ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Λύνοντας τις γεωδαισιακές εξισώσεις, προσδιορίστε τις γεωδαισιακές του ορθου κυκλικού κώνου

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u).$$

2. Προσδιορίστε ξανά τιω γεωδαισιακές του κώνου χρησιμοποιώντας την Άσκηση 4.3.2 του βιβλίου.

3. Δείξτε ότι οι επιφάνειες

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log(u), \quad u > 0,$$

και

$$\sigma(u^*,v^*) = (u^*\cos v^*, u^*\sin v^*, u^*, \quad u^* > 0,$$

έχουν την ίδια καμπυλότητα Gauss στο τυχόν σημείο που ικανοποιεί την $(u,v) = (u^*,v^*)$. Δείξτε διά της ατόπου απαγωγής ότι δεν είναι ισομετρικές.

(Υπόδειξη: εάν είναι ισομετρικές υπάρχει απεικόνιση μετάβασης

$$u^* = U^*(u,v), \quad v^* = v^*(u,v),$$

ώστε $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$ και $K = K^*$ στα αντίστοιχα σημεία. Εργαστείτε πάνω στην σχέση $K = K^*$).

4. Εξετάστε αν υπάρχει επιφάνεια με

$$E = G = 1, \quad F = M = N = 0, \quad L = -1.$$

5. Δείξτε ότι η ευθειογενής επιφάνεια

$$\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\mathbf{n}(u)$$

έχει μηδενική καμπυλότητα Gauss αν και μόνο αν η καμπύλη γ είναι επίπεδη.

6. Δίνεται η τετραγωνική μορφή

$$du^2 + \cos^2 u dv^2$$

Δείξτε ότι μέχρι ισομετρίας του $\mathbb{R}^3$, η μοναδική επιφάνεια με πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή ίση με τη δοθείσα είναι η S^2.