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων).¹⁰

Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μια κανονική κλειστή καμπύλη, μία αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι πάντοτε κλειστή. Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι αφού τα σημεία που αποτελούν την εικόνα μιας κλειστής καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ περιόδου T διαγράφονται όλα καθώς η παράμετρος t της $\boldsymbol{\gamma}$ παίρνει τιμές μέσα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα μήκους T , για παράδειγμα $0 \leq t \leq T$, είναι εύλογο να ορίσουμε ως μήκος της $\boldsymbol{\gamma}$ το

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^T \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| dt.$$

Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 1.3.6, αν χρησιμοποιήσουμε το μήκος τόξου

$$s = \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du$$

της $\boldsymbol{\gamma}$ ως παράμετρο παίρνουμε μία αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ της $\boldsymbol{\gamma}$ (ώστε να έχουμε $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(t)$). Παρατηρούμε ότι

$$s(t+T) = \int_0^{t+T} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = \int_0^T \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du + \int_T^{t+T} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = \ell(\boldsymbol{\gamma}) + s(t),$$

διότι, θέτοντας $v = u - T$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\boldsymbol{\gamma}(u - T) = \boldsymbol{\gamma}(u)$ (και άρα με παραγωγήση $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u - T) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)$), παίρνουμε

$$\int_T^{t+T} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(v)\| dv = s(t).$$

Συνεπώς,

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s(t)) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s(t')) \iff \boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t') \iff t' - t = kT \iff s(t') - s(t) = k\ell(\boldsymbol{\gamma}),$$

όπου k είναι ένας ακέραιος. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο $\ell(\boldsymbol{\gamma})$. Ας σημειώσουμε ότι, αφού η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, το $\ell(\boldsymbol{\gamma})$ είναι επίσης ίσο με το μήκος της $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$. Εν συντομία, *μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι μία κλειστή καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας και ότι η περιόδός της είναι ίση με το μήκος της*.

Επανερχόμενοι στην καμπύλη του Σχήματος 1.11, διαπιστώνουμε ότι δεν είναι κλειστή· παρ' όλα αυτά, εάν ένα σημείο ξεκινήσει από την αρχή των αξόνων και κινηθεί με σταθερή ταχύτητα πάνω στον βρόχο του χωρίου $x < 0$, θα επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης του. Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.4.4

Λέμε ότι μία καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ έχει *αυτοτομή* σε ένα σημείο της \boldsymbol{p} εάν υπάρχουν παραμετρικές τιμές $a \neq b$ τέτοιες ώστε

¹⁰Σ.τ.Μ. Παραβάλετε τον ορισμό της T -περιοδικής καμπύλης με αυτόν της περιοδικής συνάρτησης.

(i) $\gamma(a) = \gamma(b) = p$, και

(ii) εάν η γ είναι κλειστή με περίοδο T , τότε το $a - b$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T .

Παράδειγμα 1.4.5

Η κοχλιοειδής του Παραδείγματος 1.1.7 είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π . Από την εικόνα είναι φανερό ότι έχει ακριβώς μία αυτοτομή, στην αρχή των αξόνων. (Αυτό μπορεί επίσης να επιβεβαιωθεί αναλυτικά – πρβλ. Άσκηση 1.4.1 και τη λύση της.)

Ασκήσεις

1.4.1 Δείξτε ότι η *έκτη του Cayley*

$$\gamma(t) = (\cos^3 t \cos 3t, \cos^3 t \sin 3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι κλειστή καμπύλη με ακριβώς μία αυτοτομή. Ποια είναι η περιόδός της; (Το όνομα αυτής της καμπύλης οφείλεται στο γεγονός ότι η καρτεσιανή της εξίσωση είναι πολώνυμο βου βαθμού).

1.4.2 Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η αναπαραμέτρηση μιας κλειστής καμπύλης δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστή.

1.4.3 Δείξτε ότι αν η καμπύλη γ είναι T_1 -περιοδική και T_2 -περιοδική, τότε είναι $(k_1 T_1 + k_2 T_2)$ -περιοδική για οποιουσδήποτε ακεραίους k_1 και k_2 .

1.4.4 Έστω $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη και υποθέστε ότι T_0 είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός για τον οποίο η γ είναι T_0 -περιοδική. Αποδείξτε ότι η γ είναι T -περιοδική αν και μόνο αν $T = k T_0$ για κάποιον ακέραιο k .

1.4.5 Υποθέστε ότι μια *μη σταθερή* συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι T -περιοδική για κάποιο $T \neq 0$. Σε αυτήν την άσκηση καλείστε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας *ελάχιστος* θετικός αριθμός T_0 για τον οποίο η γ είναι T_0 -περιοδική. Για την απόδειξη είναι απαραίτητα κάποια στοιχεία από την πραγματική ανάλυση. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο, γι' αυτό υποθέστε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός T_0 .

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία T_1, T_2, T_3, \dots τέτοια ώστε $T_1 > T_2 > T_3 > \dots > 0$ και ότι η γ είναι T_r -περιοδική για κάθε $r \geq 1$.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $\{T_r\}$ του ερωτήματος (i) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να έχουμε $T_r \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$.

(iii) Δείξτε ότι από την ύπαρξη μιας ακολουθίας $\{T_r\}$ όπως στο (i) τέτοιας ώστε $T_r \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$ έπεται ότι η γ είναι σταθερή.

1.4.6 Έστω $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία μη σταθερή καμπύλη που είναι T -περιοδική για κάποιο $T > 0$. Δείξτε ότι η γ είναι κλειστή.

1.5 Σχέση καμπυλών στάθμης και παραμετρημένων καμπυλών

Σε αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να αποσαφηνίσουμε τη σχέση μεταξύ των δύο ειδών καμπύλης που εξετάσαμε στις προηγούμενες ενότητες.

Με τη γενικότητα με την οποία τις ορίσαμε, οι καμπύλες στάθμης δεν είναι πάντα το είδος των αντικειμένων που θα θέλαμε να ονομάζουμε καμπύλες. Για παράδειγμα, η «καμπύλη» στάθμης $x^2 + y^2 = 0$ είναι ένα μόνο σημείο. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση $f(x, y)$ έτσι ώστε η $f(x, y) = c$, όπου c είναι μια σταθερά, να είναι μια αποδεκτή καμπύλη στάθμης του επιπέδου περιλαμβάνονται στο ακόλουθο θεώρημα, στο οποίο αποδεικνύεται ότι οι συγκεκριμένες καμπύλες στάθμης μπορούν να παραμετρηθούν. Ας σημειωθεί ότι μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε ότι $c = 0$ (αφού μπορούμε να αντικαταστήσουμε την f με την $f - c$).

Θεώρημα 1.5.1

Έστω $f(x, y)$ μια λεία συνάρτηση δύο μεταβλητών (που σημαίνει ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f , κάθε τάξης, υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις). Υποθέτουμε ότι, σε κάθε σημείο της καμπύλης στάθμης

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\},$$

οι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Εάν \mathbf{p} είναι ένα σημείο της C , με συντεταγμένες έστω (x_0, y_0) , τότε υπάρχει μια κανονική παραμετρημένη καμπύλη $\gamma(t)$, ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0, η οποία διέρχεται από το \mathbf{p} όταν $t = 0$ και περιέχεται στην C για όλα τα t .

Στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού χρησιμοποιείται το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης (μία μορφή του οποίου χρησιμοποιήθηκε ήδη στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.6). Προς το παρόν, θα προσπαθήσουμε απλώς να πείσουμε τον αναγνώστη για την ισχύ του θεωρήματος. Η απόδειξη θα δοθεί αργότερα (στην Άσκηση 5.6.2), αφού εισαγάγουμε με αυστηρό τρόπο το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης και το χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη των επιφανειών.

Για να κατανοήσουμε τη σημασία των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η f βάσει του Θεωρήματος 1.5.1, ας υποθέσουμε ότι το $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ είναι ένα σημείο της C κοντά στο \mathbf{p} τέτοιο ώστε

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor για δύο μεταβλητές,

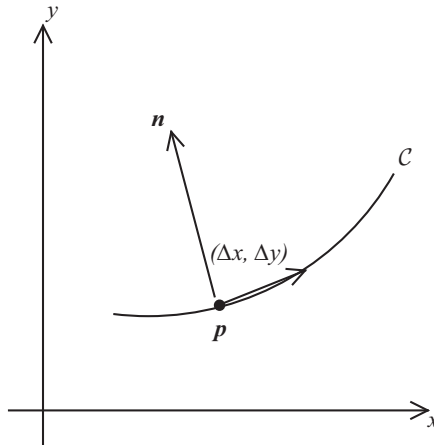
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y},$$

όπου παραλείψαμε τα γινόμενα των μικρών ποσοτήτων Δx και Δy (οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (x_0, y_0)). Επομένως,

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.8)$$

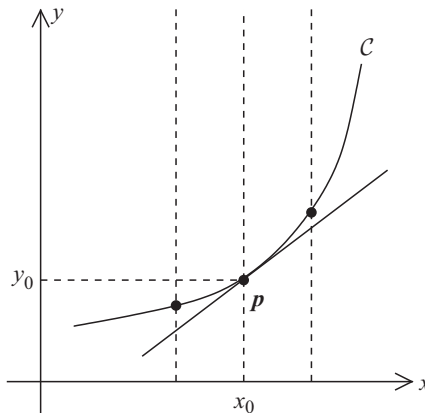
Αφού τα Δx και Δy είναι μικρά, το διάνυσμα $(\Delta x, \Delta y)$ είναι σχεδόν εφαπτόμενο στη C

στο σημείο p , άρα η Εξ. 1.8 λέει ότι το διάνυσμα $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ είναι κάθετο στην C στο σημείο p (Σχήμα 1.12).



Σχήμα 1.12.

Η υπόθεση του Θεωρήματος 1.5.1 μας λέει ότι το διάνυσμα \mathbf{n} είναι μη μηδενικό σε κάθε σημείο της C . Αν υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ στο p , τότε το \mathbf{n} δεν είναι παράλληλο στον άξονα x στο σημείο p , οπότε η εφαπτομένη της C στο σημείο p δεν είναι παράλληλη στον άξονα y (Σχήμα 1.13).



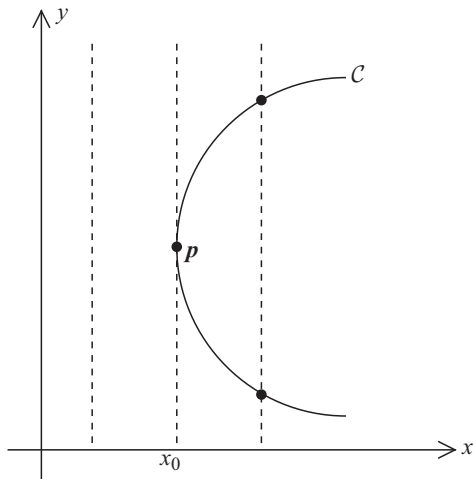
Σχήμα 1.13.

Αυτό σημαίνει ότι οι κάθετες ευθείες $x =$ σταθερά κοντά στο $x = x_0$ τέμνουν όλες την C σε ένα μοναδικό σημείο (x, y) κοντά στο p . Με άλλα λόγια, η εξίσωση

$$f(x, y) = 0 \quad (1.9)$$

έχει μία μοναδική λύση y κοντά στο y_0 για κάθε x κοντά στο x_0 . Σημειώνουμε ότι αυτό

μπορεί να μην ισχύει στην περίπτωση όπου η εφαπτομένη της C στο σημείο p είναι παράλληλη στον άξονα y (δηλαδή αν $\partial f/\partial y = 0$), όπως λ.χ. στο Σχήμα 1.14.



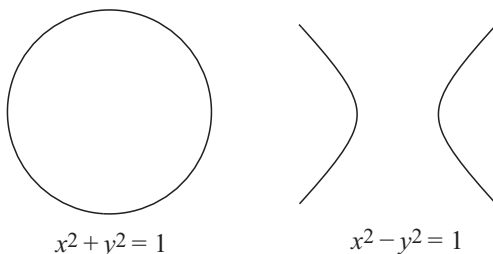
Σχήμα 1.14. Η μερική παράγωγος ως προς y είναι 0 στο p .

Σε αυτό το παράδειγμα οι ευθείες $x =$ σταθερά λίγο αριστερότερα του $x = x_0$ δεν τέμνουν την C κοντά στο p , ενώ οι ευθείες λίγο δεξιότερα του $x = x_0$ τέμνουν την C σε περισσότερα του ενός σημεία κοντά στο p .

Η ιδιότητα της f που παραθέσαμε με πλάγια γράμματα στην προηγούμενη παράγραφο σημαίνει ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g(x)$, ορισμένη για τα x που βρίσκονται κοντά στο x_0 , τέτοια ώστε η $y = g(x)$ να είναι η μοναδική λύση της Εξ. 1.9 κοντά στο x_0 . Μπορούμε πλέον να ορίσουμε μια παραμέτρηση γ του τμήματος της C κοντά στο p ως εξής:

$$\gamma(t) = (t, g(t)).$$

Εάν δεχθούμε ότι η g είναι λεία (το οποίο προκύπτει από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης), τότε η γ είναι σίγουρα κανονική αφού το διάνυσμα $\dot{\gamma} = (1, \dot{g})$ προφανώς δεν μηδενίζεται ποτέ. Με αυτόν τον τρόπο «αποδεικνύεται» το Θεώρημα 1.5.1.



Σχήμα 1.15. Μία συνεκτική και μία μη συνεκτική καμπύλη.

Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε κάτι περισσότερο από όσα περιλάβαμε στη διατύπωση του Θεωρήματος 1.5.1. Ας υποθέσουμε ότι η $f(x, y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες

του θεωρήματος και ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η καμπύλη στάθμης C που δίνεται από την $f(x, y) = 0$ είναι *συνεκτική*. Για τους αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με τη σημειακή τοπολογία, αυτό στην ουσία σημαίνει ότι η C αποτελείται από «ένα κομμάτι». Για παράδειγμα, ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ είναι συνεκτικός, ενώ η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ δεν είναι (βλ. Σχήμα 1.15). Με αυτές τις υποθέσεις για την f , υπάρχει μια κανονική παραμετρημένη καμπύλη γ της οποίας η εικόνα είναι *ολόκληρη* η C . Επιπλέον, εάν η C δεν κλειστή, η γ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι 1-1· εάν η C είναι κλειστή, τότε η γ απεικονίζει κάποιο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ επί της C , $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ και η γ είναι 1-1 στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Με αντίστοιχο συλλογισμό μπορούμε να μεταβούμε από τις παραμετρημένες καμπύλες στις καμπύλες στάθμης:

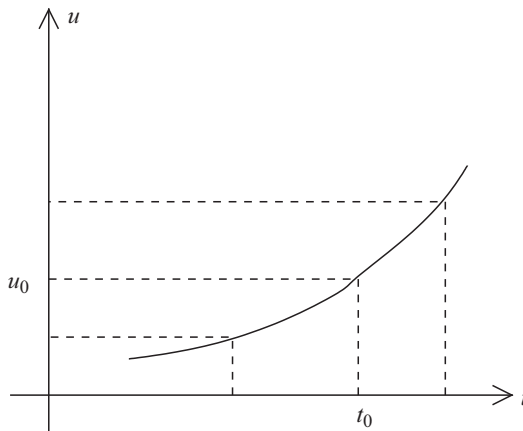
Θεώρημα 1.5.2

Αν γ είναι μία κανονική παραμετρημένη καμπύλη του επιπέδου και $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ ένα σημείο της εικόνας της γ , τότε υπάρχει μια λεία, πραγματική συνάρτηση $f(x, y)$, ορισμένη για x και y εντός δύο ανοικτών διαστημάτων που περιέχουν τα x_0 και y_0 , αντίστοιχα, που ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.1 τέτοια ώστε η $\gamma(t)$ να περιέχεται στην καμπύλη στάθμης $f(x, y) = 0$ για κάθε τιμή του t σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το t_0 .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.2 είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.1. Έστω

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)),$$

όπου u και v είναι λείες συναρτήσεις. Αφού η γ είναι κανονική, τουλάχιστον μία από τις $\dot{u}(t_0)$ και $\dot{v}(t_0)$ είναι μη μηδενική, έστω η $\dot{u}(t_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα της u ως συνάρτησης του t δεν είναι παράλληλο στον άξονα t στο σημείο t_0 (Σχήμα 1.16).



Σχήμα 1.16.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.1, αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα t κοντά στο $u = x_0$ τέμνει το γράφημα της x σε ένα μοναδικό σημείο $u(t)$,

όπου το t είναι κοντά στο t_0 . Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει μία συνάρτηση $h(x)$, ορισμένη για x εντός ενός ανοικτού διαστήματος που περιέχει το x_0 , τέτοια ώστε η $t = h(x)$ να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $u(t) = x$ όταν το x είναι κοντά στο x_0 και το t κοντά στο t_0 . Σύμφωνα με το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης η h είναι λεία. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = y - v(h(x))$$

έχει τις ιδιότητες που επιθυμούμε.

Εν γένει δεν είναι δυνατό να βρούμε μια *μοναδική* συνάρτηση $f(x, y)$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.1 τέτοια ώστε η εικόνα της γ να περιέχεται στην καμπύλη στάθμης $f(x, y) = 0$, διότι η γ μπορεί να έχει αυτοτομές όπως η κοχλιοειδής του Παραδείγματος 1.1.7. Από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης έπεται ότι δεν μπορεί να βρεθεί μοναδική συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.1 και να περιγράφει την καμπύλη κοντά σε ένα τέτοιο σημείο αυτοτομής.

Ασκήσεις

1.5.1 Δείξτε ότι η καμπύλη C με καρτεσιανή εξίσωση

$$y^2 = x(1 - x^2)$$

δεν είναι συνεκτική. Για ποιο εύρος τιμών του t είναι παραμέτρηση της C η

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{t - t^3});$$

Ποια είναι η εικόνα αυτής της παραμέτρησης;

1.5.2 Διατυπώστε το ανάλογο του Θεωρήματος 1.5.1 για καμπύλες στάθμης του \mathbb{R}^3 που δίνονται από τις $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$.

1.5.3 Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο του Θεωρήματος 1.5.2 για καμπύλες του \mathbb{R}^3 (ή ακόμα και του \mathbb{R}^n). (Αυτό είναι εύκολο.)

Στο υπόλοιπο αυτού του βιβλίου θα μιλάμε απλώς για «καμπύλες», εκτός και αν υπάρχει σοβαρός κίνδυνος σύγχυσης για το ποιον τύπο καμπύλης (στάθμης ή παραμετρημένη) εννοούμε.

2

Πόσο καμπυλώνει μία καμπύλη;

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε καμπύλη του \mathbb{R}^3 δύο αριθμητικές συναρτήσεις, την καμπυλότητα και τη στρέψη. Η καμπυλότητα αποτελεί μέτρο του κατά πόσο μια καμπύλη δεν περιέχεται σε μία ευθεία (ώστε οι ευθείες να έχουν μηδενική καμπυλότητα), ενώ η στρέψη είναι το μέτρο του κατά πόσο μια καμπύλη δεν περιέχεται σε ένα επίπεδο (ώστε οι επίπεδες καμπύλες να έχουν μηδενική στρέψη). Όπως θα διαπιστώσουμε, η καμπυλότητα και η στρέψη μαζί προσδιορίζουν το σχήμα μιας καμπύλης.

2.1 Καμπυλότητα

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα μέτρο για το πόσο «καμπυλωμένη» είναι μία καμπύλη. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα θα εργαστούμε αρχικά με επίπεδες καμπύλες. Εφόσον μία ευθεία πρέπει να έχει μηδενική καμπυλότητα, ένα μέτρο της καμπυλότητας μίας επίπεδης καμπύλης σε ένα σημείο της \mathbf{p} θα πρέπει να είναι η απόκλιση της από την εφαπτόμενη ευθεία στο \mathbf{p} .

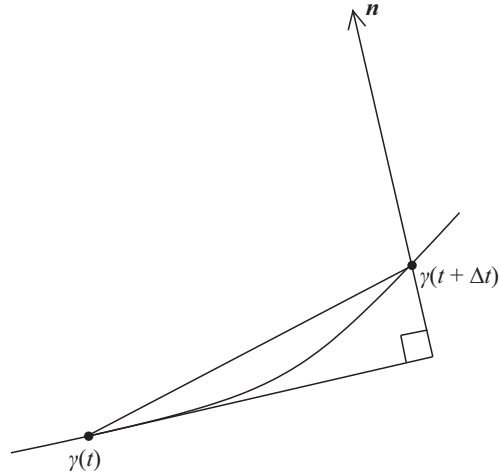
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι \mathbf{y} είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^2 . Καθώς η παράμετρος t της \mathbf{y} μεταβάλλεται σε $t + \Delta t$, η καμπύλη απομακρύνεται από την εφαπτόμενη ευθεία της στο σημείο $\mathbf{y}(t)$ κατά απόσταση $(\mathbf{y}(t + \Delta t) - \mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{n}$, όπου \mathbf{n} είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{\mathbf{y}}(t)$ της \mathbf{y} στο σημείο $\mathbf{y}(t)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor,

$$\mathbf{y}(t + \Delta t) = \mathbf{y}(t) + \dot{\mathbf{y}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{y}}(t)(\Delta t)^2 + \text{υπόλοιπο}, \quad (2.1)$$

όπου η ποσότητα (υπόλοιπο)/ $(\Delta t)^2$ τείνει στο μηδέν καθώς το Δt τείνει στο μηδέν.

Εφόσον $\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n} = 0$, η απόκλιση της \mathbf{y} από την εφαπτόμενη ευθεία της στο σημείο $\mathbf{y}(t)$



Σχήμα 2.1. Απόκλιση επίπεδης καμπύλης από την εφαπτόμενη ευθεία της.

είναι

$$\frac{1}{2} \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \mathbf{n} (\Delta t)^2 + \text{υπόλοιπο.}$$

Δεδομένου ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, το $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι κάθετο στην $\boldsymbol{\gamma}$ και άρα παράλληλο στο \mathbf{n} . Συνεπώς, αν παραλείψουμε τους όρους του υπολοίπου, το μέγεθος της απόκλισης της $\boldsymbol{\gamma}$ από την εφαπτόμενη ευθεία της είναι

$$\frac{1}{2} \|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| (\Delta t)^2.$$

Από αυτήν τη σχέση οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1.1

Εάν $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με παράμετρο t , η *καμπυλότητά* της $\kappa(t)$ στο σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι η ποσότητα $\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$.

Ας παρατηρήσουμε ότι ο ορισμός αυτός αφορά καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^n για κάθε $n \geq 2$. Επιπλέον, ο ορισμός αυτός είναι συνεπής με την Πρόταση 1.1.6, η οποία μας λέει ότι αν $\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}$ παντού, τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι τμήμα ευθείας και άρα θα πρέπει σίγουρα να έχει μηδενική καμπυλότητα.

Στο σημείο αυτό ας ελέγξουμε αν η καμπυλότητα που παίρνουμε από τον Ορισμό 2.1.1 συμφωνεί με την καμπυλότητα που αναμένουμε να έχει ένας κύκλος. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο του \mathbb{R}^2 κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας R , με την εξής παραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(x_0 + R \cos \frac{t}{R}, y_0 + R \sin \frac{t}{R} \right).$$

Έχουμε $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \left(-\sin \frac{t}{R}, \cos \frac{t}{R}\right)$, άρα

$$\|\dot{\boldsymbol{y}}(t)\| = \sqrt{\left(-\sin \frac{t}{R}\right)^2 + \left(\cos \frac{t}{R}\right)^2} = 1,$$

το οποίο σημαίνει ότι η \boldsymbol{y} είναι πράγματι μοναδιαίας ταχύτητας. Επιπλέον,

$$\ddot{\boldsymbol{y}}(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R}\right),$$

συνεπώς η καμπυλότητα

$$\|\ddot{\boldsymbol{y}}(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R}\right)^2} = \frac{1}{R},$$

είναι το αντίστροφο της ακτίνας του κύκλου. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με αυτό που αναμέναμε, δηλαδή ότι οι μικροί κύκλοι πρέπει να έχουν μεγάλη καμπυλότητα και οι μεγάλοι κύκλοι μικρή καμπυλότητα.

Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει μόνο καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας. Εάν \boldsymbol{y} είναι μια οποιαδήποτε κανονική καμπύλη, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.6, η \boldsymbol{y} έχει μια παραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας, έστω την $\tilde{\boldsymbol{y}}$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε ως καμπυλότητα της \boldsymbol{y} την καμπυλότητα της $\tilde{\boldsymbol{y}}$. Για να έχει νόημα αυτό, πρέπει να γνωρίζουμε ότι αν $\hat{\boldsymbol{y}}$ είναι μια άλλη παραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της \boldsymbol{y} , τότε οι καμπυλότητες των $\tilde{\boldsymbol{y}}$ και $\hat{\boldsymbol{y}}$ είναι ίσες. Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι η $\hat{\boldsymbol{y}}$ θα είναι αναπαραμετρηση της $\tilde{\boldsymbol{y}}$ (Άσκηση 1.3.4), επομένως, σύμφωνα με το Πόρισμα 1.3.7,

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \hat{\boldsymbol{y}}(u),$$

όπου $u = \pm t + c$ και c είναι μια σταθερά. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε $\frac{d\tilde{\boldsymbol{y}}}{dt} = \pm \frac{d\hat{\boldsymbol{y}}}{du}$, άρα

$$\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{y}}}{dt^2} = \pm \frac{d}{du} \left(\pm \frac{d\hat{\boldsymbol{y}}}{du} \right) = \frac{d^2\hat{\boldsymbol{y}}}{du^2},$$

που σημαίνει ότι οι $\tilde{\boldsymbol{y}}$ και $\hat{\boldsymbol{y}}$ έχουν πράγματι την ίδια καμπυλότητα.

Παρότι κάθε κανονική καμπύλη \boldsymbol{y} έχει μία αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας, μπορεί να είναι πολύπλοκο έως αδύνατο να τη γράψουμε *επακριβώς* (βλ. Παραδείγματα 1.3.8 και 1.3.9). Γι' αυτό θα θέλαμε να έχουμε έναν τύπο που να δίνει την καμπυλότητα της \boldsymbol{y} συναρτήσει μόνο της ίδιας της \boldsymbol{y} και όχι κάποιας αναπαραμετρήσής της.

Πρόταση 2.1.2

Εάν $\boldsymbol{y}(t)$ είναι μια κανονική καμπύλη του \mathbb{R}^3 , τότε η καμπυλότητά της είναι

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\boldsymbol{y}} \times \dot{\boldsymbol{y}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{y}}\|^3}, \quad (2.2)$$

όπου με \times συμβολίζουμε το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο και με τελεία την d/dt .

Ασφαλώς, αφού μία καμπύλη του \mathbb{R}^2 μπορεί να ιδωθεί σαν καμπύλη του επιπέδου (έστω) γ του \mathbb{R}^3 , η Εξ. 2.2 μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της καμπυλότητας επίπεδων καμπυλών.

Απόδειξη Έστω s η παράμετρος μοναδιαίας ταχύτητας της γ . Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt},$$

οπότε

$$\kappa = \left\| \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \right\| = \left\| \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} \right)}{ds/dt} \right\| = \left\| \frac{\frac{ds}{dt} \frac{d^2\gamma}{ds^2} - \frac{d^2s}{dt^2} \frac{d\gamma}{ds}}{(ds/dt)^3} \right\|. \quad (2.3)$$

Επιπλέον,

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma},$$

και παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν τη σχέση και την Εξ. 2.3 παίρνουμε

$$\kappa = \left\| \frac{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \ddot{\gamma} - \frac{d^2s}{dt^2} \frac{ds}{dt} \dot{\gamma}}{(ds/dt)^4} \right\| = \frac{\|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του τριπλού διανυσματικού γινομένου

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

(όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) παίρνουμε

$$\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}) = (\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}.$$

Επιπλέον, τα $\dot{\gamma}$ και $\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}$ είναι κάθετα μεταξύ τους διανύσματα, συνεπώς

$$\|\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})\| = \|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|.$$

Επομένως,

$$\frac{\|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})\ddot{\gamma} - (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4} = \frac{\|\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^4} = \frac{\|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4} = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}. \quad \square$$

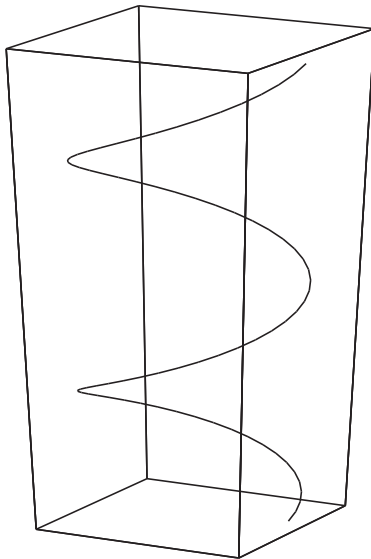
Ας παρατηρήσουμε ότι η Εξ. 2.2 έχει νόημα μόνο αν $\dot{\gamma} \neq \mathbf{0}$. Συνεπώς η καμπυλότητα ορίζεται σε κάθε κανονικό σημείο της καμπύλης.

Παράδειγμα 2.1.3

Μία κυκλική έλικα με άξονα τον άξονα z είναι μια καμπύλη της μορφής

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

όπου a και b είναι σταθερές.



Σχήμα 2.2. Κυκλική έλικα.

Εάν (x, y, z) είναι ένα σημείο της έλικας, έτσι ώστε

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b\theta$$

για κάποια τιμή του θ , τότε $x^2 + y^2 = a^2$, πράγμα που σημαίνει ότι η έλικα βρίσκεται πάνω στον κύλινδρο με ακτίνα $|a|$ και άξονα τον άξονα z . Ο θετικός αριθμός $|a|$ καλείται ακτίνα της έλικας. Καθώς το θ αυξάνεται κατά 2π , το σημείο $(a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta)$ περιστρέφεται μία φορά γύρω από τον άξονα z και μετακινείται παράλληλα σε αυτόν κατά $2\pi b$. Ο θετικός αριθμός $2\pi|b|$ καλείται βήμα της έλικας.

Ας υπολογίσουμε την καμπυλότητα της έλικας χρησιμοποιώντας τον τύπο της Πρότασης 2.1.2. Συμβολίζοντας την $d/d\theta$ με τελεία, έχουμε $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\theta) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b)$, άρα

$$\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\theta)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Συνεπώς το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\theta)$ δεν είναι ποτέ μηδενικό, άρα η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική (εκτός αν $a = b = 0$ · στην περίπτωση αυτή η εικόνα της έλικας είναι ένα μόνο σημείο). Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο της Πρότασης 2.1.2: έχουμε $\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = (-a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$, άρα $\ddot{\boldsymbol{\gamma}} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (-ab \sin \theta, ab \cos \theta, -a^2)$ και συνεπώς

$$\kappa = \frac{\|(-ab \sin \theta, ab \cos \theta, -a^2)\|}{\|(-a \sin \theta, a \cos \theta, b)\|^3} = \frac{(a^2 b^2 + a^4)^{1/2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}. \quad (2.4)$$

Αυτό σημαίνει ότι η καμπυλότητα της έλικας είναι σταθερή.

Ας εξετάσουμε μερικές οριακές περιπτώσεις για να δούμε εάν αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτά που ήδη γνωρίζουμε. Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι $b = 0$ (αλλά $a \neq 0$). Στην περίπτωση αυτή η έλικα είναι απλώς ένας κύκλος του επιπέδου xy ακτίνας $|a|$, επομένως σύμφωνα με τις πράξεις που ακολουθούν την Πρόταση 2.1.2 η καμπυλότητα του είναι $1/|a|$. Από την άλλη, σύμφωνα με την Εξ. 2.4 η καμπυλότητα είναι

$$\kappa = \frac{|a|}{a^2 + 0} = \frac{|a|}{a^2} = \frac{1}{|a|}.$$

Κατόπιν ας υποθέσουμε ότι $a = 0$ (αλλά $b \neq 0$). Στην περίπτωση αυτή η εικόνα της έλικας είναι ο άξονας z , δηλαδή μία ευθεία, οπότε η καμπυλότητα είναι μηδενική· από την Εξ. 2.4 παίρνουμε επίσης μηδέν όταν $a = 0$.

Ασκήσεις

2.1.1 Υπολογίστε την καμπυλότητα των παρακάτω καμπυλών:

(i) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$.

(ii) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$.

(iii) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$.

(iv) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Για το αστροειδές του ερωτήματος (iv), δείξτε ότι η καμπυλότητα τείνει στο ∞ καθώς πλησιάζουμε ένα από τα σημεία $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Παραβάλετε αυτό το αποτέλεσμα με το σχήμα που σχεδιάσατε στην Άσκηση 1.1.5.

2.1.2 Δείξτε ότι, εάν η καμπυλότητα $\kappa(t)$ μιας κανονικής καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι παντού > 0 , τότε η $\kappa(t)$ είναι λεία συνάρτηση του t . Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι αυτό μπορεί και να μην ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι $\kappa > 0$.

2.2 Επίπεδες καμπύλες

Ο ορισμός της καμπυλότητας μπορεί να εξειδικευτεί για την περίπτωση των επίπεδων καμπυλών ώστε να αποκτήσει μία ελκυστική γεωμετρική ερμηνεία.

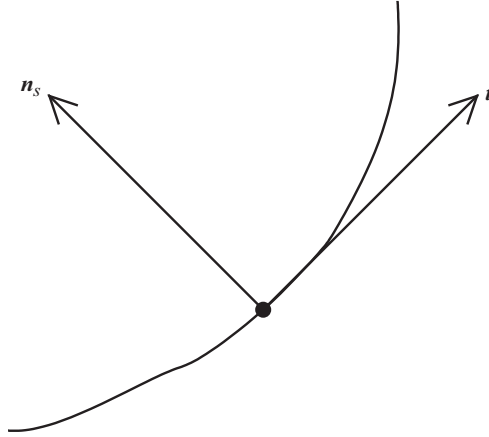
Ας υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{\gamma}(s)$ είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^2 . Συμβολίζοντας την d/ds με τελεία, έστω

$$\boldsymbol{t} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\boldsymbol{\gamma}$ · ας σημειωθεί ότι το \boldsymbol{t} είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Υπάρχουν δύο μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο \boldsymbol{t} · κάνουμε μία επιλογή ορίζοντας ως *προσημασμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα* \boldsymbol{n}_s της $\boldsymbol{\gamma}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που προκύπτει με περιστροφή του \boldsymbol{t} κατά την αντιωρολογιακή φορά κατά $\pi/2$ (Σχήμα 2.3).

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.4, το $\dot{\boldsymbol{t}} = \ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι κάθετο στο \boldsymbol{t} και άρα παράλληλο στο \boldsymbol{n}_s . Επομένως υπάρχει ένας αριθμός κ_s τέτοιος ώστε

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \kappa_s \boldsymbol{n}_s.$$

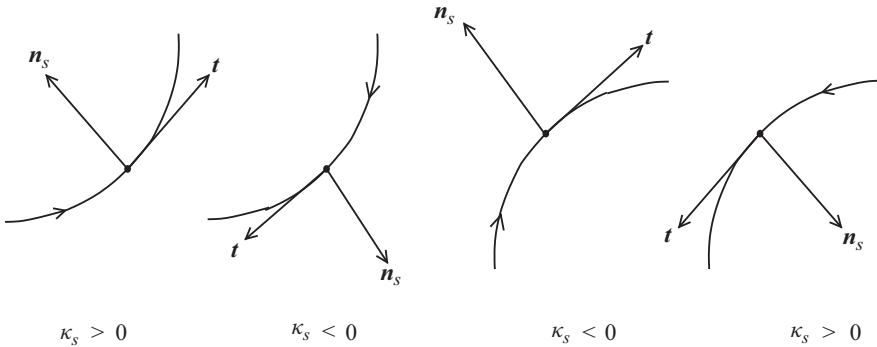


Σχήμα 2.3. Εφαπτόμενο και προσημασμένο κάθετο διάνυσμα επίπεδης καμπύλης.

Ο αριθμός κ_s ονομάζεται *προσημασμένη καμπυλότητα* της γ (μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν). Παρατηρούμε ότι, αφού $\|n_s\| = 1$, έχουμε

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\kappa_s n_s\| = |\kappa_s|, \quad (2.5)$$

άρα η καμπυλότητα της γ είναι η απόλυτη τιμή της προσημασμένης της καμπυλότητας. Στο Σχήμα 2.4 υποδεικνύεται πώς προσδιορίζεται το πρόσημο της προσημασμένης καμπυλότητας (σε όλες τις περιπτώσεις το βέλος πάνω στην καμπύλη υποδεικνύει την κατεύθυνση αύξησης του s). Η κ_s είναι αρνητική στα δύο μεσαία σχήματα και θετική στα άλλα δύο.



Σχήμα 2.4. Προσδιορισμός του προσήμου της κ_s .

Εάν $\gamma(t)$ είναι μια κανονική, αλλά όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας καμπύλη, ορίζουμε ως μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα t , προσημασμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n_s και προσημασμένη καμπυλότητα κ_s της γ τα αντίστοιχα μεγέθη της μοναδιαίας ταχύτητας αναπαραμέτρησής της $\tilde{\gamma}(s)$, όπου s είναι το μήκος τόξου της γ . Επομένως,

$$t = \frac{d\gamma/dt}{ds/dt} = \frac{d\gamma/dt}{\|d\gamma/dt\|},$$

το \mathbf{n}_s λαμβάνεται με περιστροφή του \mathbf{t} κατά $\pi/2$ κατά την αντισωρολογιακή φορά, και

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa_s \frac{ds}{dt} \mathbf{n}_s = \kappa_s \left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \right\| \mathbf{n}_s.$$

Η προσημασμένη καμπυλότητα έχει μία απλή γεωμετρική ερμηνεία μέσω του ρυθμού περιστροφής του εφαπτόμενου διανύσματος. Εάν $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, η κατεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ μετριέται από τη γωνία $\varphi(s)$ για την οποία

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)). \quad (2.6)$$

Ωστόσο, η γωνία $\varphi(s)$ δεν είναι μοναδική, αφού όποια τιμή και να επιλέξουμε μπορούμε πάντοτε να προσθέσουμε ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Το ακόλουθο αποτέλεσμα εξασφαλίζει ότι υπάρχει πάντα μια λεία επιλογή για την φ :

Πρόταση 2.2.1

Έστω $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, έστω $s_0 \in (\alpha, \beta)$, και έστω φ_0 τέτοια ώστε

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s_0) = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0).$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μια μοναδική λεία συνάρτηση $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\varphi(s_0) = \varphi_0$, και για την οποία η Εξ. 2.6 ισχύει για κάθε $s \in (\alpha, \beta)$.

Απόδειξη Έστω

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = (f(s), g(s)).$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(s)^2 + g(s)^2 = 1 \quad \text{για κάθε } s, \quad (2.7)$$

αφού η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s (f \dot{g} - g \dot{f}) dt.$$

Προφανώς $\varphi(s_0) = \varphi_0$. Επιπλέον, εφόσον οι συναρτήσεις f και g είναι λείες, το ίδιο ισχύει για την $\dot{\varphi} = f \dot{g} - g \dot{f}$ και άρα και για την φ .

Έστω

$$F = f \cos \varphi + g \sin \varphi \quad \text{και} \quad G = f \sin \varphi - g \cos \varphi.$$

Επομένως

$$\dot{F} = (\dot{f} + g \dot{\varphi}) \cos \varphi + (\dot{g} - f \dot{\varphi}) \sin \varphi,$$

όπου όμως

$$\dot{f} + g \dot{\varphi} = \dot{f}(1 - g^2) + fg \dot{g} = f(\dot{f} + g \dot{g}) = 0,$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Εξ. 2.7 και για την τελευταία ισότητα τη συνέπεια της

$$f \dot{f} + g \dot{g} = 0.$$

Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\dot{g} - f \dot{\varphi} = 0$. Συνεπώς $\dot{F} = 0$ και η F είναι σταθερή. Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι η G είναι σταθερή. Έχουμε όμως ότι

$$F(s_0) = f(s_0) \cos \varphi_0 + g(s_0) \sin \varphi_0 = \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 = 1,$$

και με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει ότι $G(s_0) = 0$. Έπεται ότι

$$f \cos \varphi + g \sin \varphi = 1, \quad f \sin \varphi - g \cos \varphi = 0$$

για κάθε s . Από τις εξισώσεις αυτές έπεται ότι $f = \cos \varphi$, $g = \sin \varphi$, και άρα ότι η λεία συνάρτηση φ ικανοποιεί την Εξ. 2.6.

Όσον αφορά τη μοναδικότητα, εάν ψ είναι μία άλλη λεία συνάρτηση τέτοια ώστε $\psi(s_0) = \varphi_0$ και $\dot{\psi}(s) = (\cos \psi(s), \sin \psi(s))$ για $s \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει ένας ακέραιος $n(s)$ τέτοιος ώστε

$$\psi(s) - \varphi(s) = 2\pi n(s) \quad \text{για κάθε } s \in (\alpha, \beta).$$

Επειδή οι φ και ψ είναι λείες, η n είναι λεία και άρα συνεχής συνάρτηση του s . Αυτό σημαίνει ότι η n είναι σταθερή. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο θα είχαμε $n(s_0) \neq n(s_1)$ για κάποιο $s_1 \in (\alpha, \beta)$, οπότε, σύμφωνα το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, η συνεχής συνάρτηση $n(s)$ θα έπρεπε να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του $n(s_0)$ και του $n(s_1)$ όταν το s βρίσκεται μεταξύ του s_0 και του s_1 . Οι περισσότεροι όμως πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του $n(s_0)$ και του $n(s_1)$ δεν είναι ακέραιοι! Επομένως, στην πραγματικότητα η n δεν εξαρτάται από το s , και δεδομένου ότι $\psi(s_0) = \varphi(s_0) = \varphi_0$, πρέπει να έχουμε $n = 0$ και άρα $\psi(s) = \varphi(s)$ για κάθε $s \in (\alpha, \beta)$. \square

Ορισμός 2.2.2

Η λεία συνάρτηση φ της Πρότασης 2.2.1 καλείται *γωνία περιστροφής* της γ οριζόμενη από τη συνθήκη $\varphi(s_0) = \varphi_0$.

Είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία της προσημασμένης καμπυλότητας που υποσχθήκαμε νωρίτερα.

Πρόταση 2.2.3

Αν $\gamma(s)$ είναι μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $\varphi(s)$ μία γωνία περιστροφής της γ , τότε

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Συνεπώς, η προσημασμένη καμπυλότητα είναι ο ρυθμός περιστροφής του εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4, η προσημασμένη καμπυλότητα είναι θετική ή αρνητική αναλόγως του εάν το t περιστρέφεται κατά την αντιωρολογιακή ή την ωρολογιακή φορά καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη κατά την κατεύθυνση αύξησης του s .

Απόδειξη Σύμφωνα με την Εξ. 2.6 το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το $t = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, άρα

$$\dot{t} = \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Επειδή $n_s = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από την εξίσωση $\dot{t} = \kappa_s n_s$. \square

Παράδειγμα 2.2.4

Ας υπολογίσουμε την προσημασμένη καμπυλότητα της αλυσοειδούς (Άσκηση 1.2.1). Χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ παίρνουμε $\dot{\gamma} = (1, \sinh t)$ και άρα

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \sinh t.$$

Επομένως, εάν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\dot{\gamma}$ με τον άξονα x , έχουμε

$$\tan \varphi = \sinh t = s,$$

$$\therefore \sec^2 \varphi \frac{d\varphi}{ds} = 1,$$

$$\therefore \kappa_s = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sec^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + s^2}.$$

Η Πρόταση 2.2.3 έχει ένα ενδιαφέρον πόρισμα που αφορά την ολική προσημασμένη καμπυλότητα μίας κλειστής καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας γ μήκους ℓ , δηλαδή του ολοκληρώματος

$$\int_0^\ell \kappa_s(s) ds. \quad (2.8)$$

Πόρισμα 2.2.5

Η ολική προσημασμένη καμπυλότητα μίας κλειστής επίπεδης καμπύλης είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π .

Απόδειξη Έστω γ μια κλειστή επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και έστω ℓ το μήκος της. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.3 η ολική προσημασμένη καμπυλότητα της γ είναι

$$\int_0^\ell \frac{d\varphi}{ds} ds = \varphi(\ell) - \varphi(0),$$

όπου φ είναι μία γωνία περιστροφής της γ . Η γ είναι όμως ℓ -περιοδική (βλ. Ενότητα 1.4):

$$\gamma(s + \ell) = \gamma(s).$$

Παραγωγίζοντας και τα μέλη παίρνουμε

$$\dot{\gamma}(s + \ell) = \dot{\gamma}(s),$$

και ειδικότερα $\dot{\gamma}(\ell) = \dot{\gamma}(0)$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Εξ. 2.6, έχουμε

$$(\cos \varphi(\ell), \sin \varphi(\ell)) = (\cos \varphi(0), \sin \varphi(0)),$$

που σημαίνει ότι η ποσότητα $\varphi(\ell) - \varphi(0)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . □

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι, εάν γνωρίζουμε την προσημασμένη καμπυλότητα μιας επίπεδης καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας σε κάθε σημείο της, ουσιαστικά έχουμε

προσδιορίζει την καμπύλη. Λέγοντας «ουσιαστικά» εννοούμε «μέχρι ευθείας ισομετρίας του \mathbb{R}^2 »: μία ευθεία ισομετρία του \mathbb{R}^2 είναι μία απεικόνιση $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ της μορφής

$$M = T_{\mathbf{a}} \circ \rho_{\theta},$$

όπου ρ_{θ} είναι μια περιστροφή κατά την αντισωρολογιακή φορά γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ ,

$$\rho_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

και $T_{\mathbf{a}}$ είναι η μεταφορά κατά το διάνυσμα \mathbf{a} ,

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a},$$

για οποιαδήποτε διανύσματα (x, y) και \mathbf{v} του \mathbb{R}^2 (βλ. Παράρτημα 1).

Θεώρημα 2.2.6

Εάν $k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχούσα λεία συνάρτηση, τότε υπάρχει μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ της οποίας η προσημασμένη καμπυλότητα ισούται με k .

Επιπλέον, εάν $\tilde{\gamma} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μια άλλη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας της οποίας η προσημασμένη καμπυλότητα ισούται με k , τότε υπάρχει ευθεία ισομετρία M του \mathbb{R}^2 τέτοια ώστε

$$\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s)), \quad \text{για κάθε } s \in (\alpha, \beta).$$

Απόδειξη Για το πρώτο σκέλος του θεωρήματος επιλέγουμε ένα σταθερό $s_0 \in (\alpha, \beta)$ και για κάθε $s \in (\alpha, \beta)$ ορίζουμε τις

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s k(u) du, \quad (\text{πρβλ. Πρόταση 2.2.3}),$$

$$\gamma(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right).$$

Επομένως το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ είναι το

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)),$$

το οποίο είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x . Συνεπώς, η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας και, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.3, η προσημασμένη καμπυλότητά της είναι

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{s_0}^s k(u) du = k(s).$$

Για το δεύτερο σκέλος, έστω $\tilde{\varphi}(s)$ μια λεία γωνία περιστροφής της $\tilde{\gamma}$. Επομένως,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(s) = (\cos \tilde{\varphi}(s), \sin \tilde{\varphi}(s)),$$

$$\therefore \tilde{\gamma}(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \tilde{\varphi}(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \tilde{\varphi}(t) dt \right) + \tilde{\gamma}(s_0). \quad (2.9)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.3 έχουμε $k(s) = d\tilde{\varphi}/ds$, άρα

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{s_0}^s k(u) du + \tilde{\varphi}(s_0).$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην Εξ. 2.9 και συμβολίζοντας με \mathbf{a} το σταθερό διάνυσμα $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s_0)$ και με θ την αριθμητική σταθερά $\tilde{\varphi}(s_0)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) &= T_{\mathbf{a}} \left(\int_{s_0}^s \cos(\varphi(t) + \theta) dt, \int_{s_0}^s \sin(\varphi(t) + \theta) dt \right) \\ &= T_{\mathbf{a}} \left(\cos \theta \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt - \sin \theta \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \sin \theta \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt + \cos \theta \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right) \\ &= T_{\mathbf{a}} \rho_{\theta} \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right) \\ &= T_{\mathbf{a}} \rho_{\theta}(\boldsymbol{\gamma}(s)).\end{aligned}\quad \square$$

Παράδειγμα 2.2.7

Κάθε κανονική επίπεδη καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ της οποίας η καμπυλότητα είναι μια θετική σταθερά είναι τμήμα κύκλου. Για να το αποδείξουμε ας υποθέσουμε ότι κ_s είναι η καμπυλότητα της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ και κ_s η προσημασμένη καμπυλότητά της, οπότε σύμφωνα με την Εξ. 2.5 έχουμε

$$\kappa_s = \pm \kappa.$$

Α priori, θα μπορούσαμε να είχαμε $\kappa_s = \kappa$ σε κάποια σημεία της καμπύλης και $\kappa_s = -\kappa$ σε κάποια άλλα, αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει διότι η κ_s είναι συνεχής συνάρτηση του s (βλ. Άσκηση 2.2.2). Πράγματι, το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών μας λέει ότι εάν η κ_s παίρνει και την τιμή κ και την τιμή $-\kappa$ πρέπει να παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Συνεπώς, είτε $\kappa_s = \kappa$ σε κάθε σημείο της καμπύλης είτε $\kappa_s = -\kappa$ σε κάθε σημείο της καμπύλης. Ειδικότερα, η κ_s είναι σταθερά.

Για να προχωρήσουμε πρέπει να δείξουμε ότι, όποια και να είναι η τιμή της κ_s , μπορούμε να βρούμε έναν παραμετρημένο κύκλο του οποίου η προσημασμένη καμπυλότητα είναι ίση με κ_s . Αν ισχύει αυτό, το θεώρημα μας λέει ότι *κάθε* καμπύλη της οποίας η προσημασμένη καμπυλότητα ισούται με κ_s μπορεί να προκύψει με εφαρμογή μίας ευθείας ισομετρίας σε αυτόν τον κύκλο. Αφού οι περιστροφές και οι μεταφορές απεικονίζουν προφανώς κύκλους σε κύκλους, έπεται ότι *κάθε* καμπύλη της οποίας η προσημασμένη καμπυλότητα είναι σταθερή είναι κύκλος (ή τμήμα κύκλου).

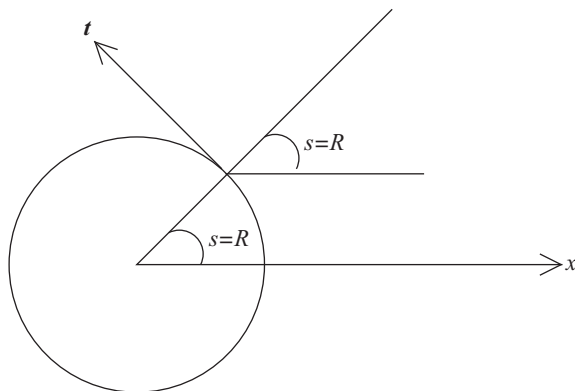
Μια παραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R είναι η

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right).$$

Το εφαπτόμενό του διάνυσμα

$$\mathbf{t} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right),$$

είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία $\pi/2 + s/R$ με τον θετικό άξονα x (Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5. Κανονική παραμέτρηση κύκλου ακτίνας R .

Άρα η προσημασμένη καμπυλότητα της γ ισούται με

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{s}{R} \right) = \frac{1}{R}.$$

Συνεπώς, εάν $\kappa_s > 0$, ο κύκλος ακτίνας $1/\kappa_s$ έχει προσημασμένη καμπυλότητα κ_s .

Εάν $\kappa_s < 0$, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η καμπύλη

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, -R \sin \frac{s}{R} \right)$$

(η οποία είναι απλώς μία άλλη παραμέτρηση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R) έχει προσημασμένη καμπυλότητα $-1/R$. Συνεπώς, εάν $R = -1/\kappa_s$ παίρνουμε πάλι έναν κύκλο με προσημασμένη καμπυλότητα κ_s .

Ο υπολογισμός αυτός πρέπει να παραβληθεί με τον αντίστοιχο υπολογισμό για την καμπυλότητα (σε αντιδιαστολή με την προσημασμένη καμπυλότητα) που ακολουθεί τον Ορισμό 2.1.1.

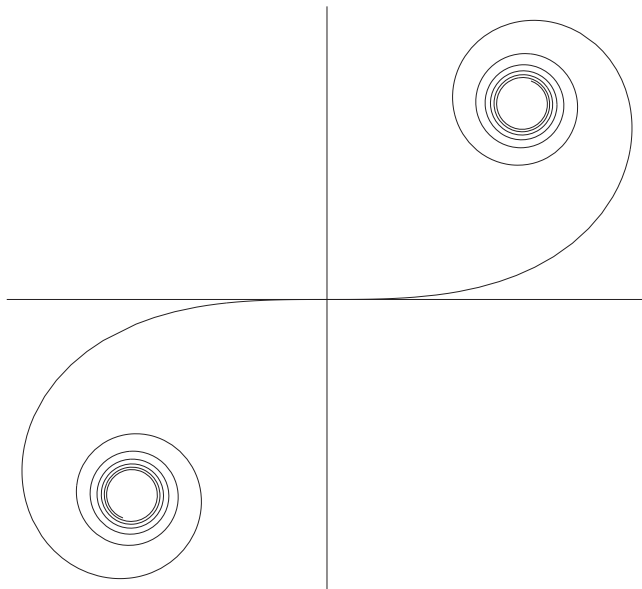
Παράδειγμα 2.2.8

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.6, μπορούμε να βρούμε μία επίπεδη καμπύλη της οποίας η προσημασμένη καμπυλότητα να είναι ίση με οποιαδήποτε δοθείσα λεία συνάρτηση. Οι απλές καμπυλότητες όμως μπορούν να οδηγήσουν σε περίπλοκες καμπύλες. Για παράδειγμα, έστω η προσημασμένη καμπυλότητα $\kappa_s(s) = s$. Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.6 και παίρνοντας $s_0 = 0$, έχουμε $\varphi(s) = \int_0^s u du = \frac{s^2}{2}$, άρα

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos \left(\frac{t^2}{2} \right) dt, \int_0^s \sin \left(\frac{t^2}{2} \right) dt \right).$$

Τα ολοκληρώματα αυτά δεν μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια «στοιχειωδών» συναρτήσεων. (Αυτού του είδους τα ολοκληρώματα εμφανίζονται στη θεωρία της διάθλασης του φωτός, όπου καλούνται *ολοκληρώματα Fresnel*,¹ η δε καμπύλη γ καλείται *σπείρα του*

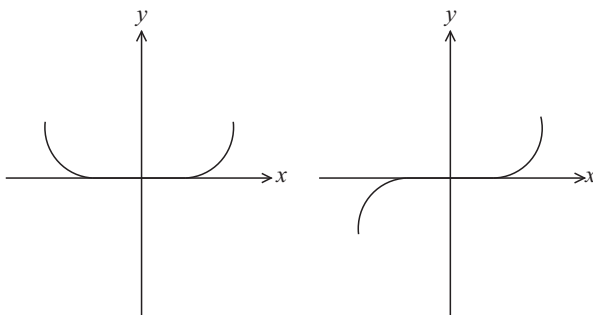
¹Σ.τ.Μ. Ο Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) ήταν Γάλλος φυσικός με μεγάλη συνεισφορά στη θεωρία της



Σχήμα 2.6. Η σπείρα του Cornu.

Cornu,² παρότι αρχικά είχε μελετηθεί από τον Euler). Η εικόνα της γ στο Σχήμα 2.6 έχει κατασκευαστεί με αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν το Θεώρημα 2.2.6 εξακολουθεί να ισχύει εάν αντικαταστήσουμε την «προσημασμένη καμπυλότητα» με την «καμπυλότητα». Το πρώτο σκέλος ισχύει αν (και μόνο αν) υποθέσουμε ότι $k \geq 0$, αφού σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε την γ έτσι ώστε να έχει προσημασμένη καμπυλότητα k και άρα να έχει και καμπυλότητα ίση με k . Το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 2.2.6 παύει όμως να ισχύει. Κι αυτό διότι μπορούμε να επιλέξουμε μία (λεία) καμπύλη γ που να συμπίπτει



Σχήμα 2.7. Το Θεώρημα 2.2.6 δεν ισχύει για την καμπυλότητα.

κυματικής οπτικής. Ο Fresnel μελέτησε τη συμπεριφορά του φωτός, τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά, και είναι περισσότερο ίσως γνωστός για την εφεύρεση των φακών Fresnel οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν σε φάρους.

²Σ.τ.Μ. Ο Marie Alfred Cornu (1841–1902) ήταν Γάλλος φυσικός.

με τον άξονα x για (λόγου χάρη) $-1 \leq x \leq 1$ και όλα τα υπόλοιπα σημεία της να βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. (Ο αναγνώστης που επιθυμεί να γράψει επακριβώς τον τύπο μιας τέτοιας καμπύλης θα βοηθηθεί από την Άσκηση 9.4.3). Στη συνέχεια, ανακλούμε το τμήμα της καμπύλης όπου $x \leq 0$ ως προς τον άξονα x . Η νέα καμπύλη έχει την ίδια καμπυλότητα με την γ , αλλά προφανώς δεν μπορεί να ληφθεί με εφαρμογή μιας ισομετρίας στη γ . Βλ. Άσκηση 2.2.3 για μία εκδοχή του Θεωρήματος 2.2.6 που ισχύει για την καμπυλότητα αντί για την προσημασμένη καμπυλότητα.

Ασκήσεις

2.2.1 Δείξτε ότι, εάν γ είναι μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε

$$\dot{n}_s = -\kappa_s t.$$

2.2.2 Δείξτε ότι η προσημασμένη καμπυλότητα κάθε κανονικής επίπεδης καμπύλης $\gamma(t)$ είναι λεία συνάρτηση του t . (Παραβάλετε αυτήν την άσκηση με την Άσκηση 2.1.2.)

2.2.3 Έστω γ και $\tilde{\gamma}$ δύο επίπεδες καμπύλες. Δείξτε ότι, εάν η $\tilde{\gamma}$ προκύπτει από την γ με εφαρμογή μίας ισομετρίας M του \mathbb{R}^2 , τότε οι προσημασμένες καμπυλότητες κ_s και $\tilde{\kappa}_s$ των γ και $\tilde{\gamma}$ είναι ίσες εάν η M είναι ευθεία ισομετρία, αλλά $\tilde{\kappa}_s = -\kappa_s$ εάν η M είναι αντίθετη ισομετρία (ειδικότερα, οι γ και $\tilde{\gamma}$ έχουν την ίδια καμπυλότητα). Δείξτε, αντιστρόφως, ότι εάν οι γ και $\tilde{\gamma}$ έχουν την ίδια πουθενά μηδενική καμπυλότητα, τότε η $\tilde{\gamma}$ προκύπτει από την γ με εφαρμογή μίας ισομετρίας του \mathbb{R}^2 .

2.2.4 Έστω k η προσημασμένη καμπυλότητα μίας επίπεδης καμπύλης C εκφρασμένη συναρτήσει του μήκους τόξου της. Δείξτε ότι, εάν C_a είναι η εικόνα της C μέσω της ομοιοθεσίας $v \mapsto av$ (όπου a είναι μια μη μηδενική σταθερά), τότε η προσημασμένη καμπυλότητα της C_a συναρτήσει του δικού της μήκους τόξου s είναι $\frac{1}{a}k\left(\frac{s}{a}\right)$.

Μία βαριά αλυσίδα που κρέμεται χαλαρά από τα άκρα της παίρνει τη μορφή μίας επίπεδης καμπύλης C . Δείξτε ότι, εάν s είναι το μήκος τόξου της C μετρημένο από το χαμηλότερο σημείο της, φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C με τον οριζόντιο άξονα, και T η τάση της καμπύλης, τότε

$$T \cos \varphi = \lambda, \quad T \sin \varphi = \mu s,$$

όπου λ, μ είναι μη μηδενικές σταθερές (υποθέτουμε ότι η αλυσίδα έχει σταθερή μάζα ανά μονάδα μήκους). Δείξτε ότι η προσημασμένη καμπυλότητα της C είναι

$$\kappa_s = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{s^2}{a^2} \right)^{-1},$$

όπου $a = \lambda/\mu$, και συμπεράνετε ότι η C μπορεί να προκύψει από την αλυσοειδή του Παραδείγματος 2.2.4 με εφαρμογή μίας ομοιοθεσίας και μίας ισομετρίας του επιπέδου.

2.2.5 Έστω $\gamma(t)$ μια κανονική επίπεδη καμπύλη και λ μία σταθερά. Η παράλληλη καμπύλη γ^λ της γ ορίζεται από την εξίσωση

$$\gamma^\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda n_s(t).$$

Δείξτε ότι, εάν $\lambda \kappa_s(t) \neq 1$ για κάθε τιμή του t , τότε η γ^λ είναι κανονική καμπύλη και η προσημασμένη καμπυλότητά της ισούται με $\kappa_s/|1 - \lambda \kappa_s|$.

2.2.6 Μία άλλη προσέγγιση για τον ορισμό της καμπυλότητας μίας επίπεδης καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας γ σε ένα σημείο της $\gamma(s_0)$ είναι να βρούμε τον «βέλτιστο προσεγγιστικό κύκλο» στο συγκεκριμένο σημείο. Κατόπιν μπορούμε να ορίσουμε ως καμπυλότητα της γ το αντίστροφο της ακτίνας αυτού του κύκλου.

Ακολουθήστε αυτήν τη διαδικασία, δείχνοντας ότι το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα τρία γειτονικά σημεία $\gamma(s_0)$ και $\gamma(s_0 \pm \delta s)$ της γ πλησιάζει το σημείο

$$\epsilon(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa_s(s_0)} n_s(s_0)$$

καθώς το δt τείνει στο μηδέν. Ο κύκλος \mathcal{C} με κέντρο $\epsilon(s_0)$ που διέρχεται από το $\gamma(s_0)$ καλείται *εγγύτατος κύκλος*³ της γ στο σημείο $\gamma(s_0)$, και το $\epsilon(s_0)$ καλείται *κέντρο καμπυλότητας* της γ στο $\gamma(s_0)$. Η ακτίνα του \mathcal{C} , η οποία καλείται *ακτίνα καμπυλότητας* της γ στο $\gamma(s_0)$, ισούται με $1/|\kappa_s(s_0)| = 1/\kappa(s_0)$, όπου κ είναι η καμπυλότητα της γ .

2.2.7 Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης, θεωρούμε ότι ϵ είναι η παραμέτρηση μιας νέας καμπύλης, που ονομάζεται *εξελιγμένη* της γ (εάν η γ είναι τυχούσα κανονική επίπεδη καμπύλη, ως εξελιγμένη της ορίζεται η εξελιγμένη μίας αναπαραμέτρησης μοναδιαίας ταχύτητας της γ). Υποθέστε ότι $\dot{\kappa}_s(s) \neq 0$ για όλες τις τιμές του s (η τελεία συμβολίζει την d/ds), έστω $\dot{\kappa}_s > 0$ για κάθε s (αν είναι απαραίτητο, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με αντικατάσταση του s από το $-s$). Δείξτε ότι το μήκος τόξου της ϵ ισούται με $-\frac{1}{\kappa_s(s)}$ (με προσέγγιση προθετικής σταθεράς) και υπολογίστε την προσημασμένη καμπυλότητα της ϵ . Δείξτε επίσης ότι όλες οι κάθετες ευθείες στην γ είναι εφαπτόμενες στην ϵ (για αυτόν τον λόγο η εξελιγμένη της γ μερικές φορές αποκαλείται «φάκελος» των κάθετων ευθειών της γ). Δείξτε ότι η εξελιγμένη του κυκλοειδούς

$$\gamma(t) = a(1 - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 < t < 2\pi,$$

όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά, είναι η

$$\epsilon(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$$

(βλ. Άσκηση 1.1.7) και ότι, με κατάλληλη αναπαραμέτρηση, η ϵ μπορεί να προκύψει από την γ μέσω μιας μεταφοράς του επιπέδου.

2.2.8 Μία χορδή μήκους ℓ συνάπτεται στο σημείο $\gamma(0)$ μιας επίπεδης καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma(s)$. Δείξτε ότι καθώς η χορδή τυλίγεται πάνω στην καμπύλη παραμένοντας πάντοτε τεταμένη, το άκρο της διαγράφει την καμπύλη

$$\iota(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\dot{\gamma}(s),$$

³Σ.τ.Μ. Με τον όρο *εγγύτατος κύκλος* έχει περάσει στην ελληνική βιβλιογραφία ο όρος *osculating circle*.

όπου $0 < s < \ell$ και η τελεία συμβολίζει την d/ds . Η καμπύλη $\boldsymbol{\iota}$ ονομάζεται *ενελιγμένη* της $\boldsymbol{\gamma}$ (εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι τυχούσα κανονική επίπεδη καμπύλη, ως ενελιγμένη της ορίζεται η ενελιγμένη μίας αναπαραμέτρησης μοναδιαίας ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$). Υποθέστε ότι η προσημασμένη καμπυλότητα κ_s της $\boldsymbol{\gamma}$ δεν είναι ποτέ μηδέν, έστω $\kappa_s(s) > 0$ για όλα τα s . Δείξτε ότι η προσημασμένη καμπυλότητα της $\boldsymbol{\iota}$ ισούται με $1/(\ell - s)$.

2.2.9 Δείξτε ότι η ενελιγμένη της αλυσοειδούς

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$$

με $l = 0$ (βλ. την προηγούμενη άσκηση) είναι η *έλκουσα*⁴

$$x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) - \sqrt{1 - y^2}.$$

Βλ. Ενότητα 8.3 για μία απλή γεωμετρική περιγραφή της έλκουσας.

2.2.10 Μία επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\boldsymbol{\gamma}(s)$ κυλά χωρίς να ολισθαίνει επάνω σε μία ευθεία ℓ που είναι παράλληλη σε ένα μοναδιαίο διάνυσμα \boldsymbol{a} , και αρχικά εφάπτεται στην ℓ σε ένα σημείο $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\gamma}(0)$. Έστω \boldsymbol{q} ένα σταθερό σημείο επάνω στην $\boldsymbol{\gamma}$. Έστω $\boldsymbol{\Gamma}(s)$ το σημείο στο οποίο μετακινείται το \boldsymbol{q} όταν η απόσταση που έχει διανύσει η $\boldsymbol{\gamma}$ κυλώντας πάνω στην ℓ είναι s (ας σημειώσουμε ότι η $\boldsymbol{\Gamma}$ συνήθως δεν θα είναι μοναδιαίας ταχύτητας). Έστω $\theta(s)$ η γωνία που σχηματίζει το \boldsymbol{a} με το εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. Δείξτε ότι

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{a} + \rho_{-\theta(s)}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\gamma}(s)),$$

όπου ρ_φ είναι η περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία φ . Δείξτε επιπλέον ότι

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(s) \cdot \rho_{-\theta(s)}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\gamma}(s)) = 0.$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο της $\boldsymbol{\Gamma}$ κινείται σαν να περιστρέφεται γύρω από το στιγμιαίο σημείο επαφής της καμπύλης που κυλά με την ℓ . Βλ. Άσκηση 1.1.7 για μία ειδική περίπτωση.

2.3 Καμπύλες του χώρου

Σε αυτό το βιβλίο ενδιαφερόμαστε κυρίως για καμπύλες (και επιφάνειες) του \mathbb{R}^3 , δηλαδή για καμπύλες του χώρου. Ενώ μια επίπεδη καμπύλη ουσιαστικά καθορίζεται από την καμπυλότητά της (βλ. Θεώρημα 2.2.6), αυτό δεν ισχύει για τις καμπύλες του χώρου. Για παράδειγμα, ένας κύκλος ακτίνας 1 στο επίπεδο xy και μία κυκλική έλικα με $a = b = 1/2$ (βλ. Παράδειγμα 2.1.3) έχουν αμφότερες καμπυλότητα ίση με 1 παντού, αλλά προφανώς είναι αδύνατο καθεμία από τις καμπύλες αυτές να προκύψει από την άλλη με εφαρμογή κάποιας ισομετρίας του \mathbb{R}^3 . Θα ορίσουμε ένα άλλο είδος καμπυλότητας για τις καμπύλες του χώρου, η οποία καλείται *στρέψη*, και θα αποδείξουμε ότι η καμπυλότητα και η στρέψη μιας καμπύλης σε συνδυασμό καθορίζουν την καμπύλη μέχρι ευθείας ισομετρίας του \mathbb{R}^3 .

⁴Σ.τ.Μ. Στα λατινικά *tractrix* από το ρήμα *trahere* που σημαίνει τραβώ, έλκω.

Έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 και έστω $\mathbf{t} = \dot{\gamma}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμά της. Εάν η καμπυλότητα $\kappa(s)$ είναι μη μηδενική, ορίζουμε ως κύριο κάθετο διάνυσμα της γ στο σημείο $\gamma(s)$ το διάνυσμα

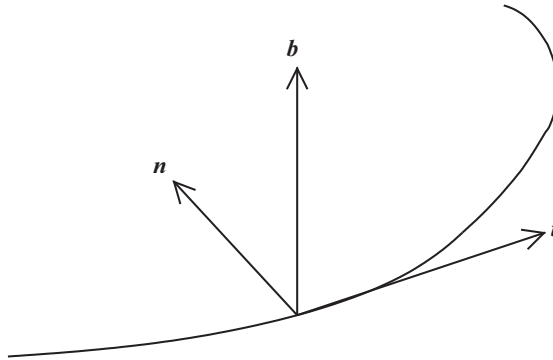
$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \dot{\mathbf{t}}(s). \quad (2.10)$$

Αφού $\|\dot{\mathbf{t}}\| = \kappa$, το \mathbf{n} είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.4 έχουμε $\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}} = 0$, άρα τα \mathbf{t} και \mathbf{n} είναι κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα. Έπεται ότι το

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.11)$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο σε αμφότερα τα \mathbf{t} και \mathbf{n} . Το διάνυσμα $\mathbf{b}(s)$ καλείται *αμφικάθετο* διάνυσμα της γ στο σημείο $\gamma(s)$. Επομένως το σύνολο $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση⁵ του \mathbb{R}^3 , η οποία είναι *δεξιόστροφη*, δηλαδή

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}.$$



Σχήμα 2.8. Το τριάκμο Frenet.

Αφού το $\mathbf{b}(s)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα για κάθε s , το $\dot{\mathbf{b}}$ είναι κάθετο στο \mathbf{b} . Κατόπιν χρησιμοποιούμε τον «τύπο του γινομένου» για την παραγωγή του διανυσματικού γινομένου δύο διανυσματικών συναρτήσεων \mathbf{u} και \mathbf{v} της παραμέτρου s :

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}.$$

(Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται εύκολα: γράφουμε και τα δύο μέλη χρησιμοποιώντας συντεταγμένες και εφαρμόζουμε τον συνήθη τύπο του γινομένου για την παραγωγή αριθμητικών συναρτήσεων). Εφαρμόζοντας αυτόν τον τύπο στη σχέση $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ παίρνουμε

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}, \quad (2.12)$$

αφού από τον ορισμό (2.10) του \mathbf{n} έχουμε $\dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Από την Εξ. 2.12 προκύπτει ότι το $\dot{\mathbf{b}}$ είναι κάθετο στο \mathbf{t} . Αφού είναι κάθετο σε αμφότερα τα \mathbf{t} και \mathbf{b} , το $\dot{\mathbf{b}}$ πρέπει να είναι παράλληλο στο \mathbf{n} , άρα

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}, \quad (2.13)$$

⁵Σ.τ.Μ. Η βάση αυτή ονομάζεται *τριάκμο Frenet*.

για κάποιον αριθμό τ , ο οποίος καλείται *στρέψη* της γ (η εισαγωγή του αρνητικού προσήμου στην εξίσωση αυτή θα μειώσει το συνολικό πλήθος των αρνητικών προσήμων στη συνέχεια). Σημειώνουμε ότι η στρέψη ορίζεται μόνο αν η καμπυλότητα είναι μη μηδενική.

Ασφαλώς, ορίζουμε ως στρέψη μιας τυχούσας κανονικής καμπύλης γ τη στρέψη μιας αναπαραμέτρησης μοναδιαίας ταχύτητας της γ . Όπως και στην περίπτωση της καμπυλότητας, για να επιβεβαιώσουμε ότι αυτό έχει νόημα, πρέπει να διερευνήσουμε πώς επηρεάζεται η στρέψη από μία αλλαγή της παραμέτρου μοναδιαίας ταχύτητας της γ της μορφής

$$u = \pm s + c,$$

όπου c είναι μια σταθερά. Αυτή η αλλαγή παραμέτρου έχει προφανώς τις ακόλουθες επιπτώσεις στα διανύσματα που εισήχθησαν παραπάνω:

$$t \mapsto \pm t, \quad \dot{t} \mapsto \dot{t}, \quad n \mapsto n, \quad b \mapsto \pm b, \quad \dot{b} \mapsto \dot{b}.$$

Από την Εξ. 2.13 έπεται ότι $\tau \mapsto \tau$. Συνεπώς, η καμπυλότητα και η στρέψη είναι καλά ορισμένες για κάθε κανονική καμπύλη.

Όπως ακριβώς κάναμε για την καμπυλότητα στην Πρόταση 2.1.2, είναι δυνατό να δώσουμε έναν τύπο για τη στρέψη μιας κανονικής καμπύλης του χώρου γ συναρτήσει της ίδιας της γ και όχι μιας αναπαραμέτρησης μοναδιαίας ταχύτητάς της:

Πρόταση 2.3.1

Αν $\gamma(t)$ είναι μια κανονική καμπύλη του \mathbb{R}^3 με πουθενά μηδενική καμπυλότητα, η στρέψη της δίνεται από τον τύπο

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}, \quad (2.14)$$

όπου η τελεία συμβολίζει την d/dt .

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με αυτόν τον τύπο, η $\tau(t)$ ορίζεται σε όλα τα σημεία $\gamma(t)$ της καμπύλης στα οποία η καμπυλότητά της $\kappa(t)$ είναι διάφορη του μηδενός, αφού σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.2 αυτή είναι η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του δεξιού μέλους της σχέσης 2.14.

Απόδειξη Θα μπορούσαμε να «παραγάγουμε» την Εξ. 2.14 με τρόπο παρόμοιο με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.2. Είναι όμως ευκολότερο και σαφέστερο να προχωρήσουμε όπως παρακάτω, παρότι αυτή η μέθοδος έχει το μειονέκτημα ότι ο τύπος της Εξ. 2.14 για την τ πρέπει να είναι γνωστός εκ των προτέρων.

Αρχικά ασχολούμαστε με την περίπτωση όπου η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. 2.11 και 2.13 παίρνουμε

$$\tau = -n \cdot \dot{b} = -n \cdot (t \times \dot{n}) = -n \cdot (\dot{t} \times n + t \times \dot{n}) = -n \cdot (t \times \dot{n}).$$

Έχουμε όμως ότι $n = \frac{1}{\kappa} \dot{t} = \frac{1}{\kappa} \dot{\gamma}$, συνεπώς

$$\tau = -\frac{1}{\kappa} \dot{\gamma} \cdot \left(\dot{\gamma} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \dot{\gamma} \right) \right) = \frac{1}{\kappa} \dot{\gamma} \cdot \left(\dot{\gamma} \times \left(\frac{1}{\kappa} \ddot{\gamma} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} \dot{\gamma} \right) \right) = \frac{1}{\kappa^2} \ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}),$$

αφού $\dot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) = 0$ και $\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) = -\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})$. Το παραπάνω συμφωνεί με την Εξ. 2.14, διότι, αφού η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, τα $\dot{\gamma}$ και $\ddot{\gamma}$ είναι κάθετα, συνεπώς

$$\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\| = \kappa.$$

Στη γενική περίπτωση, αν s είναι το μήκος τόξου επί της γ , τότε

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{d\gamma}{ds}, \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\gamma}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2} \frac{d\gamma}{ds}, \\ \frac{d^3\gamma}{dt^3} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{d^3\gamma}{ds^3} + 3\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \frac{d^2\gamma}{ds^2} + \frac{d^3s}{dt^3} \frac{d\gamma}{ds}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \left(\frac{d\gamma}{ds} \times \frac{d^2\gamma}{ds^2}\right), \\ \ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \left(\frac{d^3\gamma}{ds^3} \cdot \left(\frac{d\gamma}{ds} \times \frac{d^2\gamma}{ds^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Άρα η στρέψη της γ είναι ίση με

$$\tau = \frac{\left(\frac{d^3\gamma}{ds^3} \cdot \left(\frac{d\gamma}{ds} \times \frac{d^2\gamma}{ds^2}\right)\right)}{\left\|\frac{d\gamma}{ds} \times \frac{d^2\gamma}{ds^2}\right\|^2} = \frac{\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}. \quad \square$$

Παράδειγμα 2.3.2

Θα υπολογίσουμε τη στρέψη της κυκλικής έλικας $\gamma(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta)$ που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 2.1.3. Έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\theta) &= (-a \sin \theta, a \cos \theta, b), & \ddot{\gamma}(\theta) &= (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0), \\ \ddot{\gamma}(\theta) &= (a \sin \theta, -a \cos \theta, 0), & \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} &= (ab \sin \theta, -ab \cos \theta, a^2), \\ \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2 &= a^2(a^2 + b^2), & (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} &= a^2b,\end{aligned}$$

άρα η στρέψη είναι

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = \frac{a^2b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η στρέψη της κυκλικής έλικας του Παραδείγματος 2.3.2 μηδενίζεται όταν $b = 0$: στην περίπτωση αυτή η έλικα είναι απλώς ένας κύκλος του επιπέδου xy . Αυτό μας βοηθάει να αντιληφθούμε τη γεωμετρική ερμηνεία της στρέψης, η οποία διατυπώνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.3

Εάν γ είναι μια κανονική καμπύλη του \mathbb{R}^3 με πουθενά μηδενική καμπυλότητα (ώστε η στρέψη τ της γ να ορίζεται), τότε η εικόνα της γ περιέχεται σε ένα επίπεδο αν και μόνο αν η τ μηδενίζεται σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας (αυτό μπορεί να επιτευχθεί με αναπαραμέτρηση της γ , και η αναπαραμέτρηση δεν μεταβάλλει ούτε τη στρέψη ούτε το εάν η γ περιέχεται ή όχι σε κάποιο επίπεδο). Συμβολίζουμε την παράμετρο της γ με s και την d/ds με τελεία, ως συνήθως.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η εικόνα της γ περιέχεται στο επίπεδο $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = d$, όπου \mathbf{N} είναι ένα σταθερό διάνυσμα, d μια αριθμητική σταθερά και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το \mathbf{N} είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Παραγωγίζοντας την $\gamma \cdot \mathbf{N} = d$ ως προς s παίρνουμε

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.15)$$

$$\therefore \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (\text{αφού } \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}),$$

$$\therefore \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (\text{αφού } \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}),$$

$$\therefore \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (\text{αφού } \kappa \neq 0). \quad (2.16)$$

Από τις Εξισώσεις 2.15 και 2.16 προκύπτει ότι τα \mathbf{t} και \mathbf{n} είναι κάθετα στο \mathbf{N} . Συνεπώς το $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ είναι παράλληλο στο \mathbf{N} . Εφόσον τα \mathbf{N} και \mathbf{b} είναι αμφότερα μοναδιαία διανύσματα και η $\mathbf{b}(s)$ είναι λεία (άρα συνεχής) συνάρτηση του s , πρέπει να έχουμε είτε $\mathbf{b}(s) = \mathbf{N}$ για κάθε s είτε $\mathbf{b}(s) = -\mathbf{N}$ για κάθε s . Σε κάθε περίπτωση το \mathbf{b} είναι σταθερό διάνυσμα. Επομένως $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$, άρα $\tau = 0$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $\tau = 0$ παντού. Από την Εξ. 2.13 προκύπτει ότι $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$, άρα το \mathbf{b} είναι σταθερό διάνυσμα. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης διαπιστώνουμε ότι η γ πρέπει να περιέχεται σε ένα επίπεδο $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \text{σταθερά}$. Κατά συνέπεια θεωρούμε την

$$\frac{d}{ds}(\gamma \cdot \mathbf{b}) = \dot{\gamma} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

απ' όπου προκύπτει ότι το $\gamma \cdot \mathbf{b}$ ισούται με μια (αριθμητική) σταθερά, έστω d . Αυτό σημαίνει ότι η γ περιέχεται πράγματι στο επίπεδο $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = d$. \square

Υπάρχει ένα κενό στους υπολογισμούς μας το οποίο θα θέλαμε να καλύψουμε. Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι για μία καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας έχουμε

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \quad \text{και} \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$$

(πρόκειται για τους ορισμούς που δώσαμε για το \mathbf{n} και την τ αντίστοιχα), αλλά δεν έχουμε υπολογίσει το $\dot{\mathbf{n}}$. Αυτό δεν είναι δύσκολο. Εφόσον η $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ είναι δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 , έχουμε

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}.$$

Άρα

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}} = -\tau \mathbf{n} \times \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.4

Αν γ είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 με πουθενά μηδενική καμπυλό-

τητα, τότε

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Οι Εξισώσεις 2.17 ονομάζονται *εξισώσεις Frenet-Serret*. Ας σημειώσουμε ότι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

μέσω του οποίου τα $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$ και $\dot{\mathbf{b}}$ εκφράζονται συναρτήσει των \mathbf{t} , \mathbf{n} και \mathbf{b} είναι *αντισυμμετρικός*, δηλαδή είναι ίσος με τον αντίθετο του αναστρόφου του. Αυτό μας βοηθά να απομνημονεύσουμε τις εξισώσεις. (Ο λόγος για αυτήν την αντισυμμετρία μπορεί να αναζητηθεί στην Άσκηση 2.3.6.)

Παραθέτουμε μια απλή εφαρμογή των εξισώσεων Frenet-Serret:

Πρόταση 2.3.5

Εάν γ είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 με σταθερή καμπυλότητα και μηδενική στρέψη, τότε η γ είναι παραμέτρηση ενός κύκλου (ή τμήματος κύκλου).

Απόδειξη Το αποτέλεσμα αυτό είναι στην πραγματικότητα άμεση συνέπεια του Παραδείγματος 2.2.7 και της Πρότασης 2.3.3, αλλά η απόδειξη που ακολουθεί είναι πιο αναλυτική και δίνει περισσότερες πληροφορίες, συγκεκριμένα για το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου καθώς και για το επίπεδο στο οποίο ανήκει.

Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3, το αμφικάθετο διάνυσμα \mathbf{b} είναι σταθερό και η γ περιέχεται σε ένα επίπεδο, έστω Π , κάθετο στο \mathbf{b} . Έχουμε όμως ότι

$$\frac{d}{ds} \left(\gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \right) = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa} \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η καμπυλότητα κ είναι σταθερή και την εξίσωση Frenet-Serret

$$\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} = -\kappa \mathbf{t}, \quad (\text{αφού } \tau = 0)$$

(ο λόγος που θεωρήσαμε το διάνυσμα $\gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$ βρίσκεται στην Άσκηση 2.2.6). Συνεπώς, το $\gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, έστω \mathbf{a} , και

$$\|\gamma - \mathbf{a}\| = \left\| -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \right\| = \frac{1}{\kappa}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η γ βρίσκεται επάνω σε μία σφαίρα, έστω \mathcal{S} , με κέντρο \mathbf{a} και ακτίνα $1/\kappa$. Η τομή του Π και της \mathcal{S} είναι ένας κύκλος, έστω \mathcal{C} , και έχουμε αποδείξει ότι η γ είναι παραμέτρηση τμήματος του \mathcal{C} . Εάν r είναι η ακτίνα του \mathcal{C} , έχουμε $\kappa = 1/r$, άρα η ποσότητα $r = 1/\kappa$ είναι επίσης η ακτίνα της \mathcal{S} . Επομένως, ο \mathcal{C} είναι ένας *μέγιστος κύκλος* της \mathcal{S} , δηλαδή το Π διέρχεται από το κέντρο \mathbf{a} της \mathcal{S} . Άρα το \mathbf{a} είναι το κέντρο του \mathcal{C} και η εξίσωση του Π είναι $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. \square

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό με το ανάλογο του Θεωρήματος 2.2.6 για τις καμπύλες του χώρου.

Θεώρημα 2.3.6

Αν $\gamma(s)$ και $\tilde{\gamma}(s)$ είναι δύο καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 με την ίδια καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$ και την ίδια στρέψη $\tau(s)$ για κάθε s , τότε υπάρχει ευθεία ισομετρία M του \mathbb{R}^3 τέτοια ώστε

$$\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s)) \quad \text{για κάθε } s.$$

Επιπλέον, εάν δίνονται λείες συναρτήσεις k και t με $k > 0$ παντού, τότε υπάρχει καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 της οποίας η καμπυλότητα ισούται με k και η στρέψη με t .

Απόδειξη Έστω \mathbf{t} , \mathbf{n} και \mathbf{b} το εφαπτόμενο διάνυσμα, το κύριο κάθετο διάνυσμα και το αμφικάθετο διάνυσμα της γ , και έστω $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{n}}$ και $\tilde{\mathbf{b}}$ τα αντίστοιχα διανύσματα της $\tilde{\gamma}$. Αν s_0 είναι μία συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου s , θ η γωνία των $\mathbf{t}(s_0)$ και $\tilde{\mathbf{t}}(s_0)$, και ρ η περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετος και στα δύο αυτά διανύσματα, τότε $\rho(\mathbf{t}(s_0)) = \tilde{\mathbf{t}}(s_0)$. Έστω $\hat{\mathbf{n}} = \rho(\mathbf{n}(s_0))$ και $\hat{\mathbf{b}} = \rho(\mathbf{b}(s_0))$. Έστω επίσης φ η γωνία των $\hat{\mathbf{n}}$ και $\tilde{\mathbf{n}}(s_0)$. Αν ρ' είναι η περιστροφή κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλος στο $\tilde{\mathbf{t}}(s_0)$, τότε η ρ' αφήνει σταθερό το $\tilde{\mathbf{t}}(s_0)$ και απεικονίζει το $\hat{\mathbf{n}}$ στο $\tilde{\mathbf{n}}(s_0)$. Επειδή οι $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ και $\{\tilde{\mathbf{t}}(s_0), \tilde{\mathbf{n}}(s_0), \tilde{\mathbf{b}}(s_0)\}$ είναι αμφοτέρως δεξιόστροφες ορθοκανονικές βάσεις του \mathbb{R}^3 , η $\rho' \circ \rho$ απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$ και $\mathbf{b}(s_0)$ στα $\tilde{\mathbf{t}}(s_0)$, $\tilde{\mathbf{n}}(s_0)$ και $\tilde{\mathbf{b}}(s_0)$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, έστω M η ευθεία ισομετρία $M = T_{\tilde{\gamma}(s_0) - \gamma(s_0)} \circ \rho' \circ \rho$. Σύμφωνα με την Άσκηση 2.3.5, η καμπύλη $\Gamma = M(\gamma)$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, και αν με \mathbf{T} , \mathbf{N} και \mathbf{B} συμβολίσουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, το κύριο κάθετο και το αμφικάθετο διάνυσμά της αντίστοιχα, έχουμε

$$\Gamma(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0), \quad \mathbf{T}(s_0) = \tilde{\mathbf{t}}(s_0), \quad \mathbf{N}(s_0) = \tilde{\mathbf{n}}(s_0), \quad \mathbf{B}(s_0) = \tilde{\mathbf{b}}(s_0). \quad (2.18)$$

Για να συνεχίσουμε πρέπει να θεωρήσουμε την εξής παράσταση:

$$A(s) = \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{N} + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{B}.$$

Λόγω των Εξ. 2.18 έχουμε $A(s_0) = 3$. Από την άλλη, δεδομένου ότι τα $\tilde{\mathbf{t}}$ και \mathbf{T} είναι μοναδιαία διανύσματα, έχουμε $\tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{T} \leq 1$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{T}$. Αντίστοιχα για τα $\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{N}$ και $\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{B}$. Έπεται ότι $A(s) \leq 3$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{N}$ και $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{B}$. Άρα, εάν μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η A είναι σταθερή, θα προκύψει ειδικότερα ότι $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{T}$, δηλαδή ότι $\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\Gamma}$, και συνεπώς ότι το $\tilde{\gamma}(s) - \Gamma(s)$ είναι σταθερό. Και πάλι λόγω των Εξισώσεων 2.18, το σταθερό αυτό διάνυσμα πρέπει να είναι μηδενικό, άρα $\tilde{\gamma} = \Gamma$.

Κατά συνέπεια, για το πρώτο σκέλος του θεωρήματος αρκεί να αποδείξουμε ότι η A είναι σταθερή. Χρησιμοποιώντας όμως τις εξισώσεις Frenet-Serret παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\tilde{\mathbf{t}}} \cdot \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{N}} + \dot{\tilde{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{N} + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \dot{\tilde{\mathbf{b}}} \cdot \mathbf{B} \\ &= \kappa \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} + (-\kappa \tilde{\mathbf{t}} + \tau \tilde{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{N} + (-\tau \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{t}} \cdot \kappa \mathbf{N} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{n}} \cdot (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) + \tilde{\mathbf{b}} \cdot (-\tau \mathbf{N}), \end{aligned}$$

το οποίο είναι μηδέν αφού οι όροι αλληλοαναιρούνται ανά ζεύγη.

Για το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος, αρχικά παρατηρούμε ότι από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων έπεται ότι οι εξισώσεις

$$\dot{\mathbf{T}} = k\mathbf{N}, \quad (2.19)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = -k\mathbf{T} + t\mathbf{B}, \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -t\mathbf{N} \quad (2.21)$$

έχουν μια μοναδική λύση $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ τέτοια ώστε τα $\mathbf{T}(s_0)$, $\mathbf{N}(s_0)$, $\mathbf{B}(s_0)$ να είναι τα ορθομοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, αντίστοιχα. Εφόσον ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

μέσω του οποίου τα $\dot{\mathbf{T}}$, $\dot{\mathbf{N}}$ και $\dot{\mathbf{B}}$ εκφράζονται συναρτήσει των \mathbf{T} , \mathbf{N} και \mathbf{B} είναι αντισυμμετρικός, τα διανύσματα \mathbf{T} , \mathbf{N} και \mathbf{B} είναι ορθομοναδιαία για όλες τις τιμές του s (βλ. Άσκηση 2.3.6).

Στη συνέχεια ορίζουμε την

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{T}(u) du.$$

Έχουμε $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{T}$, άρα, αφού το \mathbf{T} είναι μοναδιαίο διάνυσμα, η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Κατόπιν, $\dot{\mathbf{T}} = k\mathbf{N}$ λόγω της Εξ. 2.19, άρα, αφού το \mathbf{N} είναι μοναδιαίο διάνυσμα, η k είναι η καμπυλότητα της $\boldsymbol{\gamma}$ και το \mathbf{N} είναι το κύριο κάθετο διάνυσμά της. Τέλος, αφού το \mathbf{B} είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα \mathbf{T} και \mathbf{N} , έχουμε $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{T} \times \mathbf{N}$, όπου λ είναι μια λεία συνάρτηση του s που ισούται με ± 1 για όλα τα s . Εφόσον $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, έχουμε $\lambda(s_0) = 1$, άρα $\lambda(s) = 1$ για κάθε s . Άρα το \mathbf{B} είναι το αμφικάθετο διάνυσμα της $\boldsymbol{\gamma}$, η δε t , λόγω της Εξ. 2.21, είναι η στρέψη της. \square

Άσκησης

2.3.1 Υπολογίστε τα κ , τ , t , \mathbf{n} και \mathbf{b} για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες και επιβεβαιώστε ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις Frenet-Serret:

$$(i) \boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

$$(ii) \boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right).$$

Δείξτε ότι η καμπύλη του ερωτήματος (ii) είναι κύκλος και βρείτε το κέντρο, την ακτίνα του και το επίπεδο στο οποίο ανήκει.

2.3.2 Περιγράψτε όλες τις καμπύλες του \mathbb{R}^3 που έχουν σταθερή καμπυλότητα $\kappa > 0$ και σταθερή στρέψη τ .

2.3.3 Μία κανονική καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ του \mathbb{R}^3 με καμπυλότητα > 0 καλείται γενικευμένη έλικα εάν το εφαπτόμενο διάνυσμά της σχηματίζει σταθερή γωνία θ με ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{a} . Δείξτε ότι η στρέψη τ και η καμπυλότητα κ της $\boldsymbol{\gamma}$ ικανοποιούν τη σχέση $\tau = \pm \kappa \cot \theta$. Δείξτε αντιστρόφως ότι, εάν η στρέψη και

η καμπυλότητα μίας κανονικής καμπύλης ικανοποιούν τη σχέση $\tau = \lambda\kappa$, όπου λ είναι μια σταθερά, τότε η καμπύλη είναι γενικευμένη έλικα.

Δεδομένου του παραπάνω αποτελέσματος, τα Παραδείγματα 2.1.3 και 2.3.2 δείχνουν ότι η κυκλική έλικα είναι μια γενικευμένη έλικα. Επιβεβαιώστε απευθείας το γεγονός αυτό.

- 2.3.4 Έστω $\gamma(t)$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa(t) > 0$ και $\tau(t) \neq 0$ για όλα τα t . Δείξτε ότι, εάν η γ είναι σφαιρική, δηλαδή εάν βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια μίας σφαίρας, τότε

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2} \right). \quad (2.22)$$

Αντιστρόφως, δείξτε ότι εάν ισχύει η Εξ. 2.22 τότε

$$\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2 = r^2$$

για κάποια (θετική) σταθερά r , όπου $\rho = 1/\kappa$ και $\sigma = 1/\tau$, και συμπεράνετε ότι η γ βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας r . Επιβεβαιώστε ότι η Εξ. 2.22 ισχύει για την καμπύλη του Viviani (Άσκηση 1.1.8).

- 2.3.5 Έστω P ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας και $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε η $M(\mathbf{v}) = P\mathbf{v} + \mathbf{a}$ να είναι ισομετρία του \mathbb{R}^3 (βλ. Παράρτημα 1). Δείξτε ότι εάν γ είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 , η καμπύλη $\Gamma = M(\gamma)$ είναι επίσης μοναδιαίας ταχύτητας. Δείξτε επίσης ότι, εάν \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} και \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} είναι το εφαπτόμενο, το κύριο κάθετο και το αμφικάθετο διάνυσμα των γ και Γ αντίστοιχα, τότε $\mathbf{T} = P\mathbf{t}$, $\mathbf{N} = P\mathbf{n}$ και $\mathbf{B} = P\mathbf{b}$.

- 2.3.6 Έστω (a_{ij}) ένας αντισυμμετρικός 3×3 πίνακας (δηλαδή $a_{ij} = -a_{ji}$ για κάθε i, j). Έστω \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 και \mathbf{v}_3 λείες συναρτήσεις μιας παραμέτρου s που ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{v}_j,$$

για $i = 1, 2$ και 3 . Υποθέστε ότι για κάποια παραμετρική τιμή s_0 τα διανύσματα $\mathbf{v}_1(s_0)$, $\mathbf{v}_2(s_0)$ και $\mathbf{v}_3(s_0)$ είναι ορθομοναδιαία. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1(s)$, $\mathbf{v}_2(s)$ και $\mathbf{v}_3(s)$ είναι ορθομοναδιαία για όλες τις τιμές του s .

*Στο υπόλοιπο αυτού του βιβλίου
όλες οι παραμετρημένες καμπύλες θα θεωρούνται κανονικές.*

Ολομερείς ιδιότητες των καμπυλών

Όλες οι ιδιότητες των καμπυλών που έχουμε συζητήσει μέχρι στιγμής είναι «τοπικές», δηλαδή εξαρτώνται μόνο από τη συμπεριφορά της καμπύλης κοντά σε ένα δεδομένο σημείο, και όχι από το «ολομερές» σχήμα της καμπύλης.¹ Για την απόδειξη των ολομερών ιδιοτήτων των καμπυλών, πέρα από τις τεχνικές του απειροστικού λογισμού που χρησιμοποιήσαμε στα δύο πρώτα κεφάλαια αυτού του βιβλίου, συχνά απαιτούνται και γνώσεις *τοπολογίας*. Καθώς δεν θεωρούμε ότι οι αναγνώστες είναι επαρκώς εξοικειωμένοι με τις έννοιες της τοπολογίας, δεν είμαστε σε θέση να δώσουμε τις πλήρεις αποδείξεις ορισμένων από τις ολομερείς ιδιότητες των καμπυλών που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

3.1 Απλές κλειστές καμπύλες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με επίπεδες καμπύλες της εξής μορφής:

Ορισμός 3.1.1

Μία *απλή κλειστή καμπύλη* του \mathbb{R}^2 είναι μία κλειστή καμπύλη του \mathbb{R}^2 χωρίς αυτοτομές.

Ένα τυπικό, αλλά καθόλου τριτομμένο αποτέλεσμα της τοπολογίας του \mathbb{R}^2 , το οποίο καλείται *θεώρημα των καμπυλών Jordan*, μας λέει ότι κάθε απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου έχει «εσωτερικό» και «εξωτερικό»: ακριβέστερα, το «συμπλήρωμα» της εικόνας της γ (δηλαδή το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^2 που δεν ανήκουν στην εικόνα της γ) είναι η ξένη ένωση δύο υποσυνόλων του \mathbb{R}^2 , που συμβολίζονται με $\text{int}(\gamma)$ και $\text{ext}(\gamma)$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

¹Σ.τ.Μ. Θα προκρίνουμε στο εξής τον όρο *ολομερής* έναντι των όρων *ολικός* και *ολιστικός* που απαντώνται αλλού για τη μετάφραση του global.

(i) Το $\text{int}(\gamma)$ είναι φραγμένο, δηλαδή περιέχεται σε έναν κύκλο αρκούντως μεγάλης ακτίνας.

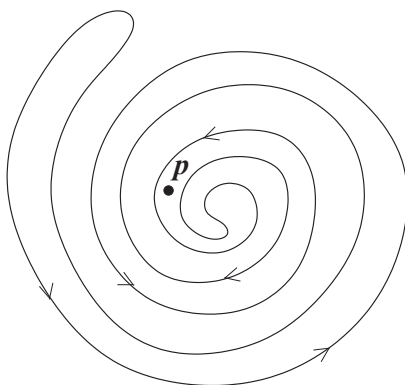
(ii) Το $\text{ext}(\gamma)$ είναι μη φραγμένο.

(iii) Τα χωρία $\text{int}(\gamma)$ και $\text{ext}(\gamma)$ είναι αμφότερα *συνεκτικά*,² δηλαδή έχουν την εξής ιδιότητα: οποιαδήποτε δύο σημεία του ίδιου χωρίου μπορούν να συνδεθούν με μία καμπύλη που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο χωρίο (αλλά κάθε καμπύλη που συνδέει ένα σημείο του $\text{int}(\gamma)$ με ένα σημείο του $\text{ext}(\gamma)$ πρέπει να τέμνει την καμπύλη γ).

Παράδειγμα 3.1.2

Η έλλειψη $\gamma(t) = (p \cos t, q \sin t)$, όπου p και q είναι μη μηδενικές σταθερές, είναι μια απλή κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π . Το εσωτερικό και το εξωτερικό της γ είναι, ασφαλώς, τα χωρία $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} < 1\}$ και $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} > 1\}$ αντίστοιχα.

Σημειώνουμε ότι ο εντοπισμός του εσωτερικού και του εξωτερικού χωρίου δεν είναι τόσο προφανής σε όλα τα παραδείγματα απλών κλειστών καμπυλών. Λ.χ. το σημείο p ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό της απλής κλειστής καμπύλης που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1;



Σχήμα 3.1. Το p ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό της καμπύλης;

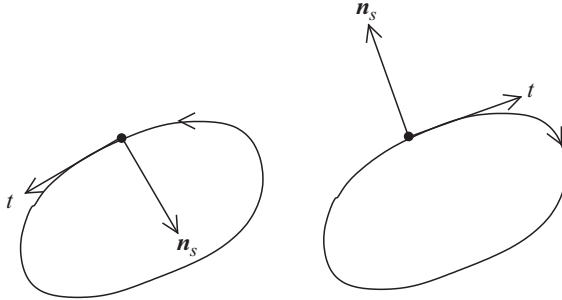
Παράδειγμα 3.1.3

Η κοχλιοειδής του Παραδείγματος 1.1.7 είναι κλειστή αλλά όχι απλή κλειστή καμπύλη, αφού έχει μία αυτοτομή – βλ. Άσκηση 3.1.1.

Το γεγονός ότι μία απλή κλειστή καμπύλη γ έχει εσωτερικό και εξωτερικό μάς επιτρέπει να διακρίνουμε τους δύο δυνατούς προσανατολισμούς της γ . Θα λέμε ότι η γ είναι *θετικά προσανατολισμένη* εάν το προσημασμένο κύριο κάθετο διάνυσμα n_s της γ

²Σ.τ.Μ. Ο ορισμός που δίνει ο συγγραφέας είναι του *συνεκτικά κατά δρόμους* συνόλου. Δίνουμε εδώ τον ακριβή ορισμό του συνεκτικού συνόλου: Ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 (ή του \mathbb{R}^n γενικότερα) είναι συνεκτικό αν δεν μπορεί να γραφεί σαν ένωση δύο ξένων μεταξύ τους ανοικτών (ή κλειστών) υποσυνόλων του. Αποδεικνύεται ότι ένα συνεκτικό κατά δρόμους σύνολο είναι και συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Το κλασικό αντιπαράδειγμα είναι αυτό της *ημιτονοειδούς καμπύλης του τοπολόγου*.

(βλ. Ενότητα 2.2) έχει φορά προς το $\text{int}(\gamma)$ σε κάθε σημείο της γ . Αυτό μπορεί πάντα να επιτευχθεί με αντικατάσταση της παραμέτρου t της γ με την $-t$ εάν είναι απαραίτητο. Στο Σχήμα 3.2 το βέλος υποδεικνύει την κατεύθυνση αύξησης της παραμέτρου. Είναι θετικά προσανατολισμένη η απλή κλειστή καμπύλη του Σχήματος 3.1;



Σχήμα 3.2. Θετικά προσανατολισμένη και μη θετικά προσανατολισμένη καμπύλη.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα διατυπώνοντας το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.1.4 (Θεώρημα περιστροφής του Hopf³)

Η ολική προσημασμένη καμπυλότητα μίας απλής κλειστής καμπύλης του \mathbb{R}^2 είναι $\pm 2\pi$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4 θα μας μετέφερε στην επικράτεια της τοπολογίας λίγο περισσότερο απ' όσο αρμόζει σε αυτό το βιβλίο. Μία ευρηκτικού χαρακτήρα απόδειξη (ενός ελαφρώς γενικότερου αποτελέσματος) δίνεται στην Ενότητα 13.1.

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με το Πρόσχημα 2.2.5 η ολική προσημασμένη καμπυλότητα κάθε κλειστής καμπύλης του \mathbb{R}^2 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Η ουσία του θεωρήματος του Hopf είναι ότι αν η καμπύλη είναι απλή κλειστή, τότε ο ακέραιος αυτός πρέπει να είναι ± 1 . Από την απόδειξη του Προσχήματος 2.2.5 συμπεραίνουμε ότι το θεώρημα του Hopf μας λέει ότι η τυχούσα γωνία στροφής φ μίας απλής κλειστής καμπύλης μεταβάλλεται κατά $\pm 2\pi$ όταν διανύουμε μία φορά ολόκληρη την καμπύλη· αυτό σημαίνει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα περιστρέφεται κατά $\pm 2\pi$. Αφήνουμε στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για την απλή κλειστή καμπύλη του Σχήματος 3.1, που μοιάζει με λαβύρινθο.

Ασκήσεις

3.1.1 Δείξτε ότι η

$$\gamma(t) = ((1 + a \cos t) \cos t, (1 + a \cos t) \sin t),$$

όπου a είναι μια σταθερά, είναι απλή κλειστή καμπύλη αν $|a| < 1$, αλλά αν $|a| > 1$ το συμπλήρωμά της είναι η ξένη ένωση τριών συνεκτικών υποσυνόλων του \mathbb{R}^2 , δύο από τα οποία είναι φραγμένα και ένα μη φραγμένο. Τι συμβαίνει όταν $a = \pm 1$;

³Σ.τ.Μ. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό με τη γερμανική λέξη Umlaufsatz που σημαίνει ακριβώς θεώρημα περιστροφής. Ο Heinz Hopf (1894–1971) ήταν Γερμανός μαθηματικός και σπουδαίος τοπολόγος.

3.2 Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Το εμβαδόν που περικλείει μία απλή κλειστή καμπύλη γ είναι

$$\mathcal{A}(\gamma) = \iint_{\text{int}(\gamma)} dx dy. \quad (3.1)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα του Green. Αν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι λείες συναρτήσεις (δηλαδή συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους όλων των τάξεων), και γ μια θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη, τότε

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος του Green μπορεί να βρεθεί σε βιβλία απειροστικού λογισμού πολλών μεταβλητών.

Πρόταση 3.2.1

Εάν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ είναι μια θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη του \mathbb{R}^2 με περίοδο T , τότε

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt. \quad (3.2)$$

Απόδειξη Παίρνοντας $f = -\frac{1}{2}y$ και $g = \frac{1}{2}x$ στο θεώρημα του Green, έχουμε

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx,$$

απ' όπου προκύπτει αμέσως η Εξ. 3.2. □

Σημειώνουμε ότι, παρότι ο τύπος της Εξ. 3.2 περιέχει την παράμετρο t της γ , από τον Ορισμό 3.1.1 είναι φανερό ότι το εμβαδόν $\mathcal{A}(\gamma)$ παραμένει αναλλοίωτο αν αναπαραμετρηθεί η γ .

Μια από τις πιο γνωστές ολομερείς ιδιότητες των επίπεδων καμπυλών είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2 (Ισοπεριμετρική ανισότητα)

Εάν γ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, $\ell(\gamma)$ το μήκος της και $\mathcal{A}(\gamma)$ το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη, τότε

$$\mathcal{A}(\gamma) \leq \frac{1}{4\pi} \ell(\gamma)^2,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν η γ είναι κύκλος.

Είναι προφανές ότι η ισότητα ισχύει όταν η γ είναι κύκλος, αφού σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\ell(\gamma) = 2\pi R$ και $\mathcal{A}(\gamma) = \pi R^2$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα χρειαζόμαστε το εξής αποτέλεσμα από την ανάλυση:

Πρόταση 3.2.3 (Ανισότητα του Wirtinger)

Εάν $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια λεία συνάρτηση τέτοια ώστε $F(0) = F(\pi) = 0$, τότε

$$\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^\pi F(t)^2 dt,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $F(t) = D \sin t$ για κάθε $t \in [0, \pi]$, όπου D είναι μια σταθερά.

Υποθέτοντας προς στιγμή την ισχύ της ανισότητας του Wirtinger, θα αποδείξουμε πώς από αυτήν προκύπτει η ισοπεριμετρική ανισότητα.

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε κάνοντας κάποιες παραδοχές για την γ που θα απλοποιήσουν την απόδειξη. Αρχικά μπορούμε, εάν το επιθυμούμε, να υποθέσουμε ότι η γ είναι παραμετρημένη ως προς το μήκος τόξου s . Ωστόσο, λόγω του π που εμφανίζεται στο Θεώρημα 3.2.2, είναι βολικότερο να υποθέσουμε ότι η περίοδος της γ είναι π . Εάν αλλάξουμε την παράμετρο της γ από s σε

$$t = \frac{\pi s}{\ell(\gamma)}, \quad (3.3)$$

η προκύπτουσα καμπύλη είναι πάλι απλή κλειστή και έχει περίοδο π , διότι όταν το s αυξάνεται κατά $\ell(\gamma)$, το t αυξάνεται κατά π . Συνεπώς, στο εξής θα υποθέσουμε ότι η παραμέτρηση της γ γίνεται μέσω της παραμέτρου t της Εξ. 3.3.

Για τη δεύτερη απλοποίηση, παρατηρούμε ότι τα $\ell(\gamma)$ και $\mathcal{A}(\gamma)$ παραμένουν αμφοτέρωτα αναλλοίωτα αν στην γ εφαρμοστεί η μετάθεση $\gamma(t) \mapsto \gamma(t) + \mathbf{b}$, όπου \mathbf{b} είναι τυχόν σταθερό διάνυσμα (βλ. Άσκηση 3.2.1). Παίρνοντας $\mathbf{b} = -\gamma(0)$, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\gamma(0) = \mathbf{0}$, δηλαδή ότι η γ αρχίζει και τελειώνει στην αρχή των αξόνων.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2.2 θα υπολογίσουμε τα $\ell(\gamma)$ και $\mathcal{A}(\gamma)$ χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2 \dot{\theta},$$

όπου με τελεία συμβολίζουμε την d/dt . Κατόπιν, από την Εξ. 3.3 προκύπτει ότι

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}, \quad (3.4)$$

επειδή $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$. Επιπλέον, από την Εξ. 3.2 έχουμε

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \dot{\theta} dt. \quad (3.5)$$

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2.2 πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\gamma) \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν η γ είναι κύκλος. Από την Εξ. 3.4 προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi}.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την Εξ. 3.5, παίρνουμε

$$\frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \dot{\theta} dt = \frac{1}{4} \mathcal{I},$$

όπου

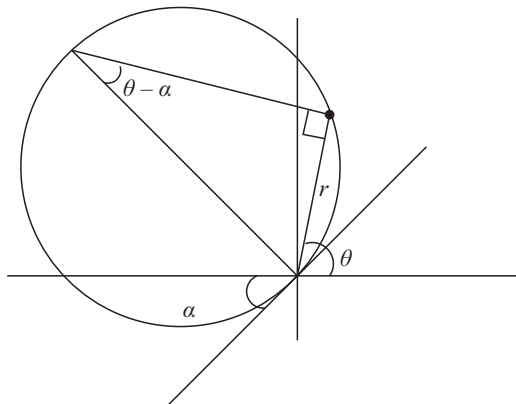
$$\mathcal{I} = \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - 2r^2 \dot{\theta}) dt. \quad (3.6)$$

Συνεπώς, για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2.2, πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{I} \geq 0$, και ότι $\mathcal{I} = 0$ αν και μόνο αν η γ είναι κύκλος.

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi r^2 (\dot{\theta} - 1)^2 dt + \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2) dt. \quad (3.7)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της Εξ. 3.7 είναι προφανώς ≥ 0 , ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ≥ 0 λόγω της ανισότητας του Wirtinger (παίρνουμε $F = r$: παρατηρήστε ότι $r(0) = r(\pi) = 0$ επειδή $\gamma(0) = \gamma(\pi) = \mathbf{0}$). Έπεται ότι $\mathcal{I} \geq 0$. Συνεπώς, αφού και τα δύο ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της Εξ. 3.7 είναι ≥ 0 , το άθροισμά τους \mathcal{I} είναι μηδέν αν και μόνο αν και τα δύο αυτά ολοκληρώματα είναι μηδέν. Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι όμως μηδέν μόνο αν $\dot{\theta} = 1$ για όλα τα t , ενώ το δεύτερο είναι μηδέν μόνο αν $r = D \sin t$ για κάποια σταθερά D (πάλι λόγω της ανισότητας του Wirtinger). Άρα $\theta = t + \alpha$, όπου α είναι μια σταθερά, και συνεπώς $r = D \sin(\theta - \alpha)$. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι η πολική εξίσωση ενός κύκλου διαμέτρου D , οπότε η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 ολοκληρώθηκε (βλ. Σχήμα 3.3). \square



Σχήμα 3.3. Πολικές συντεταγμένες κύκλου διαμέτρου D : $r = D \sin(\theta - \alpha)$.

Στο σημείο αυτό προχωρούμε στην απόδειξη της ανισότητας του Wirtinger.

Έστω $G(t) = F(t)/\sin t$. Συμβολίζοντας την d/dt με τελεία ως συνήθως, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \dot{F}^2 dt &= \int_0^\pi (\dot{G} \sin t + G \cos t)^2 dt \\ &= \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2 t dt + 2 \int_0^\pi G \dot{G} \sin t \cos t dt + \int_0^\pi G^2 \cos^2 t dt.\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη⁴ έχουμε

$$\begin{aligned}2 \int_0^\pi G \dot{G} \sin t \cos t dt &= G^2 \sin t \cos t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi G^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^\pi G^2 (\sin^2 t - \cos^2 t) dt,\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \dot{F}^2 dt &= \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2 t + \int_0^\pi G^2 (\sin^2 t - \cos^2 t) dt + \int_0^\pi G^2 \cos^2 t dt \\ &= \int_0^\pi (G^2 + \dot{G}^2) \sin^2 t dt = \int_0^\pi F^2 dt + \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2 t dt,\end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_0^\pi \dot{F}^2 dt - \int_0^\pi F^2 dt = \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2 t dt.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό σκέλος είναι προφανώς ≥ 0 και ισούται με μηδέν αν και μόνο αν $\dot{G} = 0$ για κάθε t , δηλαδή αν και μόνο αν η $G(t)$ ισούται με μία σταθερά, έστω D , για κάθε t , πράγμα που σημαίνει ότι $F(t) = D \sin t$. \square

Ασκήσεις

3.2.1 Δείξτε ότι το μήκος $\ell(\gamma)$ και το εμβαδόν $\mathcal{A}(\gamma)$ παραμένουν αναλλοίωτα κατά την εφαρμογή μιας ισομετρίας στη γ .

3.2.2 Εφαρμόζοντας την ισοπεριμετρική ανισότητα στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

(όπου p και q είναι θετικές σταθερές), αποδείξτε ότι

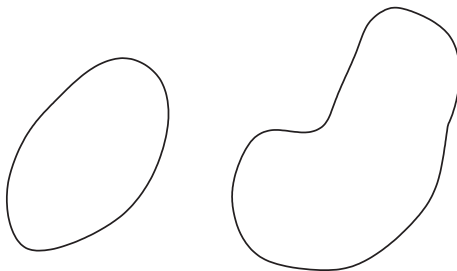
$$\int_0^\pi \sqrt{p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t} dt \geq 2\pi \sqrt{pq},$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $p = q$.

⁴Κατά την ολοκλήρωση κατά μέρη υποθέτουμε ότι η G είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (διότι υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $G(t)^2 \sin t \cos t$ είναι ίση με το ολοκλήρωμα της παραγώγου της). Δυστυχώς όμως η $G(t)$ δεν είναι καν ορισμένη για $t = 0$ ή π , καθώς ο λόγος $F(t)/\sin t$ είναι $0/0$ στα σημεία αυτά. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι η G μπορεί να οριστεί σε αυτά τα σημεία ώστε να γίνει παντού συνεχώς παραγωγίσιμη. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση του κανόνα του l'Hospital.

3.3 Το θεώρημα των τεσσάρων κορυφών

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα που αφορά τις κυρτές επίπεδες καμπύλες.⁵ Μία απλή κλειστή καμπύλη γ καλείται *κυρτή* εάν το εσωτερικό της $\text{int}(\gamma)$ είναι κυρτό με τη συνήθη έννοια, δηλαδή αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία του $\text{int}(\gamma)$ περιέχεται εξ ολοκλήρου στο $\text{int}(\gamma)$.



Σχήμα 3.4. Κυρτή και μη κυρτή καμπύλη.

Ορισμός 3.3.1

Κορυφή μιας καμπύλης $\gamma(t)$ του \mathbb{R}^2 είναι ένα στάσιμο σημείο της προσημασμένης καμπυλότητας κ_s , δηλαδή ένα σημείο όπου $d\kappa_s/dt = 0$.

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος της παραμέτρησης της γ .

Παράδειγμα 3.3.2

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, η προσημασμένη καμπυλότητα της έλλειψης $\gamma(t) = (p \cos t, q \sin t)$, όπου p και q είναι θετικές σταθερές, είναι

$$\kappa_s(t) = \frac{pq}{(p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Επομένως η

$$\frac{d\kappa_s}{dt} = \frac{3pq(q^2 - p^2) \sin t \cos t}{(p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t)^{5/2}}$$

μηδενίζεται σε ακριβώς τέσσερα σημεία της έλλειψης, συγκεκριμένα στα σημεία όπου $t = 0, \pi/2, \pi$ και $3\pi/2$, τα οποία είναι τα άκρα των δύο αξόνων της έλλειψης.

Σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα, αυτό είναι το μικρότερο πλήθος κορυφών που μπορεί να έχει μία κυρτή απλή κλειστή καμπύλη.

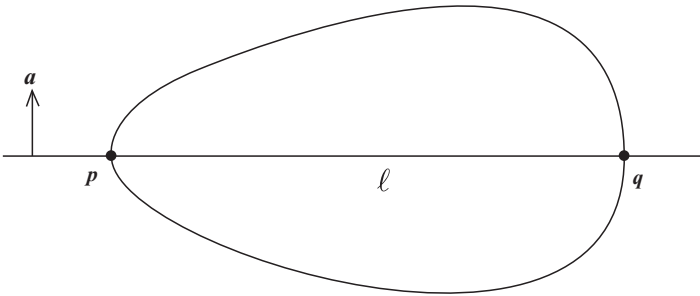
Θεώρημα 3.3.3 (Θεώρημα των τεσσάρων κορυφών)

Κάθε κυρτή απλή κλειστή καμπύλη του \mathbb{R}^2 έχει τουλάχιστον τέσσερις κορυφές.

⁵Σ.τ.Μ. Το Θεώρημα των τεσσάρων κορυφών αποδείχθηκε το 1909 από τον Ινδό μαθηματικό Syamadas Mukhopadhyaya.

Το θεώρημα ισχύει μάλιστα και χωρίς την υπόθεση της κυρτότητας, αλλά στην περίπτωση αυτή η απόδειξη είναι πιο δύσκολη από αυτήν που ακολουθεί.

Απόδειξη Έστω γ μια παραμέτρηση μιας κυρτής απλής κλειστής καμπύλης του \mathbb{R}^2 και έστω ℓ το μήκος της. Με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι η γ έχει λιγότερες από τέσσερις κορυφές. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μία ευθεία L που διαιρεί την γ σε δύο τμήματα, στο ένα από τα οποία έχουμε $\dot{\kappa}_s > 0$ και στο άλλο $\dot{\kappa}_s < 0$ (ή ενδεχομένως $\dot{\kappa}_s \geq 0$ και $\dot{\kappa}_s < 0$ στο άλλο). Πράγματι, η κ_s παίρνει όλες τις τιμές της στο κλειστό διάστημα $[0, \ell]$, συνεπώς πρέπει να παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της σε κάποια σημεία p και q της γ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p \neq q$, ειδικάως η κ_s θα ήταν σταθερή, η γ θα ήταν κύκλος (σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.2.7), και κάθε σημείο της γ θα ήταν κορυφή. Εάν τα p και q ήταν οι μόνες κορυφές της γ , θα είχαμε $\dot{\kappa}_s > 0$ στο ένα από τα τμήματα στα οποία διαιρεί την καμπύλη η ευθεία που διέρχεται από τα p και q , και $\dot{\kappa}_s < 0$ στο άλλο. Ας υποθέσουμε κατόπιν ότι υπάρχει μία ακόμη κορυφή, έστω η r . Στην περίπτωση αυτή τα p, q και r διαιρούν την γ σε τρία τμήματα, σε καθένα από τα οποία είτε $\dot{\kappa}_s > 0$ είτε $\dot{\kappa}_s < 0$. Συνεπώς υπάρχουν δύο γειτονικά τμήματα όπου $\dot{\kappa}_s > 0$, ή δύο γειτονικά τμήματα όπου $\dot{\kappa}_s < 0$ (εκτός του κοινού σημείου των δύο τμημάτων). Έτσι ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.



Σχήμα 3.5.

Έστω a ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην L , ώστε να έχουμε $\gamma \cdot a > 0$ στη μία πλευρά της L και $\gamma \cdot a < 0$ στην άλλη. Η ποσότητα $\dot{\kappa}_s(\gamma \cdot a)$ είναι είτε πάντα > 0 ή πάντα < 0 , εκτός από τα δύο σημεία στα οποία η L τέμνει την καμπύλη. Έπεται ότι

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s(\gamma \cdot a) dt \neq 0, \quad (3.8)$$

αφού το ολοκλήρωμα είναι οπωσδήποτε > 0 στην πρώτη περίπτωση και < 0 στη δεύτερη. Χρησιμοποιώντας όμως τη σχέση $\dot{n}_s = -\kappa_s t$ (βλ. Άσκηση 2.2.1) παίρνουμε

$$\dot{\kappa}_s \gamma = (\kappa_s \gamma)' - \kappa_s \dot{\gamma} = (\kappa_s \gamma + n_s)',$$

άρα η ολοκληρωτέα ποσότητα στο δεξιό μέλος της (3.8) είναι η παράγωγος της ποσότητας $(\kappa_s \gamma + n_s) \cdot a$, την οποία ας συμβολίσουμε με λ . Εφόσον η γ είναι ℓ -περιοδική έχουμε

$$\gamma(t + \ell) = \gamma(t) \quad \text{για κάθε } t,$$

και παραγωγίζοντας ως προς t προκύπτει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα t της γ είναι επίσης ℓ -περιοδικό:

$$t(t + \ell) = \dot{\gamma}(t + \ell) = \dot{\gamma}(t) = t(t).$$

Εκτελώντας μια περιστροφή κατά $\pi/2$ έχουμε

$$\mathbf{n}_s(t + \ell) = \mathbf{n}_s(t),$$

και συνεπώς $\kappa_s(t + \ell) = \kappa_s(t)$. Άρα $\lambda(t + \ell) = \lambda(t)$ για κάθε t , οπότε το ολοκλήρωμα της (3.8) ισούται με

$$\int_0^\ell \dot{\lambda}(t) dt = \lambda(\ell) - \lambda(0) = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα η γ πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερις κορυφές. □

Ασκήσεις

- 3.3.1 Δείξτε ότι η έλλειψη του Παραδείγματος 3.1.2 είναι κυρτή.
- 3.3.2 Δείξτε ότι η κοχλιοειδής του Παραδείγματος 1.1.7 έχει μόνο δύο κορυφές (πρβλ. Παράδειγμα 3.1.3).
- 3.3.3 Δείξτε ότι μία επίπεδη καμπύλη γ έχει μία κορυφή στο $t = t_0$ αν και μόνο αν η εξελιγμένη ϵ της γ (Άσκηση 2.2.7) έχει ιδιάζον σημείο στο $t = t_0$.

Επιφάνειες στις τρεις διαστάσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε αρκετούς διαφορετικούς τρόπους για να διατυπώσουμε μαθηματικά την έννοια της επιφάνειας. Παρότι ο απλούστερος από αυτούς, συγκεκριμένα τα τμήματα επιφάνειας, είναι ο μόνος που χρειαζόμαστε στο μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου, δεν περιγράφει ικανοποιητικά την πλειονότητα των αντικείμενων που θα θέλαμε να καλούμε επιφάνειες. Λόγου χάρη, η σφαίρα δεν είναι τμήμα επιφάνειας, αλλά μπορούμε να την περιγράψουμε «συγκολλώντας» δύο τμήματα επιφάνειας με κατάλληλο τρόπο. Αν και η ιδέα που κρύβεται πίσω από αυτήν τη διαδικασία συγκόλλησης είναι αρκετά απλή, η ακριβής περιγραφή της είναι τελικά κάπως πολύπλοκη. Προσπαθήσαμε να διευκολύνουμε την παρουσίαση συλλέγοντας τις πιο απαιτητικές αποδείξεις σε μια ξεχωριστή ενότητα (Ενότητα 5.6).

4.1 Τι είναι επιφάνεια;

Μια επιφάνεια είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που μοιάζει με ένα κομμάτι του \mathbb{R}^2 στην εγγύτητα οποιουδήποτε δοθέντος σημείου, όπως ακριβώς η επιφάνεια της Γης, που, αν και στην πραγματικότητα είναι σχεδόν σφαιρική, φαίνεται να είναι επίπεδη σε έναν παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και κοιτά μόνο προς τον ορίζοντα. Για να προσδώσουμε ακριβή σημασία στις λέξεις «μοιάζει» και «στην εγγύτητα», πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε κάποιες προκαταρκτικές έννοιες. Η περιγραφή αυτών των εννοιών θα γίνει στο \mathbb{R}^n για $n \geq 1$, αν και θα τις χρειαστούμε μόνο για $n = 1, 2$ ή 3 .

Κατ' αρχάς, ένα υποσύνολο U του \mathbb{R}^n καλείται *ανοικτό εάν*, για κάθε σημείο \mathbf{a} του U , υπάρχει ένας θετικός αριθμός ϵ τέτοιος ώστε κάθε σημείο $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ που απέχει απόσταση ϵ από το \mathbf{a} να ανήκει επίσης στο U :

$$\mathbf{a} \in U \text{ και } \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < \epsilon \implies \mathbf{u} \in U.$$

Για παράδειγμα, ολόκληρο το \mathbb{R}^n είναι ανοικτό σύνολο, όπως είναι και το σύνολο

$$\mathcal{D}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < r\},$$

το οποίο ονομάζεται *ανοικτή μπάλα* κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας $r > 0$. (Εάν $n = 1$ η ανοικτή μπάλα καλείται *ανοικτό διάστημα*, ενώ εάν $n = 2$ καλείται *ανοικτός δίσκος*.) Το

$$\overline{\mathcal{D}}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

δεν είναι όμως ανοικτό, διότι όσο μικρός και να είναι ο θετικός αριθμός ϵ , υπάρχει ένα σημείο που απέχει απόσταση ϵ π.χ. από το σημείο $(a_1 + r, a_2, \dots, a_n) \in \overline{\mathcal{D}}_r(\mathbf{a})$ και δεν ανήκει στο $\overline{\mathcal{D}}_r(\mathbf{a})$ (λ.χ. το σημείο $(a_1 + r + \frac{\epsilon}{2}, a_2, \dots, a_n)$).

Κατόπιν, εάν X και Y είναι υποσύνολα του \mathbb{R}^n και του \mathbb{R}^m , αντίστοιχα, λέμε ότι μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι *συνεχής* στο σημείο $\mathbf{a} \in X$ εάν τα σημεία του X κοντά στο \mathbf{a} απεικονίζονται μέσω της f σε σημεία του Y κοντά στο $f(\mathbf{a})$. Ακριβέστερα, η f είναι *συνεχής* στο \mathbf{a} εάν, δοθέντος τυχαίου $\epsilon > 0$, υπάρχει αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{u} \in X \text{ και } \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| \leq \delta \implies \|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι *συνεχής* εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X . Οι συνθέσεις συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχείς.

Δεδομένου του ορισμού του ανοικτού συνόλου, ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο: η f είναι συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ανοικτό σύνολο V του \mathbb{R}^m , υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο U του \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε $U \cap X = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$.

Εάν η $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής, 1-1 και επί, και εάν η αντίστροφη της απεικόνιση $f^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι επίσης συνεχής, τότε η f καλείται *ομοιομορφισμός* και λέμε ότι τα X και Y είναι *ομοιομορφικά*.

Είμαστε πλέον σε θέση να κάνουμε την πρώτη μας προσπάθεια να ορίσουμε την έννοια της επιφάνειας στο \mathbb{R}^3 .

Ορισμός 4.1.1

Ένα υποσύνολο \mathcal{S} του \mathbb{R}^3 είναι *επιφάνεια* εάν, για κάθε σημείο $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, υπάρχουν ένα ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^2 και ένα ανοικτό υποσύνολο W του \mathbb{R}^3 που περιέχει το \mathbf{p} τέτοια ώστε το $\mathcal{S} \cap W$ να είναι ομοιομορφικό με το U . Ένα υποσύνολο μίας επιφάνειας \mathcal{S} της μορφής $\mathcal{S} \cap W$, όπου W είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , ονομάζεται *ανοικτό υποσύνολο* της \mathcal{S} . Ένας ομοιομορφισμός $\sigma : U \rightarrow \mathcal{S} \cap W$ σαν αυτόν που μόλις ορίστηκε καλείται *τμήμα επιφάνειας*¹ ή *παραμέτρηση* του ανοικτού υποσυνόλου $\mathcal{S} \cap W$ της \mathcal{S} . Μία συλλογή τμημάτων επιφάνειας των οποίων οι εικόνες καλύπτουν ολόκληρη την \mathcal{S} ονομάζεται *άτλας* της \mathcal{S} .

Παράδειγμα 4.1.2

Κάθε επίπεδο του \mathbb{R}^3 είναι μια επιφάνεια της οποίας ο άτλας αποτελείται από ένα μόνο τμήμα επιφάνειας. Πράγματι, έστω \mathbf{a} ένα σημείο του επιπέδου, και έστω \mathbf{p} και \mathbf{q} δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα στο επίπεδο και κάθετα μεταξύ τους. Εάν \mathbf{v} είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, τότε το $\mathbf{v} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο στο επίπεδο, οπότε

$$\mathbf{v} - \mathbf{a} = u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$$

¹Σ.τ.Μ. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον ευρέως διαδεδομένο στην ξένη βιβλιογραφία όρο surface patch που σημαίνει μπάλα επιφάνειας, που είναι καταφανώς αδόκιμος στα Ελληνικά.

για κάποιους αριθμούς u και v . Συνεπώς το επιθυμητό τμήμα επιφάνειας είναι το

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q},$$

και η αντίστροφη απεικόνιση είναι η

$$\sigma^{-1}(\mathbf{v}) = ((\mathbf{v} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{p}, (\mathbf{v} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{q}).$$

Από αυτές τις σχέσεις είναι φανερό ότι οι σ και σ^{-1} είναι συνεχείς, άρα η σ είναι ομοιομορφισμός. (Δεν θα το αποδείξουμε λεπτομερώς).

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει γιατί είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάζουμε επιφάνειες και όχι απλώς τμήματα επιφάνειας.

Παράδειγμα 4.1.3

Ένας κυκλικός κώνος είναι το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^3 που απέχουν σταθερή απόσταση (που καλείται ακτίνα του κώνου) από μια σταθερή ευθεία (που καλείται άξονας του κώνου). Για παράδειγμα, ο κυκλικός κώνος με ακτίνα 1 και άξονα τον άξονα z , τον οποίο θα ονομάζουμε μοναδιαίο κώνο, είναι το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Η απλούστερη παραμέτρηση του S είναι η εξής:

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Προφανώς $\sigma(u, v) \in S$ για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, και κάθε σημείο του S είναι της μορφής αυτής. Επιπλέον, η σ είναι συνεχής. Η σ δεν είναι όμως 1-1 και άρα δεν είναι ομοιομορφισμός, διότι $\sigma(u, v) = \sigma(u + 2\pi, v)$ για κάθε (u, v) . Για να πάρουμε μία 1-1 απεικόνιση μπορούμε να περιορίσουμε το u σε ένα διάστημα μήκους $\leq 2\pi$, έστω στο $0 \leq u < 2\pi$. Παρότι όμως ο περιορισμός $\sigma|_V$ της σ στο

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u < 2\pi\}$$

είναι 1-1, το V δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και άρα ο $\sigma|_V$ δεν είναι τμήμα επιφάνειας. Το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που περιέχεται στο V είναι το

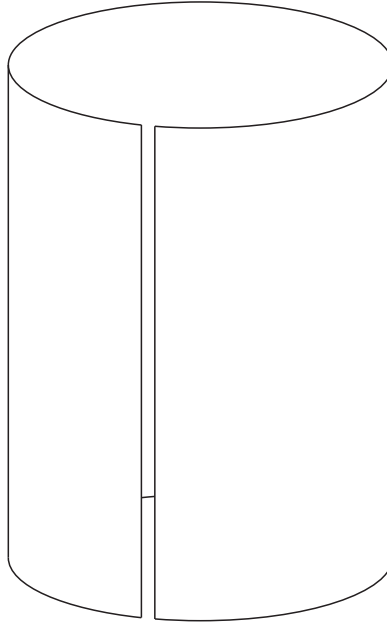
$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\},$$

και ο περιορισμός $\sigma|_U$ της σ στο U είναι τμήμα επιφάνειας. Ωστόσο, το $\sigma|_U$ δεν καλύπτει ολόκληρο τον S , παρά μόνο το ανοικτό του υποσύνολο που προκύπτει με αφαίρεση από τον S της ευθείας $x = 1, y = 0$ (Σχήμα 4.1).

Για να έχουμε επομένως έναν άτλαντα του S , χρειαζόμαστε τουλάχιστον ένα ακόμη τμήμα επιφάνειας. Μπορούμε να πάρουμε το $\sigma|_{\tilde{U}}$, όπου

$$\tilde{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\},$$

το οποίο καλύπτει το ανοικτό υποσύνολο του S που προκύπτει με αφαίρεση από τον S της ευθείας $x = -1, y = 0$. Κάθε σημείο του S περιέχεται στην εικόνα τουλάχιστον ενός από τα τμήματα επιφάνειας $\sigma|_U, \sigma|_{\tilde{U}}$, άρα το $\{\sigma|_U, \sigma|_{\tilde{U}}\}$ είναι ένας άτλας του S και ο S είναι επιφάνεια.



Σχήμα 4.1. Κυκλικός κύλινδρος πλην της ευθείας $x = 1, y = 0$.

Παράδειγμα 4.1.4

Μια *σφαίρα* είναι το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^3 που απέχουν σταθερή απόσταση (που καλείται *ακτίνα* της σφαίρας) από ένα σταθερό σημείο (που καλείται *κέντρο* της σφαίρας). Για παράδειγμα, η σφαίρα ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή των αξόνων, που ονομάζεται *μοναδιαία σφαίρα*, είναι η εξής:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

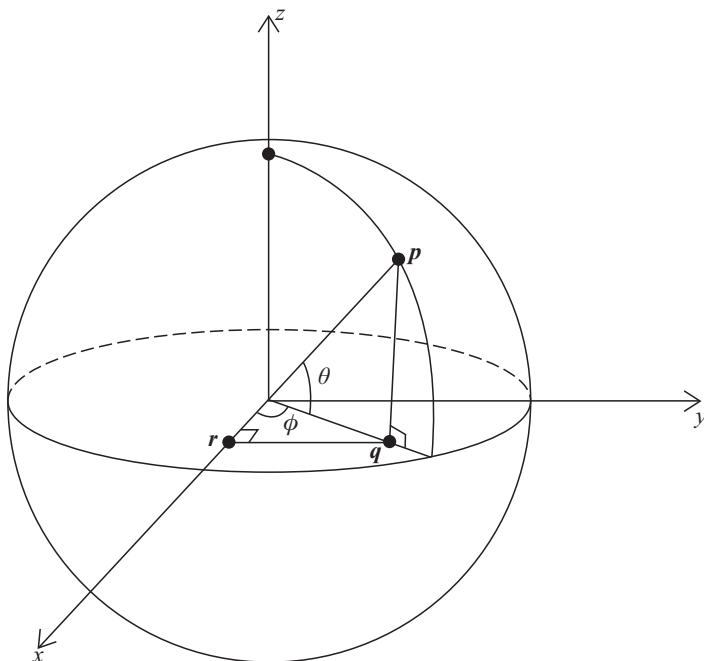
Η δημοφιλέστερη παραμέτρηση της S^2 είναι αυτή που εκφράζεται συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους θ και του γεωγραφικού μήκους φ : εάν \mathbf{p} είναι ένα σημείο της σφαίρας, η ευθεία που διέρχεται από το \mathbf{p} και είναι παράλληλη στον άξονα z τέμνει το επίπεδο xy σε ένα σημείο, έστω \mathbf{q} . Στην περίπτωση αυτή, θ είναι η γωνία των \mathbf{q} και \mathbf{p} , και φ είναι η γωνία του \mathbf{q} και του θετικού άξονα x . Οι κύκλοι της σφαίρας που αντιστοιχούν σε σταθερή τιμή της θ καλούνται *παράλληλοι*, ενώ οι κύκλοι που αντιστοιχούν σε σταθερή τιμή της φ καλούνται *μεσημβρινοί*.

Για να βρούμε τον ακριβή τύπο της παραμέτρησης αυτής πρέπει να εκφράσουμε το \mathbf{p} συναρτήσει των γωνιών θ και φ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{0}$, \mathbf{p} και \mathbf{q} διαπιστώνουμε ότι η κατηγμένη του \mathbf{p} είναι ίση με $\sin \theta$. Η τετμημένη και η τεταγμένη του \mathbf{p} μπορούν να βρεθούν από το ορθογώνιο τρίγωνο του επιπέδου xy με κορυφές $\mathbf{0}$, \mathbf{q} και \mathbf{r} , όπου \mathbf{r} είναι ο πους της καθέτου από το \mathbf{q} στον άξονα x . Το μήκος της υποτείνουσας του τριγώνου αυτού είναι $\|\mathbf{q}\| = \cos \theta$, άρα η τετμημένη και η τεταγμένη του \mathbf{p} είναι

$$\|\mathbf{q}\| \cos \varphi = \cos \theta \cos \varphi \quad \text{και} \quad \|\mathbf{q}\| \sin \varphi = \cos \theta \sin \varphi,$$

αντίστοιχα. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω παίρνουμε

$$\mathbf{p} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$



Σχήμα 4.2. Γεωγραφικές συντεταγμένες της μοναδιαίας σφαίρας.

Το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης, το οποίο συμβολίζουμε με $\sigma(\theta, \varphi)$, ονομάζεται *παραμέτρηση γεωγραφικών συντεταγμένων* της S^2 .

Όπως και στην περίπτωση του κυλίνδρου, η σ δεν είναι 1–1 αφού (για παράδειγμα) $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi + 2\pi)$. Με λίγη σκέψη διαπιστώνουμε ότι για να καλύψουμε ολόκληρη τη σφαίρα αρκεί να πάρουμε

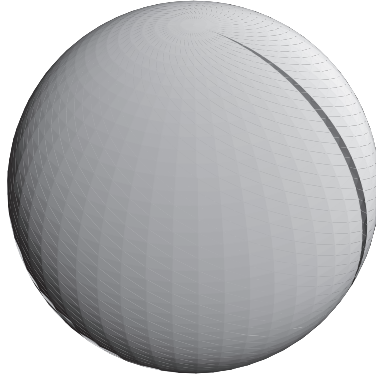
$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Το σύνολο των σημείων (θ, φ) που ικανοποιούν αυτές τις ανισότητες δεν είναι όμως ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που είναι συμβατό με τις παραπάνω ανισότητες είναι το

$$U = \left\{ (\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi \right\}.$$

Ωστόσο, η εικόνα του $\sigma|_U$ δεν είναι ολόκληρη η σφαίρα, αλλά το ανοικτό υποσύνολο που προκύπτει με την αφαίρεση του μέγιστου ημικυκλίου \mathcal{C} που αποτελείται από τα σημεία της σφαίρας της μορφής $(x, 0, z)$ με $x \geq 0$.

Για να αποδείξουμε ότι η σφαίρα είναι επιφάνεια, πρέπει συνεπώς να ορίσουμε τουλάχιστον ένα ακόμη τμήμα επιφάνειας που να καλύπτει το τμήμα εκείνο της σφαίρας που παραλείπει η σ . Μια επιλογή είναι το τμήμα επιφάνειας $\tilde{\sigma}$ που προκύπτει πρώτα με περιστροφή της σ κατά π γύρω από τον άξονα z και κατόπιν κατά $\pi/2$ γύρω από τον άξονα

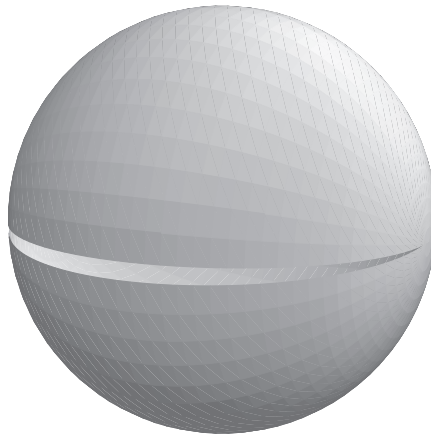


Σχήμα 4.3. Παραμέτρηση της σφαίρας με παράλειψη του μισού πρώτου μεσημβρινού.

x . Επακριβώς, η $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ δίνεται από την

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi)$$

(το ανοικτό σύνολο U είναι το ίδιο με εκείνο της σ). Η εικόνα της $\tilde{\sigma}$ είναι το ανοικτό υποσύνολο της S^2 που προκύπτει με την αφαίρεση του μέγιστου ημικυκλίου \tilde{C} που αποτελείται από τα σημεία της σφαίρας της μορφής $(x, y, 0)$ με $x \leq 0$.



Σχήμα 4.4. Παραμέτρηση της σφαίρας με παράλειψη του μισού ισημερινού.

Τα ημικύκλια C και \tilde{C} προφανώς δεν τέμνονται, επομένως η ένωση των εικόνων των $\sigma|_U$ και $\tilde{\sigma}|_U$ είναι ολόκληρη η σφαίρα.

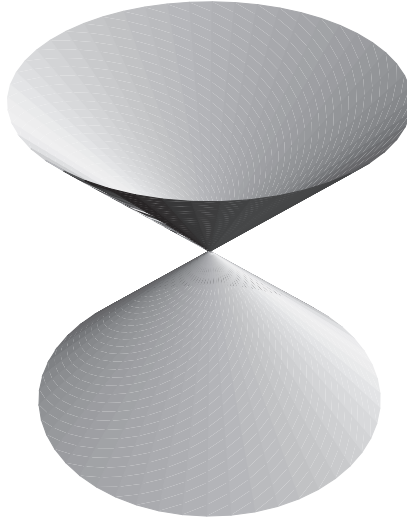
Το τελευταίο μας παράδειγμα (προς το παρόν) αφορά ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που είναι σχεδόν, αλλά όχι ακριβώς επιφάνεια.

Παράδειγμα 4.1.5

Ο κυκλικός κώνος με κορυφή ένα σημείο v , άξονα μία ευθεία ℓ που διέρχεται από το v και γωνία α , όπου $0 < \alpha < \pi/2$, είναι το σύνολο των σημείων p του \mathbb{R}^3 για τα οποία η

ευθεία που διέρχεται από τα \mathbf{v} και \mathbf{p} σχηματίζει γωνία α με την ευθεία ℓ . Για παράδειγμα, εάν \mathbf{v} είναι η αρχή των αξόνων, ℓ ο άξονας z και $\alpha = \pi/4$, ο κυκλικός κώνος είναι ο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$



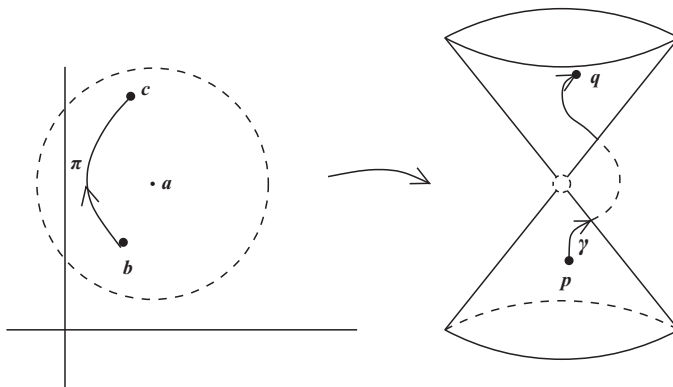
Σχήμα 4.5. Κυκλικός κώνος.

Για να αποδείξουμε ότι ο κυκλικός κώνος δεν είναι επιφάνεια, ας υποθέσουμε ότι $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ είναι ένα τμήμα επιφάνειας που περιέχει την κορυφή $(0, 0, 0)$ του κώνου, και έστω ότι το $\mathbf{a} \in U$ αντιστοιχεί στην κορυφή. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το U είναι μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το \mathbf{a} , αφού κάθε ανοικτό σύνολο U που περιέχει το \mathbf{a} πρέπει να περιέχει μία τέτοια ανοικτή μπάλα. Το ανοικτό σύνολο W πρέπει προφανώς να περιέχει ένα σημείο \mathbf{p} από το κάτω ήμισυ S_- του S όπου $z < 0$ και ένα σημείο \mathbf{q} από το άνω ήμισυ S_+ όπου $z > 0$: έστω \mathbf{b} και \mathbf{c} τα αντίστοιχα σημεία του U . Είναι προφανές ότι υπάρχει μια καμπύλη π του U που διέρχεται από τα \mathbf{b} και \mathbf{c} , αλλά όχι από το \mathbf{a} . Η π απεικονίζεται μέσω της σ στην καμπύλη $\gamma = \sigma \circ \pi$ που ανήκει εξ ολοκλήρου στον κώνο S , διέρχεται από τα \mathbf{p} και \mathbf{q} , αλλά δεν διέρχεται από την κορυφή. (Είναι αλήθεια ότι η γ θα είναι εν γένει μόνο συνεχής και όχι λεία, αλλά αυτό δεν επηρεάζει τον συλλογισμό μας.) Αυτό είναι προφανώς αδύνατο. (Οι εξοικειωμένοι με τη σημειακή τοπολογία αναγνώστες θα μπορέσουν να διατυπώσουν με αυστηρό τρόπο αυτόν τον ευρηκτικό χαρακτήρα συλλογισμού.)

Ωστόσο, εάν αφαιρέσουμε την κορυφή του κώνου, παίρνουμε μία επιφάνεια $S_- \cup S_+$, η οποία έχει έναν άτλαντα που αποτελείται από τα δύο τμήματα επιφάνειας $\sigma_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, που δίνονται από την αντίστροφη της προβολής στο επίπεδο xy :

$$\sigma_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Όπως διαπιστώσαμε στο παράδειγμα της σφαίρας, ένα σημείο \mathbf{a} μίας επιφάνειας S θα ανήκει εν γένει στην εικόνα περισσότερων του ενός τμημάτων επιφάνειας. Ας υποθέσουμε λοιπόν εν γένει ότι $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ και $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow S \cap \tilde{W}$ είναι δύο τμήματα

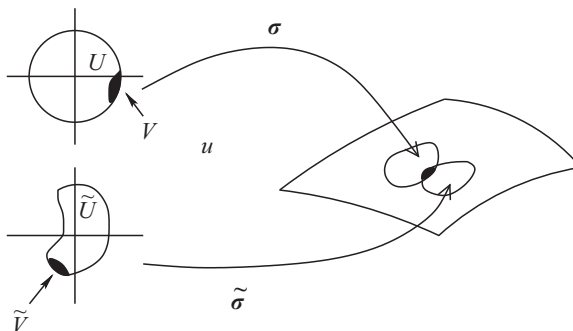


Σχήμα 4.6. Το πρόβλημα του κυκλικού κώνου στην κορυφή.

επιφάνειας τέτοια ώστε $a \in S \cap W \cap \tilde{W}$. Αφού τα σ και $\tilde{\sigma}$ είναι ομοιομορφισμοί, τα $\sigma^{-1}(S \cap W \cap \tilde{W})$ και $\tilde{\sigma}^{-1}(S \cap W \cap \tilde{W})$ είναι τα ανοικτά σύνολα $V \subseteq U$ και $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$, αντίστοιχα. Ο σύνθετος ομοιομορφισμός $\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \rightarrow V$ ονομάζεται *απεικόνιση μετάβασης* από το σ στο $\tilde{\sigma}$. Εάν συμβολίσουμε αυτήν την απεικόνιση με Φ , έχουμε

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

για κάθε $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{V}$.



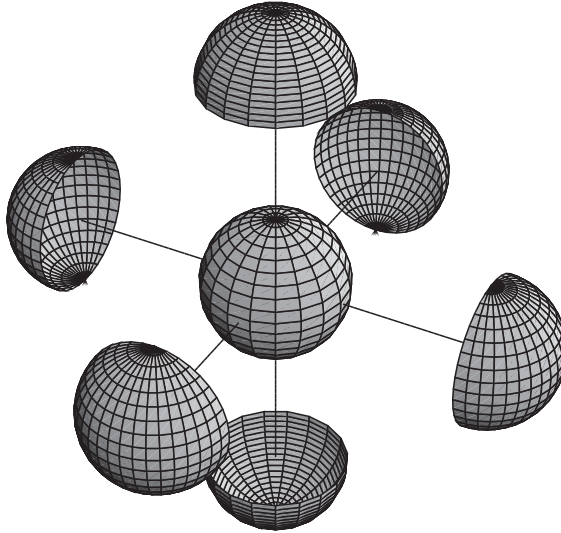
Σχήμα 4.7. Απεικόνιση μετάβασης.

Ασκήσεις

- 4.1.1 Δείξτε ότι κάθε ανοικτός δίσκος του επιπέδου xy είναι επιφάνεια.
- 4.1.2 Ορίστε τα τμήματα επιφάνειας $\sigma_{\pm}^x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ της S^2 λύνοντας την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ως προς x συναρτήσσει των y και z :

$$\sigma_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v).$$

Το πεδίο ορισμού είναι το ανοικτό σύνολο $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$. Ορίστε με αντίστοιχο τρόπο τα σ_{\pm}^y και σ_{\pm}^z (με το ίδιο U) λύνοντας ως προς y



Σχήμα 4.8. Παραμέτρηση της σφαίρας με έξι τμήματα επιφάνειας.

και z , αντίστοιχα. Δείξτε ότι αυτά τα έξι τμήματα επιφάνειας προσδίνουν στην S^2 δομή επιφάνειας (Σχήμα 4.8).

4.1.3 Το μονόφυλλο υπερβολοειδές είναι το

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Δείξτε ότι, για κάθε θ , η ευθεία

$$(x - z) \cos \theta = (1 - y) \sin \theta, \quad (x + z) \sin \theta = (1 + y) \cos \theta$$

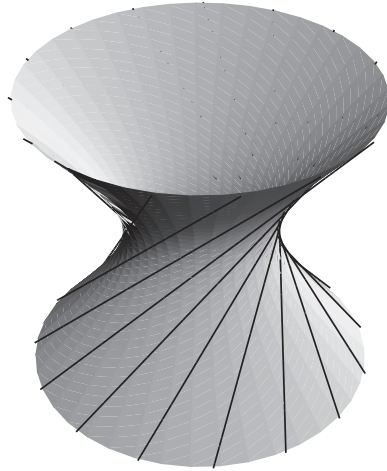
περιέχεται στο S , και ότι κάθε σημείο του υπερβολοειδούς ανήκει σε μία από αυτές τις ευθείες (Σχήμα 4.9). Συμπεράνετε ότι το S μπορεί να καλυφθεί από ένα μόνο τμήμα επιφάνειας και συνεπώς είναι επιφάνεια. (Παραβάλετε την επιφάνεια αυτή με την περίπτωση του κυλίνδρου του Παραδείγματος 4.1.3.)

Βρείτε μία δεύτερη οικογένεια ευθειών του S και δείξτε ότι οι ευθείες της ίδιας οικογένειας δεν τέμνονται μεταξύ τους, ενώ κάθε ευθεία της πρώτης οικογένειας τέμνει κάθε ευθεία της δεύτερης οικογένειας με μία εξαίρεση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η επιφάνεια S είναι *διπλά ευθαιογενής*.²

4.1.4 Δείξτε ότι ενώ ο μοναδιαίος κύλινδρος μπορεί να καλυφθεί με ένα μόνο τμήμα επιφάνειας, η μοναδιαία σφαίρα δεν μπορεί. (Για το τελευταίο απαιτούνται κάποιες γνώσεις τοπολογίας.)

4.1.5 Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο μιας επιφάνειας είναι επιφάνεια.

²Σ.τ.Μ. Ο αγγλικός όρος είναι doubly ruled surface, που μεταφράζεται επακριβώς ως *διπλά χαραγμένη επιφάνεια*. Ο όρος *ευθαιογενής* απαντάται στο σύνολο της σχετικής ελληνικής βιβλιογραφίας.



Σχήμα 4.9. Ευθείες πάνω στο μονόφυλλο υπερβολοειδές.

4.2 Λείες επιφάνειες

Στη διαφορική γεωμετρία χρησιμοποιούμε τον απειροστικό λογισμό για να μελετούμε επιφάνειες (και άλλα γεωμετρικά αντικείμενα). Για παράδειγμα, πρέπει να είμαστε σε θέση να καταλαβαίνουμε τι εννοούμε όταν λέμε πως μια συνάρτηση ορισμένη σε μια επιφάνεια είναι διαφορίσιμη. Για αυτόν τον λόγο πρέπει να θεωρήσουμε επιφάνειες με κάποια επιπλέον δομή.

Κατ' αρχάς, εάν το U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m , λέμε ότι μια απεικόνιση $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι *λεία* εάν κάθε μία από τις n συνιστώσες συναρτήσεις της f , οι οποίες είναι συναρτήσεις $U \rightarrow \mathbb{R}$, έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης. Στην περίπτωση αυτή οι μερικές παράγωγοι της f υπολογίζονται κατά συνιστώσα. Για παράδειγμα, εάν $m = 2$ και $n = 3$, και

$$f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)),$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)$$

και αντίστοιχα για τις παραγώγους ανώτερης τάξης. Συχνά χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες συντομεύσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= f_u, & \frac{\partial f}{\partial v} &= f_v, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= f_{uu}, & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} &= f_{uv}, & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} &= f_{vu}, & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= f_{vv}, \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Από τον προχωρημένο απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι $f_{uv} = f_{vu}$ εάν η f είναι λεία.³

³Σ.τ.Μ. Από το Λήμμα του Schwarz.

Πλέον έχει νόημα να λέμε ότι ένα τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι λείο. Θα απαιτήσουμε όμως την ισχύ μιας επιπλέον συνθήκης.

Ορισμός 4.2.1

Ένα τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται *κανονικό* εάν είναι λείο και τα διανύσματα σ_u και σ_v είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε όλα τα σημεία $(u, v) \in U$. Ισοδύναμα, η σ πρέπει να είναι λεία και το διανυσματικό γινόμενο $\sigma_u \times \sigma_v$ πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο του U .

Ο λόγος που επιβάλλουμε την παραπάνω συνθήκη θα γίνει φανερός στην Ενότητα 4.4.

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε τις κατηγορίες επιφανειών που θα μελετηθούν σε αυτό το βιβλίο.

Ορισμός 4.2.2

Εάν S είναι μια επιφάνεια, ένα *επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας* της S είναι ένα κανονικό τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε η σ να είναι ένας ομοιομορφισμός από το U προς ένα ανοικτό υποσύνολο της S . Μία *λεία επιφάνεια* είναι μια επιφάνεια S τέτοια ώστε, για κάθε $p \in S$, να υπάρχει ένα επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας σ όπως παραπάνω τέτοιο ώστε $p \in \sigma(U)$. Μία συλλογή \mathcal{A} επιτρεπτών τμημάτων επιφάνειας μιας επιφάνειας S τέτοια ώστε κάθε σημείο της S να ανήκει στην εικόνα τουλάχιστον ενός τμήματος της \mathcal{A} ονομάζεται *άτλας* της λείας επιφάνειας S .

Παράδειγμα 4.2.3

Το επίπεδο του Παραδείγματος 4.1.2 είναι λεία επιφάνεια. Πράγματι, η

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$$

είναι προφανώς λεία και τα $\sigma_u = \mathbf{p}$ και $\sigma_v = \mathbf{q}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι τα \mathbf{p} και \mathbf{q} επιλέχθηκαν ώστε να είναι κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα.

Παράδειγμα 4.2.4

Ο μοναδιαίος κύλινδρος (Παράδειγμα 4.1.3) είναι λεία επιφάνεια. Πράγματι, η

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

είναι προφανώς λεία και τα

$$\sigma_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \sigma_v = (0, 0, 1)$$

είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε (u, v) . Άρα τα $\sigma|_U$ και $\sigma|_{\bar{U}}$ είναι κανονικά τμήματα επιφάνειας.

Παράδειγμα 4.2.5

Για τη μοναδιαία σφαίρα S^2 του Παραδείγματος 4.1.4, είναι και πάλι φανερό ότι οι σ και $\bar{\sigma}$ είναι λείες. Όσον αφορά την κανονικότητα έχουμε

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \sigma_\varphi = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta)$$

και άρα $\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos \theta|$. Εάν όμως $(\theta, \varphi) \in U$, τότε $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, άρα $\cos \theta \neq 0$. Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η $\tilde{\sigma}$ είναι κανονική.

Στην Άσκηση 4.1.2 παρουσιάσαμε μία άλλη οικογένεια επιτρεπτών τμημάτων επιφάνειας που καλύπτουν τη μοναδιαία σφαίρα S^2 (είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι κανονικά – βλ. Άσκηση 4.2.2). Μία προφανής ερώτηση είναι η εξής: ποιον από τους δύο άτλαντες πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε τη σφαίρα; Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε από τους δύο ή και τους δύο. Τα οκτώ τμήματα της Άσκησης 4.1.2 και του Παραδείγματος 4.1.4 σχηματίζουν όλα μαζί έναν τρίτο άτλαντα. Στις περισσότερες περιπτώσεις (αν και όχι σε όλες – βλ. Ορισμό 4.5.1) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ο *μεγιστικός άτλας* μίας δοθείσας επιφάνειας S που αποτελείται από όλα τα επιτρεπτά τμήματα επιφάνειάς της. Ο μεγιστικός άτλας είναι ανεξάρτητος από οποιαδήποτε αυθαίρετη επιλογή.

Αν και εκ πρώτης όψεως δεν φαίνονται ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, το δύο αποτελέσματα που ακολουθούν είναι πολύ σημαντικά για τη συνέχεια.

Πρόταση 4.2.6

Οι απεικονίσεις μετάβασης μιας λείας επιφάνειας είναι λείες.

Η απόδειξη θα δοθεί στην Ενότητα 5.6. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ένα είδος αντιστρόφου της Πρότασης 4.2.6.

Πρόταση 4.2.7

Έστω U και \tilde{U} δύο ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 και έστω $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα κανονικό τμήμα επιφάνειας. Εάν $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ είναι μία 1-1 και επί λεία απεικόνιση με λεία αντίστροφη απεικόνιση $\Phi^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$, τότε το $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ είναι κανονικό τμήμα επιφάνειας.

Απόδειξη Το τμήμα $\tilde{\sigma}$ είναι λείο διότι κάθε σύνθεση λείων απεικονίσεων είναι λεία απεικόνιση. Όσον αφορά την κανονικότητα, έστω $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \sigma_v, \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \sigma_v,$$

συνεπώς

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \sigma_u \times \sigma_v. \quad (4.1)$$

Η παράσταση που βρίσκεται μέσα σε παρένθεση στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι η ορίζουσα του *Ιακωβιανού πίνακα*

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

της Φ . Υπενθυμίζουμε από τον απειροστικό λογισμό ότι, εάν οι Ψ και $\tilde{\Psi}$ είναι δύο λείες απεικονίσεις μεταξύ ανοικτών συνόλων του \mathbb{R}^2 , τότε

$$J(\tilde{\Psi} \circ \Psi) = J(\tilde{\Psi})J(\Psi).$$

(Αυτό είναι ισοδύναμο με τον κανόνα της αλυσίδας που εκφράζει τις πρώτες μερικές παραγώγους της $\tilde{\Psi} \circ \Psi$ συναρτήσεως των πρώτων μερικών παραγώγων των $\tilde{\Psi}$ και Ψ .)

Παίρνοντας $\Psi = \Phi$ και $\tilde{\Psi} = \Phi^{-1}$ διαπιστώνουμε ότι $J(\Phi^{-1}) = J(\Phi)^{-1}$. Ειδικότερα, ο $J(\Phi)$ είναι αντιστρέψιμος, άρα η ορίζουσά του είναι μη μηδενική, οπότε από την Εξ. 4.1 προκύπτει ότι το $\tilde{\sigma}$ είναι κανονικό. \square

Εάν τα κανονικά τμήματα επιφάνειας σ και $\tilde{\sigma}$ σχετίζονται όπως στην παραπάνω πρόταση, λέμε ότι το $\tilde{\sigma}$ είναι μια *αναπαραμέτρηση* του σ και ότι η Φ είναι μια *απεικόνιση αναπαραμέτρησης*. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το σ είναι μια αναπαραμέτρηση του $\tilde{\sigma}$, αφού $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi^{-1}$.

Σημειώνουμε επίσης ότι, εάν $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ και $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow S \cap \tilde{W}$ είναι δύο επιτρεπτά τμήματα επιφάνειας μίας λείας επιφάνειας S , και εάν $V \subseteq U$ και $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ είναι τα ανοικτά υποσύνολα για τα οποία ισχύει ότι $\sigma(V) = \tilde{\sigma}(\tilde{V}) = S \cap W \cap \tilde{W}$, τότε η $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \rightarrow V$ είναι 1-1 και επί, λεία, και σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.6 έχει λεία αντίστροφη. Συνεπώς, το $\tilde{\sigma}$ είναι μια *αναπαραμέτρηση του σ στο σύνολο όπου ορίζονται και τα δύο ταυτόχρονα*.

Από αυτές τις παρατηρήσεις προκύπτει μια πολύ σημαντική αρχή την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε ολόκληρο το βιβλίο. Συγκεκριμένα, *μπορούμε να ορίσουμε μία ιδιότητα μιας τυχούσας λείας επιφάνειας εάν μπορούμε να την ορίσουμε για κάθε κανονικό τμήμα επιφάνειας κατά τρόπο ώστε να παραμένει αμετάβλητη όταν το τμήμα αναπαραμετράται*. Θα παρουσιάσουμε μία σημαντική εφαρμογή αυτής της αρχής στην επόμενη ενότητα.

Στο υπόλοιπο αυτού του βιβλίου με τον όρο επιφάνεια θα εννοούμε μια κανονική επιφάνεια S , και με τον όρο τμήμα επιφάνειας της S θα εννοούμε ένα επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας της S .

Εκτός και εάν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό, θα υποθέτουμε επίσης ότι όλες οι επιφάνειες που εξετάζουμε είναι *συνεκτικές*, που σημαίνει ότι οποιαδήποτε δύο σημεία της S μπορούν να συνδεθούν με μία καμπύλη που ανήκει εξ ολοκλήρου στην S .⁴ Ο περιορισμός αυτός δεν είναι σοβαρός, καθώς δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι κάθε επιφάνεια S είναι ξένη ένωση συνεκτικών επιφανειών, καθεμία από τις οποίες είναι ανοικτό υποσύνολο της S . Συνεπώς, μπορούμε να μελετήσουμε την S μελετώντας ξεχωριστά κάθε συνεκτικό της κομμάτι⁵ (βλ. Άσκηση 4.2.9). Όλες οι επιφάνειες που έχουμε συναντήσει μέχρι στιγμής είναι συνεκτικές, με μία εξαίρεση: ο διπλός κώνος του Παραδείγματος 4.1.5 είναι η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους ημικώνων S_{\pm} από τους οποίους έχει αφαιρεθεί η κορυφή, όπως πρέπει να συμβαίνει για να έχουμε επιφάνεια.

Άσκησης

4.2.1 Δείξτε ότι, εάν $f(x, y)$ είναι μια λεία συνάρτηση, το *γράφημά* της

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

είναι μια λεία επιφάνεια της οποίας ο άτλας αποτελείται μόνο από το κανονικό τμήμα επιφάνειας

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Μάλιστα, κάθε επιφάνεια είναι «τοπικά» της μορφής αυτής – βλ. Άσκηση 5.6.4.

⁴Σ.τ.Μ. Και πάλι ο συγγραφέας εννοεί επιφάνεια συνεκτική κατά δρόμους, βλ. και την υποσημείωση 2 του Κεφ. 3.

⁵Σ.τ.Μ. Στην τοπολογία η ορολογία για τα συνεκτικά «κομμάτια» είναι *συνεκτικές συνιστώσες*.

4.2.2 Επιβεβαιώστε ότι τα έξι τμήματα επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας S^2 στην Άσκηση 4.1.2 είναι κανονικά. Υπολογίστε τις απεικονίσεις μετάβασης μεταξύ τους και επιβεβαιώστε ότι είναι λείες.

4.2.3 Ποια από τα παρακάτω είναι κανονικά τμήματα επιφάνειας (σε κάθε περίπτωση $u, v \in \mathbb{R}$);

(i) $\sigma(u, v) = (u, v, uv)$,

(ii) $\sigma(u, v) = (u, v^2, v^3)$,

(iii) $\sigma(u, v) = (u + u^2, v, v^2)$.

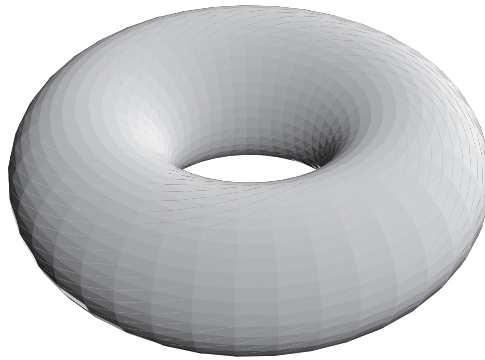
4.2.4 Δείξτε ότι το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

όπου p, q και r είναι μη μηδενικές σταθερές, είναι λεία επιφάνεια.

4.2.5 Ένας τόρος⁶ προκύπτει με περιστροφή ενός κύκλου C ενός επιπέδου Π γύρω από μια ευθεία l του Π που δεν τέμνει τον C . Υποθέστε ότι Π είναι το επίπεδο xz , l ο άξονας z , $a > 0$ η απόσταση του κέντρου του C από την l , και $b < a$ η ακτίνα του C . Δείξτε ότι ο τόρος είναι μια λεία επιφάνεια με παραμέτρηση

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta).$$



Σχήμα 4.10. Τόρος.

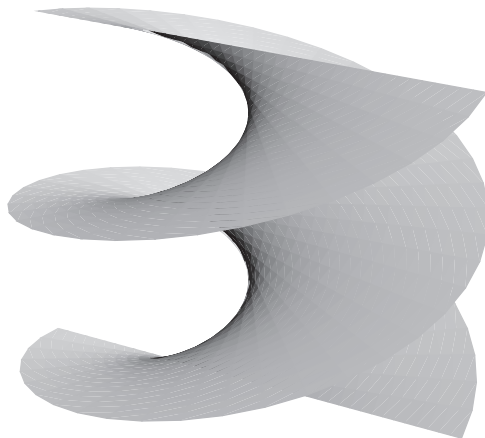
4.2.6 Μια ελικοειδής είναι η επιφάνεια που διαγράφει η έλικα ενός αεροπλάνου καθώς και το αεροπλάνο και η έλικά του κινούνται με σταθερή ταχύτητα (Σχήμα 4.11). Εάν το αεροπλάνο πετά κατά μήκος του άξονα z , δείξτε ότι μια παραμέτρηση της ελικοειδούς είναι η

$$\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u),$$

όπου λ είναι μια σταθερά. Δείξτε ότι η συνεφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα⁷ της σ σε τυχόν σημείο \mathbf{p} με τον άξονα z είναι ανάλογο της απόστασης του \mathbf{p} από τον άξονα z .

⁶Σ.τ.Μ. Από το λατινικό torus. Είναι γνωστός και ως σπείρα.

⁷Σ.τ.Μ. Προφανώς η θέση αυτής της άσκησης είναι στην Ενότητα 4.5.



Σχήμα 4.11. Ελικοειδής επιφάνεια.

4.2.7 Έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του \mathbb{R}^3 με πουθενά μηδενική καμπυλότητα. Ο σωλήνας ακτίνας $a > 0$ γύρω από την καμπύλη γ είναι η επιφάνεια με παραμέτρηση

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + a(\mathbf{n}(s) \cos \theta + \mathbf{b}(s) \sin \theta),$$

όπου \mathbf{n} είναι το κύριο κάθετο και \mathbf{b} το αμφικάθετο διάνυσμα της γ . Δώστε μία γεωμετρική περιγραφή αυτής της επιφάνειας. Αποδείξτε ότι η σ είναι κανονική εάν η καμπυλότητα κ της γ είναι παντού μικρότερη από a^{-1} .

Σημειώστε ότι, ακόμα και αν η σ είναι κανονική, η επιφάνεια σ θα έχει αυτοτομές εάν η καμπύλη πλησιάζει τον εαυτό της σε απόσταση μικρότερη ή ίση από $2a$. Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι η κανονικότητα είναι τοπική ιδιότητα: εάν περιοριστούμε στα (s, θ) που ανήκουν σε ένα αρκούντως μικρό ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^2 , η $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ θα είναι 1-1 και λεία (άρα δεν θα έχει αυτοτομές) – βλ. Άσκηση 5.6.3. Θα δούμε και άλλες περιπτώσεις όπου συμβαίνει αυτό (λ.χ. Παράδειγμα 12.2.5).

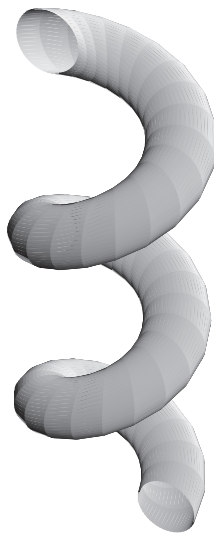
4.2.8 Δείξτε ότι οι μεταφορές και οι αντιστρέψιμοι γραμμικοί μετασχηματισμοί του \mathbb{R}^3 απεικονίζουν λείες επιφάνειες σε λείες επιφάνειες (βλ. Σχήμα 4.12).

4.2.9 Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο μίας λείας επιφάνειας είναι λεία επιφάνεια.

4.3 Λείες απεικονίσεις

Θέλουμε να ορίσουμε την έννοια μιας λείας απεικόνισης $f : S_1 \rightarrow S_2$, όπου S_1 και S_2 είναι λείες επιφάνειες. Δεν είναι προφανές πώς μπορεί να γίνει αυτό, διότι μέχρι στιγμής γνωρίζουμε πώς να ορίζουμε λείες απεικονίσεις μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων Ευκλείδειων χώρων.

Έχοντας υπόψη την αρχή που διατυπώθηκε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι S_1 και S_2 καλύπτονται από τα μονά τμήματα επιφάνειας $\sigma_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\sigma_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, υπό τον όρο να επιβεβαιώσουμε ότι ο ορισμός που θα δώσουμε παραμένει ανεπηρέαστος από τυχούσες αναπαραμετρήσεις των S_1 και



Σχήμα 4.12. Ο σωλήνας γύρω από μία κυκλική έλικα.

\mathcal{S}_2 . Αφού οι σ_1 και σ_2 είναι 1-1 και επί, από κάθε απεικόνιση $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ προκύπτει μια απεικόνιση $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$, και λέμε ότι η f είναι *λεία* αν αυτή η απεικόνιση είναι λεία (γνωρίζουμε ήδη τι σημαίνει για μια απεικόνιση μεταξύ ανοικτών συνόλων του \mathbb{R}^2 να είναι λεία). Κατόπιν, ας υποθέσουμε ότι οι $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι αναπαραμετρήσεις των σ_1 και σ_2 , με απεικονίσεις αναπαραμέτρησης $\Phi_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ και $\Phi_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow U_2$, αντίστοιχα. Πρέπει να δείξουμε ότι η αντίστοιχη απεικόνιση $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2$ είναι λεία εάν η $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$ είναι λεία. Αυτό όμως είναι αληθές, αφού

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 &= \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ (\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1}) \circ f \circ (\sigma_1 \circ \sigma_1^{-1}) \circ \tilde{\sigma}_1 \\ &= (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1) \\ &= \Phi_2^{-1} \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ \Phi_1, \end{aligned}$$

και οι Φ_1 και Φ_2^{-1} είναι λείες απεικονίσεις (μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^2). Ο αναγνώστης πρέπει να επιβεβαιώσει ότι η σύνθεση λείων απεικονίσεων μεταξύ επιφανειών είναι λεία απεικόνιση.

Ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για λείες απεικονίσεις $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ που είναι 1-1 και επί και των οποίων η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ είναι λεία. Τέτοιου είδους απεικονίσεις καλούνται *αμφιδιαφορίσεις*,⁸ και λέμε ότι οι \mathcal{S}_1 και \mathcal{S}_2 είναι *αμφιδιαφορικές* εάν υπάρχει μία αμφιδιαφόριση μεταξύ τους. Η ακόλουθη παρατήρηση θα φανεί χρήσιμη.

Πρόταση 4.3.1

Έστω $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ μία αμφιδιαφόριση. Εάν σ_1 είναι ένα επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας της \mathcal{S}_1 , τότε το $f \circ \sigma_1$ είναι ένα επιτρεπτό τμήμα επιφάνειας της \mathcal{S}_2 .

⁸Σ.τ.Μ. Ο αγγλικός όρος είναι diffeomorphism. Στην ελληνική βιβλιογραφία απαντάται και ως διαφορομορφισμός ή και διφεομορφισμός.

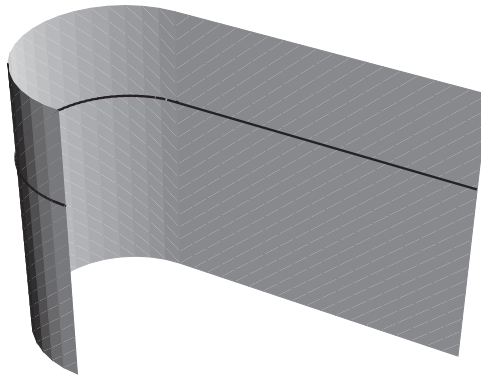
Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι \mathcal{S}_1 και \mathcal{S}_2 καλύπτονται από τα μονά επιτρεπτά τμήματα επιφάνειας $\sigma_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\sigma_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, αντίστοιχα. Επειδή η f είναι αμφιδιαφόριση, έχουμε $f(\sigma_1(u, v)) = \sigma_2(F(u, v))$, όπου η $F : U_1 \rightarrow U_2$ είναι 1-1 και επί και λεία, και η F^{-1} είναι λεία. Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 4.2.6. \square

Στην πράξη θα φανεί χρήσιμο αντί των αμφιδιαφορίσεων να θεωρούμε λείες απεικονίσεις που ικανοποιούν μία ελαφρώς ασθενέστερη συνθήκη. Μία λεία απεικόνιση $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ μεταξύ λείων επιφανειών καλείται *τοπική αμφιδιαφόριση αν*, για κάθε σημείο $p \in \mathcal{S}_1$, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο \mathcal{O} της \mathcal{S}_2 τέτοιο ώστε το $f(\mathcal{O})$ να είναι ανοικτό υποσύνολο της \mathcal{S}_2 και η $f|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow f(\mathcal{O})$ να είναι αμφιδιαφόριση (παρατηρήστε ότι τα ανοικτά υποσύνολα επιφανειών είναι επιφάνειες – βλ. Άσκηση 4.2.9). Είναι προφανές ότι κάθε αμφιδιαφόριση είναι τοπική αμφιδιαφόριση (πάρτε $\mathcal{O} = \mathcal{S}_1$). Επιπλέον, η Πρόταση 4.3.1 ισχύει αν η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση, υπό την προϋπόθεση ότι ο περιορισμός της f στην εικόνα του σ_1 είναι 1-1.

Παράδειγμα 4.3.2

Θεωρούμε την απεικόνιση από το επίπεδο yz επί του μοναδιαίου κυλίνδρου \mathcal{S} που τυλίγει κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα y γύρω από την «μέση» του κυλίνδρου σε ύψος z πάνω από το επίπεδο xy . Η απεικόνιση αυτή δίνεται από την

$$f(0, y, z) = (\cos y \sin y, z).$$



Σχήμα 4.13. Ξετύλιγμα του κυλίνδρου.

Προφανώς, η f δεν είναι αμφιδιαφόριση διότι δεν είναι 1-1 –το επίπεδο τυλίγεται άπειρες φορές γύρω από τον \mathcal{S} . Για να δείξουμε ότι η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση παραμετρούμε με τον προφανή τρόπο το επίπεδο yz μέσω του μονού τμήματος επιφάνειας $\pi(u, v) = (0, u, v)$ και χρησιμοποιούμε τον άτλαντα $\{\sigma|_U, \sigma|_{\bar{U}}\}$ του \mathcal{S} του Παραδείγματος 4.1.3. Έστω $p = (0, a, b)$ τυχόν σημείο του επιπέδου yz . Εάν το a δεν είναι άρτιο πολλαπλάσιο του 2π , υπάρχει ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $2n\pi < a < 2(n+1)\pi$, και έχουμε

$$f(\pi(u, v)) = \sigma(u - 2n\pi, v) \quad \text{αν} \quad 2n\pi < u < 2(n+1)\pi,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η f είναι αμφιδιαφόριση από το ανοικτό υποσύνολο

$$\mathcal{O} = \{(0, y, z) \mid 2n\pi < y < 2(n+1)\pi\}$$

του επιπέδου στο ανοικτό υποσύνολο

$$f(\mathcal{O}) = \{(x, y, z) \in \mathcal{S} \mid x \neq 1\}$$

του \mathcal{S} . Εάν το a δεν είναι περιττό πολλαπλάσιο του π , ισχύει ο αντίστοιχος συλλογισμός με το $\sigma|_{\tilde{U}}$ στη θέση του $\sigma|_U$ (αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη). Αφού το a δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άρτιο και περιττό πολλαπλάσιο του π , έχουμε αποδείξει ότι, για όλα τα σημεία p του επιπέδου, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο \mathcal{O} του επιπέδου που περιέχει το p και απεικονίζεται αμφιδιαφορικά μέσω της f επί ενός ανοικτού υποσυνόλου του \mathcal{S} .

Ασκήσεις

4.3.1 Εάν \mathcal{S} είναι μια λεία επιφάνεια, ορίστε την έννοια της *λείας συνάρτησης* $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, εάν \mathcal{S} είναι μια λεία επιφάνεια, κάθε συνιστώσα συνάρτηση της απεικόνισης εγκλεισμού $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια λεία συνάρτηση $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

4.3.2 Έστω \mathcal{S} ο ημικώνος $x^2 + y^2 = z^2$ με $z > 0$ (βλ. Παράδειγμα 4.1.5). Ορίστε την απεικόνιση f από το ημιεπίπεδο $\{(0, y, z) \mid y > 0\}$ στον \mathcal{S} μέσω της $f(0, y, z) = (y \cos z, y \sin z, y)$. Δείξτε ότι η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση αλλά όχι αμφιδιαφόριση.

4.4 Εφαπτόμενες και παράγωγοι

Ένας φυσικός τρόπος να μελετήσουμε μία επιφάνεια \mathcal{S} είναι μέσω των (λείων) καμπυλών γ της \mathcal{S} . Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του εφαπτόμενου διανύσματος μιας επιφάνειας.

Ορισμός 4.4.1

Ένα *εφαπτόμενο διάνυσμα* μιας επιφάνειας \mathcal{S} στο σημείο $p \in \mathcal{S}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο p μίας καμπύλης της \mathcal{S} που διέρχεται από το p . Ο *εφαπτόμενος χώρος* $T_p\mathcal{S}$ της \mathcal{S} στο p είναι το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων της \mathcal{S} στο σημείο p .

Για να κατανοήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_p\mathcal{S}$, ας επιλέξουμε ένα τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ της \mathcal{S} τέτοιο ώστε το p να βρίσκεται στην εικόνα του σ , έστω $\sigma(u_0, v_0) = p$. Εάν μία καμπύλη γ ανήκει στην \mathcal{S} και διέρχεται από το p όταν π.χ. $t = t_0$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u(t)$ και $v(t)$ τέτοιες ώστε

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \tag{4.2}$$

για κάθε τιμή του t κοντά στο t_0 , και $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$. Οι συναρτήσεις u και v είναι αναγκαστικά λείες (αυτό θα αποδειχθεί στην Ενότητα 5.6). Αντιστρόφως, είναι προφανές ότι εάν η $t \mapsto (u(t), v(t))$ είναι λεία, τότε η Εξ. 4.2 ορίζει μία καμπύλη που ανήκει στην \mathcal{S} .

Πρόταση 4.4.2

Έστω $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα τμήμα επιφάνειας μιας επιφάνειας \mathcal{S} που περιέχει ένα σημείο $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, και έστω (u, v) συντεταγμένες του U . Ο εφαπτόμενος χώρος της \mathcal{S} στο \mathbf{p} είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 που παράγεται από τα διανύσματα σ_u και σ_v (οι παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(u_0, v_0) \in U$ για το οποίο $\sigma(u_0, v_0) = \mathbf{p}$).

Απόδειξη Έστω γ μια λεία καμπύλη της \mathcal{S} , έστω η

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$

Συμβολίζοντας την d/dt με τελεία, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}.$$

Συνεπώς το $\dot{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των σ_u και σ_v . (Ενδεχομένως αξίζει να αναλύσουμε λίγο περισσότερο τι σημαίνει η τελευταία εξίσωση: τα διανύσματα σ_u και σ_v είναι λείες συναρτήσεις των u και v · σε αυτόν τον τύπο αντικαθιστούμε τα u και v με τις συναρτήσεις $u(t)$ και $v(t)$ αντίστοιχα, οπότε το δεξιό μέλος της εξίσωσης γίνεται μια συνάρτηση μόνο του t , και η εξίσωση μας λέει ότι αυτή η συνάρτηση είναι ίση με την $d\gamma/dt$.)

Αντιστρόφως, κάθε διάνυσμα του διανυσματικού υπόχωρου του \mathbb{R}^3 που παράγεται από τα σ_u και σ_v είναι της μορφής $\lambda\sigma_u + \mu\sigma_v$ για κάποιους αριθμούς λ και μ . Αν ορίσουμε ότι

$$\gamma(t) = \sigma(u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t)$$

τότε η γ είναι λεία καμπύλη της \mathcal{S} , και για $t = 0$, δηλαδή στο σημείο $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, έχουμε

$$\dot{\gamma} = \lambda\sigma_u + \mu\sigma_v.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του γραμμικού καλύμματος των σ_u και σ_v είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο \mathbf{p} κάποιας καμπύλης της \mathcal{S} . \square

Αφού υποθέσαμε ότι το σ είναι κανονικό, τα σ_u και σ_v είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, ο εφαπτόμενος χώρος είναι διδιάστατος και στο εξής θα καλείται *εφαπτόμενο επίπεδο*. Παρατηρήστε ότι από τον Ορισμό 4.4.1 προκύπτει ότι το εφαπτόμενο επίπεδο είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του τμήματος που περιέχει το \mathbf{p} , παρότι αυτό δεν είναι άμεσα προφανές από την Πρόταση 4.4.2 (βλ. Άσκηση 4.4.2). Παρατηρήστε επίσης ότι τα διανύσματα σ_u και σ_v που σχηματίζουν μία βάση του εφαπτόμενου επιπέδου σε κάποιο σημείο $\sigma(u_0, v_0)$ της επιφάνειας είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα των *παραμετρικών καμπυλών* της επιφάνειας, δηλαδή των καμπυλών $u \mapsto \sigma(u, v_0)$ και $v \mapsto \sigma(u_0, v)$ (μερικές φορές θα αποκαλούμε αυτές τις καμπύλες «παραμετρικές καμπύλες $u = u_0$ και $v = v_0$ »).

Ας δούμε μία πρώτη εφαρμογή του εφαπτόμενου επιπέδου μιας λείας επιφάνειας, όπου θα εξηγήσουμε τι σημαίνει *παράγωγος* λείας απεικόνισης μεταξύ επιφανειών. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $f : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ είναι μία τέτοια απεικόνιση. Η παράγωγος της f σε ένα σημείο $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ πρέπει να περιγράφει τον τρόπο μεταβολής του σημείου $f(\mathbf{p}) \in \tilde{\mathcal{S}}$ όταν το \mathbf{p} κινείται προς ένα γειτονικό σημείο της \mathcal{S} , έστω προς το \mathbf{q} . Εάν τα σημεία \mathbf{p} και \mathbf{q} είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, η ευθεία που διέρχεται από αυτά θα είναι σχεδόν εφαπτόμενη στην \mathcal{S} στο σημείο \mathbf{p} . Άρα η παράγωγος της f στο σημείο \mathbf{p} θα πρέπει να αντιστοιχίζει σε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της \mathcal{S} στο \mathbf{p} ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της

\tilde{S} στο $f(\mathbf{p})$. Με άλλα λόγια, η παράγωγος της f στο \mathbf{p} πρέπει να είναι μία απεικόνιση $D_{\mathbf{p}}f : T_{\mathbf{p}}\mathcal{S} \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}\tilde{S}$.

Για να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό της $D_{\mathbf{p}}f$, έστω $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}$ ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της \mathcal{S} στο σημείο \mathbf{p} . Εξ ορισμού, το \mathbf{w} είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο \mathbf{p} μίας καμπύλης γ της \mathcal{S} που διέρχεται από το \mathbf{p} , έστω $\mathbf{w} = \dot{\gamma}(t_0)$. Συνεπώς η $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ είναι μια καμπύλη της \tilde{S} που διέρχεται από το $f(\mathbf{p})$ όταν $t = t_0$, άρα $\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\tilde{\gamma}}(t_0) \in T_{f(\mathbf{p})}\tilde{S}$.

Ορισμός 4.4.3

Με χρήση του παραπάνω συμβολισμού, η παράγωγος $D_{\mathbf{p}}f$ της f στο σημείο $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ είναι η απεικόνιση $D_{\mathbf{p}}f : T_{\mathbf{p}}\mathcal{S} \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}\tilde{S}$ για την οποία $D_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{w}}$ για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}$.

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε στο σημείο αυτό είναι να δείξουμε ότι ο ορισμός αυτός έχει νόημα, δηλαδή ότι η $D_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})$ εξαρτάται μόνο από τα f , \mathbf{p} και \mathbf{w} : υπάρχουν πολλές (άπειρες το πλήθος) καμπύλες γ με το σωστό εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{w} στο σημείο \mathbf{p} και *a priori* η $D_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})$ μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης.

Έστω $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα τμήμα επιφάνειας της \mathcal{S} που περιέχει το \mathbf{p} , έστω $\mathbf{p} = \sigma(u_0, v_0)$, και έστω α, β οι λείες συναρτήσεις του U για τις οποίες

$$f(\sigma(u, v)) = \tilde{\sigma}(\alpha(u, v), \beta(u, v)).$$

Έστω $\mathbf{w} = \lambda\sigma_u + \mu\sigma_v$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στο \mathbf{p} της καμπύλης $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, όπου u και v είναι λείες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\dot{u}(t_0) = \lambda$ και $\dot{v}(t_0) = \mu$. Εφόσον η αντίστοιχη καμπύλη της \tilde{S} είναι η $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$, όπου $\tilde{u}(t) = \alpha(u(t), v(t))$ και $\tilde{v}(t) = \beta(u(t), v(t))$, έχουμε

$$D_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) = \dot{\tilde{\sigma}}_{\tilde{u}} + \dot{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}} = (\dot{u}\alpha_u + \dot{v}\alpha_v)\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + (\dot{u}\beta_u + \dot{v}\beta_v)\tilde{\sigma}_{\tilde{v}},$$

όπου οι παράγωγοι των u και v υπολογίζονται στο t_0 . Συνεπώς,

$$D_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) = (\lambda\alpha_u + \mu\beta_u)\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + (\lambda\beta_u + \mu\beta_v)\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}. \quad (4.3)$$

Το δεξιό μέλος εξαρτάται μόνο από τα \mathbf{p} , f , λ και μ , δηλαδή από τα \mathbf{p} , f και \mathbf{w} , όπως επιθυμούσαμε.

Από την Εξ. 4.3 προκύπτει επίσης η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.4.4

Εάν $f : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{S}$ είναι μια λεία απεικόνιση μεταξύ επιφανειών και $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, η παράγωγος $D_{\mathbf{p}}f : T_{\mathbf{p}}\mathcal{S} \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}\tilde{S}$ είναι γραμμική απεικόνιση.

Η Εξ. 4.3 δείχνει ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $D_{\mathbf{p}}f$ ως προς τη βάση $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ του $T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}$ και τη βάση $\{\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\}$ του $T_{f(\mathbf{p})}\tilde{S}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}$$

της λείας απεικόνισης $(u, v) \mapsto (\alpha(u, v), \beta(u, v))$.

Πρόταση 4.4.5

- (i) Εάν \mathcal{S} είναι μια επιφάνεια και $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, η παράγωγος στο \mathbf{p} της ταυτοτικής απεικόνισης $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση $T_{\mathbf{p}}\mathcal{S} \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}$.
- (ii) Εάν $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ και \mathcal{S}_3 είναι επιφάνειες και $f_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ και $f_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$ λείες απεικονίσεις, τότε για κάθε $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_1$,

$$D_{\mathbf{p}}(f_2 \circ f_1) = D_{f_1(\mathbf{p})}f_2 \circ D_{\mathbf{p}}f_1.$$

- (iii) Εάν $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ είναι μια αμφιδιαφόριση, τότε για κάθε $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_1$ η γραμμική απεικόνιση $D_{\mathbf{p}}f : T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}_1 \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}\mathcal{S}_2$ είναι αντιστρέψιμη.

Απόδειξη Το (i) είναι προφανές. Για το (ii), έστω $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}_1$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στο \mathbf{p} μίας καμπύλης γ_1 της \mathcal{S}_1 . Έπεται ότι η $\gamma_2 = f_1 \circ \gamma_1$ είναι καμπύλη της \mathcal{S}_2 με εφαπτόμενο διάνυσμα το $D_{\mathbf{p}}f_1(\mathbf{w})$ στο $f_1(\mathbf{p})$, άρα η $\gamma_3 = f_2 \circ \gamma_2 = (f_2 \circ f_1) \circ \gamma_1$ είναι καμπύλη της \mathcal{S}_3 με εφαπτόμενο διάνυσμα το $D_{f_1(\mathbf{p})}f_2(D_{\mathbf{p}}f_1(\mathbf{w}))$ στο $f_2(f_1(\mathbf{p}))$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ_3 στο \mathbf{p} είναι όμως επίσης το $D_{\mathbf{p}}(f_2 \circ f_1)(\mathbf{w})$.

Τέλος, για το (iii), έστω $g : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ η αντίστροφη απεικόνιση της f , έτσι ώστε οι $g \circ f$ και $f \circ g$ να είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις $\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ και $\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$, αντίστοιχα. Από τα (i) και (ii) προκύπτει ότι η $D_{f(\mathbf{p})}g$ είναι η αντίστροφη της γραμμικής απεικόνισης $D_{\mathbf{p}}f$. \square

Μπορούμε πλέον να δώσουμε ένα απλό κριτήριο που μας λέει πότε μία λεία απεικόνιση είναι τοπική αμφιδιαφόριση.

Πρόταση 4.4.6

Αν \mathcal{S} και $\tilde{\mathcal{S}}$ είναι επιφάνειες και $f : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ μια λεία απεικόνιση, τότε η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση αν και μόνο αν, για κάθε $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, η γραμμική απεικόνιση $D_{\mathbf{p}}f : T_{\mathbf{p}}\mathcal{S} \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}\tilde{\mathcal{S}}$ είναι αντιστρέψιμη.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση και έστω $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο \mathcal{O} της \mathcal{S} που περιέχει το \mathbf{p} τέτοιο ώστε το $f(\mathcal{O})$ να είναι ανοικτό υποσύνολο της $\tilde{\mathcal{S}}$ και η $f|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow f(\mathcal{O})$ να είναι αμφιδιαφόριση. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.4.5(iii), η $D_{\mathbf{p}}f$ είναι αντιστρέψιμη (παρατηρήστε ότι προφανώς $T_{\mathbf{p}}\mathcal{S} = T_{\mathbf{p}}\mathcal{O}$).

Η απόδειξη του ευθέως μέρους του ισχυρισμού απαιτεί το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης και θα δοθεί στην Ενότητα 5.6. \square

Ασκήσεις

4.4.1 Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου των παρακάτω τμημάτων επιφάνειας στα υποδεικνυόμενα σημεία:

(i) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, $(1, 1, 0)$.

(ii) $\sigma(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2)$, $(1, 0, 1)$.

- 4.4.2 Δείξτε ότι, εάν $\sigma(u, v)$ είναι ένα τμήμα επιφάνειας, τότε το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των σ_u και σ_v παραμένει αναλλοίωτο αν αναπαραμετρηθεί το σ .
- 4.4.3 Έστω S μια επιφάνεια, $p \in S$ και $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow R$ μια λεία συνάρτηση. Έστω $\nabla_S F$ η κάθετη προβολή της κλίσης $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ της F επί του $T_p S$. Δείξτε ότι, εάν γ είναι τυχούσα καμπύλη της S που διέρχεται από το p όταν έστω $t = t_0$, τότε

$$(\nabla_S F) \cdot \dot{\gamma}(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} F(\gamma(t)).$$

Συμπεράνετε ότι $\nabla_S F = \mathbf{0}$ εάν ο περιορισμός της F στην S έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο p .

- 4.4.4 Έστω $f : S_1 \rightarrow S_2$ μια τοπική αμφιδιαφορία και γ μια κανονική καμπύλη της S_1 . Δείξτε ότι η $f \circ \gamma$ είναι κανονική καμπύλη της S_2 .

4.5 Κάθετα διανύσματα και προσανατολισσιμότητα

Αφού το εφαπτόμενο επίπεδο $T_p S$ μίας επιφάνειας σε ένα σημείο $p \in S$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων του \mathbb{R}^3 , το εφαπτόμενο επίπεδο καθορίζεται πλήρως αν δοθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε αυτό, το οποίο καλείται *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα* της S στο σημείο p . Ασφαλώς, υπάρχουν δύο τέτοια διανύσματα, σύμφωνα όμως με την Πρόταση 4.4.2, αν επιλέξουμε ένα τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ που περιέχει το p , οδηγούμαστε σε μια ορισμένη επιλογή, συγκεκριμένα στο διάνυσμα

$$N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \quad (4.4)$$

(όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο του U που αντιστοιχεί στο p), διότι αυτό είναι προφανώς ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε κάθε γραμμικό συνδυασμό των σ_u και σ_v . Το διάνυσμα N_σ ονομάζεται *πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα*⁹ διάνυσμα του τμήματος επιφάνειας σ στο p . Σε αντίθεση όμως με το εφαπτόμενο επίπεδο, το N_σ δεν είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του τμήματος σ που περιέχει το p . Μάλιστα, αν $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ένα άλλο τμήμα επιφάνειας του άτλαντα της σ που περιέχει το p , στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.7 δείξαμε ότι

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \det(J(\Phi))\sigma_u \times \sigma_v,$$

όπου $J(\Phi)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης μετάβασης Φ από το σ στο $\tilde{\sigma}$. Επομένως το πρότυπο μοναδιαίο κάθετο του $\tilde{\sigma}$ είναι το

$$N_{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\|} = \pm \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \pm N_\sigma,$$

όπου το πρόσημο είναι το ίδιο με το πρόσημο της ορίζουσας του $J(\Phi)$. Οδηγούμαστε λοιπόν στον ακόλουθο ορισμό.

⁹Σ.τ.Μ. Ο αγγλικός όρος είναι standard unit normal.

Ορισμός 4.5.1

Μία επιφάνεια S είναι *προσανατολίσιμη* εάν υπάρχει ένας άτλας \mathcal{A} της S με την εξής ιδιότητα: εάν Φ είναι η απεικόνιση μετάβασης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε τμημάτων επιφάνειας του \mathcal{A} , τότε $\det(J(\Phi)) > 0$ όπου ορίζεται η Φ .

Από την ανάλυση που προηγήθηκε συνάγουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.5.2

Αν S είναι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια εφοδιασμένη με έναν άτλαντα \mathcal{A} όπως στον Ορισμό 4.5.1, τότε υπάρχει μία λεία επιλογή για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της S : επιλέγουμε το πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα οποιουδήποτε τμήματος επιφάνειας του \mathcal{A} .

Μία *προσανατολισμένη επιφάνεια* είναι μία επιφάνεια S μαζί με μία λεία επιλογή για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα N σε κάθε σημείο, δηλαδή μία λεία απεικόνιση $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ (με την έννοια ότι καθεμία από τις τρεις συνιστώσες του N είναι μια λεία συνάρτηση $S \rightarrow \mathbb{R}$) τέτοια ώστε, για κάθε $p \in S$, το $N(p)$ να είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $T_p S$. Κάθε προσανατολισμένη επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη! Για να το αποδείξουμε ξεκινάμε από τον μεγιστικό άτλαντα της S και κρατάμε το τμήμα επιφάνειας $\sigma(u, v)$ εάν το $\sigma_u \times \sigma_v$ είναι θετικό πολλαπλάσιο του N σε όλα τα σημεία της εικόνας της S , ειδάλλως το απορρίπτουμε. Τα τμήματα επιφάνειας που απομένουν σχηματίζουν έναν άτλαντα που ικανοποιεί τη συνθήκη του Ορισμού 4.5.1. Αφήνουμε τις λεπτομέρειες της απόδειξης στον αναγνώστη (ο συλλογισμός είναι παρόμοιος με αυτόν που χρησιμοποιείται στο παράδειγμα που ακολουθεί). Από εδώ και στο εξής, *όποτε μελετάμε μία προσανατολισμένη επιφάνεια S , θα χρησιμοποιούμε μόνο τμήματα επιφάνειας της S των οποίων το πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι το ίδιο με το επιλεγμένο κάθετο διάνυσμα της S .*

Οι περισσότερες από τις επιφάνειες που θα εξετάσουμε είναι προσανατολίσιμες. Παράθετουμε αμέσως ένα παράδειγμα μίας που δεν είναι.

Παράδειγμα 4.5.3

Η *λωρίδα του Möbius* είναι η επιφάνεια που λαμβάνουμε περιστρέφοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα l γύρω από το μέσον του p , ενόσω το p κινείται γύρω από έναν κύκλο C με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν το p ολοκληρώνει μια περιστροφή πάνω στον C , το l να ολοκληρώνει μία ημιπεριστροφή γύρω από το p . Εάν επιλέξουμε ως C τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ του επιπέδου xy , και ως l ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 που αρχικά είναι παράλληλο στον άξονα z και έχει μέσον $p = (1, 0, 0)$, τότε όταν το p θα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα z , το l θα πρέπει να έχει περιστραφεί κατά γωνία $\theta/2$ γύρω από το p στο επίπεδο που περιέχει το p και τον άξονα z . Το σημείο του l που βρισκόταν αρχικά στο $(1, 0, t)$ βρίσκεται τότε στο σημείο

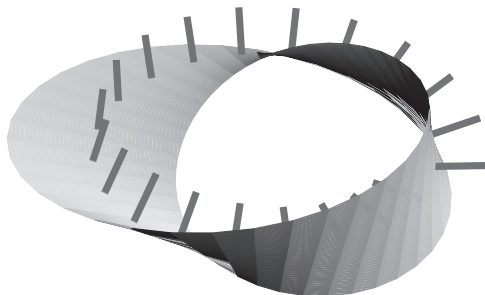
$$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

Παίρνουμε ως πεδίο ορισμού του σ το

$$U = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα δεύτερο τμήμα επιφάνειας $\tilde{\sigma}$ χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο

όπως για το σ αλλά με πεδίο ορισμού το $\tilde{U} = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, -\pi < \theta < \pi\}$. Όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί, τα δύο αυτά τμήματα επιφάνειας σχηματίζουν έναν άτλαντα της λωρίδας του Möbius που αποτελείται από κανονικά τμήματα επιφάνειας. Ο άτλας αυτός εφοδιάζει τη λωρίδα του Möbius με τη δομή μιας λείας επιφάνειας \mathcal{S} (βλ. Άσκηση 4.5.1).



Σχήμα 4.14. Η λωρίδα του Möbius.

Υπολογίζουμε το πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα N_σ στα σημεία του διάμεσου κύκλου (όπου $t = 0$). Σε αυτά τα σημεία έχουμε

$$\sigma_t = \left(-\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad \sigma_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

συνεπώς

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Το διάνυσμα αυτό είναι μοναδιαίο, άρα είναι ίσο με το N_σ .

Εάν η λωρίδα του Möbius ήταν προσανατολίσιμη θα υπήρχε ένα καλά ορισμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα N σε κάθε σημείο της \mathcal{S} που θα μεταβαλλόταν με λείο τρόπο επάνω στην \mathcal{S} . Στην περίπτωση αυτή, σε ένα σημείο $\sigma(0, \theta)$ του διαμέσου κύκλου, θα είχαμε

$$N = \lambda(\theta)N_\sigma,$$

όπου η $\lambda : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία και $\lambda(\theta) = \pm 1$ για κάθε θ . Έπεται ότι είτε $\lambda(\theta) = +1$ για κάθε $\theta \in (0, 2\pi)$, είτε $\lambda(\theta) = -1$ για κάθε $\theta \in (0, 2\pi)$. Αντικαθιστώντας το N με το $-N$ αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$. Στο σημείο $\sigma(0, 0) = \sigma(0, 2\pi)$ θα είχαμε (αφού το N είναι λείο)

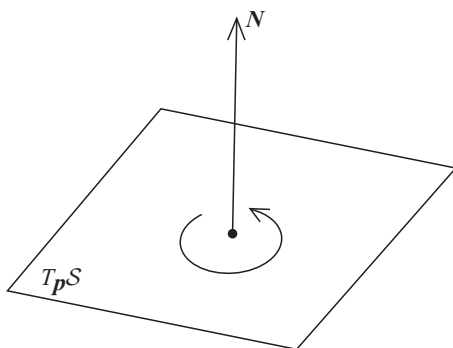
$$N = \lim_{\theta \downarrow 0} N_\sigma = (-1, 0, 0) \quad \text{και επίσης} \quad N = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} N_\sigma = (1, 0, 0).$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα η λωρίδα του Möbius δεν είναι προσανατολίσιμη.

Εάν μια επιφάνεια \mathcal{S} είναι προσανατολισμένη, είναι δυνατό να δώσουμε ένα πρόσημο στη γωνία δύο εφαπτόμενων διανυσμάτων σε ένα σημείο της \mathcal{S} . Αυτό θα αποδειχθεί σημαντικό σε αρκετές περιπτώσεις στη συνέχεια του βιβλίου.

Έστω $p \in \mathcal{S}$ και έστω N το επιλεγμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο p . Λέμε ότι μία περιστροφή ως προς το εφαπτόμενο επίπεδο $T_p\mathcal{S}$ γίνεται κατά τη θετική

ή κατά την αντιωρολόγια φορά, εάν όταν περιστρέφουμε κατ' αυτήν τη φορά ένα δεξιόστροφο κατσαβίδι το οποίο κρατάμε κάθετα στο $T_p\mathcal{S}$, αυτό κινείται κατά την κατεύθυνση του N . Με άλλα λόγια, η επιλογή του N μας επιτρέπει να διακρίνουμε τις δύο «πλευρές» του $T_p\mathcal{S}$: η «θετική» πλευρά είναι ο ημιχώρος προς τον οποίο δείχνει το N . Επομένως, αν κοιτάζουμε το $T_p\mathcal{S}$ από ένα σημείο της θετικής πλευράς, μία θετική περιστροφή ως προς το $T_p\mathcal{S}$ θα φαίνεται ότι γίνεται κατά την αντιωρολόγια φορά με τη συνήθη έννοια.



Σχήμα 4.15. Εύρεση του προσανατολισμού.

Εάν v και w είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του $T_p\mathcal{S}$, η *προσανατολισμένη γωνία* (την οποία μερικές φορές θα αποκαλούμε απλώς γωνία) των v και w είναι η γωνία κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το v κατά τη θετική φορά, ώστε το διάνυσμα που θα προκύψει να είναι θετικό αριθμητικό πολλαπλάσιο του w . Θα συμβολίζουμε τη γωνία αυτή με \widehat{vw} . Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{wv} = -\widehat{vw},$$

και ότι το πρόσημο της \widehat{vw} θα αλλάξει αν αλλάξουμε την επιλογή του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος του $T_p\mathcal{S}$. Παρατηρήστε επίσης ότι η \widehat{vw} ορίζεται μόνο με προσέγγιση πρόσθεσης ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π .

Παράδειγμα 4.5.4

Είναι φανερό ότι σε ένα σημείο $p \in S^2$ το εφαπτόμενο επίπεδο είναι κάθετο στο p . Εφόσον το p είναι μοναδιαίο διάνυσμα, τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο σημείο p είναι το p , το «εξωφερές» κάθετο διάνυσμα, και το $-p$, το «εσωφερές» κάθετο διάνυσμα. Υπάρχουν δύο λείες επιλογές για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S^2 : είτε πάντοτε του εσωφερούς είτε πάντοτε του εξωφερούς.

Για παράδειγμα, ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι, εάν πάρουμε το εσωφερές κάθετο διάνυσμα και εάν p είναι το σημείο $(1, 0, 0)$ του ισημερινού, η προσανατολισμένη γωνία των εφαπτόμενων διανυσμάτων $v = (0, 1, 0)$ και $w = (0, 0, 1)$ είναι $\widehat{vw} = -\pi/2$ (ή $3\pi/2, 7\pi/2$ κλπ.). Εάν αντ' αυτού χρησιμοποιούσαμε το εξωφερές κάθετο διάνυσμα, η προσανατολισμένη γωνία θα άλλαζε πρόσημο.

Ασκήσεις

- 4.5.1 Υπολογίστε την απεικόνιση μετάβασης Φ μεταξύ των δύο τμημάτων επιφάνειας της λωρίδας του Möbius του Παραδείγματος 4.5.3. Δείξτε ότι το πεδίο ορισμού της είναι η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους ορθογωνίων του \mathbb{R}^2 , και ότι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα της Φ ισούται με $+1$ στο ένα ορθογώνιο και με -1 στο άλλο.
- 4.5.2 Υποθέστε ότι δύο λείες επιφάνειες \mathcal{S} και $\tilde{\mathcal{S}}$ είναι αμφιδιαφορικές και ότι η \mathcal{S} είναι προσανατολίσιμη. Αποδείξτε ότι η $\tilde{\mathcal{S}}$ είναι προσανατολίσιμη.

Παράρτημα 3

Υποδείξεις για επιλεγμένες ασκήσεις

- 1.1.6 Παραμετρήστε την έλλειψη ως εξής: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (p \cos t, q \sin t)$. Για το (i) δείξτε ότι οι ζητούμενες αποστάσεις είναι $p(1 \pm \epsilon \cos t)$. Για το (ii) δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{n} = (q \cos t, p \sin t)$ είναι κάθετο στην εφαπτόμενη ευθεία στο $\boldsymbol{\gamma}(t)$ και ότι οι ζητούμενες αποστάσεις είναι $|(\mathbf{p} - \mathbf{f}_1) \cdot \mathbf{n}|/\|\mathbf{n}\|$ και $|(\mathbf{p} - \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{n}|/\|\mathbf{n}\|$.
- 1.2.3 Για το τελευταίο μέρος δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2.
- 1.4.5 (ii) Η ακολουθία του (i) συγκλίνει σε κάποιο όριο $T_\infty \geq 0$ και η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T_∞ -περιοδική. Θεωρήστε την ακολουθία $\{T_r - T_\infty\}$. (iii) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής.
- 1.4.6 Έστω ότι $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Κάθε γ_i είναι T -περιοδική, οπότε, σύμφωνα με την Άσκηση 1.4.5, εάν η γ_i δεν είναι σταθερή, έχει μία (θετική) περίοδο, έστω T_i . Σύμφωνα με την Άσκηση 1.4.4, εάν η γ_i δεν είναι σταθερή, τότε $T = k_i T_i$ για κάποιον θετικό ακέραιο k_i . Έστω k ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος που διαιρεί καθέναν από τους ακραίους k_i . Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κλειστή με περίοδο $T_0 = T/k$.
- 1.5.2 Για να μαντέψετε την ανάλογη συνθήκη του Θεωρήματος 1.5.1 για την f δείξτε ότι το $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$ και στη συνέχεια σκεφτείτε υπό ποια συνθήκη δύο επίπεδα τέμνονται κατά μια ευθεία. Για μία αυστηρή πραγμάτευση δείτε την Ενότητα 5.6.
- 1.5.3 Εύκολο.
- 2.2.3 Αρκεί να δείξετε ότι η κ_S αλλάζει πρόσημο όταν η καμπύλη ανακλάται ως προς μια ευθεία.
- 2.2.10 Φανταστείτε την εφαπτόμενη ευθεία της $\boldsymbol{\gamma}$ σε ένα σημείο $\boldsymbol{\gamma}(s)$ σαν σταθερά προσαρτημένη στην $\boldsymbol{\gamma}$. Όταν η $\boldsymbol{\gamma}$ έχει διανύσει κυλώντας απόσταση s , το σημείο που ήταν αρχικά στο $\boldsymbol{\gamma}(s)$ έχει μετακινηθεί στο σημείο $\mathbf{p} + s\mathbf{a}$ της ℓ , ενώ η εφαπτόμενη ευθεία της $\boldsymbol{\gamma}$ στο $\boldsymbol{\gamma}(s)$ έχει γίνει η ℓ . Για το δεύτερο μέρος παρατηρήστε ότι $\rho_{-\theta(s)}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)) = \mathbf{a}$. Δείξτε ότι:
- (i) Εάν S είναι ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας (δηλαδή αν ο $-S$ ισούται με τον ανάστροφο S^t του S) και \mathbf{v} ένας $n \times 1$ πίνακας-στήλη, τότε $\mathbf{v}^t S \mathbf{v} = 0$.

- (ii) Εάν A είναι ένας ορθογώνιος πίνακας (δηλαδή αν $A^t A = I$) με στοιχεία λείες συναρτήσεις της παραμέτρου s , τότε ο $A^t \frac{dA}{ds}$ είναι αντισυμμετρικός (τα στοιχεία του dA/ds είναι οι παράγωγοι των στοιχείων του A).
- 2.3.2 Παρατηρήστε ότι αρκεί να βρούμε μία καμπύλη με καμπυλότητα κ και στρέψη τ .
- 2.3.3 Υποθέστε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαία ταχύτητας και δείξτε ότι $\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta$.
- 2.3.4 Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ ανήκει σε σφαίρα κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας r , τότε $(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}) = r^2$ στη συνέχεια παραγωγίστε κατ' επανάληψη. Για το αντίστροφο θεωρήστε την $\boldsymbol{\gamma} + \rho \mathbf{n} + \rho \sigma \mathbf{b}$.
- 2.3.6 Βρείτε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που να ικανοποιείται από τα βαθμωτά γινόμενα $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ένα τέτοιο σύστημα έχει μοναδική λύση με δοθείσες αρχικές συνθήκες.
- 3.2.1 Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του Παραρτήματος 1.
- 3.3.1 Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.
- 4.1.4 Για το πρώτο μέρος πάρτε ως U έναν δακτύλιο.
- 5.2.3 Για το πρώτο μέρος παραμετρήστε την ευθεία ως εξής: $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Στη συνέχεια παρατηρήστε ότι με αντικατάσταση στην Εξ. 5.1 προκύπτει μία τετραγωνική εξίσωση του t . Για το δεύτερο μέρος πάρτε τρία σημεία σε κάθε ευθεία και δείξτε ότι υπάρχει μια τετραγωνική που διέρχεται και από τα εννέα σημεία.
- 5.6.1 Ακολουθήστε την απόδειξη της Πρότασης 4.2.6.
- 5.6.4 Εάν $\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, δείξτε ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Ακολουθήστε την απόδειξη της Πρότασης 4.2.6 για να πάρετε δύο ανοικτά σύνολα V και W και μια λεία συνάρτηση $F^{-1}: V \rightarrow W$ τέτοια ώστε $F^{-1}(f(u, v), g(u, v)) = (u, v)$ για κάθε $(u, v) \in W$. Θέστε $\varphi(x, y) = h(F^{-1}(x, y))$.
- 6.1.5 Το μήκος της πλευράς που δίνεται από την $u = u_0$ είναι $\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_0, v)} dv$.
- 6.3.8 Χρησιμοποιήστε την Πρόταση Π.2.5.
- 6.4.3 Επιλέξτε ένα σημείο εντός του πολυγώνου και συνδέστε το με κάθε κορυφή με ένα τόξο μέγιστου κύκλου.
- 6.5.3 Αρκεί να το αποδείξετε για την περίπτωση όπου το \mathbf{p} είναι ο βόρειος πόλος.
- 6.5.4 Ονομάστε έναν μοναδιακό μετασχηματισμό Möbius ορισμένο όπως στο (i) ειδικό εάν $b \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι κάθε μοναδιακός μετασχηματισμός Möbius είναι σύνθεση ειδικών μοναδιακών μετασχηματισμών Möbius.
- 7.1.2 Συνδυάζοντας εκφράσεις όπως η $(\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \mathbf{N})_u$, αποδείξτε ότι τα N_u και N_v είναι κάθετα στα $\boldsymbol{\sigma}_u$ και $\boldsymbol{\sigma}_v$, και συμπεράνετε ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{N} του $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σταθερό διάνυσμα.
- 7.3.4 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.4.7.
- 7.4.3 Χρησιμοποιήστε το Παράδειγμα 7.4.7.
- 8.1.6 Κάθε 2×2 πίνακας
- $$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
- ικανοποιεί την εξίσωση $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$.
- 8.1.8 Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.6.
- 8.2.3 Ασχοληθείτε ξεχωριστά με τις περιπτώσεις όπου $EN = GL$ και $EN \neq GL$.

8.2.5 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.2.2.

8.2.6 (i) Παραγωγίστε τις Εξ. 8.5.

8.2.7 Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 8.1.2, τα σχόλια που ακολουθούν την Πρόταση 8.2.1 και τη λύση της Άσκησης 8.1.1.

8.2.8 Χρησιμοποιήστε τις Ασκήσεις 6.1.4 και 7.1.3.

8.3.1 Για το (iii) χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες στον δίσκο.

8.4.1 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 8.2.4 και τις Προτάσεις 7.3.3 και 8.4.3.

8.5.2 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.1.1.

8.5.3 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.2.4 και την απόδειξη της Πρότασης 8.1.2.

9.1.1 Χρησιμοποιήστε τις Προτάσεις 9.1.4 και 9.1.6.

9.1.3 Χρησιμοποιήστε τη λύση της Άσκησης 4.2.7.

9.1.4 Πάρτε ως ελλειψοειδές το

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

και παρατηρήστε ότι η $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν

$$(\ddot{f}, \ddot{g}, \ddot{h}) = \lambda \left(\frac{f}{p^2}, \frac{g}{q^2}, \frac{h}{r^2} \right)$$

για κάποιον αριθμό $\lambda(t)$.

9.1.5 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.2.2.

9.2.2 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.2.1.

9.3.3 Η συνθήκη για την ύπαρξη μιας αυτοτομής είναι, για κάποια τιμή του $w > 1$, οι δύο τιμές του v που ικανοποιούν την Εξ. 9.14 να διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π .

9.4.2 Θεωρήστε την τομή της S^2 με τα επίπεδα που διέρχονται από τα p και q .

9.4.3 (i) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του L'Hospital.

9.5.2 (ii) Εάν η γ αφήνει το σ , πρέπει να τέμνεται με τον γεωδαισιακό κύκλο κέντρου p και ακτίνας R , έστω στο q' . Έπεται ότι το μήκος της είναι μεγαλύτερο από εκείνο του τμήματος της γ ανάμεσα στα p και q' .

10.1.1 Υπολογίστε τον πίνακα της απεικόνισης Weingarten.

10.1.3 Για να λύσετε τη διαφορική εξίσωση θέστε $P = Lw^2$.

10.2.2 Χρησιμοποιήστε τις Ασκήσεις 6.1.4 και 9.5.1.

10.2.4 Χρησιμοποιήστε τις γεωδαισιακές εξισώσεις, την Άσκηση 9.5.1 και το Πόρισμα 10.2.3(ii).

10.3.1 Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.3.4, εάν η κ_1 έχει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο p της επιφάνειας, τότε η $\kappa_2 = 2H - \kappa_1$ έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο αυτό.

10.4.2 Θεωρήστε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.4.3 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 9.2.1.

11.1.4 Για το πρώτο μέρος χρησιμοποιήστε τις Προτάσεις 11.1.4 και Π.2.3. Για το δεύτερο παρατηρήστε ότι $2R$ είναι η υπερβολική απόσταση των $i(b+r)$ και $i(b-r)$, κλπ.

11.2.1 Αρκεί να θεωρήσετε την περίπτωση όπου τα a και b ανήκουν στον φανταστικό άξονα.

11.2.2 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 11.1.1.

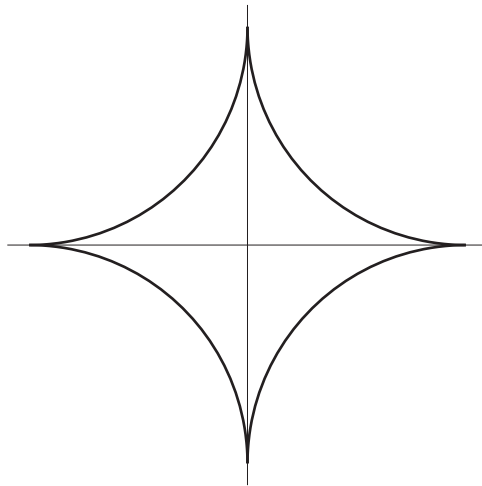
- 11.2.3 Αναγάγετε το πρόβλημα στην περίπτωση όπου η l είναι ο φανταστικός άξονας και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 11.1.3.
- 11.2.4 (i) Εάν P είναι τυχόν σημείο του \mathcal{H} , θεωρήστε τις υπερβολικές ευθείες που διέρχονται από το P και είναι κάθετες στις l και m . (iii) Έστω ότι οι l και m είναι όπως στην Άσκηση 11.2.3, και έστω F τυχούσα ισομετρία του \mathcal{H} . Από την απόδειξη της Πρότασης 11.2.3 προκύπτει ότι υπάρχει μία σύνθεση στοιχειωδών ισομετριών G που απεικονίζει το $F(i)$ στο i και την $F(l)$ στην l . Κατόπιν χρησιμοποιήστε το (ii).
- 11.2.5 Ακολουθήστε την απόδειξη της Πρότασης Π.2.2.
- 11.3.2 Λάβετε υπόψη τη λύση της Άσκησης 11.2.4.
- 11.3.3 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 11.2.5.
- 11.3.4 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 11.2.5.
- 11.3.6 Αποδείξτε το πρώτα για ένα ορθογώνιο τρίγωνο εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων με δύο διαφορετικούς τρόπους. Κατόπιν συναγάγετε τη γενική περίπτωση φέρνοντας τη γεωδαισιακή που διέρχεται από το a και τέμνει κάθετα τη γεωδαισιακή που διέρχεται από τα b και c —θα χρειαστεί να εξετάσετε ξεχωριστά την περίπτωση όπου το σημείο τομής βρίσκεται μεταξύ των b και c , και την περίπτωση όπου δεν βρίσκεται μεταξύ τους.
- 11.3.8 Ασχοληθείτε πρώτα με την περίπτωση του ορθογωνίου χρησιμοποιώντας την Άσκηση 11.3.7 και στη συνέχεια προχωρήστε όπως στην Άσκηση 11.3.6.
- 11.4.2 Εργαστείτε στο \mathcal{H} και υποθέστε ότι l είναι ο φανταστικός άξονας.
- 11.4.3 Εργαστείτε στο \mathcal{D}_P και υποθέστε ότι $a = 0, b \in \mathbb{R}$.
- 11.5.3 Για την ύπαρξη παρατηρήστε ότι ο $M(z) = (a, b; c, z)$ είναι ένας μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το (a, b, c) στο $(\infty, 0, 1)$. Για τη μοναδικότητα παρατηρήστε ότι αν ο M είναι ένας μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το (a, b, c) στο $(\infty, 0, 1)$, τότε $M(z) = (\infty, 0; 1, M(z)) = (a, b; c, z)$.
- 12.1.1 Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 8.2.9.
- 12.1.3 Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 8.6.1 και την Άσκηση 12.1.1.
- 12.2.4 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.5.1.
- 12.3.1 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.1.6 και την Πρόταση 8.2.9.
- 12.5.1 Αναπαραμετρήστε θέτοντας $\zeta = e^{\tilde{\zeta}}$.
- 12.5.3 (ii) Χρησιμοποιήστε την αναπαράσταση Weierstrass και δείτε τις Εξ. 12.25 και 12.26.
- 13.1.2 Για το τελευταίο μέρος χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 13.1.2.
- 13.3.2 Ορίστε τις $\psi_k(t) = \psi(nt - k)$, όπου ψ είναι η συνάρτηση που ορίζεται στην Άσκηση 8.5.3(iii) και θέστε $\varphi_k = \psi_k / (\psi_1 + \dots + \psi_{n-1})$.
- 13.5.2 $E \leq \frac{1}{2}V(V - 1)$.
- 13.7.1 Πάρτε ως γ στον Ορισμό 13.7.2 τον μοναδιαίο κύκλο και χρησιμοποιήστε το θεώρημα του de Moivre.
- 13.7.3 Εάν $\tilde{\xi}$ είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο αναφοράς και θ είναι η γωνία των $\tilde{\xi}$ και ξ , τότε $d\theta/ds = -(1 - \rho^2)^{-1/2}\dot{\rho}$, όπου $\rho = \cos \theta$. Κατόπιν χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green για να δείξετε ότι $\int_0^{\ell(\gamma)} (d\theta/ds) ds = 0$.
- 13.8.1 Δείξτε ότι το κρίσιμο σημείο είναι τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο) αν και μόνο αν $\mathbf{v}^t \mathcal{H} \mathbf{v} < 0$ (αντίστοιχα > 0) για κάθε μη μηδενικό 2×1 πίνακα \mathbf{v} .

Παράρτημα 4

Λύσεις των ασκήσεων

Κεφάλαιο 1

- 1.1.1 Είναι παραμέτρηση του τμήματος της παραβολής με $x \geq 0$.
- 1.1.2 (i) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t)$ με $-\pi/2 < t < \pi/2$ και $\pi/2 < t < 3\pi/2$. Παρατηρήστε ότι το πεδίο ορισμού της γ είναι η ένωση δύο ξένων διαστημάτων: αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο τμήματα, το ένα για $y \geq 1$ και το άλλο για $y \leq -1$.
(ii) $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$.
- 1.1.3 (i) $x + y = 1$. (ii) $y = (\ln x)^2$.
- 1.1.4 (i) $\dot{\gamma}(t) = \sin 2t(-1, 1)$. (ii) $\dot{\gamma}(t) = (e^t, 2t)$.



Σχήμα Π4.1.

1.1.5 Το $\dot{\gamma}(t) = 3 \sin t \cos t (-\cos t, \sin t)$ μηδενίζεται όταν $\sin t = 0$ ή $\cos t = 0$, δηλαδή όταν $t = n\pi/2$ όπου n είναι ένας ακέραιος. Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις τέσσερις ακίδες του αστροειδούς (Σχήμα Π4.1) (βλ. Άσκηση 1.3.3).

1.1.6 (i) Τα τετράγωνα των αποστάσεων του p από τις εστίες είναι $(p \cos t \pm \epsilon p)^2 + q^2 \sin^2 t = (p^2 - q^2) \cos^2 t \pm 2\epsilon p^2 \cos t + p^2 = p^2(1 \pm \epsilon \cos t)^2$, άρα το άθροισμα των αποστάσεων είναι $2p$.

(ii) $\dot{\gamma} = (-p \sin t, q \cos t)$, άρα εάν $n = (q \cos t, p \sin t)$ τότε $n \cdot \dot{\gamma} = 0$. Άρα οι αποστάσεις των εστιών από την εφαπτόμενη ευθεία στο $\gamma(t)$ είναι

$$\frac{(p \cos t \mp \epsilon p, q \sin t) \cdot n}{\|n\|} = \frac{pq(1 \mp \epsilon \cos t)}{(p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t)^{1/2}}$$

και το γινόμενο τους είναι

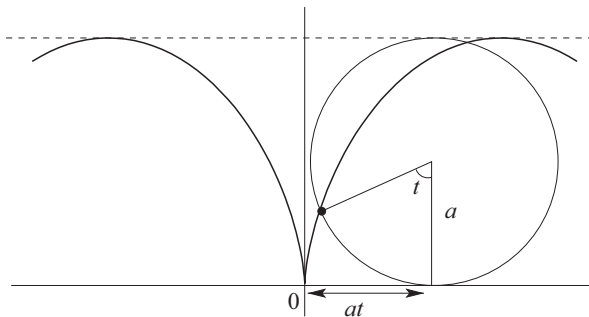
$$\frac{p^2 q^2 (1 - \epsilon^2 \cos^2 t)}{(p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t)} = q^2.$$

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(p - f_1) \cdot n}{\|p - f_1\|} = \frac{(p - f_2) \cdot n}{\|p - f_2\|}.$$

Με πράξεις προκύπτει ότι και τα δύο μέλη είναι ίσα με q .

1.1.7 Αν ο κύκλος περιστραφεί κατά γωνία t , το κέντρο του μετακινείται στο (at, a) , οπότε το σημείο του κύκλου που βρισκόταν αρχικά στο $(0, 0)$ βρίσκεται πλέον στο σημείο $(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ (Σχήμα Π4.2).



Σχήμα Π4.2.

1.1.8 Υποθέστε ότι ένα σημείο (x, y, z) ανήκει στον κύλινδρο αν $x^2 + y^2 = 1/4$ και στη σφαίρα αν $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1$. Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $-1 \leq z \leq 1$, οπότε έστω ότι $z = \sin t$. Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε $x + \frac{1}{4} + \sin^2 t = \frac{3}{4}$, άρα $x = \frac{1}{2} - \sin^2 t = \cos^2 t - \frac{1}{2}$. Από οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις παίρνουμε $y = \sin t \cos t$ (ή $y = -\sin t \cos t$, αλλά η μια εξίσωση προκύπτει από την άλλη μέσω του μετασχηματισμού $t \mapsto \pi - t$).

1.1.9 $\dot{\gamma} = (-2 \sin t + 2 \sin 2t, 2 \cos t - 2 \cos 2t) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1, 1)$ στο $t = \pi/4$. Άρα η εφαπτόμενη ευθεία είναι η $y - (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) = (x - \sqrt{2})/(\sqrt{2} - 1)$ και η κάθετη ευθεία $y - (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) = -(x - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$.

1.2.1 $\dot{\gamma}(t) = (1, \sinh t)$, άρα $\|\dot{\gamma}\| = \cosh t$ και το μήκος τόξου είναι $s = \int_0^t \cosh u du = \sinh t$.

$$1.2.2 \text{ (i) } \|\dot{\boldsymbol{y}}\|^2 = \frac{1}{4}(1+t) + \frac{1}{4}(1-t) + \frac{1}{2} = 1. \text{ (ii) } \|\dot{\boldsymbol{y}}\|^2 = \frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

1.2.3 Συμβολίζοντας την $d/d\theta$ με τελεία, έχουμε $\dot{\boldsymbol{y}} = (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta)$, άρα $\|\dot{\boldsymbol{y}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2$. Επομένως η \boldsymbol{y} είναι κανονική εκτός εάν $r = \dot{r} = 0$ για κάποια τιμή του θ . Είναι μοναδιαίας ταχύτητας αν και μόνο αν $\dot{r}^2 = 1 - r^2$, απ' όπου προκύπτει ότι $r = \pm \sin(\theta + \alpha)$ για κάποια σταθερά α . Για να διαπιστώσετε ότι αυτή είναι η εξίσωση ενός κύκλου ακτίνας $1/2$, δείτε το Σχήμα 3.3.

1.2.4 Αφού το \boldsymbol{u} είναι μοναδιαίο, έχουμε $|\dot{\boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{u}| = \|\dot{\boldsymbol{y}}\| \cos \theta$, όπου θ είναι η γωνία των $\dot{\boldsymbol{y}}$ και \boldsymbol{u} , άρα $\dot{\boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{u} \leq \|\dot{\boldsymbol{y}}\|$. Επομένως

$$(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{y}(b) - \boldsymbol{y}(a)) \cdot \boldsymbol{u} = \int_a^b \dot{\boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{u} dt \leq \int_a^b \|\dot{\boldsymbol{y}}\| dt.$$

Παίρνοντας $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})/\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\|$ καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

1.3.1 (i) Το $\dot{\boldsymbol{y}} = \sin 2t(-1, 1)$ μηδενίζεται όταν το t είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi/2$, άρα η \boldsymbol{y} δεν είναι κανονική. (ii) Η \boldsymbol{y} είναι κανονική, αφού $\dot{\boldsymbol{y}} \neq \mathbf{0}$ για $0 < t < \pi/2$. (iii) Το $\dot{\boldsymbol{y}} = (1, \sinh t)$ προφανώς δεν είναι ποτέ μηδενικό, άρα η \boldsymbol{y} είναι κανονική.

1.3.2 Έχουμε $x = r \cos \theta = \sin^2 \theta$ και $y = r \sin \theta = \sin^2 \theta \tan \theta$, άρα η παραμέτρηση συναρτήσεως του θ είναι η $\theta \mapsto (\sin^2 \theta, \sin^2 \theta \tan \theta)$. Εφόσον η $\theta \mapsto \sin \theta$ είναι μία λεία 1-1 και επί απεικόνιση από το $(-\pi/2, \pi/2)$ στο $(-1, 1)$, και έχει τη λεία αντίστροφη $t \mapsto \sin^{-1} t$, η $t = \sin \theta$ είναι μία απεικόνιση αναπαραμέτρησης. Δεδομένου ότι $\sin^2 \theta = t^2$, έχουμε $\sin^2 \theta \tan \theta = t^3/\sqrt{1-t^2}$, άρα η αναπαραμετρημένη καμπύλη είναι αυτή που αναφέρεται στην άσκηση.

1.3.3 (i) $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$ στο $t = 0 \iff$ τα m και n είναι αμφότερα ≥ 2 . Εάν $m > 3$, οι πρώτες συνιστώσες των $\ddot{\boldsymbol{y}}$ και $\ddot{\boldsymbol{y}}$ είναι αμφότερες 0 στο $t = 0$, άρα τα $\ddot{\boldsymbol{y}}$ και $\ddot{\boldsymbol{y}}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στο $t = 0$: αντίστοιχα πράγματα ισχύουν εάν $n > 3$. Επομένως υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις: εάν $(m, n) = (2, 2)$ ή $(3, 3)$ τότε είτε το $\ddot{\boldsymbol{y}}$ είτε το $\ddot{\boldsymbol{y}}$ είναι μηδενικό στο $t = 0$, άρα οι μόνες περιπτώσεις όπου μπορούμε να έχουμε συνήθη ακίδα είναι αν $(m, n) = (2, 3)$ και $(3, 2)$: στις περιπτώσεις αυτές διαπιστώνουμε εύκολα ότι τα $\ddot{\boldsymbol{y}}$ και $\ddot{\boldsymbol{y}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $t = 0$. (ii) Χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $\boldsymbol{y}(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ παίρνουμε $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\boldsymbol{y}} = (2, 0)$ και $\ddot{\boldsymbol{y}} = (0, 6)$ στο $t = 0$, άρα η αρχή των αξόνων είναι συνήθης ακίδα. (iii) Αν $\tilde{\boldsymbol{y}}(\tilde{t})$ είναι μια αναπαραμέτρηση της $\boldsymbol{y}(t)$ και η \boldsymbol{y} έχει μία συνήθη ακίδα στο $t = t_0$, τότε στο $t = t_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} d\tilde{\boldsymbol{y}}/d\tilde{t} &= (d\boldsymbol{y}/dt)(dt/d\tilde{t}) = 0, \\ d^2\tilde{\boldsymbol{y}}/d\tilde{t}^2 &= (d^2\boldsymbol{y}/dt^2)(dt/d\tilde{t})^2 \quad \text{και} \\ d^3\tilde{\boldsymbol{y}}/d\tilde{t}^3 &= (d^3\boldsymbol{y}/dt^3)(dt/d\tilde{t})^3 + 3(d^2\boldsymbol{y}/dt^2)(dt/d\tilde{t})(d^2t/d\tilde{t}^2). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $dt/d\tilde{t} \neq 0$, διαπιστώνουμε εύκολα ότι τα $d^2\tilde{\boldsymbol{y}}/d\tilde{t}^2$ και $d^3\tilde{\boldsymbol{y}}/d\tilde{t}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν $t = t_0$.

1.3.4 (i) Εάν $\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(\varphi(t))$, έστω ψ η αντίστροφη της απεικόνισης αναπαραμέτρησης φ . Έπεται ότι $\tilde{\boldsymbol{y}}(\psi(t)) = \boldsymbol{y}(\varphi(\psi(t))) = \boldsymbol{y}(t)$. (ii) Εάν $\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(\varphi(t))$ και $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{\boldsymbol{y}}(\psi(t))$, όπου φ και ψ είναι απεικονίσεις αναπαραμέτρησης, τότε $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}((\varphi \circ \psi)(t))$. Η $\varphi \circ \psi$ είναι απεικόνιση αναπαραμέτρησης διότι είναι λεία και $\frac{d}{dt}(\varphi(\psi(t))) = \dot{\varphi}(\psi(t))\dot{\psi}(t) \neq 0$, αφού οι $\dot{\varphi}$ και $\dot{\psi}$ είναι αμφότερες $\neq 0$.

1.4.1 Είναι κλειστή διότι $\boldsymbol{y}(t + 2\pi) = \boldsymbol{y}(t)$ για κάθε t . Αν υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(u)$, τότε $\cos^3 t (\cos 3t, \sin 3t) = \cos^3 u (\cos 3u, \sin 3u)$. Παίρνοντας μήκη έχουμε $\cos^3 t = \pm \cos^3 u$, άρα $\cos t = \pm \cos u$, δηλαδή $u = t, \pi - t, \pi + t$ ή $2\pi - t$ (με προσέγγιση πρόσθεσης πολλαπλασίων του 2π). Για να ισχύει η δεύτερη ισότητα πρέπει να έχουμε αναγκαστικά

$t = n\pi/3$ για κάποιο ακέραιο n , ενώ η τρίτη αληθεύει για κάθε t . Συνεπώς η περίοδος είναι π , ενώ για τις αυτοτομές αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις τιμές $t = \pi/3, 2\pi/3$, από τις οποίες παίρνουμε $u = 2\pi/3, \pi/3$, αντίστοιχα. Άρα υπάρχει μοναδική αυτοτομή στο $\gamma(\pi/3) = (-1/8, 0)$.

- 1.4.2 Η καμπύλη $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t^3 + t), \sin(t^3 + t))$ είναι αναπαραμέτρηση του κύκλου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ αλλά δεν είναι κλειστή.
- 1.4.3 Εάν η γ είναι T -περιοδική, τότε είναι kT -περιοδική για κάθε $k \neq 0$ (αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στο k εάν $k > 0$, ή στο $-k$ εάν $k < 0$). Εάν η γ είναι T_1 -περιοδική και T_2 -περιοδική, τότε είναι $k_1 T_1$ -περιοδική και $k_2 T_2$ -περιοδική για όλους τους μη μηδενικούς ακέραιους k_1, k_2 , άρα $\gamma(t + k_1 T_1 + k_2 T_2) = \gamma(t + k_1 T_1)$ αφού η γ είναι $k_2 T_2$ -περιοδική, το οποίο ισούται με $\gamma(t)$ αφού η γ είναι $k_1 T_1$ -περιοδική.
- 1.4.4 Έστω ότι η γ είναι T -περιοδική. Γράφουμε $T = kT_0 + T_1$, όπου k είναι ένας ακέραιος και $0 \leq T_1 < T_0$. Σύμφωνα με την Άσκηση 1.4.3 η γ είναι T_1 -περιοδική: εάν $T_1 > 0$ αυτό είναι άτοπο διότι βρίσκεται σε αντίφαση με τον ορισμό του T_0 .
- 1.4.5 (i) Αν επιλέξουμε ένα $T_1 > 0$ τέτοιο ώστε η γ να είναι T_1 -περιοδική, τότε το T_1 δεν είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα, άρα υπάρχει ένα $T_2 > 0$ τέτοιο ώστε η γ να είναι T_2 -περιοδική. Επαναλαμβάνοντας αυτόν τον συλλογισμό καταλήγουμε στη ζητούμενη ακολουθία. (ii) Η ακολουθία $\{T_r\}_{r \geq 1}$ του (i) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα πρέπει να συγκλίνει σε κάποιο $T_\infty \geq 0$. Έπεται ότι η γ είναι T_∞ -περιοδική διότι (με χρήση της συνέχειας της γ) $\gamma(t + T_\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(t + T_r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(t) = \gamma(t)$. Σύμφωνα με την Άσκηση 1.4.3, η γ είναι $(T_r - T_\infty)$ -περιοδική για κάθε $r \geq 1$, και αυτή η ακολουθία θετικών αριθμών συγκλίνει στο 0. (iii) Εάν $\{T_r\}$ είναι η ακολουθία του (i) και $T_r \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$, τότε από το θεώρημα μέσης τιμής παίρνουμε $0 = (f(t + T_r) - f(t))/T_r = \dot{f}(t + \lambda T_r)$ για κάποιο $0 < \lambda < 1$. Θεωρώντας ότι $r \rightarrow \infty$ παίρνουμε $\dot{f}(t) = 0$ για κάθε t , άρα η f είναι σταθερή.
- 1.4.6 Ακολουθώντας την υπόδειξη, Αφού το $T_0 = (k_i/k)T_i$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T_i , κάθε γ_i είναι T_0 -περιοδική. Έστω \mathcal{T} η ένωση των πεπερασμένων συνόλων πραγματικών αριθμών $\{T_i, 2T_i, \dots, k_i T_i\}$ για όλα τα i για τα οποία η γ_i δεν είναι σταθερή, και έστω $\mathcal{P} = \{T' \in \mathcal{T} \mid \gamma \text{ είναι } T'\text{-περιοδική}\}$. Το \mathcal{P} είναι πεπερασμένο (διότι το \mathcal{T} είναι πεπερασμένο) και διάφορο του κενού (διότι $T \in \mathcal{P}$). Το ελάχιστο στοιχείο του \mathcal{P} είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός T'_0 για τον οποίο η γ είναι T'_0 -περιοδική (διότι εάν η γ είναι T' -περιοδική, τότε είτε $T' > T$ είτε $T' \in \mathcal{P}$). Σύμφωνα με την Άσκηση 1.4.4, $T_0 = k'T'_0$ για κάποιον ακέραιο k' , οπότε υπάρχουν ακέραιοι k'_i τέτοιοι ώστε $T'_0 = k'_i T_i$ για όλα τα i για τα οποία η γ_i δεν είναι σταθερή. Έπεται ότι $k_i T_i/k = k' k'_i T_i$, άρα ο kk' διαιρεί κάθε k_i . Αφού ο k είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος διαιρέτης, $k' = 1$, άρα $T_0 = T'_0$.
- 1.5.1 $x(1 - x^2) \geq 0 \iff x \leq -1$ ή $0 \leq x \leq 1$, άρα η καμπύλη αποτελείται από (τουλάχιστον) δύο κομμάτια. Η παραμέτρηση ορίζεται για $t \leq -1$ και $0 \leq t \leq 1$, και καλύπτει το τμήμα της καμπύλης με $y \geq 0$.
- 1.5.2 Εάν $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι μία καμπύλη της επιφάνειας $f(x, y, z) = 0$, παραγωγίζοντας την $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ ως προς t παίρνουμε $\dot{x}f_x + \dot{y}f_y + \dot{z}f_z = 0$, άρα το $\dot{\gamma}$ είναι κάθετο στο $\nabla f(f_x, f_y, f_z)$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε επιφανειακή καμπύλη, το ∇f είναι κάθετο στην επιφάνεια. Οι επιφάνειες $f = 0$ και $g = 0$ θα τέμνονται κατά μία καμπύλη εάν τα διανύσματα ∇f και ∇g δεν είναι παράλληλα σε κανένα σημείο της τομής.
- 1.5.3 Έστω $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$ μία κανονική καμπύλη του \mathbb{R}^3 . Τουλάχιστον μια από τις \dot{u} , \dot{v} και \dot{w} είναι μη μηδενική για κάθε τιμή του t . Ας υποθέσουμε ότι $\dot{u}(t_0) \neq 0$ και $x_0 = u(t_0)$. Όπως στην «απόδειξη» του Θεωρήματος 1.5.2, υπάρχει μία λεία συνάρτηση $h(x)$ ορισμένη για x κοντά στο x_0 τέτοια ώστε η $t = h(x)$ να είναι η μοναδική λύση της $x = u(t)$ για κάθε t κοντά στο t_0 . Έπεται ότι, για t κοντά στο t_0 , η $\gamma(t)$ περιέχεται

στην καμπύλη στάθμης $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$, όπου $f(x, y, z) = y - v(h(x))$ και $g(x, y, z) = z - w(h(x))$. Οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τις συνθήκες της προηγούμενης άσκησης, καθώς $\nabla f = (-\dot{v}h', 1, 0)$ και $\nabla g = (-\dot{w}h', 0, 1)$, όπου ο τόνος συμβολίζει την d/dx .

Κεφάλαιο 2

- 2.1.1 (i) Η γ είναι μοναδιαία ταχύτητα (Άσκηση 1.2.2(i)), άρα $\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\left(\frac{1}{4}(1+t)^{-1/2}, \frac{1}{4}(1-t)^{-1/2}, 0\right)\| = \frac{1}{\sqrt{8(1-t^2)}}$. (ii) Η γ είναι μοναδιαία ταχύτητα (Άσκηση 1.2.2(ii)), άρα $\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)\| = 1$. (iii) Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1.2 έχουμε $\kappa = \frac{\|(1, \sinh t, 0) \times (0, \cosh t, 0)\|}{\|(1, \sinh t, 0)\|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \operatorname{sech}^2 t$.
- (iv) $(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, 0) \times (-3\cos^2 t + 6\cos t \sin^2 t, 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t, 0) = (0, 0, -9\sin^2 t \cos^2 t)$, άρα $\kappa = \frac{\|(0, 0, -9\sin^2 t \cos^2 t)\|}{\|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, 0)\|^3} = \frac{1}{3|\sin t \cos t|}$. Αυτό απειρίζεται όταν το t είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi/2$, δηλαδή στις τέσσερις ακίδες $(\pm 1, 0)$ και $(0, \pm 1)$ του αστροειδούς.
- 2.1.2 Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 1.3.5, εάν $\mathbf{v}(t)$ είναι μία λεία (διανυσματική) συνάρτηση του t , τότε το $\|\mathbf{v}(t)\|$ είναι μία λεία (αριθμητική) συνάρτηση του t υπό την προϋπόθεση ότι η $\mathbf{v}(t)$ είναι διάφορη του μηδενός για κάθε t . Το αποτέλεσμα έπεται από τον τύπο της Πρότασης 2.1.2. Η καμπυλότητα της κανονικής καμπύλης $\gamma(t) = (t, t^3)$ είναι $\kappa(t) = 6|t|/(1+9t^4)^{3/2}$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$.
- 2.2.1 Παραγωγίστε την $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_s = 0$ και χρησιμοποιήστε την $\dot{\mathbf{t}} = \kappa_s \mathbf{n}_s$.
- 2.2.2 Εάν η γ είναι λεία, τότε το $\mathbf{t} = \dot{\gamma}$ είναι λείο και άρα το ίδιο ισχύει για τα $\dot{\mathbf{t}}$ και \mathbf{n}_s (αφού το \mathbf{n}_s προκύπτει με περιστροφή του \mathbf{t}). Επομένως η $\kappa_s = \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}_s$ είναι λεία.
- 2.2.3 Για το πρώτο μέρος, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Παραρτήματος 2, αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{\kappa}_s = -\kappa_s$ εάν M είναι η ανάκλαση ως προς μια ευθεία l . Αυτό όμως είναι φανερό: εάν επιλέξουμε ως σταθερή γωνία φ_0 της Πρότασης 2.2.1 τη γωνία της l και του θετικού άξονα x , τότε (με τον προφανή συμβολισμό) $\tilde{\varphi} = -\varphi$. Αντιστρόφως, εάν οι γ και $\tilde{\gamma}$ έχουν την ίδια μη μηδενική καμπυλότητα, οι προσημασμένες καμπυλότητές τους είτε είναι ίδιες είτε διαφέρουν ως προς το πρόσημο. Στην πρώτη περίπτωση, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.5, οι καμπύλες διαφέρουν κατά μία ευθεία ισομετρία: στη δεύτερη, με εφαρμογή μίας ανάκλασης στη μία από τις καμπύλες προκύπτουν δύο καμπύλες με την ίδια προσημασμένη καμπυλότητα, οι οποίες διαφέρουν κατά μία ευθεία ισομετρία. Επομένως οι αρχικές καμπύλες διαφέρουν κατά μια αντίθετη ισομετρία.
- 2.2.4 Το πρώτο μέρος είναι προφανές αφού κατά την εφαρμογή της ομοιοθεσίας το s πολλαπλασιάζεται με το a ενώ η φ παραμένει αναλλοίωτη. Για το δεύτερο μέρος θεωρήστε το μικρό κομμάτι της αλυσίδας μεταξύ των σημείων με μήκος τόξου s και $s + \delta s$. Η οριζόντια δύναμη στο κομμάτι αυτό είναι (με τον προφανή συμβολισμό) $\delta(T \cos \varphi)$, και επειδή αυτή πρέπει να μηδενίζεται, το $T \cos \varphi$ πρέπει να είναι σταθερό, έστω ίσο με λ . Η κατακόρυφη δύναμη είναι $\delta(T \sin \varphi)$, και αυτή πρέπει να αντισταθμίζει το βάρος του κομματιού της αλυσίδας, το οποίο είναι σταθερό πολλαπλάσιο του δs . Έπεται ότι $T \sin \varphi = \mu s + \nu$ για κάποιες σταθερές μ, ν , και η ν πρέπει να είναι μηδέν διότι $\varphi = s = 0$ στο χαμηλότερο σημείο της C . Από τις $T \cos \varphi = \lambda$ και $T \sin \varphi = \mu s + \nu$ παίρνουμε $\tan \varphi = s/a$, όπου $a = \lambda/\mu$. Συνεπώς $\sec^2 \varphi \frac{d\varphi}{ds} = 1/a$, άρα η προσημασμένη καμπυλότητα είναι

$\kappa_s = d\varphi/ds = 1/a \sec^2 \varphi = 1/a(1 + \tan^2 \varphi) = \frac{1}{a}(1 + s^2/a^2)^{-1}$. Το αποτέλεσμα έπεται από το πρώτο μέρος και το Παράδειγμα 2.2.4.

2.2.5 Έχουμε $d\boldsymbol{\gamma}^\lambda/dt = d\boldsymbol{\gamma}/dt + \lambda d\mathbf{n}_s/dt = (1 - \lambda\kappa_s)ds/dt \mathbf{t}$, άρα το μήκος τόξου s^λ της $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ ικανοποιεί την $ds^\lambda/dt = |1 - \lambda\kappa_s|ds/dt$. Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ είναι το $\mathbf{t}^\lambda = (d\boldsymbol{\gamma}^\lambda/dt)(ds^\lambda/dt) = \epsilon \mathbf{t}$, άρα το προσημασμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ είναι το $\mathbf{n}^\lambda = \epsilon \mathbf{n}_s$. Συνεπώς, η προσημασμένη καμπυλότητα κ_s^λ της $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ δίνεται από την $\kappa_s^\lambda \mathbf{n}_s^\lambda = d\mathbf{t}^\lambda/ds^\lambda = (d\mathbf{t}^\lambda/dt)/|1 - \lambda\kappa_s|(ds/dt) = \epsilon|1 - \lambda\kappa_s|^{-1} dt/ds = \kappa_s(1 - \lambda\kappa_s)^{-1} \mathbf{n}_s = \epsilon\kappa_s(1 - \lambda\kappa_s)^{-1} \mathbf{n}_s^\lambda = \kappa_s|1 - \lambda\kappa_s|^{-1} \mathbf{n}_s^\lambda$.

2.2.6 Το $\epsilon(s_0)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα $\boldsymbol{\gamma}(s_0)$ και $\boldsymbol{\gamma}(s_0 + \delta s)$. Επομένως

$$(\epsilon(s_0) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}(s_0) + \boldsymbol{\gamma}(s_0 + \delta s))) \cdot (\boldsymbol{\gamma}(s_0 + \delta s) - \boldsymbol{\gamma}(s_0)) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor και παραλείποντας τους όρους που περιέχουν δυνάμεις του δs τάξης ανώτερης της δεύτερης, παίρνουμε (υπολογίζοντας όλες τις ποσότητες στο s_0) $(\epsilon - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \delta s + \frac{1}{2}(\epsilon \cdot \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - 1 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \ddot{\boldsymbol{\gamma}})(\delta s)^2 = 0$. Αυτό πρέπει επίσης να ισχύει και όταν το δs αντικατασταθεί με το $-\delta s$ προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε $(\epsilon - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0$ και $(\epsilon - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\gamma}} = 1$. Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\epsilon = \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{n}_s$ για κάποιο αριθμό λ , και, επειδή $\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \kappa_s \mathbf{n}_s$, από τη δεύτερη προκύπτει ότι $\lambda = 1/\kappa_s$.

2.2.7 Το εφαπτόμενο διάνυσμα της ϵ είναι το $\mathbf{t} + \frac{1}{\kappa_s}(-\kappa_s \mathbf{t}) - \frac{\dot{\kappa}_s}{\kappa_s^2} \mathbf{n}_s = -\frac{\dot{\kappa}_s}{\kappa_s^2} \mathbf{n}_s$, επομένως το μήκος τόξου της είναι $u = \int \|\dot{\epsilon}\| ds = \int \frac{\dot{\kappa}_s}{\kappa_s^2} ds = u_0 - \frac{1}{\kappa_s}$, όπου u_0 είναι μία σταθερά. Επομένως το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της ϵ είναι το $-\mathbf{n}_s$ και το προσημασμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμά της είναι το \mathbf{t} . Δεδομένου ότι $-d\mathbf{n}_s/du = \kappa_s \mathbf{t}/(du/ds) = \frac{\kappa_s^3}{\dot{\kappa}_s} \mathbf{t}$, η προσημασμένη καμπυλότητα της ϵ είναι $\kappa_s^3/\dot{\kappa}_s$.

Οποιοδήποτε σημείο της κάθετης ευθείας της $\boldsymbol{\gamma}$ στο $\boldsymbol{\gamma}(s)$ γράφεται ως $\boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda \mathbf{n}_s(s)$ για κάποιο λ . Επομένως η κάθετη ευθεία τέμνει την ϵ στο σημείο $\epsilon(s)$, όπου $\lambda = 1/\kappa_s(s)$, και επειδή σύμφωνα με το πρώτο μέρος το εφαπτόμενο διάνυσμα της ϵ είναι παράλληλο στο $\mathbf{n}_s(s)$, η κάθετη ευθεία είναι εφαπτόμενη στην ϵ στο $\epsilon(s)$.

Συμβολίζοντας με τόνο την d/dt , έχουμε $\boldsymbol{\gamma}' = a(1 - \cos t, \sin t)$, επομένως το μήκος τόξου s της $\boldsymbol{\gamma}$ δίνεται από τη σχέση $ds/dt = 2a \sin(t/2)$, και $\mathbf{t} = d\boldsymbol{\gamma}/ds = (\sin(t/2), \cos(t/2))$. Επομένως $\mathbf{n}_s = (-\cos(t/2), \sin(t/2))$ και $\dot{\mathbf{t}} = (d\mathbf{t}/dt)/(ds/dt) = \frac{1}{4a \sin(t/2)}(\cos(t/2), -\sin(t/2)) = -1/4a \sin(t/2) \mathbf{n}_s$, άρα η προσημασμένη καμπυλότητα της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι $-1/4a \sin(t/2)$ και η ενελιγμένη της είναι η

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= a(t - \sin t, 1 - \cos t) - 4a \sin(t/2)(-\cos(t/2), \sin(t/2)) \\ &= a(t + \sin t, -1 + \cos t). \end{aligned}$$

Αναπαραμετρώντας την ϵ μέσω της $\tilde{t} = \pi + t$, παίρνουμε $a(\tilde{t} - \sin \tilde{t}, 1 - \cos \tilde{t}) + a(-\pi, -2)$, άρα η ϵ προκύπτει από μια αναπαραμέτρηση της $\boldsymbol{\gamma}$ μέσω μεταφοράς κατά το διάνυσμα $a(-\pi, -2)$.

2.2.8 Το ελεύθερο μέρος της χορδής είναι εφαπτόμενο στην $\boldsymbol{\gamma}$ στο $\boldsymbol{\gamma}(s)$ και έχει μήκος $\ell - s$, εξού και ο ζητούμενος τύπος για την $\boldsymbol{\iota}(s)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\boldsymbol{\iota}$ είναι το $\dot{\boldsymbol{\gamma}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}} + (\ell - s)\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \kappa_s(\ell - s)\mathbf{n}_s$ (η τελεία συμβολίζει την d/ds). Το μήκος τόξου v της $\boldsymbol{\iota}$ δίνεται από τη σχέση $dv/ds = \kappa_s(\ell - s)$, επομένως το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμά της είναι το \mathbf{n}_s και το προσημασμένο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμά της είναι το $-\mathbf{t}$. Έχουμε όμως ότι $d\mathbf{n}_s/dv = \frac{1}{\kappa_s(\ell - s)}\dot{\mathbf{n}}_s = \frac{-1}{\ell - s}\mathbf{t}$, άρα η προσημασμένη καμπυλότητα της $\boldsymbol{\iota}$ είναι $1/(\ell - s)$.

2.2.9 Η παραμέτρηση μήκους τόξου της αλυσοειδούς είναι η $\tilde{\gamma}(s) = (\sinh^{-1} s, \sqrt{1+s^2})$. Η ενε-
 λιγμένη είναι η $\iota(s) = \tilde{\gamma}(s) - s\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \left(\sinh^{-1} s - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right) = (u - \tanh u, \operatorname{sech} u)$

εάν $u = \sinh^{-1} s$. Επομένως, εάν το (x, y) είναι ένα σημείο της ενελιγμένης ι , τότε $u = \cosh^{-1}(1/y)$ και $x = \cosh^{-1}(1/y) - \sqrt{1-y^2}$.

2.2.10 Η περιστροφή $\rho_{-\theta(s)}$ απεικονίζει την εφαπτόμενη ευθεία της γ στο $\gamma(s)$ στην ℓ και την ευθεία που συνδέει τα \mathbf{q} και $\gamma(s)$ σε μία ευθεία παράλληλη σε αυτήν που συνδέει τα $\Gamma(s)$ και $\mathbf{p} + s\mathbf{a}$. Επομένως $\Gamma(s) - (\mathbf{p} + s\mathbf{a}) = \rho_{-\theta(s)}(\mathbf{q} - \gamma(s))$, απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση. Έχουμε όμως ότι $\dot{\Gamma}(s) = \mathbf{a} + \left(\frac{d}{ds}\rho_{-\theta(s)}\right)(\mathbf{q} - \gamma(s)) - \rho_{-\theta(s)}\dot{\gamma}(s)$. Ο τελευταίος όρος είναι προφανώς παράλληλος στο \mathbf{a} και αφού είναι και τα δύο μοναδιαία διανύσματα, είναι ίσα. Επομένως θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\left(\frac{d}{ds}\rho_{-\theta(s)}\right)(\mathbf{q} - \gamma(s)) \cdot \rho_{-\theta(s)}(\mathbf{q} - \gamma(s)) = 0$. Αν $A = \rho_{-\theta(s)}$, $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \gamma(s)$, πρέπει να δείξουμε (με πινακικό συμβολισμό) ότι $(A\mathbf{v})^t \frac{dA}{ds} \mathbf{v} = 0$, δηλαδή $\mathbf{v}^t A^t \frac{dA}{ds} \mathbf{v} = 0$. Αφού ο A είναι ορθογώνιος, αυτό προκύπτει από τα μέρη (i) και (ii) της υπόδειξης. Για να αποδείξετε το (i) χρησιμοποιήστε τις συνιστώσες: $\mathbf{v}^t S \mathbf{v} = \sum_{i,j} v_i v_j S_{ij} = \sum_{i,j} v_j v_i S_{ji} = -\sum_{i,j} v_i v_j S_{ij}$. Για το (ii) παραγωγίστε την $A^t A = I$.

2.3.1 (i) Το $\mathbf{t} = \left(\frac{1}{2}(1+t)^{1/2}, -\frac{1}{2}(1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, άρα η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας: $\dot{\mathbf{t}} = \left(\frac{1}{4}(1+t)^{-1/2}, \frac{1}{4}(1-t)^{-1/2}, 0\right)$, άρα $\kappa = \|\dot{\mathbf{t}}\| = 1/\sqrt{8(1-t^2)}$. $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1-t)^{1/2}, (1+t)^{1/2}, 0\right)$, $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(-\frac{1}{2}(1+t)^{1/2}, \frac{1}{2}(1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\dot{\mathbf{b}} = \left(-\frac{1}{4}(1+t)^{-1/2}, -\frac{1}{4}(1-t)^{-1/2}, 0\right)$, άρα η στρέψη είναι $\tau = 1/\sqrt{8(1-t^2)}$. Η ισχύς της εξίσωσης $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{n}$ επαληθεύεται εύκολα.

(ii) Το $\mathbf{t} = \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t\right)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, άρα η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας: $\dot{\mathbf{t}} = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)$, άρα $\kappa = \|\dot{\mathbf{t}}\| = 1$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{t}} = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)$. $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, άρα $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ και $\tau = 0$. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 2.3.5, η γ είναι κύκλος ακτίνας $1/\kappa = 1$ με κέντρο $\mathbf{p} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ στο επίπεδο που διέρχεται από το $(0, 1, 0)$ και είναι κάθετο στο $\mathbf{b} = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, δηλαδή στο επίπεδο $3x + 4z = 0$.

2.3.2 Έστω $\mathbf{a} = \kappa/(\kappa^2 + \tau^2)$, $\mathbf{b} = \tau/(\kappa^2 + \tau^2)$. Σύμφωνα με τα Παραδείγματα 2.1.3 και 2.3.2, η κυκλική έλικα με παραμέτρους \mathbf{a} και \mathbf{b} έχει καμπυλότητα $a/(a^2 + b^2) = \kappa$ και στρέψη $b/(a^2 + b^2) = \tau$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.6, κάθε καμπύλη καμπυλότητας κ και στρέψης τ προκύπτει με εφαρμογή μιας ευθείας ισομετρίας σε αυτήν την έλικα.

2.3.3 Παραγωγίζοντας τη σχέση $\mathbf{t} \cdot \mathbf{a}$ (= σταθερά) παίρνουμε $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$: αφού τα \mathbf{t} , \mathbf{n} και \mathbf{b} αποτελούν ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 , έχουμε $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta + \mu\mathbf{b}$ για κάποιον αριθμό μ : αφού το \mathbf{a} είναι μοναδιαίο διάνυσμα, έχουμε $\mu = \pm \sin \theta$. παραγωγίζοντας την $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta \pm \mathbf{b} \sin \theta$ παίρνουμε $\tau = \kappa \cot \theta$. Αντιστρόφως, αν $\tau = \lambda\kappa$, υπάρχει θ με $\lambda = \cot \theta$: με παραγωγήση προκύπτει ότι το $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta$ είναι σταθερό διάνυσμα, οπότε $\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \cos \theta$, άρα η θ είναι η γωνία των \mathbf{t} και \mathbf{a} . Για την κυκλική έλικα του Παραδείγματος 2.1.3, η γωνία του εφαπτόμενου διανύσματος $d\gamma/d\theta = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b)$ και του άξονα z είναι η σταθερά $\cos^{-1}(b/\sqrt{a^2 + b^2})$.

2.3.4 Παραγωγίζοντας κατ' επανάληψη τη σχέση $(\gamma - \mathbf{a}) \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = r^2$ παίρνουμε $\mathbf{t} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = 0$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + \kappa\mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = 0$, συνεπώς $\mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = -1/\kappa \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = \dot{\kappa}/\kappa^2$, επομένως $\mathbf{b} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = \dot{\kappa}/\tau\kappa^2$. Τέλος $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} - \tau\mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = (\dot{\kappa}/\tau\kappa^2)$ και άρα $\tau/\kappa = (\dot{\kappa}/\tau\kappa^2)$. Αντιστρόφως, εάν ισχύει η Εξ. (2.22), τότε $\rho = -\sigma(\dot{\rho}\sigma)$, επομένως

$(\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2)' = 2\rho\dot{\rho} + 2(\dot{\rho}\sigma)(\dot{\rho}\sigma)' = 0$, άρα το $\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2$ είναι μια σταθερά, έστω r^2 (όπου $r > 0$). Έστω $\mathbf{a} = \boldsymbol{\gamma} + \rho\mathbf{n} + \dot{\rho}\sigma\mathbf{b}$ με χρήση της Εξ. (2.20) προκύπτει ότι $\mathbf{a} = \mathbf{t} + \dot{\rho}\mathbf{n} + \rho(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (\dot{\rho}\sigma)' + (\dot{\rho}\sigma)(-\tau\mathbf{n}) = \mathbf{0}$, άρα το \mathbf{a} είναι σταθερό διάνυσμα και $\|\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}\|^2 = \rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2 = r^2$. Επομένως η $\boldsymbol{\gamma}$ περιέχεται στη σφαίρα κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας r .

2.3.5 $\dot{\mathbf{r}} = P\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, άρα $\mathbf{T} = P\mathbf{t}$ και $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = (P\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot (P\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ αφού ο P είναι ορθογώνιος. Έπεται ότι $\ddot{\mathbf{r}} = P\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ παίρνοντας μήκη διαπιστώνουμε ότι οι $\boldsymbol{\gamma}$ και \mathbf{T} έχουν την ίδια καμπυλότητα κ , και στη συνέχεια διαιρώντας με κ παίρνουμε $N = P\mathbf{n}$. Έπεται ότι $\mathbf{B} = P\mathbf{t} \times P\mathbf{n}$. Εάν ο P αντιστοιχεί σε ευθεία ισομετρία (δηλαδή σε περιστροφή), αυτό είναι ίσο με $P(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = P\mathbf{b}$, αλλά εάν ο P αντιστοιχεί σε αντίθετη ισομετρία, τότε $P\mathbf{t} \times P\mathbf{n} = -P\mathbf{b}$ (Πρόταση Π1.1.6).

2.3.6 Έστω $\lambda_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$. Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ και \mathbf{v}_3 είναι ορθομοναδιαία αν και μόνο αν $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ ($= 1$ αν $i = j$ και $= 0$ αν $i \neq j$).¹ Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ για όλες τις τιμές του s , δεδομένου ότι ισχύει για $s = s_0$. Παραγωγίζοντας την $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ παίρνουμε $\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^3 (a_{ik}\lambda_{kj} + a_{jk}\lambda_{ik})$. Οι $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ είναι όμως λύση αυτού του συστήματος διαφορικών εξισώσεων διότι $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Σύμφωνα όμως με τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, υπάρχει μία μοναδική λύση με δοθείσες αρχικές τιμές όταν $s = s_0$.

Κεφάλαιο 3

3.1.1 $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (-\sin t - a \sin 2t, \cos t + a \cos 2t)$, άρα $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2 = 1 + a^2 + 2a \cos t$. Αυτό είναι $\geq 1 + a^2 - 2|a| = (1 - |a|)^2$, άρα η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική αν $|a| \neq 1$. Αν $|a| = 1$ τότε $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\| = 2(1 + a \cos t)$, άρα η αρχή των αξόνων είναι ιδιαίζον σημείο της $\boldsymbol{\gamma}$. Αν $a = 0$ τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κύκλος. Αν $0 < |a| < 1$, τότε $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \boldsymbol{\gamma}(t_2) \implies 1 + a \cos t_1 = 1 + a \cos t_2 \implies \cos t_1 = \cos t_2 \implies t_2 = t_1$ ή $2\pi - t_1$. Στην τελευταία περίπτωση $\boldsymbol{\gamma}(t_2) = ((1 + a \cos t_1) \cos t_1, -(1 + a \cos t_1) \sin t_1)$, άρα $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \boldsymbol{\gamma}(t_2) \implies \sin t_1 = 0 \implies t_1 = 0$ ή π . Σε κάθε περίπτωση το $t_2 - t_1$ είναι πολλαπλάσιο του 2π , άρα η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π χωρίς αυτοτομές. Εάν $|a| > 1$, η $\boldsymbol{\gamma}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν $\cos t = -1/a$, η οποία έχει δύο ρίζες με $0 \leq t < 2\pi$, έστω $t_1 < t_2$, άρα η αρχή των αξόνων είναι αυτοτομή. Η εικόνα είναι ποιοτικά παρόμοια με αυτήν του Παραδείγματος 1.1.7 (που είναι η περίπτωση $a = 2$), άρα το συμπλήρωμα της εικόνας της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι η ένωση δύο φραγμένων χωρίων που περικλείονται από το τμήμα της καμπύλης με $t_1 \leq t \leq t_2$, και ενός μη φραγμένου χωρίου.

3.2.1 Σύμφωνα με το Παράρτημα 1, κάθε ισομετρία M του \mathbb{R}^2 είναι της μορφής $M(\mathbf{v}) = P\mathbf{v} + \mathbf{b}$, όπου P είναι ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας και \mathbf{b} ένα σταθερό διάνυσμα. Εάν $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = M(\boldsymbol{\gamma})$, τότε $\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} = P\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, άρα $\|\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}\| = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|$, που σημαίνει ότι οι $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ έχουν το ίδιο μήκος. Εάν φανταστούμε την $\boldsymbol{\gamma}$ σαν μια καμπύλη του επιπέδου xy του \mathbb{R}^3 , η Εξ. 3.2 μπορεί να γραφεί ως εξής: $\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^T (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot \mathbf{k} dt$, όπου $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Από την Πρόταση Π1.6 έπεται ότι οι $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ περικλείουν το ίδιο εμβαδόν (παρατηρήστε ότι αν η M είναι αντίθετη ισομετρία, το εμβαδόν φαίνεται να αλλάζει πρόσημο, αλλά αυτό δεν συμβαίνει διότι σε αυτήν την περίπτωση η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι αρνητικά προσανατολισμένη όταν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι θετικά προσανατολισμένη).

¹Σ.τ.Μ. Το δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}.$$

3.2.2 Χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση της έλλειψης $\gamma(t) = (p \cos t, q \sin t)$, με $0 \leq t \leq 2\pi$,

βρίσκουμε ότι το εμβαδόν της είναι $\int_0^{2\pi} \sqrt{pq \sin^2 t + pq \cos^2 t} dt = 2\pi \sqrt{pq}$. Σύμφωνα με την ισοπεριμετρική ανισότητα, το μήκος ℓ της έλλειψης ικανοποιεί τη σχέση $\ell \geq \sqrt{4\pi \times \pi pq} = 2\pi \sqrt{pq}$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν η έλλειψη είναι κύκλος, δηλαδή αν $p = q$. Το μήκος της είναι όμως $\int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 \sin^2 t + q^2 \cos^2 t} dt$.

3.3.1 Έστω (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δύο σημεία στο εσωτερικό της έλλειψης, ώστε να έχουμε $\frac{x_i}{p} + \frac{y_i}{q} < 1$ για $i = 1, 2$. Ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα δύο σημεία είναι το $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$ για κάποιο $0 \leq t \leq 1$. Το σημείο αυτό ανήκει στο εσωτερικό της έλλειψης διότι

$$\begin{aligned} & \frac{(tx_1 + (1-t)x_2)^2}{p^2} + \frac{(ty_1 + (1-t)y_2)^2}{q^2} \\ &= t^2 \left(\frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} \right) + (1-t)^2 \left(\frac{x_2^2}{p^2} + \frac{y_2^2}{q^2} \right) + 2(1-t) \left(\frac{x_1 x_2}{p^2} + \frac{y_1 y_2}{q^2} \right) \\ &< t^2 + (1-t)^2 + t(1-t) \left(\frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} + \frac{x_2^2}{p^2} + \frac{y_2^2}{q^2} \right) \\ &< t^2 + (1-t)^2 + 2t(t-1) = 1. \end{aligned}$$

3.3.2 $\dot{\gamma} = (-\sin t - 2 \sin 2t, \cos t + 2 \cos 2t)$ και $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{5 + 4 \cos t}$, άρα η γωνία φ μεταξύ του $\dot{\gamma}$ και του άξονα x δίνεται από τις $\cos \varphi = \frac{-\sin t - 2 \sin 2t}{\sqrt{5 + 4 \cos t}}$, $\sin \varphi = \frac{\cos t + 2 \cos 2t}{\sqrt{5 + 4 \cos t}}$.

Παραγωγίζοντας τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $\dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{-\sin t (24 \cos^2 t + 42 \cos t + 9)}{(5 + 4 \cos t)^{3/2}}$,

άρα $\dot{\varphi} = \frac{\sin t (24 \cos^2 t + 42 \cos t + 9)}{(5 + 4 \cos t)(\sin t + 2 \sin 2t)} = \frac{9 + 6 \cos t}{5 + 4 \cos t}$. Επομένως, εάν s είναι το μήκος τόξου της γ , τότε $\kappa_s = d\varphi/ds = (d\varphi/dt)(ds/dt) = (9 + 6 \cos t)/(5 + 4 \cos t)^{3/2}$, άρα $\dot{\kappa}_s = 12 \sin t (2 + \cos t)/(5 + 4 \cos t)^{3/2}$. Αυτό μηδενίζεται μόνο στα δύο σημεία της καμπύλης όπου $t = 0$ και $t = \pi$.

3.3.3 Από την $\epsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s} \mathbf{n}_s$ παίρνουμε $\dot{\epsilon} = -\dot{\kappa}_s \mathbf{n}_s / \kappa_s^2$, άρα η ϵ έχει ιδιαίζον σημείο όπου $\dot{\kappa}_s = 0$, δηλαδή όπου η γ έχει κορυφή.

Κεφάλαιο 4

4.1.1 Έστω U ένας ανοιχτός δίσκος του \mathbb{R}^2 και $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = 0\}$. Εάν $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$, τότε το W είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 και το $\mathcal{S} \cap W$ είναι ομοιομορφικό με το U μέσω της απεικόνισης $(x, y, 0) \mapsto (x, y)$. Άρα η \mathcal{S} είναι επιφάνεια.

4.1.2 Η εικόνα της σ_{\pm}^x είναι η τομή της σφαίρας με το ανοικτό σύνολο $\pm x > 0$ του \mathbb{R}^3 , και η αντίστροφή της είναι η προβολή $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Αντίστοιχα για τις σ_{\pm}^y και σ_{\pm}^z . Ένα σημείο της σφαίρας που δεν ανήκει στην εικόνα κανενός από τα έξι τμήματα επιφάνειας θα έπρεπε να έχει τα x, y και z όλα ίσα με μηδέν, πράγμα αδύνατο.

4.1.3 Πολλαπλασιάζοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε $(x^2 - z^2) \sin \theta \cos \theta = (1 - y^2) \sin \theta \cos \theta$, επομένως $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ εκτός αν $\cos \theta = 0$ ή $\sin \theta = 0$. Αν $\cos \theta = 0$, τότε $x = -z$ και $y = 1$, ενώ αν $\sin \theta = 0$, τότε $x = z$ και $y = -1$. Και οι δύο

αυτές ευθείες περιέχονται επίσης στην επιφάνεια. Η δοθείσα ευθεία L_θ διέρχεται από το $(\sin 2\theta, -\cos 2\theta, 0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 1)$. Έπεται ότι έχουμε όλες τις ευθείες παίρνοντας $0 \leq \theta < \pi$. Έστω (x, y, z) ένα σημείο της επιφάνειας· εάν $x \neq z$, έστω ότι η θ είναι τέτοια ώστε $\cot \theta = (1-y)(x-z)$, οπότε το (x, y, z) ανήκει στην L_θ . Αντίστοιχα αν $x \neq -z$. Οι μόνες περιπτώσεις που απομένουν είναι τα σημεία $(0, 0, \pm 1)$, τα οποία ανήκουν στις ευθείες $L_{\pi/2}$ και L_0 . Για να πάρουμε ένα τμήμα επιφάνειας που να καλύπτει την S ορίζουμε το $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ως εξής: $\sigma(u, v) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta, 0) + t(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 1)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, αυτό το τμήμα επιφάνειας καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια.

Έστω M_φ η ευθεία $(x-z)\cos\varphi = (1+y)\sin\varphi$, $(x+z)\sin\varphi = (1-y)\cos\varphi$. Με τον ίδιο συλλογισμό όπως παραπάνω προκύπτει ότι η M_φ περιέχεται στην επιφάνεια και κάθε σημείο της επιφάνειας ανήκει σε μία M_φ με $0 \leq \varphi < \pi$. Εάν το $\theta + \varphi$ δεν είναι πολλαπλάσιο

του π , οι ευθείες L_θ και M_φ τέμνονται στο σημείο $\left(\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)}, \frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)}, \frac{\cos(\theta+\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)}\right)$. Για

κάθε θ με $0 \leq \theta < \pi$, υπάρχει ακριβώς ένα φ με $0 \leq \varphi < \pi$ τέτοιο ώστε το $\theta + \varphi$ να είναι πολλαπλάσιο του π , και οι ευθείες L_θ και M_φ να μην τέμνονται. Εάν το (x, y, z) ανήκει σε αμφότερες τις L_θ και L_φ , με $\theta \neq \varphi$, τότε $(1-y)\tan\theta = (1-y)\tan\varphi$ και $(1+y)\cot\theta = (1+y)\cot\varphi$, απ' όπου παίρνουμε ταυτόχρονα $y = 1$ και $y = -1$ (η περίπτωση όπου $\theta = 0$ και $\varphi = \pi/2$, ή αντιστρόφως, πρέπει να εξεταστεί ξεχωριστά, αλλά το συμπέρασμα είναι το ίδιο). Άρα οι L_θ και L_φ δεν τέμνονται. Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει ότι οι M_θ και M_φ δεν τέμνονται.

- 4.1.4 Για το πρώτο μέρος έστω $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^2 + v^2 < \pi^2\}$ και $r = \sqrt{u^2 + v^2}$. Ορίζουμε το $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ως εξής: $\sigma(u, v) = \left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \tan\left(r - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Εάν η σφαίρα S μπορούσε να καλυφθεί από ένα μόνο τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, τότε η S θα ήταν ομοιομορφική με το ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^2 . Αφού η S είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , είναι συμπαγής. Συνεπώς, το U θα ήταν συμπαγές, και συνεπώς κλειστό. Δεδομένου όμως ότι το \mathbb{R}^2 είναι συνεκτικό, το μόνο μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό είναι το ίδιο το \mathbb{R}^2 , το οποίο δεν είναι συμπαγές, αφού δεν είναι φραγμένο.
- 4.1.5 Εάν $\{\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ είναι ένας άτλας μιας επιφάνειας S και W ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , τότε οι περιορισμοί $\{\sigma|_{U_\alpha \cap \sigma_\alpha^{-1}(W)}\}$ σχηματίζουν έναν άτλαντα της $S \cap W$ (απορρίπτουμε τους περιορισμούς για τους οποίους το $U_\alpha \cap \sigma_\alpha^{-1}(W)$ είναι κενό).
- 4.2.1 Το σ είναι προφανώς λείο και το $\sigma_u \times \sigma_v = (-f_u, -f_v, -1)$ δεν είναι ποθενά μηδέν, επομένως το σ είναι κανονικό.
- 4.2.2 Το σ_\pm^z είναι ειδική περίπτωση της Άσκησης 4.2.1 με $f = \pm\sqrt{1-u^2-v^2}$ (η $\sqrt{1-u^2-v^2}$ είναι λεία διότι $1-u^2-v^2 > 0$ αν $(u, v) \in U$), αντίστοιχα για τα άλλα τμήματα επιφάνειας. Η απεικόνιση μετάβασης από το σ_+^x στο σ_+^y , για παράδειγμα, είναι η $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$, όπου $\sigma_+^y(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma_+^x(u, v)$. Άρα $u = \sqrt{1-\tilde{u}^2-\tilde{v}^2}$, $v = \tilde{v}$, το οποίο είναι λείο αφού $1-\tilde{u}^2-\tilde{v}^2 > 0$ αν $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U$.
- 4.2.3 Το (i) είναι προφανώς 1-1 και είναι κανονικό διότι το σ είναι λείο και το $\sigma_u \times \sigma_v = (-v, -u, 1)$ δεν είναι ποτέ μηδέν. Το (ii) είναι 1-1 αλλά δεν είναι κανονικό διότι το $\sigma_u \times \sigma_v = (0, -3v^2, 2v)$ μηδενίζεται όταν $v = 0$. Το (iii) δεν είναι 1-1 διότι $\sigma(u, v) = \sigma(-u-1, v)$ και δεν είναι ούτε κανονικό διότι το $\sigma_u \times \sigma_v = (0, 2v(1+2u), 1+2u)$ μηδενίζεται όταν $u = -1/2$.
- 4.2.4 Είναι παρόμοια με το Παράδειγμα 4.1.4, αλλά χρησιμοποιείται το τμήμα επιφάνειας με παραμέτρηση γεωγραφικών συντεταγμένων $\sigma(\theta, \varphi) = (p \cos \theta \cos \varphi, q \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$.

4.2.5 Ένα τυχόν σημείο του κύκλου C έχει συντεταγμένες $(a + b \cos \theta, 0, b \sin \theta)$ περιστρέφοντάς το γύρω από τον άξονα z κατά γωνία φ παίρνουμε το σημείο $\sigma(\theta, \varphi)$. Ο τόρος καλύπτεται από τα τέσσερα τμήματα που προκύπτουν αν πάρουμε το (θ, φ) να ανήκει σε ένα από τα εξής ανοικτά σύνολα:

(i) $0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi$, (ii) $0 < \theta < 2\pi, -\pi < \varphi < \pi$,

(iii) $-\pi < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$, (iv) $-\pi < \theta < \pi, -\pi < \varphi < \pi$.

Κάθε τμήμα είναι κανονικό διότι το

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = -b(a + b \cos \theta)(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

δεν είναι ποτέ μηδενικό (αφού $a + b \cos \theta \geq a - b > 0$).

4.2.6 Υποθέστε ότι το κέντρο της προπέλας βρίσκεται αρχικά στο $(0, 0, 0)$. Τη χρονική στιγμή t το κέντρο βρίσκεται στο $(0, 0, \alpha t)$, όπου α είναι η ταχύτητα του αεροπλάνου. Συνεπώς, εάν η προπέλα βρίσκεται αρχικά πάνω στον άξονα x , το σημείο που βρισκόταν αρχικά στο $(v, 0, 0)$ τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στο σημείο $(v \cos \omega t, v \sin \omega t, \alpha t)$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της προπέλας. Έστω $u = \omega t$, $\lambda = \alpha/\omega$. Έχουμε $\sigma_u = (-v \sin u, v \cos u, \lambda)$, $\sigma_v = (\cos u, \sin u, 0)$, άρα το πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι το $N = (\lambda^2 + v^2)^{-1/2}(-\lambda \sin u, \lambda \cos u, -v)$. Εάν θ είναι η γωνία μεταξύ του N και του άξονα z , τότε $\cos \theta = -v/(\lambda^2 + v^2)^{1/2}$ και άρα $\cot \theta = \pm v/\lambda$, ενώ η απόσταση από τον άξονα z είναι v .

4.2.7 Το σ είναι ο σωλήνας που διαγράφεται από έναν κύκλο ακτίνας a σε ένα επίπεδο κάθετο στην γ καθώς το κέντρο του κινείται επάνω στην γ . Έχουμε $\sigma_s = (1 - ka \cos \theta)t - ta \sin \theta n + ta \cos \theta b$, $\sigma_\theta = -a \sin \theta n + a \cos \theta b$, απ' όπου προκύπτει ότι $\sigma_s \times \sigma_\theta = -a(1 - ka \cos \theta)(\cos \theta n + \sin \theta b)$: αυτό δεν είναι ποτέ μηδέν αφού από την $ka < 1$ έπεται ότι $1 - ka \cos \theta > 0$ για κάθε θ .

4.2.8 Εάν $\tilde{\sigma} = \sigma + a$, όπου a είναι ένα σταθερό διάνυσμα, τότε το $\tilde{\sigma}$ είναι λείο αν το σ είναι λείο, και $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u$, $\tilde{\sigma}_v = \sigma_v$, άρα το $\tilde{\sigma}$ είναι κανονικό αν το σ είναι κανονικό. Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας και $\tilde{\sigma} = A\sigma$, τότε το $\tilde{\sigma}$ είναι λείο αν το σ είναι λείο και $\tilde{\sigma}_u = A\sigma_u$, $\tilde{\sigma}_v = A\sigma_v$. Άρα, καθώς ο A είναι αντιστρέψιμος, τα $\tilde{\sigma}_u$ και $\tilde{\sigma}_v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν τα σ_u και σ_v είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4.2.9 Δείτε την Άσκηση 4.1.5. Ο περιορισμός μίας λείας απεικόνισης $U \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , σε ένα ανοικτό υποσύνολο του U είναι λείος.

4.3.1 Εάν η S καλύπτεται από ένα μόνο τμήμα επιφάνειας $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, τότε η $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία αν και μόνο αν η $f \circ \sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία. Πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι, αν το $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ένα άλλο τμήμα επιφάνειας που καλύπτει την S , τότε η $f \circ \tilde{\sigma}$ είναι λεία αν και μόνο αν η $f \circ \sigma$ είναι λεία. Αυτό αληθεύει διότι $f \circ \tilde{\sigma} = (f \circ \sigma) \circ \Phi$, όπου Φ είναι η απεικόνιση μετάβασης από το σ στο $\tilde{\sigma}$, και οι Φ και Φ^{-1} είναι αμφοτέρως λείες. Το τελευταίο μέρος ισχύει διότι εάν η $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία απεικόνιση, όπου U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , τότε κάθε συνιστώσα της σ (που είναι μια απεικόνιση $U \rightarrow \mathbb{R}$) είναι λεία (αυτό ισχύει διότι μια διανυσματική συνάρτηση σαν την σ μπορεί να παραγωγηθεί «κατά συνιστώσες»).

4.3.2 Η f δεν είναι αμφιδιαφόριση διότι δεν είναι 1-1: $f(0, y, z) = f(0, y, z + 2\pi)$. Θεωρήστε έναν άτλαντα του κώνου αποτελούμενο από τα τμήματα επιφάνειας $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, ορισμένα στα ανοικτά σύνολα $U_1 = \{(u, v) \mid u > 0, 0 < v < 2\pi\}$ και $U_2 = \{(u, v) \mid u > 0, -\pi < v < \pi\}$ (ονομάστε τα σ_1 και σ_2), και παραμετρήστε το ημιεπίπεδο ως εξής: $\pi(u, v) = (0, u, v)$ με $u > 0$. Εάν $(0, a, b)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, υποθέστε κατ' αρχάς ότι το b δεν είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π , έστω $2n\pi < b < 2(n+1)\pi$ για κάποιον ακέραιο n . Στην περίπτωση αυτή, $f(\pi(u, v)) = \sigma_1(u, v - 2n\pi)$ αν $2n\pi < v < 2(n+1)\pi$. Επομένως η f είναι μια αμφιδιαφόριση από το ανοικτό υποσύνολο $\{(0, y, z) \mid 2n\pi < z < 2(n+1)\pi\}$ του ημιεπιπέδου στον κώνο από

τον οποίο έχει αφαιρεθεί η ημιευθεία $y = 0, x = z > 0$. Αντίστοιχο είναι το συμπέρασμα αν το b δεν είναι περιττό πολλαπλάσιο του π . Αποδεικνύεται συνεπώς ότι η f είναι τοπική αμφιδιαφύριση.

4.4.1 (i) Στο $(1, 1, 0)$ έχουμε $\sigma_u = (1, 0, 2)$ και $\sigma_v = (0, 1, -2)$, άρα $\sigma_u \times \sigma_v = (-2, 2, 1)$ και το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το $-2x + 2y + z = 0$. (ii) Στο $(1, 0, 1)$, όπου $r = 1, \theta = 0$ έχουμε $\sigma_r = (1, 0, 2)$ και $\sigma_\theta = (0, 1, 2)$, άρα $\sigma_r \times \sigma_\theta = (-2, -2, 1)$ και η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι $-2x - 2y + z = 0$.

4.4.2 Αν $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ είναι μία αναπαράμετρηση του σ , τότε $\sigma_u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ και $\sigma_v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$, άρα τα σ_u και σ_v είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}$ και $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$. Επομένως κάθε γραμμικός συνδυασμός των σ_u και σ_v είναι γραμμικός συνδυασμός των $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}$ και $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$. Το αντίστροφο ισχύει επίσης διότι το σ είναι αναπαράμετρηση του $\tilde{\sigma}$.

4.4.3 Εάν $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, τότε $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = \nabla F \cdot \dot{\gamma}$. Δεδομένου ότι το $\nabla_S F - \nabla F$ είναι κάθετο στο $T_p S$, είναι κάθετο στο $\dot{\gamma}(t_0)$ για κάθε καμπύλη γ της S που διέρχεται από το p όταν $t = t_0$. Έπεται ότι $\nabla_S F \cdot \dot{\gamma} = \nabla F \cdot \dot{\gamma}$ στο p . Εάν ο περιορισμός της F στην S έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο p , το ίδιο ισχύει και για την $F(\gamma(t))$ για όλες τις καμπύλες γ της S που διέρχονται από το p , άρα $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = 0$ στο p . Έπεται ότι το ∇F είναι κάθετο στο $\dot{\gamma}$, και άρα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p . Αυτό σημαίνει ότι $\nabla_S F = 0$.

4.4.4 Το $d(f \circ \gamma)/dt = D_{\gamma(t)} f(\dot{\gamma}(t))$ είναι μη μηδενικό διότι το $\dot{\gamma}$ είναι μη μηδενικό (η γ είναι κανονική) και η $D_{\gamma(t)} f$ είναι αντιστρέψιμη (Πρόταση 4.4.6).

4.5.1 Η απεικόνιση μετάβασης $\Phi(t, \theta) = (\tilde{t}, \tilde{\theta})$ ορίζεται στην ένωση των ορθογωνίων $0 < \theta < \pi$ και $\pi < \theta < 2\pi$ (και $-1/2 < t < 1/2$). Προφανώς $\Phi(t, \theta) = (t, \theta)$ αν $0 < \theta < \pi$. Εάν $\pi < \theta < 2\pi$, πρέπει να έχουμε $\tilde{\theta} = \theta - 2\pi$. Εφόσον $\sin \frac{\tilde{\theta}}{2} = -\sin \frac{\theta}{2}$ και $\cos \frac{\tilde{\theta}}{2} = -\cos \frac{\theta}{2}$, λόγω της $\sigma(t, \theta) = \tilde{\sigma}(\tilde{t}, \tilde{\theta})$ πρέπει να έχουμε $\tilde{t} = -t$. Άρα $\Phi(t, \theta) = (t, \theta)$ εάν $0 < \theta < \pi$, και $= (-t, \theta - 2\pi)$ εάν $\pi < \theta < 2\pi$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι $+1$ στο πρώτο ορθογώνιο και -1 στο δεύτερο.

4.5.2 Έστω $\{\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ ένας άτλας της S τέτοιος ώστε η απεικόνιση μετάβασης $\Phi_{\alpha\beta}$ μεταξύ των σ_α και σ_β να ικανοποιεί την $\det(J(\Phi_{\alpha\beta})) > 0$ για κάθε α, β (Ορισμός 4.5.1). Σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.1, ο $\{f \circ \sigma_\alpha\}$ είναι ένας άτλας της \tilde{S} και οι απεικονίσεις μετάβασης του άτλαντα αυτού είναι ίδιες με εκείνες του άτλαντα της S , διότι $(f \circ \sigma_\beta)^{-1} \circ (f \circ \sigma_\alpha) = \sigma_\beta^{-1} \circ \sigma_\alpha$ (όπου ορίζεται η σύνθεση). Άρα ο άτλας $\{f \circ \sigma_\alpha\}$ προσδίνει στην \tilde{S} δομή προσανατολισμένης επιφάνειας.

Κεφάλαιο 5

5.1.1 Οι $f_x = 2x, f_y = 2y$ και $f_z = 4z^3$ μηδενίζονται ταυτόχρονα μόνο όταν $x = y = z = 0$, αλλά τότε δεν ικανοποιείται η $x^2 + y^2 + z^4 = 1$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.1, η επιφάνεια αυτή είναι λεία. (ii) Αν $f(x, y, z)$ είναι το αριστερό μέλος μείον το δεξιό μέλος, τότε $f_x = 4x(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2), f_y = 4y(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2), f_z = 4z(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)$. αν $f_z = 0$, τότε $z = 0$ αφού $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 > 0$ παντού στον τόρο· αν επίσης $f_x = f_y = 0$, τότε επειδή η αρχή των αξόνων δεν ανήκει στον τόρο, πρέπει να έχουμε $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, αλλά τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση του τόρου παίρνουμε $(2a^2)^2 = 4a^2(a^2 + b^2)$, πράγμα άτοπο. Για το τελευταίο μέρος, έστω $\sigma(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ η παραμέτρηση της Άσκησης 4.2.5. Έχουμε $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 = 2a(a + b \cos \theta)$,