ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 20/01/13

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Μερος Ι (5 Μοναδες)

1. Δίνεται η παραμετρημένη καμπύλη γ με τύπο

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \cos f(u)\, du,\ \int_0^t \sin f(u)\, du,\ t\right), \quad t \in [0,\infty),$$

όπου f λεία συνάρτηση στο $[0,\infty)$, με $\dot{f} > 0$ και $\ddot{f} \neq 0$.
α) **(1.5)** Βρείτε τον λόγο της καμπυλότητας προς την στρέψη της γ.
β) **(0.5)** Ποια είναι η προσημασμένη καμπυλότητα της προβολής της γ στο επίπεδο $z = 0$; (εδώ δεν χρειάζεται καμμία πράξη, μόνο δικαιολόγηση).

2. Δίνεται η επιφάνεια $\mathcal{S}$ με καρτεσιανή εξίσωση $z = y^2 - x^2$ (υπερβολικό παραβολοειδές).
α) **(0.75)** Βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της $\mathcal{S}$. Εξετάστε κατόπιν εάν η απεικόνιση $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ με τύπο $f(x, y, z) = (-x, -y, z)$ είναι τοπική ισομετρία.
β) **(1)** Βρείτε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή της σ και αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο οικογένειες ασυμπτωτικών γραμμών της $\mathcal{S}$. Τί είδους καμπύλες συνιστούν αυτές τις οικογένειες;
γ) **(1.25)** Στο σημείο $(1, 1, 0)$ της $\mathcal{S}$: βρείτε τον πίνακα Weingarten $\mathcal{W}$, τις κύριες καμπυλότητες και τα κύρια διανύσματα της $\mathcal{S}$. Με τη βοήθεια αυτών υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss K και την μέση καμπυλότητα H της $\mathcal{S}$ στο σημείο αυτό.

2. Μερος ΙΙ (6 Μοναδες)

1. α) **(0.5)** Μία λεία καμπύλη του χώρου γ, σταθερής μη μηδενικής καμπυλότητας, δέχεται μία παραμέτρηση της μορφής

$$\gamma(t) = c \cdot \int g(t)\, dt,$$

όπου c σταθερά και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ λεία απεικόνιση με $\|g(t)\| = 1$.
β) **(1)** Μία λεία καμπύλη του χώρου γ, σταθερής μη μηδενικής στρέψης, τ δέχεται παραμέτρηση της μορφής

$$\gamma(t) = c \cdot \int \left[f(t) \times \dot{f}(t)\right] dt,$$

όπου c σταθερά και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ λεία απεικόνιση που ικανοποιεί τίς σχέσεις $\|f(t)\| = 1$, $(f, \dot{f}, \ddot{f}) \neq 0$.

2. **(1)** Δείξτε ότι κάθε τοπική ισομετρία είναι σύμμορφη απεικόνιση. Υποθέστε ότι όλες οι σύμμορφες απεικονίσεις είναι τοπικές ισομετρίες και καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι η γη είναι επίπεδη!

3. **(1.25)** Δείξτε ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μίας λείας (συνεκτικής) επιφάνειας είναι ταυτοτικά μηδέν αν και μόνο αν η επιφάνεια είναι τμήμα επιπέδου.

4. **(1.25)** Δείξτε ότι το άθροισμα των κάθετων καμπυλοτήτων κάθε ζεύγους ορθογωνίων μεταξύ τους διευθύνσεων σε τυχόν σημείο μίας επιφάνειας είναι σταθερό. (Κάνετε σχήμα).

5. **(1)** Με κατάλληλα επιχειρήματα (και χωρίς πράξεις) αποδείξτε ότι οι μέγιστοι κύκλοι είναι όλες οι γεωδαισιακές της σφαίρας.

Άριστα το 10. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.