ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Δίνεται η επιφάνεια $z = xy$. Βρείτε τις επιφανειακές καμπύλες κατά μήκος των οποίων η γκαουσσιανή καμπυλότητα K είναι ίση με $-1/c^2$ όπου $c \neq 0$.

(Υπόδειξη: Βρείτε την δ.ε. των ασφμπτωτικών γραμμών. Διακρίνετε περιπτώσεις για το c.)

2. Για την επιφάνεια

$$\sigma(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u, sinv, \cos u + \log(\tan(u/2)), \quad \tan(u/2) > 0,$$

βρείτε:

(1) τις κύριες καμπυλότητες, και με τη βοήθεια αυτών
(2) την γκαουσσιανή και την μέση καμπυλότητα.

3. Έστω η ευθειογενής επιφάνεια

$$\sigma(u,v) = \gamma(u) + b\mathbf{n}(u),$$

όπου $\mathbf{n}$ η πρωταρχική κάθετος της μοναδιαίας ταχύτητας καμπύλης γ. Δείξτε ότι η γκαουσσιανή καμπυλότητα της σ είναι 0 ακριβώς όταν η γ είναι επίπεδη.

(Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να ανακαλέσετε τους τύπους Frenet–Serret. Δείξτε ότι $N = 0$ και υπολογίστε το M).

4. Βρείτε τόν πίνακα της απεικόνισης Weingarten, τις κύριες καμπυλότητηες και τα κύρια διανύσματα της

$$\sigma(u,v) = (\cos u + \cos v, \sin u + \sin v, u + v)$$

Δείξτε με τή βοήθεια αυτών ότι η μέση καμπυλότητα της σ είναι 0.

5. Η κάθετη καμπυλότητα μίας επιφανειακής καμπύλης που τέμνει ορθογώνια μία ασυμπτωτική γραμμή της επιφάνειας, ισούται με το διπλάσιο της μέσης καμπυλότητας της επιφάνειας στο σημείο τομής. Συμπεράνετε ότι σε μία ελαχιστική επιφάνεια ($H = 0$) το δίκτυο των ασυμπτωτικών γραμμών είναι ορθογώνιο.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα του Euler).

6. Η απεικόνιση Gauss μίας ελαχιστικής επιφάνειας ($H = 0$) είναι σύμμορφη απεικόνιση.

(Υπόδειξη: Συμβολίστε με III την πρώτη θεμελιώδη μορφή της $\sigma^* = \mathcal{G}(\sigma)$. Αν I και II είναι η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της σ αντίστοιχα, τότε δείξτε ότι

$$III - 2HII + KI = 0).$$

7. Δείξτε ότι στα ομφαλικά σημεία μίας επιφάνειας είναι $H^2 = K$. Βρείτε κατόπιν τα ομφαλικά σημεία της επιφάνειας $xyz = 1$.

8.$*$ (Μία άλλη διαπραγμάτευση του Θεωρήματος Gauss). Έστω $\sigma(u,v)$, $(u,v)\in R$ τμήμα επιφάνειας με γκαουσσιανή καμπυλότητα $K(u,v)$. Η *ολοκληρωτική καμπυλότητα* του σ είναι

$$\omega_\sigma = \iint_R K(u,v)\|\sigma_u\times\sigma_v\|dudv \equiv \iint_\sigma K d\sigma$$

δηλαδή το *επιφανειακό ολοκλήρωμα* της K. Έστω σ^* η εικόνα της σ μέσω της απεικόνισης Gauss. Δείξτε ότι

$$|\omega_\sigma| = \iint_{\sigma^*} d\sigma^*$$

(Υπόδειξη: Ουσιαστικά, όλα τα παραπάνω υπάρχουν στο βιβλίο μ]ε άλλη μορφή. Ξεσκονίστε τις γνώσεις σας για επιφανειακά ολοκληρώματα και χρησιμοποιείστε τον τύπο αλλαγής μεταβλητών).

9. Μία επιφάνεια σ λέγεται *κλειστή* όταν $\mathcal{G}(\sigma)=S^2$, δηλαδή όταν η απεικόνιση Gauss είναι επί. Δείξτε ότι με την βοήθεια της άσκησης 9, ότι οι κλειστές επιφάνειες έχουν σταθερή ολοκληρωτική καμπυλότητα ίση με 4π. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται αναπάντεχο: μία τυχούσα κλειστή επιφάνεια μπορεί να είναι όσο παράξενη επιθυμείτε, παρ΄ όλα αυτά η ολοκληρωτική της καμπυλότητα θα είναι όση και της S^2 δηλαδή 4π. Η εξήγηση του αποτελέσματος αυτού είναι τοπολογική, και ανάγεται στο Θεώρημα Gauss–Bonnet.

10. Δείξτε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας εφαπτομένων μιάς καμπύλης είναι είτε προβολικά, ή επίπεδα.

11. (Γραμμές καμπυλότητας). Μία επιφανειακή καμπύλη λέγεται γραμμή καμπυλότητας αν σε κάθε σημείο της, η εφαπτομένη είναι κύριο διάνυσμα (κύρια κατεύθυνση). Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση των γραμμών καμπυλότητας είναι

$$(EM-LF)du^2 + (EN-LG)dudv + (FN-MG)dv^2 = 0.$$

Δείξτε επίσης ότι στην περιοχή ενός μη ομφαλικού σημείου υπάρχουν δύο οικογένειες *ορθογωνίων* γραμμών καμπυλότητας.