ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινο ΕΞΑΜΗΝΟ 2019–20

ΜΕΜ233-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ CEVA ΚΑΙ ΜΕΝΕΛΑΟΥ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Εισαγωγικα

Μιγαδική εξίσωση ευθείας. Έστω η ευθεία

$$ax + by + c = 0, \quad |a| + |b| \neq 0. \tag{1}$$

Γράφοντας

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

η (1) γράφεται

$$Az + \overline{A}\overline{z} + c = 0, \quad A = \frac{a - ib}{2}. \tag{2}$$

Παρατηρήστε ότι ο λόγος μεταβολής της (1) ισούται με $\cot\arg A$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε ευθεία του επιπέδου γράφεται σε μιγαδική μορφή ως

$$2\Re(Az) + c = 0, \quad A \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

και ο λόγος μεταβολής της ισούται με $\cot\arg A$.

Μιγαδική μορφή των στοιχείων της αφφινικής ομάδας. Έστω $f \in \mathrm{A}(2)$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}). \tag{4}$$

Κάνοντας τις πράξεις,

$$f(x,y) = (ax + by + b_1,\ cx + dy + b_2).$$

Σε μιγαδική μορφή,

$$f(z) = Az + B\overline{z} + C, \tag{5}$$

όπου

$$A = \frac{a + d + i(c - b)}{2}, \quad B = \frac{a - d + i(b + c)}{2}, \quad C = b_1 + ib_2.$$

- Δείξτε σαν άσκηση ότι η συνθήκη $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (δηλαδή $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$) είναι ισοδύναμη με το ότι η εξίσωση

  $$w = Az + B\overline{z} + C$$

  έχει μοναδική λύση.

- Εξετάστε τις ειδικές περιπτώσεις $B = 0$, $A = 0$. Στην πρώτη περίπτωση, $a = d$ και $b = -c$ και
$$f(z) = Az + C$$
και ο f είναι ένας *ολόμορφος* αφφινικός μετασχηματισμός. Στη δεύτερη περίπτωση, $a = -d$ και $b = c$ και
$$f(z) = B\overline{z} + C$$
και ο f είναι ένας *αντιολόμορφος* αφφινικός μετασχηματισμός.

Πρόταση 1.1. *Οι αφφινικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathrm{A}(2)$, $f(z) = Az + B\overline{z} + C$, και ευθεία $2\Re(Dz) + c = 0$. Έστω $w = Az + B\overline{z} + C$. Τότε (γιατί;)
$$z = \frac{\overline{A}w - B\overline{w} + B\overline{C} - C\overline{A}}{|A|^2 - |B|^2}.$$
Άρα,
$$\begin{aligned} 0 &= 2\Re(Dz) + c \\ &= \frac{2\Re((D\overline{A} - \overline{DB})w)}{|A| - |B|^2} + \frac{2\Re(D(B\overline{C} - C\overline{A}))}{|A| - |B|^2} + c. \end{aligned}$$
Παρατηρήστε ότι η εικόνα είναι πάλι ευθεία, με λόγο μεταβολής που εξαρτάται μόνο από τον λόγο μεταβολής της αρχικής ευθείας και τον μετασχηματισμό f. □

2. Θεωρηματα Ceva και Μενελαου

2.1. **Μιγαδικός λόγος τριών σημείων.** Έστω $\mathsf{t} = (z_1, z_2, z_3)$ διατεταγμένη τριάδα ανά δύο διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του μιγαδικού επιπέδου. Ορίζουμε τον *μιγαδικό λόγο της τριάδας* t από τη σχέση
$$r(\mathsf{t}) = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}. \tag{6}$$

Λήμμα 2.1. *Εάν $\mathsf{t} = (z_1, z_2, z_3)$, τότε $r(\mathsf{t}) \in \mathbb{R}_*$ αν και μόνο αν τα z_1, z_2, z_3 είναι συνευθειακά.*

Απόδειξη. Αν $r(\mathsf{t}) = r \in \mathbb{R}_*$ τότε ισοδύναμα $z_1 - z_2 = r(z_2 - z_3)$, ισοδύναμα το z_1 βρίσκεται στην ευθεία που ορίζουν τα z_2 και z_3. □

Λήμμα 2.2. *Έστω $\mathsf{t} = (z_1, z_2, z_3)$, $f \in \mathrm{A}(2)$, και $f(\mathsf{t}) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3))$. Τότε $r(f(\mathsf{t})) = r(\mathsf{t})$ αν και μόνο αν f είναι ολόμορφος ή τα z_1, z_2, z_3 είναι συνευθειακά.*[1]

Απόδειξη. Έστω $f(z) = Az + B\overline{z} + C$. Η σχέση $r(f(\mathsf{t})) = r(\mathsf{t})$ γράφεται ισοδύναμα
$$\frac{A(z_1 - z_2) + B(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{A(z_2 - z_3) + B(\overline{z_2} - \overline{z_3})} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}.$$

[1] Οπότε και $r(\mathsf{t}) = r(f(\mathsf{t})) \in \mathbb{R}_*$.

Αν $B = 0$ δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Αν $B \neq 0$, τότε ισοδύναμα έχουμε

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}},$$

δηλαδή $r(\mathsf{t}) \in \mathbb{R}_*$ που είναι και το ζητούμενο. □

2.2. **Η απόδειξη των θεωρημάτων.** Και στα δύο θεωρήματα, θεωρούμε δύο τριάδες (z_1, z_2, z_3) και (w_1, w_2, w_3) ανά δύο διαφορετικών μεταξύ τους σημείων, τέτοιες ώστε οι τριάδες

$$\mathsf{t}_1 = (z_1, w_1, z_2), \quad \mathsf{t}_2 = (z_2, w_2, z_3), \quad \mathsf{t}_3 = (z_3, w_3, z_1),$$

να είναι τριάδες συνευθειακών σημείων.

Θεώρημα 2.3. Ceva. *Τα ευθύγραμμα τμήματα $s_1 = [z_1, w_2]$ $s_2 = [z_2, w_3]$ και $s_3 = [z_3, w_1]$ συντρέχουν, αν και μόνο αν*

$$r(\mathsf{t}_1) \cdot r(\mathsf{t}_2) \cdot r(\mathsf{t}_3) = 1.$$

Απόδειξη. Από το θεμελιώδες θεώρημα της Αφφινικής Γεωμωτρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$z_1 = i, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1.$$

Το Λήμμα 2.1 μας εξασφαλίζει επίσης ότι οι μιγαδικοί λόγοι των t_i $i = 1, 2, 3$ διατηρούνται, μπορούμε συνεπώς να υποθέσουμε ότι

$$w_1 = \lambda_1 i, \quad w_2 = \lambda_2, \quad w_3 = 1 - \lambda_3 + \lambda_3 i, \quad \lambda_i \in (0, 1).$$

Για αυτά λοιπόν τα σημεία υπολογίζουμε

$$r(\mathsf{t}_1) \cdot r(\mathsf{t}_2) \cdot r(\mathsf{t}_3) = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_3}.$$

Έχουμε τώρα για τις ευθείες l_i που ορίζουν τα s_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} l_1 : &\quad x + \lambda_2 y - \lambda_2 = 0, \\ l_2 : &\quad \lambda_3 x + (\lambda_3 - 1) y = 0, \\ l_3 : &\quad (1 - \lambda_1) x + y + \lambda_1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Οι ευθείες αυτές συντρέχουν (ισοδύναμα, το άνω 3×2 σύστημα έχει μοναδική λύση) αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_3 - 1 & 0 \\ 1 - \lambda_1 & 1 & \lambda_1 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα και συμπεραίνουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.4. Μενελάου. *Τα σημεία w_1, w_2, w_3 είναι συνευθειακά αν και μόνο αν*

$$r(\mathsf{t}_1) \cdot r(\mathsf{t}_2) \cdot r(\mathsf{t}_3) = -1.$$

Απόδειξη. Όπως και στό Θεώρημα του Ceva, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$z_1 = i, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1.$$

Επίσης,

$$w_1 = \lambda_1 i, \quad w_2 = \lambda_2, \quad w_3 = 1 - \lambda_3 + \lambda_3 i,$$

εδώ όμως, $\lambda_1, \lambda_3 \in (0,1)$ ενώ $\lambda_2 > 1$. Πάλι είναι

$$r(\mathsf{t}_1) \cdot r(\mathsf{t}_2) \cdot r(\mathsf{t}_3) = \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_3}{1-\lambda_3}.$$

(Παρατηρήστε ότι εδώ είναι αρνητικό). Τα σημεία w_1, w_2, w_3 είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \\ 1-\lambda_3 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με τη ζητούμενη και η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$