

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

1. ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΗΝ ΠΕΜΠΤΗ 23/11

(Παραδώστε μόνο τις **2.** γ), **3.**, **4.** α).

1. Βρείτε τα ολικά διαφορικά των συναρτήσεων

α)  $z = x/y,$

β)  $z = x^2y + xy^3,$

γ)  $w = e^{xyz}.$

2. Ποιές από τις παρακάτω μορφές είναι πλήρεις; (ολικά διαφορικά). Για αυτές που είναι, βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού.

α)  $(e^y + 1) \cos x dx + e^y \sin x dy,$

β)  $y(x^2 + \ln y) dx + x dy,$

γ)  $2xy dx + (y^2 - x^2) dy,$

δ)  $(x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 7y^3) dx + (y^4 + 2y^2 - x^3 + 5x^2y - 21xy^2) dy.$

3. Ο συντελεστής θερμικής επέκτασης ενός αερίου ορίζεται ως

$$\sigma = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}.$$

Στις σημειώσεις υπάρχει έκφραση για το  $\sigma$  όταν το αέριο ακολουθεί την καταστατική εξίσωση  $PV = nRT$ . Βρείτε την αντίστοιχη έκφραση όταν ικανοποιείται ή εξίσωση van der Waals:

$$(P + (a/V^2)) (V - b) = RT.$$

(Υπόδειξη: Θέστε

$$F(P, V, T) = (P + (a/V^2)) (V - b) - RT = 0,$$

και πάρτε το ολικό διαφορικό της  $F$ ).

4. Χρησιμοποιώντας αυτά που μάθαμε για τις παραγώγους πεπλεγμένων συναρτήσεων, βρείτε την  $dy/dx$  όταν

α)  $3x^2 + 7xy + 9y^2 = 6,$

β)  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2 = 0,$

γ)  $x^3 + y^3 = 3xy,$

δ)  $\sin x \cos y = 1,$

ε)  $x^m y^n = e^{x+y}, m, n \in \mathbb{R}.$

5. Έστω  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο  $\mathbb{R}^2$ . Ορίζουμε την απόκλιση του  $F$  με τη σχέση

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Έστω  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη συνάρτηση. Βρείτε έκφραση για το

$$\operatorname{div}(\nabla\phi).$$