M1 5η εβδομάδα Ι. Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Ολοκλήρωση - Συνέχεια

3.4 Τό αόριστο ολοκλήρωμα. Τό θέμα μας ξεκινά μέ τήν ερώτηση: Έστω $f(x)$ συνάρτηση. Υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε

$$\frac{dF}{dx} = f(x);$$ Τέτοια F θά καλείται παράγουσα τής f.

Πρός τό παρόν, δέν θά δώσουμε τήν απάντηση. Παρατηρούμε όμως ότι αν υπάρχει τέτοια F τότε όλες οι $G(x)$ γιά τίς οποίες ισχύει

$$\frac{dG}{dx} = f(x)$$

είναι τής μορφής $G(x) = F(x) + c$, c σταθερά. Επιστρέφοντας τώρα στήν αρχική μας f, ορίζουμε τό ορισμένο της ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ώς

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

όπου F παράγουσα τής f. Μερικές φορές θά χρησιμοποιούμε καί τόν συμβολισμό

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b .$$

Έτσι λοιπόν λ.χ.,

$$\int_1^2 (x^2 + 3x - 5)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x\right]_1^2 = \frac{11}{6}$$ καί

$$\int_0^{\pi/6} \cos(3x)\, dx = \left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}.$$

3.4.1 Ἰδιότητες τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

α) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

β) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx$ (Κανόνας Châsles).

γ) Ἐάν f ἄρτια $(f(x)=f(-x))$ τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

δ) Ἐάν f περιττή $(f(x)=-f(-x))$, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Ἐφαρμογή: Κάποιες κυματοσυναρτήσεις δίνονται ἀπό

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}\cdot\frac{n\pi x}{\ell}}$$ ὅπου $\ell > 0$ $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, ἐάν n περιττός καί m ἄρτιος,

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \psi_n(x)\cdot\psi_m(x)\,dx = 0.$$

3.4.2 Μή γνήσια ὁλοκληρώματα

Τί νόημα μποροῦν νά ἔχουν ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,,\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$ γιά f συνεχή

ἤ ἀκόμα $\int_a^b f(x)\,dx$ μέ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$?

Τέτοια ὁλοκληρώματα ὁρίζονται ὡς ὅρια. Γιά παράδειγμα

τό $$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx = \lim_{a\to\infty} I_a \quad \text{ὅπου} \quad I_a = \int_0^a e^{-kx}\,dx.$$

Ἐπειδή $$I_a = -\frac{1}{k}\left[e^{-kx}\right]_0^a = -\frac{1}{k}\left[e^{-ak}-1\right]$$ ἔχουμε τά ἑξῆς:

Ἄν $k<0$, $\lim\limits_{a\to+\infty} I_a = -\infty$ καί λέμε ὅτι τό $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$ ἀποκλίνει

Ὅμως ἄν $k>0$ τότε $\lim\limits_{a\to+\infty} I_a = \frac{1}{k}$ καί γράφουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k}$$ (τό ὁλοκλήρωμα συγκλίνει).

Ἡ ἀπόκλιση ἑνός ὁλοκληρώματος μπορεῖ νά εἶναι ταλαντωτική. Λόγου χάρη

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left[\sin x\right]_0^a = \lim_{a\to+\infty} \sin a.$$

Τό τελευταῖο ὅριο, ὄχι μόνο δέν ὑπάρχει ἀλλά καί ταλαντώνεται μεταξύ -1 καί 1.

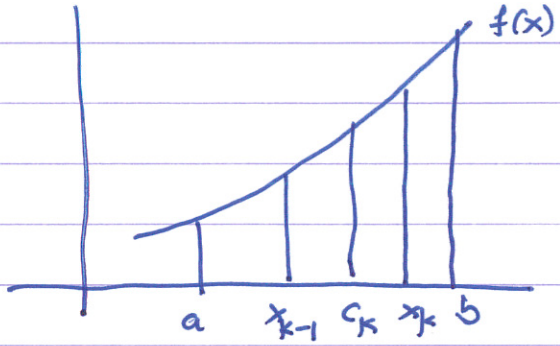
Ἄς εἶναι τώρα τό $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Αὐτό ὁρίζεται ὡς

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to0^+}(-\ln a) = +\infty,$$

ἄρα ἀποκλίνει. Ὅμως τό $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 (x)^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to0^+} 2\left[x^{1/2}\right]_a^1 = 2$$ καί συγκλίνει!

3.5. Τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα ὡς ἄθροισμα.



Δεῖτε τό διπλανό σχῆμα. Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής στό $[a,b]$ διαιροῦμε τό $[a,b]$ σέ ὑποδιαστήματα μήκους $\frac{b-a}{n}$. Εἶναι δηλαδή

$$a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$$ καί

$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Παίρνουμε τώρα n ἀριθμούς $c_1, \dots, c_n$ ἐντός τῶν (x_{k-1}, x_k), δηλαδή,

$$a \leq c_1 \leq x_1 \leq c_2 \leq x_2 \dots \leq x_{n-1} \leq c_n \leq b$$

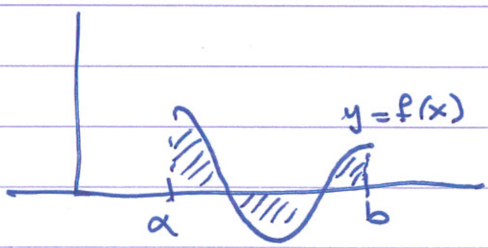
Ὑπολογίζουμε τό ἄθροισμα $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \frac{b-a}{n}$.

Τό θεμελιώδες θεώρημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ μᾶς λέει τότε ὅτι

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

3.6. Ἐφαρμογές τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος

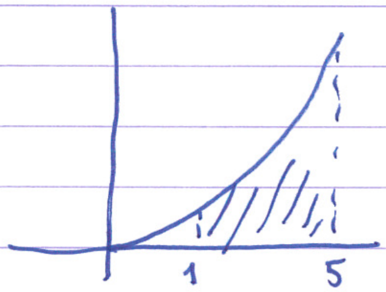
3.6.1 Ἐμβαδόν κάτω ἀπό καμπύλη



Ἔστω D τό γραμμοσκιασμένο ἐμβαδόν. Τότε

$$D = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ἐφαρμογή: i) Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν πού περικλείουν οἱ $y=x^2$, $x=1$, $x=5$.



Ἐπειδή $x^2>0$ στό $[1,5]$,

$$D=\int_1^5 x^2\,dx = \frac{124}{3}.$$

ii) Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν πού περικλείουν οἱ $y=\frac{x}{1+x^2}$, $x=0$, $x=1$. Ἐπειδή $\frac{x}{1+x^2}\geq 0$ στό $[0,1]$,

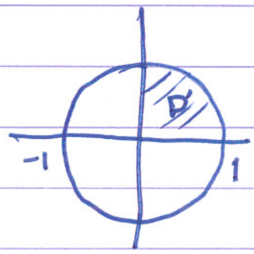
$$D=\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

iii) Ὅπως παραπάνω, ἀλλά τώρα $x=-1$, $x=1$. Προσέξτε ὅτι $\frac{x}{1+x^2}\leq 0$ στό $[-1,0]$. Ἄρα

$$D = -\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{dx} = \ln 2.$$

⚠. Τό ἐμβαδόν πρέπει νά εἶναι πάντοτε θετικό, ἐνῶ τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα ὄχι ἀπαραίτητα!

iv) Τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἀκτίνας 1. Ἀπό συμμετρία,



$$D = 4D' = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\,dx \quad (\text{γιατί;})$$

Κάνετε τώρα τήν ἀντικατάσταση

$x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$

Γιά τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{1+\sin 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\cos 2t}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x - \frac{\cos 2(\sin^{-1}(x))}{2}\right) + c$$

Ἄρα $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x - \frac{\cos 2(\sin^{-1}(x))}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$

v) Τὸ ἐμβαδὸν μεταξὺ δύο καμπυλῶν $y=f(x)$ $y=g(x)$ καὶ ὁρισμένων στὸ $[a,b]$ εἶναι

$$D = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

3.6.2 Ἔργο παραγόμενο ἀπὸ δύναμη

Ἐὰν ἡ δύναμη εἶναι σταθερή, τὸ ἔργο ποὺ παράγεται πάνω σὲ μία εὐθεῖα εἶναι ἁπλῶς δύναμη × ἀπόσταση. Ἐὰν $F=F(x)$ $x \in [a,b]$ τότε

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

3.6.3. Μέση τιμή.

<u>Θεώρημα</u> Ἐὰν $f:[a,b]$ συνεχής, τότε $\exists\, x_0 \in [a,b]$:

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Ὀνομάζουμε τὸ $f(x_0)$ μέση τιμή τῆς f (ὁλοκληρωτική) καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\bar{f}$.