ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Ἐφαπτόμενος χῶρος

Ἡ κατάσταση στόν $\mathbb{R}^m$: Ἔστω $p \in \mathbb{R}^m$ καί $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ C^1 καμπύλη μέ $\gamma(0)=p$. Τό ἐφαπτόμενο διάνυσμα

$$\dot\gamma(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}$$

τῆς γ στό p εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{R}^m$. Ἀντιστρόφως, ἄν $v \in \mathbb{R}^m$ ἡ καμπύλη $\gamma(t) = p+tv$ ἱκανοποιεῖ $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$. Αὐτό μᾶς δείχνει ὅτι ὁ <u>ἐφαπτόμενος χῶρος</u> $T_p(\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m$.

Ἀπό τήν ἄλλη, ἔστω $p \in \mathbb{R}^m$ καί ἔστω $\mathcal{E}(p)$ τό σύνολο τῶν διαφορίσιμων αναρτήσεων πού ὁρίζονται τοπικά γύρω ἀπό τό p. Ἡ κατευθυνόμενη παράγωγος στό v τῆς f εἶναι

$$\partial_v f = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} = \langle \nabla_p f, v\rangle$$

Ὁ τελεστής ∂_v ἔχει τίς ακόλουθες ἰδιότητες:

$$\partial_v(\lambda\cdot f+\mu\cdot g) = \lambda\,\partial_v f + \mu\,\partial_v g$$
$$\partial_v(f\cdot g) = \partial_v f\cdot g(p) + f(p)\,\partial_v g \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ v,w\in\mathbb{R}^m\ f,g\in\mathcal{E}(p).$$
$$\partial_{(\lambda v+\mu w)} f = \lambda\,\partial_v f + \mu\,\partial_w f$$

<u>Ὁρισμός</u> Ἔστω $p\in\mathbb{R}^m$. Ὁρίζουμε $T_p(\mathbb{R}^m)$ νά εἶναι τό σύνολο τῶν πρώτης τάξης διαφορικῶν τελεστῶν $D : \mathcal{E}(p)\to\mathbb{R}$ στό p πού μηδενίζουν τίς σταθερές, δηλ. ἱκανοποιοῦν

i) $D(\lambda f+\mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$

ii) $D(f\cdot g) = Df\cdot g(p) + f(p)\cdot Dg$

Τό σύνολο των τελεστών αυτών έχει δομή διανυσματικού χώρου (πρόσθεση κι βαθμωτός πολ/μός). Δείχνουμε τώρα τό σημαντικό

<u>Θεώρημα</u> Έστω $p \in \mathbb{R}^m$. Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^m \to T_p(\mathbb{R}^m)$
$v \mapsto \partial_v$ είναι ισομορφισμός δ.χ.

<u>Λήμμα</u>: Εάν $p \in \mathbb{R}^m$ και $f : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη ορισμένη σέ $B(p) \subseteq U$ τότε $\forall k = 1, \dots, m$ υπάρχουν $\psi_k : U \to \mathbb{R}$ ώστε $\forall x \in U$

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{m} (x_k - p_k)\,\psi_k(x) \quad \text{και} \quad \psi_k(p) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(p).$$

Απόδειξη

$$f(x) - f(p) \overset{\text{ΘΘΟΛ}}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(f(p + t(x-p))\big)\,dt$$

$$\overset{\text{αλυσσίδα}}{=} \sum_{k=1}^{m} (x_k - p_k) \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(p + t(x-p))\,dt$$

Θέτουμε τώρα $\psi_k(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(p + t(x-p))\,dt.$

<u>Απόδειξη του θεωρήματος</u>

α) Γραμμικότητα: $\phi(\lambda v + \mu w)(f) = \partial_{\lambda v + \mu w}(f)$

$= \lambda \partial_v(f) + \mu \partial_w(f) = \lambda \phi(v)(f) + \mu \phi(w)(f)$

$= \big(\lambda \phi(w) + \mu \phi(w)\big) f.$

β) 1−1: $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{v \in \mathbb{R}^m : \partial_v = 0\}$ Ἀν f διαφορίσιμη

$\partial_v f = 0 \iff \langle \nabla f, v\rangle = 0$. Παίρνουμε $\hat{x}_k(x_1,\dots,x_m) = x_k$ $k=1,\dots m$.

γ) Ἐπί: Ἔστω $D \in T_p\mathbb{R}^m$. Γιά $k=1,\dots,m$ ἔστω πάλι οἱ

$\hat{x}_k(x_1,\dots,x_m) = x_k$ καί θέτουμε $v_k = D(\hat{x}_k)$

Γιά τήν σταθερή συνάρτηση $(x_1,\dots,x_m) \longmapsto 1$ ἔχουμε τότε

$$a(1) = a(1\cdot 1) = 1\cdot a(1) + 1\cdot a(1) = 2\cdot a(1) \Rightarrow a(1) = 0,$$

καί ἀπό γραμμικότητα, $a(c) = 0$ $\forall$ σταθερή c. Ἔστω $f \in \mathcal{E}(p)$.
Ἀπό τό Λῆμμα,

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{m} (\hat{x}_k(x) - p_k)\cdot \psi_k(x)$$

$\psi_k \in \mathcal{E}(p)$ $\psi_k(p) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$. Ἐφαρμόζουμε τώρα τόν τελεστή D:

$$Df = D\Big(f(p) + \sum_{k=1}^{m} (\hat{x}_k(x) - p_k)\cdot\psi_k(x)\Big)$$

$$= \cancel{D(f(p))} + \sum_{k=1}^{m} D(\hat{x}_k(x) - p_k)\cdot\psi_k(p) + \sum_{k=1}^{m} \cancel{(\hat{x}_k(p) - p_k)\cdot D(\psi_k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \nabla_p f\cdot v \quad \text{ὅπου}$$

$v = (v_1,\dots,v_m) \in \mathbb{R}^m$. Ἄρα $\Phi(v) = D$.

<u>Πόρισμα</u> Ἄν $\{e_1,\dots,e_m\}_p$ εἶναι βάση τοῦ $\mathbb{R}^m$ τότε

$\{\partial_{e_1},\dots,\partial_{e_m}\}_p$ βάση τοῦ $T_p(\mathbb{R}^m)$.

Σχολιάζουμε: Άν $p \in \mathbb{R}^m$, $v \in T_p \mathbb{R}^m$, $f: U_p \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη και $\gamma: I \to \mathbb{R}^m$, $\gamma(0) = p$, $\mathring{\gamma}(0) = v$, τότε μέσω της ταυτοποίησης διανυσμάτων κ' κατά κατεύθυνση παραγώγων, παίρνουμε

$$v_p(f) = \nabla_{v_p} f = \langle \nabla f, v \rangle_p = df_p(\mathring{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

δηλ. $v(f)$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής της καμπύλης γ με $\gamma(0)=p$, $\mathring{\gamma}(0) = v$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω M δ.π. και $p \in M$. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα X_p είναι μια απεικόνιση $X_p : \mathcal{E}(p) \to \mathbb{R}$ με

1) $X_p(\lambda f + \mu \cdot g) = \lambda X_p f + \mu X_p g$
2) $X_p(f \cdot g) = X_p f \cdot g(p) + X_p g\, f(p)$

$T_p(M) = \{X_p,\ X_p \text{ εφαπτόμενο διάνυσμα}\}$ και είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος με πράξη την πρόσθεση και τον εσωτερικό (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα εφαπτόμενων χώρων πολλαπλοτήτων

1. S^m: Εάν $\gamma: I \to S^m$, $\gamma(0) = p$, $\mathring{\gamma}(0) = X_p$ τότε

$$\gamma(t)\cdot\gamma(t) = 1 \Rightarrow \gamma(t)\cdot\mathring{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow p \cdot X_p = 0 \Rightarrow X_p \in T_p(S^m) \perp p$$

Από την άλλη, άν $X \neq 0$, $X \perp p$, τότε η

$$\gamma(t) = \cancel{e^{itX}}\ \text{exp}\ \cos(t|X|)\cdot p + \frac{\sin(t|X|)\cdot X}{|X|}$$

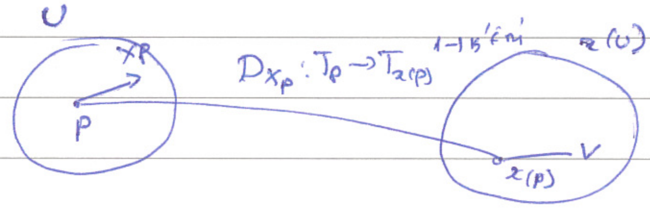
ικανοποιεί $\gamma(0) = p$, $\mathring{\gamma}(0) = X$. Άρα $T_p(S^m) = \{X \in \mathbb{R}^{m+1} : X \cdot p = 0\}$

8 Χρησιμοποιήσατε μία ταύτιση:

$$X_p(f) = Dx_p(X_p)(f \circ x^{-1})$$

$$= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1} \circ c(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t))\Big|_{t=0}$$

όπου (U, x) χάρτης γύρω από τό p, $c: I \to x(U)$ $c(0) = x(p)$ $\dot{c}(0) = v$, $\gamma = x^{-1} \circ c : I \to U_p$ $\gamma(0) = p$ $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Αὐτή ἡ ταύτιση γίνεται μέσω τῆς παραγώγου απεικόνισης πού δέν ἔχουμε ἀκόμα ὁρίσει ἀλλά θά τη δουμε πρός τό παρόν σε δοσμένη



Η ἐκθετική ἀπεικόνιση $\mathbb{C}^{m\times m} \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ $\quad Exp(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}$ Δεῖτε τη

Ἰδιότητες

1) $Exp(Z^*) = (Exp(Z))^*$
2) $\det(Exp(Z)) = e^{tr(Z)}$
3) $ZW = WZ \Rightarrow Exp(Z+W) = Exp(Z) \cdot Exp(W)$.

2. $O(m)$: Ἔστω $\gamma: I \to \mathbb{R}(m)$ $\quad \gamma(0) = I$ $\quad \dot{\gamma}(0) = X$

Τότε $(\gamma(s))^T \cdot \gamma(s) = I \Longrightarrow X = -X^T \Rightarrow T_e(O(m)) \subset$ Ἀντισυμμετρικοί πίνακες

Ἄν X ἀντισυμμετρικός, ἔστω ἡ καμπύλη $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ $A(s) = Exp(sX)$

$A(s)^T \cdot A(s) =$ (ἰδιότητες Exp) $= I$. Ἄρα $T_e(O(m)) =$ ἀντισυμμετρικοί πίνακες Διάσταση $\frac{m(m-1)}{2}$

3. $SO(m)$: $\quad O(m) \approx SO(m) \times \{\pm Id\} \Rightarrow T_I\, SO(m) = T_I(O(m))$

4. $GL(m,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{m\times m} \Rightarrow T_p GL(m,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{m\times m}$

5. $\mathfrak{S}L(m,\mathbb{R})$ άσκηση $= \{ X \in \mathbb{R}^{m\times m} \mid tr(X) = 0 \}$

6. $GL(m,\mathbb{C})$, $SL_m(\mathbb{C})$ $U(m)$ $SU(m)$ άσκηση

<u>Ορισμός</u> Παράγωγος (γραμμική απεικόνιση παραγώγου, διαφορικό)

$\varphi : M \to N$ παραγωγίσιμη $p \in M$ $\varphi(p) \in N$

$$D\phi_p \left(= \phi_{*,p}\right) : T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(N)$$

ορίζεται $\left(D\phi_p(X_p)\right)(f) = X_p(f \circ \varphi)$, $f \in \mathcal{E}(\varphi(p))$.
Γραμμική, $Did_p = id_{\phi(p)}$,

Διευκρινίζουμε τώρα τό σχόλιο μετά τό παράδειγμα της ορθογώνιας ομάδας

$\gamma : I \to M$, $\gamma(0) = p$ $\dot{\gamma}(0) = X_p$
$c : I \to N$, $c = \phi \circ \gamma$ $c(0) = \phi(p)$ και θέτουμε $Y_{\phi(p)} = \dot{c}(0)$
Γιά κάθε $f \in \mathcal{E}(\phi(p))$,

$$\begin{aligned} \left(D\phi_p(X_p)\right)(f) &= X_p(f \circ \phi) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi \circ \gamma)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} \\ &= Y_{\phi(p)}(f). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $D\phi_p(X_p) = Y_{\phi(p)} \Longleftrightarrow D\phi_p(\dot{\gamma}(0)) = \dot{c}(0)$.

Ιδιότητες τῆς παραγώγου (T_u) Κανόνας ἁλυσσίδας

$$M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

$$D(\psi\circ\phi)_p = D\psi_{\phi(p)} \circ D\phi_p$$

Ἄν ϕ ἀμφιδιαφόριση $D\phi^{-1}_{\phi(p)} = (D\phi_p)^{-1}$

ὁ $\dim T_p(M^m) = m$ (Ταύτιση $T_p(M)$ μέ $T_{x(p)}(\mathbb{R}^m)$

μέσω τῆς ἀμφιδιαφόρισης x!

Μερικές Παράγωγοι M^m (U_p, x) τοπικός χάρτης $e_1, \dots, e_m$ κανονική βάση τοῦ $\mathbb{R}^m$. Ὁρίζομε

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p : f \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \partial_{e_k}(f\circ x^{-1})(x(p))$$

Τό σύνολο $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}_p$ βάση τοῦ $T_p(M)$

Ἀπόδειξη x ἀμφιδιαφόριση

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(f) = \partial_{e_k}(f\circ x^{-1})(x p) = (Dx^{-1})_{x(p)}(\partial_{e_k})(f).$$

$f \in \mathcal{E}(p)$. (∂_{e_k} βάση τοῦ $T_{\phi(p)}(\mathbb{R}^m)$) Θυμηθεῖτε!

Ἐμβαπτίσεις, καταβυθίσεις, ἐμφυτεύσεις Ἔστω $m, n \in \mathbb{Z}^+$ $m \le n$

$\phi : M^m \to N^n$

α) ἐμβάπτιση ἄν $D\phi_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ $1-1$ $\forall p$

β) ἐμφύτευση ἄν εἶναι ἐμβάπτιση καί $\varphi : M \to N$ ὁμοιομορφισμός στήν εἰκόνα της.

Παραδείγματα 1. $\phi: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$(x_1, \dots, x_{m+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{m+1}, 0, \dots 0)$$

εμφύτευση, τό ἴδιο κ' ὁ περιορισμός της στήν $S^m \to S^n$.

2. $S^1 \subset \mathbb{C}$ $\phi_k : S^1 \to \mathbb{C}$ $\phi_k(z) = z^k$. Ἐμβάπτιση πάντοτε ἀλλά εμφύτευση μόνο ὅταν $k = \pm 1$ (Πάρτε γιά $w \in S^1$ $\gamma_w(t) = we^{it}$)

3. S^3 εἶναι τό σύνολο τῶν τετρανίων μοναδιαίου νόρμα Ἡ άπεικόνιση $\phi_q : S^1 \to S^3$ $\phi_q(z) = qz$ εἶναι εμφύτευση

(Γιά $w \in S^1$, πάρτε $\gamma_w(t) = we^{it}$. $\gamma_w(0) = w$ $\dot\gamma_w(0) = iw$,

$$\phi_q(\gamma_w(t)) = qwe^{it}$$

$$(D\phi_q)(\dot\gamma_w(0)) = \frac{d}{dt}(qwe^{it})\Big|_{t=0} = qiw \quad \text{μοναδιαίας νόρμας}$$

4. $\mathbb{R}P^m \hookrightarrow Sym(\mathbb{R}^{n+1})$ συμμετρικοί πίνακες (άσκηση)

Θεώρημα Witney Ἔστω M^m C^r πολλαπλότητα $1 \le r \le \infty$. Τότε υπάρχει C^r εμφύτευση τοῦ M^m στον $\mathbb{R}^{2m+1}$

Θεώρημα Αντιστροφής Ἔστω $\phi : M \to N$ διαφορίσιμη C^r μέ ($\dim M = \dim N$.) (χρειάζεται)

Ἐάν $p \in M$ καί $D\phi_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ εἶναι 1-1 κ' ἐπί, τότε υπάρχει U_p καί $V_{\phi(p)}$ τέτοια ὥστε ἡ $\phi^{-1} : U_{\phi(p)} \to U_p$ νά εἶναι C^r.

Ορισμός: Ἐάν $\phi : M^m \to N^n$ διαφορίσιμη, τό $p \in M$ λέγεται κανονικό ἄν τό $D\phi_p$ εἶναι πλήρους βαθμίδας, ειδάλλως λέγεται κρίσιμο. $q \in \phi(M)$ κανονική τιμή ἄν $\phi^{-1}(q)$ σύνολο κανονικών σημείων.

Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων Έστω $\phi: M \to N$, $m>n$

Εάν $q \in \phi(M)$ είναι κανονική τιμή, τότε $\phi^{-1}(q)$ είναι $(m-n)$ υποπολλαπλότητα του M

$$T_p \phi^{-1}(q) = \ker D\phi_p .$$

Απόδειξη Έστω (V_q, y) $y(q)=0$ Για κάθε $p \in \phi^{-1}(q)$

επιλέγουμε (U,x) στην M με $p \in U$, $x(p)=0$ $\phi(U) \subset V$

Έστω η $\quad \psi = y \circ \phi \circ x^{-1}|_{x(U)} : x(U) \to \mathbb{R}^n$

$$D\psi_0 = (Dy)_q \circ D\phi_p \circ (Dx)^{-1} : T_0(\mathbb{R}^m) \to T_0\mathbb{R}^n$$ άρα $(D\psi)_0$ είναι επί.

Από το ΘΠΣ για $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$

$$x(\phi^{-1}(q) \cap U)$$ $(m-n)$ υποπολλαπλότητα του U.

Αφού αυτό αληθεύει για κάθε $p \in \phi^{-1}(q) \Rightarrow \phi^{-1}(q)$ $m-n$ υποπολλαπλότητα του M^m.

Εάν τώρα $\gamma: I \to \phi^{-1}(q)$ καμπύλη με $\gamma(0)=p$

$$(D\phi_p)(\dot\gamma(0)) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{dq}{dt}\Big|_{t=0} = 0.$$

$\Rightarrow T_p \phi^{-1}(q) \subset \ker D\phi_p$ με την ίδια διάσταση, άρα

$$T_p(\phi^{-1}(q)) = \ker D\phi_p .$$

Καταβύθιση $\phi: M^m \to N^n$ $\quad m \geq n$ $\quad D\phi_p$ είναι επί

Κλασικό παράδειγμα η προβολή $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα Η απεικόνιση Hopf $h: S^3 \to S^2$

$$h(z,w) = (2z\bar{w}, |z|^2-|w|^2)$$

Έστω $p \in S^3$ $p=(z,w)$ ο κύκλος Hopf γύρω από το p

$$C_p = \{e^{i\theta}(z,w) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Η h είναι σταθερή πάνω σε κάθε κύκλο Hopf.

Η h είναι επί, άρα και η Dh_p σε κάθε $p \to h$ καταβύθιση
Σε κάθε σημείο $q \in S^2$ είναι κανονική τιμή για την h και οι ίνες
$\varphi^{-1}(q)$ είναι 1-διάστατες υποπολλαπλότητες της S^3 διφεομορφικές
με

$$\varphi^{-1}(\{2z\bar{w}, |z|^2-|w|^2\}) = \{e^{i\theta}(z,w) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Με άλλα λόγια η S^3 φυλλώνεται από κύκλους Hopf.