

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν στις γενικότητες επάνω στην εφαπτόμενη δέσμη.

1. Έστω M^m λεία πολλαπλότητα με μεγιστικό άτλαντα $\hat{\mathcal{A}}$. Έστω χάρτες (U, x) και (V, y) με $U \cap V \neq \emptyset$ και

$$f = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

η αντίστοιχη απεικόνιση μετάβασης. Δείξτε ότι τα τοπικά πλαίσια

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$$

για της TM στο $U \cap V$ σχετίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f_j \circ x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j},$$

όπου f_j είναι η j -συντεταγμένη συνάρτηση της f .

(Υπόδειξη: Δείτε την Ενότητα 12.2 στον Tu.)

2. Για την ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(m)$:

- (1) βρείτε βάση για τον εφαπτόμενο χώρο $T_e(SO(m))$,
- (2) κατασκευάσετε ένα πουθενά μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο Z ,
- (3) προσδιορίστε όλα τα λεία διανυσματικά πεδία της $SO(2)$.

(Υπόδειξη: Για το δεύτερο ερώτημα εκμεταλλευτείτε το γεγονός ότι κάθε ομάδα Lie είναι παραλληλίσιμη, και ότι ουσιαστικά αυτό που δείξατε στο πρώτο ερώτημα ισοδυναμεί με την ύπαρξη ολικού μη μηδενιζόμενου πλαισίου.)

3. Το Θεώρημα της Τριχωτής Μπάλλας (Hairy Ball Theorem) μας λέει ότι δεν υπάρχει συνεχές μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο στην άρτιας διάστασης σφαίρα S^{2m} . Μπορείτε να δείτε την κομψή απόδειξη του Milnor (με την επιπλέον υπόθεση της συνεχούς παραγωγισιμότητας) στην ιστοσελίδα

<http://web.cs.elte.hu/~karatson/hairy-ball.pdf>

Συμπαράνατε ότι η εφαπτόμενη δέσμη TS^{2m} δεν είναι τετριμμένη. Από την άλλη, στις περιττές διαστάσεις δείξτε ότι υπάρχει πουθενά μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο.

(Υπόδειξη: Δείτε την Άσκηση 14.2 στον Tu.)

4. Βρείτε βάση $\{X, Y, Z\}$ για την Lie άλγεβρα $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ της $SL(2, \mathbb{R})$ και υπολογίστε όλες τις αγκύλες Lie μεταξύ των X, Y, Z .

5. Ίδιο ερώτημα όπως παραπάνω για την Lie άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$ της $SU(2)$.

6. Ίδιο ερώτημα όπως παραπάνω για την Lie άλγεβρα $\mathfrak{so}(3)$ της $SO(3)$.