3. Ὁλοκλήρωση

Ἐὰν μᾶς δίνεται μία συνάρτηση $f(x)$, ὑπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ὥστε

$$\frac{dF}{dx} = f(x);$$

3.1 Τὸ ἀόριστο ὁλοκλήρωμα

Ἄν ὑπάρχει αὐτὴ ἡ F καλεῖται παράγουσα τῆς f. Ἐπίσης ὅλες οἱ παράγουσες τῆς f εἶναι τῆς μορφῆς $F(x)+c$, ὅπου c σταθερά. Τὸ ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int f(x)dx$ τῆς f εἶναι ἁπλῶς ἡ οἰκογένεια τῶν παραγουσῶν συναρτήσεων τῆς f:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Ἐξηγοῦμε τώρα γιατὶ ὅλες οἱ παράγουσες θὰ ἔχουν τὴν μορφή $F(x)+c$ ὅταν μία παράγουσα εἶναι γνωστή. Ἔστω G παράγουσα τῆς f. Τότε

$$\frac{dG(x)}{dx} = f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

συνεπῶς $\frac{d}{dx}\big(G(x)-F(x)\big)=0$ καὶ κατὰ συνέπεια

$$G(x) = F(x) + c.$$

Τὸ ἀόριστο ὁλοκλήρωμα ἔχει μόνο μία ἰδιότητα, ἡ ὁποία ὅμως εἶναι σημαντική:

Ἄν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$

3.2 Μέθοδοι ὁλοκλήρωσης

Ἡ ὁλοκλήρωση εἶναι ἡ ἀντίστροφη διαδικασία τῆς παραγώγισης. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ $\int f(x)dx$ σκεφτόμαστε: ποιά συνάρτηση F ἂν παραγωγισθεῖ θὰ μᾶς δώσει τὴν f;

Γιά κάποιες συναρτήσεις ἡ ἐρώτηση αὐτή ἔχει ἁπλή ἀπάντηση τήν ὁποία παραθέτομε σέ πίνακα παρακάτω. Γιά κάποια ὁλοκληρώματα ὅμως, ὅπως π.χ. τό

$$\int e^{-x^2}dx$$

πού ἀπαντᾶται σχεδόν παντοῦ, στήν στατιστική θερμοδυναμική, στήν κινητική θεωρία ἀερίων, στήν στατιστική, κ.λπ., ἁπλῶς δέν ὑπάρχει (ἁπλή τουλάχιστον) ἀπάντηση

3.2.1 Στοιχειώδη ὁλοκληρώματα.

Στόν παρακάτω πίνακα περιέχονται ὁρισμένες στοιχειώδεις συναρτήσεις, οἱ παράγουσές τους καί τά ἀόριστα ὁλοκληρώματά τους

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)\,dx$
a σταθερά	ax	$ax+c$
$x^n, n\in\mathbb{R}, n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\tan x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$-\cot x+c$
e^x	e^x	e^x+c

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)\,dx$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)$	$\sin^{-1}(x) + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\cos^{-1}(x)$	$\cos^{-1}(x) + c$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\tan^{-1}x$	$\tan^{-1}x + c$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x + c$

3.2.2 Μέθοδος ἀντικατάστασης

Κάνοντας μία ἀλλαγή μεταβλητῆς, μποροῦμε νά φέρουμε ἕνα ὁλοκλήρωμα σέ μία ἀπό τίς βασικές μορφές τοῦ προηγούμενου πίνακα

- $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$. Θέτουμε $y = ax+b$,

$$dy = a\,dx.$$

Ἄρα, $I = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{a}\int y^{-1/2}\,dy$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= -\frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c.$$

• $I=\int \frac{dx}{(a-x)^2}$ $\qquad y=a-x$

$dy=-dx$

Άρα, $I = -\int \frac{dy}{y^2} = -\int y^{-2}\,dy = \frac{1}{y}+c = \frac{1}{a-x}+c.$

• Στην στατιστική θερμοδυναμική, εμφανίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int (2J+1)\,e^{\frac{-BJ(J+1)}{kT}}\,dJ$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{d}{dJ}\left(-\frac{B}{kT}\cdot J(J+1)\right) = -\frac{B}{kT}\cdot(2J+1)$,

με άλλα λόγια μας εμφανίζεται η ιδανική κατάσταση όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι της μορφής

$$I = k\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \quad , \quad k \text{ σταθερά}$$

Στην περίπτωση αυτή η αντικατάσταση $y=g(x)$

$dy=g'(x)\,dx$

μας δίνει $I = k\int f(y)\,dy$.

Στο παράδειγμά μας, η αντικατάσταση $y=-\frac{B}{kT}J(J+1)$

$dy=-\frac{B}{kT}(2J+1)\,dJ$

δίνει το ολοκλήρωμα ίσο με

$$-\frac{kT}{B}\int e^{y}\,dy = -\frac{kT}{B}\,e^{-\frac{B}{kT}J(J+1)}+c.$$

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις.

Χρησιμοποιούμε συχνά τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις, σε ολοκληρώματα των παρακάτω μορφών:

$$\text{i)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{ii)} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{iii)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

• <u>Άσκηση</u> Υπολογίστε τα ολοκληρώματα i) και ii) κάνοντας την αντικατάσταση $x = a\cosh y$ κ' $x = a\sin y$ αντίστοιχα

Κάνουμε ενδεικτικά το iii) όπου χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $x = a\sinh y$, $dx = a\cosh y\, dy$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\cosh y\, dy}{\sqrt{a^2\sinh^2 y + a^2}} = \int \frac{a\cosh y\, dy}{|a|\sqrt{\sinh^2 y+1}} =$$

$$= \frac{a}{|a|}\int \frac{\cosh y\, dy}{\sqrt{\cosh^2 y}} = \frac{a}{|a|}\int dy = \frac{a}{|a|}\, y + c = \frac{a}{|a|}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

και υποθέτοντας $a>0$, παίρνουμε $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

• Αλγεβρικές αντικαταστάσεις

Κάποιες φορές, ολοκληρώματα τα οποία περιέχουν ρίζες, <u>ενδέχεται</u> να απλοποιηθούν με την αντικατάσταση $y = \sqrt{\ }$.

• $I = \int x\sqrt{4x+1}\, dx$

$$y = \sqrt{4x+1}$$

$$y^2 = 4x+1$$

$$x = \frac{y^2-1}{4}$$

$$dx = \frac{1}{2}\, y\, dy$$

$$I = \frac{1}{4}\int (y^2-1)\, y^2\, \frac{dy}{2}$$

$$\rightarrow\ = \frac{1}{8}\int (y^4 - y^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3}\right] + c$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(4x+1)^{5/2}}{5} - \frac{(4x+1)^{3/2}}{3}\right] + c.$$

• Άσκηση Υπολογίστε τό $I = \int x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$

κάνοντας τήν αντικατάσταση $y = \sqrt{1-x^2}$.

3.2.3 Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών ολοκληρωτέων ποσοτήτων.

Κάποιες φορές, οι απλοί τριγωνομετρικοί τύποι μάς βοηθούν γιά νά υπολογίσουμε ολοκληρώματα παραστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

• $$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx =$$

$$= -\ln|\cos x| + c.$$

• $$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

• $$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x \cos x\, dx$$

$$= \sin x - \int \sin^2 x\, (\sin x)'\, dx$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

• Άσκηση Υπολογίστε τά

$$\int \sin^3 x\, dx, \quad \int \cos^2 x\, dx.$$

3.2.4 Κατά παράγοντες ολοκλήρωση

Η μέθοδος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης είναι η δεύτερη εξαιρετικά χρήσιμη μέθοδος ολοκλήρωσης που βλέπουμε. Σημειώνουμε ότι γιά τόν υπολογισμό κάποιων ολοκληρωμάτων απαιτείται συνδυασμός τών δύο μεθόδων, ή ακόμα κ' κάποιο τέχνασμα. Η μέθοδος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης, συνίσταται στόν νά γράψουμε τόν κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων στήν ολοκληρωτική του μορφή:

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

- $\int x\sin x\,dx = -\int x(\cos x)' = -x\cos x + \int (x)'\cos x\,dx$

$$= -x\cos x + x + c$$

Προσοχή! Αν γράψουμε $\int x\sin x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\sin x\,dx$,

η μέθοδος δέν μάς οδηγεί πουθενά!

- <u>Άσκηση</u>: $\int x\cos x\,dx$

- $\int x e^x\,dx = \int x\cdot(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)' e^x\,dx =$

$$xe^x - \int dx = xe^x - x + c.$$

Προσοχή! (Όπως κ' παραπάνω)

Όμως,

- $\int \ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot(\ln x)'\,dx$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

$\bullet\ I = \int e^x \sin x\,dx = \int (e^x)' \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$

(Ξανακάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση!) $= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x\,dx$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$

$= e^x (\sin x - \cos x) - I.$

Άρα, $I = e^x \dfrac{(\sin x - \cos x)}{2} + c$

$\circ\ \int e^x \cos x\,dx$ (Άσκηση)

<u>Αναδρομικοί τύποι</u>

$\cdot\ I_n = \int x^n e^x\,dx = \int x^n (e^x)'\,dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} \cdot e^x\,dx$

$= x^n e^x - n I_{n-1}$

Αν θέλουμε το $\int x^3 e^x\,dx = I_3$, γράφουμε

$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2 = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2 I_1) =$

$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 (x e^x - I_0)$

$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 1) e^x + c.$

$\bullet\ I_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx = -\int \sin^{n-1} (\cos x)'\,dx$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\,dx$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} + (n-1) I_n$. Άρα

$n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$. | <u>Άσκηση</u>: $I_n = \int \cos^n x\,dx$!

3.2.5. Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

- $I = \int \frac{3x+1}{2x-3}\,dx$. Εδώ, προσπαθούμε να παραστήσουμε τον παρονομαστή στον αριθμητή!

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-3)+11/2}{(2x-3)}\,dx = \frac{3}{2}\int dx + \frac{11}{2}\int \frac{dx}{2x-3}$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\ln|2x-3| + c$$

- $I = \int \frac{x^2+2x+3}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{(x^2-x-2)+(3x+3)}{x^2-x-2}\,dx =$

Συμπληρώστε!

- Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$I = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$ Βλέπουμε ότι ο αριθμητής είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή, και ο παρονομαστής είναι γινόμενο μονωνύμων υψωμένων στην πρώτη δύναμη. Τότε

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$

Για $x=-1$, $-1 = A$

Για $x=-2$ $-2 = -B \Rightarrow B = 2$ Άρα

$$I = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = -\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c.$$

• Ἡ διαφορική ἐξίσωση $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$ γίνεται

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt$$ ἢ ἄρα, $$\int \frac{dx}{(a-x)\ (b-x)} = t+c.$$

Ὑπολογίστε τὰ ὁλοκληρώματα στὰ ἀριστερά, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα.

• Ἐνδέχεται νὰ ἔχουμε ὁλοκληρώματα αὐτῆς τῆς μορφῆς

$I = \int \frac{x}{(x-1)^2}\, dx$. Τότε

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$x = A(x-1) + B \qquad \text{Για } x=1,\ 1=B$$

Θέτουμε τώρα x ὁποιαδήποτε τιμή $\neq 1$. Ἡ πιό εὔκολη, $x=0$

$$0 = -A+B = -A+1 \Rightarrow A=1,$$ Ἄρα

$$I = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

• Τέλος, ἐνδέχεται νὰ ἔχουμε τὴν παρακάτω κατάσταση:

$I = \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$. Τότε

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$

$$x = A(x^2+1) + (Bx+\Gamma)(x-1)$$

Γιά $x=1$, $1 = 2A \Rightarrow A = 1/2$. Γιά νά βροῦμε τώρα τά B, Γ, θέτουμε $x =$ δύο οποιεσδήποτε τιμές $\neq 1$.

Γιά $x=0$ $\quad 0 = \frac{1}{2} - \Gamma \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2}$

Γιά $x=-1$ $\quad -1 = 1 + \left(-B + \frac{1}{2}\right)(-2) = 2B - 1 \Rightarrow B = 1/2$

Ἄρα, $\quad I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c.$$

- Ὅταν ὁ παρονομαστής εἶναι τριώνυμο, μέ ἀρνητική διακρίνουσα, συνήθως συμπληρώνουμε τό τετράγωνο

$I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$. Εἶναι $x^2+x+1 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + 1$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

Θέτουμε $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $dy = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ καί

$$I = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

- Τήν ἴδια μέθοδο χρησιμοποιοῦμε γιά νά φέρουμε ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ σέ κάποιο ἀπό τά $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.