1) b) $$I = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2 \, dy \right) dx$$


$$I = \int_0^1 \left[ \frac{(y+x)^3}{3} \right]_{y=\sqrt{x}}^1 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[ (x+1)^3 - (\sqrt{x}+x)^3 \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[ (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^{3/2} + 3x^2 + 3x^{5/2} + x^3) \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left( 3x + 1 - x^{3/2} - 3x^{5/2} \right) dx = \cdots$$

3) b) $I = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\frac{\arcsin y}{y}} y \cos(xy)\, dx \right) dy$

$$= \int_0^{\pi/2} y \left( \int_0^{\frac{\arcsin y}{y}} \cos(xy)\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} y \left[ \frac{\sin(xy)}{y} \right]_{x=0}^{x=\frac{\arcsin y}{y}} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} y \left( \frac{\sin\left(\frac{\arcsin y}{y} \cdot y\right)}{y} - 0 \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} dy = \frac{\pi}{2}$$

5)

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left( \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \right) dx$$

$$\left( = \int_a^b |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|\, dx, \right.$$

ὁ τύπος τοῦ σχολείου )

(23)

$$4\pi \leq \int_{D(0,2)} (x^2+y^2+1)\,dx\,dy \leq 20\pi$$

Θα βρούμε τα ακρότατα της $f(x,y) = x^2+y^2+1$

στον $D(0,2)$

Είναι προφανές ότι $\min f = m = 1$ $(= f(0,0))$

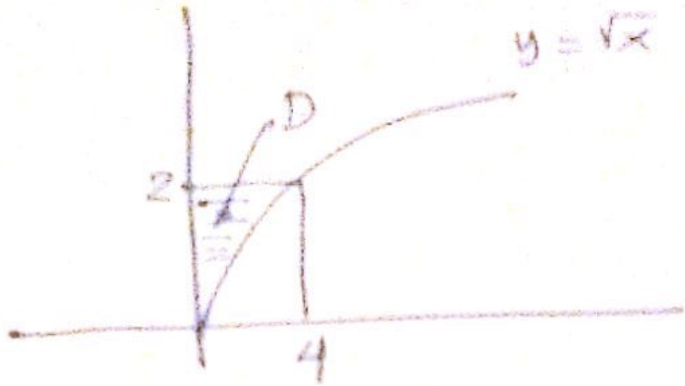
και $\max f = M = 5$ (παίρνεται στο σύνορο)

Από την άλλη

$$\text{Area } D(0,2) = 4\pi$$

Έπεται το αποτέλεσμα από Θ.Μ.Τ.

8)




$$I = \iint_D y\left[1-\cos(\pi x/4)\right] dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left( \int_0^{y^2} y\left[1-\cos\frac{\pi x}{4}\right] dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 y \left[ x - \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{4} \right]_{x=0}^{y^2} dy$$

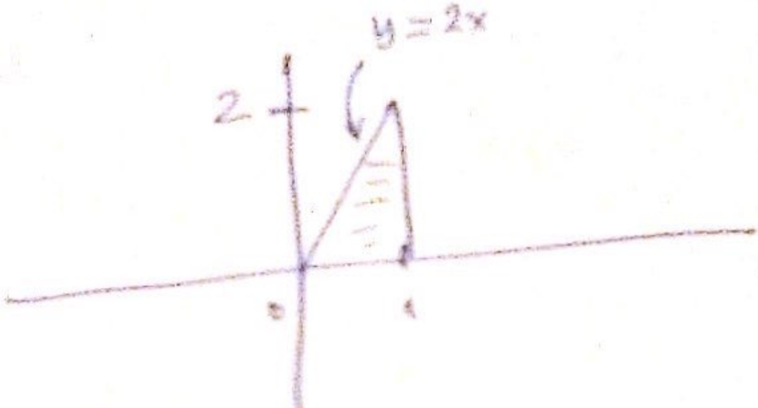
$$= \int_0^2 y \left[ y^2 - \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi y^2}{4} \right] dy =$$

$$= \int_0^2 y^3\,dy - \frac{4}{\pi}\int_0^2 y \sin\frac{\pi y^2}{4}\,dy = \cdots$$

4) Αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης

$$I = \int_0^2 \left( \int_{y/2}^1 (x+y)^2 \, dx \right) dy$$

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \le y \le 2 \quad y/2 \le x \le 1 \}$$



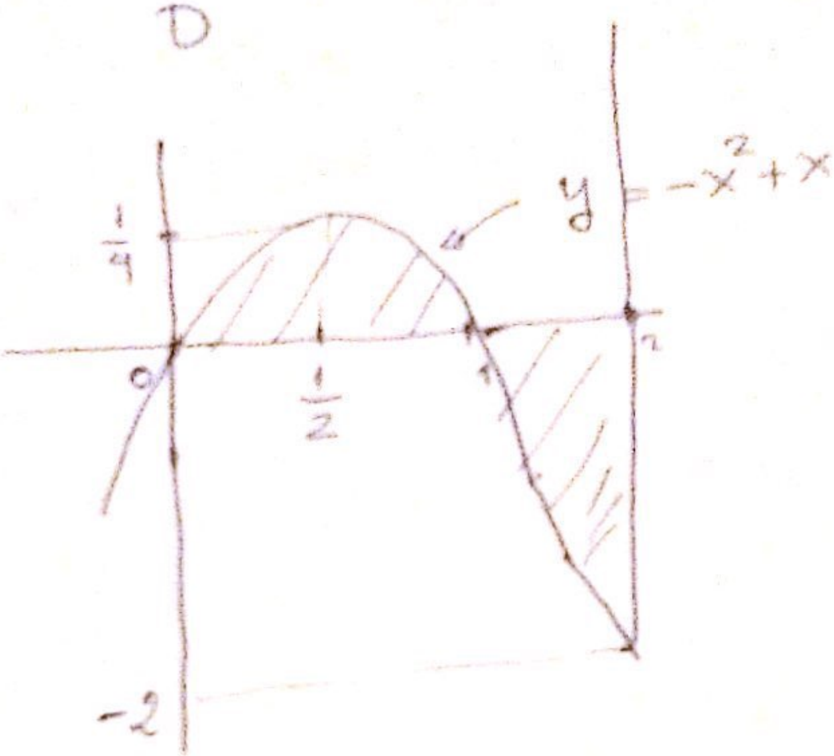

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 2x \}$$

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^{2x} (x+y)^2 \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{(x+y)^3}{3} \right]_{y=0}^{2x} dx = \int_0^1 \frac{26}{3} x^3 \, dx = \frac{26}{9}.$$

19)

$$I = \iint_D (x^2 + 2xy^2 + 2)\,dx\,dy$$




$I = I_1 + I_2$ όπου

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + 2xy^2 + 2)\,dx\,dy$$

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + 2xy^2 + 2)\,dx\,dy$$

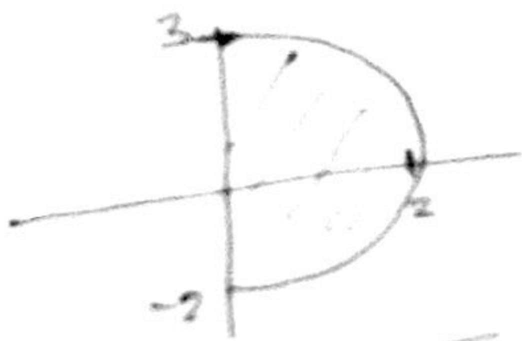
$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le -x^2 + x\}$

$D_2 = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2 \ \ -x^2 + x \le y \le 0\}.$

12)
$$I = \int_0^2 \left( \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} \left( \frac{5}{\sqrt{2+x}} + y^3 \right) dy \right) dx$$

$$\left( y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{4}(4-x^2) \Leftrightarrow x^2 + \frac{4y^2}{9} = 4 \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1. \right)$$




$$I = \int_0^2 \left[ \frac{5y}{\sqrt{2+x}} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{15\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}}\, dx = 15 \int_0^2 \sqrt{2-x}\, dx = \cdots$$

(25)

$$\int_0^x \left( \int_0^t F(u)\,du \right) dt = \int_0^x (x-u) F(u)\,du$$

Απόδειξη

$$\int_0^x \left( \int_0^t F(u)\,du \right) dt = \int_0^x (t)' \left( \int_0^t F(u)\,du \right) dt$$

$$= \left[ t \int_0^t F(u)\,du \right]_0^x - \int_0^x t\,F(t)\,dt$$

$$= x \int_0^x F(u)\,du - \int_0^x u\,F(u)\,du$$

$$= \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du$$


Συνεκτικό κατα δρόμους χωρίο τού $\mathbb{R}^2$

Έστω $f$ συνεχής στό $W$. Άν $D$ απλό υποσύνολο τού $W$, τότε είναι κ' αυτό συνεκτικό και συμπαγές. Κατα συνέπεια ή $f$ έχει $m$ κ' $M$ στό $D$ και σύμφωνα μέ τό Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στα $m$ και $M$. Επειδή

$$m \leq \bar{f} = \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \leq M$$

αποδεικνύεται τό ζητούμενο.

<u>Αντιπαράδειγμα</u> $f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 1 & (x,y) \in [2,4]^2 \end{cases}$

$W = D = [0,1]^2 \times [2,4]^2$ δέν είναι συνεκτικό

$m = 0 \quad M = 1 \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 4$

$$\bar{f} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}\,!$$