ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Βρείτε την καμπυλότητα και τη στρέψη της παραμετρημένης καμπύλης

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Απαντήστε τεκμηριωμένα στα εξής ερωτήματα: είναι η καμπύλη αυτή επίπεδη; κλειστή; πού κείται;

2. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης, της κύριας καθέτου και της αμφικαθέτου ευθείας της καμπύλης

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t = 1.$$

3. Έστω κανονική καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ και $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ τα διανύσματα του τριάκμου Frenet τηω $\boldsymbol{\gamma}$. Δείξτε ότι:

(1) $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}) = \tau$,
(2) $(\dot{\mathbf{b}}, \ddot{\mathbf{b}}, \dddot{\mathbf{b}}) = \tau^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)$,
(3) $(\dot{\mathbf{t}}, \ddot{\mathbf{t}}, \dddot{\mathbf{t}}) = \kappa^3 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$,

όπου κ και τ είναι η καμπυλότητα και η στρέψη της $\boldsymbol{\gamma}$ αντίστοιχα. (Υπόδειξη: γράψτε τις παραγώγους των $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ χρησιμοποιώντας τους τύπους των Frenet–Serret.)

4. Δείξτε ότι η καμπύλη

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\alpha \int_{t_0}^{t} \sin\phi(u)du, \alpha \int_{t_0}^{t} \cos\phi(u)du, \beta t\right), \quad t \in (a, b),$$

όπου α, β σταθερές και ϕ είναι λεία συνάρτηση του (a, b), έχει σταθερό λόγο κ/τ.

5. Δείξτε ότι μία καμπύλη είναι επίπεδη αν το εγγύτατο επίπεδό στό τυχόν σημείο της διέρχεται από σταθερό σημείο. (Υπόδειξη: η εξίσωση του εγγυτάτου επιπέδου στό $\mathbf{x} = \gamma(s)$ είναι $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Παραγωγίζοντας και υποθέτοντας ότι η καμπύλη δεν είναι επίπεδη, συμπεράνατε ότι τα $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ και $\mathbf{t}$ είναι παράλληλα).

6. Βρείτε την γενική λεία συνάρτηση f για την οποία η καμπύλη

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t, f(t)), \quad R > 0,$$

είναι επίπεδη.

7. Έστω η στρεβλωμένη κυβική

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) Βρείτε την εξίσωση του εγγυτάτου επιπέδου της στο τυχόν σημείο της.
β) Αποδείξτε ότι τα εγγύτατα επίπεδα σε τυχόντα τρία σημεία της $\boldsymbol{\gamma}$ διέρχονται από σημείο του επιπέδου που ορίζεται από τα τρία αυτά σημεία.

8. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στα παρακάτω. Έστω $\boldsymbol{\gamma}(s)$ όπου s η παράμετρος μήκους τόξου με $g(0) = P$. Απότο ανάπτυγμα Maclaurin δεύτερης τάξης

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\gamma}(0) + \dot{\boldsymbol{\gamma}}(0)s + \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(0)\frac{s^2}{2} + o(s^2)$$

παίρνουμε

$$\boldsymbol{\gamma}(s) \sim \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\dot{\kappa}_0}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3\right)$$

σε μία περιοχή του $s = 0$. (Με κ_0 και τ_0 συμβολίζουμε την καμπυλότητα και την στρέψη της καμπύλης αντίστοιχα στο P). Η παραπάνω λέγεται *κανονική μορφή* της καμπύλης. Παρατηρήστε ότι με αυτήν την μορφή, τα επίπεδα xy, yz και zx είναι το εφαπτόμενο, το κάθετο και το ευθειοποιούν αντίστοιχα επίπεδο της $\boldsymbol{\gamma}$ στο P.

9. Δείξτε ότι αν το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{\gamma}(s)$ μίας καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ σχηματίζει σταθερή γωνία με την εφαπτομένη $\mathbf{t}$, τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι λογαριθμική έλικα.

10. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών, βρείτε καμπύλη με

$$\kappa = \frac{1}{as+b}, \quad \tau = 0, \quad a > 0,\ s > 0.$$