ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

Ακτίνια, μοίρες, και κυκλικά τόξα

1. Σε κύκλο ακτίνας 10 m, ποιο το μήκος τόξου που ορίζει επίκεντρος γωνία ίση με (α) $4\pi/5$ ακτίνια; (β) $110°$;

2. Σε κύκλο ακτίνας ίσης με 8, μια επίκεντρος γωνία ορίζεται από τόξο μήκους 10π. Υπολογίστε τη γωνία σε ακτίνια (ακτινιακό μέτρο) και σε μοίρες.

Εύρεση τιμών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

3. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων. Εάν μία συνάρτηση δεν ορίζεται για κάποια γωνία, στην αντίστοιχη θέση γράψτε «ΑΟΡ». Μην χρησιμοποιήσετε υπολογιστή ή έτοιμο πίνακα τιμών.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

4. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων. Εάν μία συνάρτηση δεν ορίζεται για κάποια γωνία, στην αντίστοιχη θέση γράψτε «ΑΟΡ». Μην χρησιμοποιήσετε υπολογιστή ή έτοιμο πίνακα τιμών.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

Στις Ασκήσεις 5 και 6, δίδεται η τιμή μίας εκ των συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$, και $\tan x$. Βρείτε τις τιμές των υπόλοιπων δύο συναρτήσεων στα καθορισμένα διαστήματα.

5. (α) $\sin x = \dfrac{3}{5}, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

   (β) $\cos x = \dfrac{1}{3}, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

6. (α) $\tan x = \dfrac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

   (β) $\sin x = -\dfrac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Σχεδίαση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που ακολουθούν (Ασκήσεις 7-10). Ποια η περίοδος καθεμίας από αυτές;

7. (α) $\sin 2x$ (β) $\cos \pi x$

8. (α) $-\sin \dfrac{\pi x}{3}$ (β) $-\cos 2\pi x$

9. (α) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ (β) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

10. (α) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ (β) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

Στις Ασκήσεις 11 και 12, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο επίπεδο ts (οριζόντιος ο άξονας t, κατακόρυφος ο άξονας s). Ποια είναι η περίοδος κάθε συναρτήσεως; Τι είδους συμμετρία παρουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις;

11. $s = \cot 2t$

12. $s = \sec\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

Χρήση των τύπων αθροίσματος γωνιών

Στις Ασκήσεις 13 και 14, εκφράστε τη δοθείσα ποσότητα συναρτήσει των $\sin x$ και $\cos x$.

13. (α) $\cos(\pi + x)$ (β) $\sin(2\pi - x)$

14. (α) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$ (β) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

Χρησιμοποιήστε τους τύπους του αθροίσματος γωνιών για να αποδείξετε τις ταυτότητες στις Ασκήσεις 15 και 16.

15. (α) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin x$

    (β) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

16. (α) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

    (β) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

17. Τι θα προκύψει αν θέσετε $B = A$ στην ταυτότητα $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$; Συμφωνεί το αποτέλεσμα με κάτι που ήδη γνωρίζατε;

18. Τι θα προκύψει αν θέσετε $B = 2\pi$ στους τύπους αθροίσματος γωνιών; Συμφωνούν τα αποτελέσματα με κάτι που ήδη γνωρίζατε;

Γενικές ημιτονοειδείς καμπύλες

Αφού αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 19 και 20 με την εξίσωση (2) του κειμένου, βρείτε τις σταθερές A, B, C, και D. Σχεδιάστε πρόχειρα τις γραφικές τους παραστάσεις.

19. (α) $y = 2\sin(x + \pi) - 1$

    (β) $y = \dfrac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \dfrac{1}{2}$

20. (α) $y = -\dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{-2}t\right) + \dfrac{1}{\pi}$

    (β) $y = \dfrac{L}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

21. *Θερμοκρασία στο Fairbanks της Αλάσκας* Βρείτε (α) το πλάτος, (β) την περίοδο, (γ) την οριζόντια μετατόπιση, και (δ) την κατακόρυφη μετατόπιση της γενικής ημιτονοειδούς συναρτήσεως

$$f(x) = 20{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) - 3{,}8.$$

22. *Θερμοκρασία στο Fairbanks της Αλάσκας* Χρησιμοποιήστε την εξίσωση της Ασκήσεως 21 για να απαντήσετε προσεγγιστικά στα παρακάτω ερωτήματα σχετικά με τη θερμοκρασία στο Fairbanks της Αλάσκας, της οποίας η γραφική παράσταση δίδεται στο Σχήμα 46. Υποθέστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες.

(α) Ποιες οι μέγιστες και ελάχιστες μέσες ημερήσιες θερμοκρασίες;

(β) Ποιος είναι ο μέσος όρος των μέγιστων και ελάχιστων μέσων ημερήσιων θερμοκρασιών; Γιατί ο μέσος όρος αυτός ισούται με την κατακόρυφη μετατόπιση της συναρτήσεως;

Συνήθεις τιμές των αντίστροφων τριγωνομερικών συναρτήσεων

Χρησιμοποιήστε τρίγωνα αναφοράς όπως στα Παραδείγματα 5-7 προκειμένου να υπολογίσετε τις ζητούμενες γωνίες στις Ασκήσεις 23-26.

23. (α) $\tan^{-1} 1$ (β) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (γ) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

24. (α) $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ (β) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (γ) $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

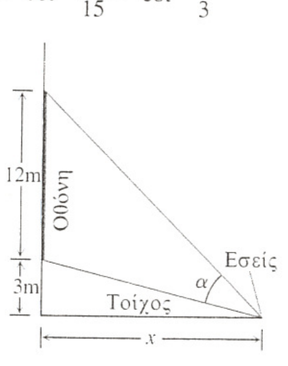
25. (α) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (β) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (γ) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

26. (α) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ (β) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (γ) $\sec^{-1}(-2)$

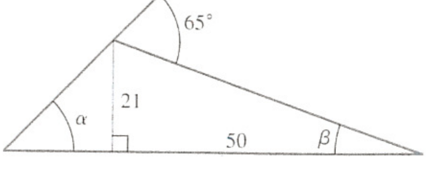
Εφαρμογές και θεωρία

27. Βρισκόσαστε σε μια κινηματογραφική αίθουσα και καθόσαστε δίπλα στον πλευρικό τοίχο, ενώ κοιτάτε προς την οθόνη (δείτε το ακόλουθο σχήμα). Η οθόνη έχει 12 μέτρα μήκος και απέχει 3 μέτρα από τον πλευρικό τοίχο. Δεδομένου ότι απέχετε x μέτρα από τον τοίχο όπου βρίσκεται η οθόνη, δείξτε ότι η γωνία θέασης που έχετε είναι

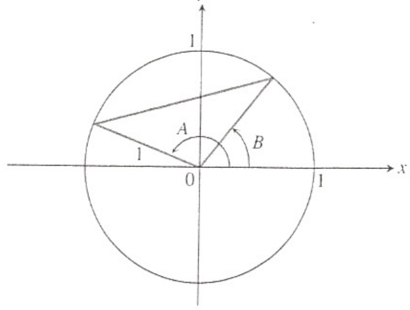
$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$



28. Υπολογίστε τη γωνία α.

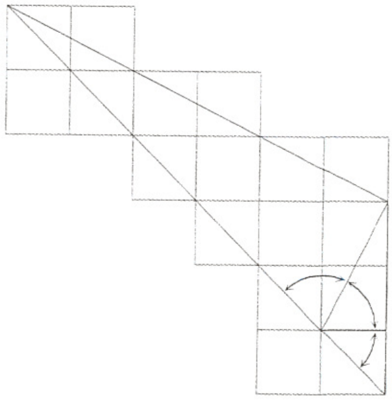


29. Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο του σχήματος, βρείτε μια έκφραση για την ποσότητα $\cos(A - B)$.



30. Εάν εφαρμοσθεί σε σχήμα παρόμοιο με αυτό της Άσκησης 29, ο νόμος των συνημιτόνων οδηγεί απευθείας σε έναν τύπο για την ποσότητα $\cos(A + B)$. Ποιο είναι αυτό το σχήμα, και πώς γίνεται η απόδειξη;

31. Ακολουθεί μια άτυπη απόδειξη του ότι $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$. Εξηγήστε τι ακριβώς συμβαίνει.

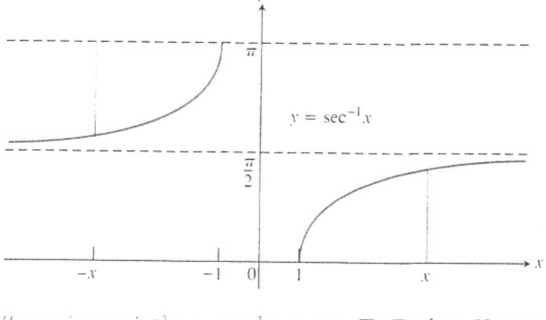


32. *Δύο αποδείξεις της ταυτότητας $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$*

(α) (*Γεωμετρική*) Ακολουθεί μια σχηματική απόδειξη της σχέσης $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$. Μπορείτε να την εξηγήσετε;

(β) (*Αλγεβρική*) Συνδυάζοντας κατάλληλα τις ακόλουθες δύο εξισώσεις, αποδείξτε την ταυτότητα $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$:

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x,$$
$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x).$$



33. *Η ταυτότητα $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$* Το Σχήμα 53 τεκμηριώνει την ταυτότητα αυτή για $0 < x < 1$. Προκειμένου να την τεκμηριώσετε και για το υπόλοιπο του διαστήματος $[-1, 1]$, επαληθεύστε πρώτα με απευθείας υπολογισμό ότι η ταυτότητα ισχύει για $x = 1, 0$, και

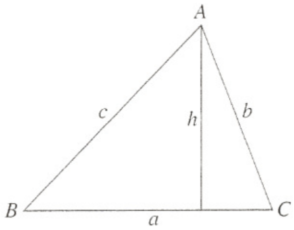
-1. Έπειτα, για x εντός του διαστήματος $(-1, 0)$, θέστε $x = -a$, $a > 0$, και εφαρμόστε τις Εξισώσεις (7) και (9) στο άθροισμα $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

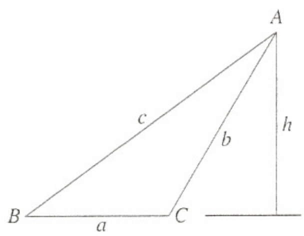
34. Δείξτε ότι το άθροισμα $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ παραμένει σταθερό.

35. *Νόμος των ημιτόνων* Ο νόμος των ημιτόνων μάς λέει ότι αν a, b, και c είναι οι απέναντι πλευρές των αντίστοιχων γωνιών A, B, και C ενός τριγώνου, τότε

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Κάνοντας κατάλληλη χρήση των ακόλουθων σχημάτων, καθώς και της ταυτότητας $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, αποδείξτε τον νόμο αυτόν.





36. *Εφαπτομένη αθροίσματος γωνιών* Ο συνήθης τύπος για την εφαπτομένη του αθροίσματος δύο γωνιών είναι

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Αποδείξτε τον.

Επίλυση τριγώνων και σύγκριση συναρτήσεων

37. *Επίλυση τριγώνων*

(α) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $a = 2$ και $b = 3$ και γωνία $C = 60°$. Βρείτε το μήκος της πλευράς c.

(β) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $a = 2$ και $b = 3$ και γωνία $C = 40°$. Βρείτε το μήκος της πλευράς c.

38. *Επίλυση τριγώνων*

(α) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $a = 2$ και $b = 3$ και γωνία $C = 60°$ (όπως στην Άσκηση 37, ερώτημα (α)). Υπολογίστε το ημίτονο της γωνίας B κάνοντας χρήση του νόμου των ημιτόνων της Ασκήσεως 35.

(β) Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $c = 2$ και προσκείμενες γωνίες $A = \pi/4$ και $B = \pi/3$. Υπολογίστε το μήκος a της απέναντι πλευράς της γωνίας A.

T 39. *Η προσέγγιση $\sin x \approx x$* Όταν το x μετριέται σε ακτίνια και παίρνει μικρές τιμές, η προσέγγιση $\sin x \approx x$ μπορεί να αποβεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Στην Ενότητα 3.6 θα δούμε γιατί ισχύει η προσέγγιση αυτή. Για τιμές $|x| < 0{,}1$, το σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο του ενός πεντακοσιοστού.

(α) Αφού προγραμματίσετε το κομπιουτεράκι σας να μετρά τις γωνίες σε ακτίνια (οπότε εμφανίζεται στην οθόνη η ένδειξη "radians") σχεδιάστε τις συναρτήσεις $y = \sin x$ και $y = x$ σε ενιαίο σχήμα και σε περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Τι βλέπετε να συμβαίνει καθώς το x πλησιάζει στην αρχή;

(β) Προγραμματίστε το κομπιουτεράκι σας σε μοίρες ("degrees"), και κατόπιν σχεδιάστε τις $y = \sin x$ και $y = x$ σε ενιαίο σχήμα και σε περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Σε τι διαφέρει η εικόνα που βλέπετε από αυτήν που πήρατε στην επιλογή "radians";

(γ) *Μοίρες ή ακτίνια; Ένας γρήγορος έλεγχος* Είναι προγραμματισμένο το κομπιουτεράκι σας σε ακτίνια; Υπολογίστε το $\sin x$ για x κοντά στο μηδέν, π.χ. για $x = 0{,}1$. Αν προκύπτει ότι $\sin x \approx x$, τότε το κομπιουτεράκι σας μετράει γωνίες σε ακτίνια ("radians")· αλλιώς, όχι. Δοκιμάστε το.

T 40. *Συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους*

(α) Σχεδιάστε τις $y = \cos x$ και $y = \sec x$ σε ενιαίο σχήμα για $-3\pi/2 \le x \le 3\pi/2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $\sec x$ σχετικά με τα πρόσημα και τις τιμές του $\cos x$.

(β) Σχεδιάστε τις $y = \sin x$ και $y = \csc x$ σε ενιαίο σχήμα για $-\pi \le x \le 2\pi$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $\csc x$ σχετικά με τα πρόσημα και τις τιμές του $\sin x$.

T Στις Ασκήσεις 41 και 42, βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών κάθε σύνθετης συνάρτησης. Κατόπιν σχεδιάστε τις σύνθετες συναρτήσεις σε χωριστά διαγράμματα. Κατανοείτε τη συμπεριφορά κάθε γραφικής παραστάσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Σχολιάστε τις όποιες διαφορές διακρίνετε μεταξύ των γραφημάτων.

41. (α) $y = \tan^{-1}(\tan x)$ (β) $y = \tan(\tan^{-1} x)$

42. (α) $y = \sin^{-1}(\sin x)$ (β) $y = \sin(\sin^{-1} x)$

Στις Ασκήσεις 43-46, επιλύστε την εξίσωση στο καθορισμένο διάστημα.

43. $\tan x = 2{,}5$, $0 \le x < 2\pi$

44. $\cos x = -0{,}7$, $2\pi \le x < 4\pi$

45. $\sec x = -3$, $-\pi \le x < \pi$

46. $\sin x = -0{,}5$, $-\infty < x < \infty$

T 47. *Τριγωνομετρικές ταυτότητες* Έστω $f(x) = \sin x + \cos x$.

(α) Σχεδιάστε την $y = f(x)$. Περιγράψτε τη γραφική παράσταση.

(β) Από τη γραφική παράσταση βρείτε το πλάτος, την περίοδο, την οριζόντια μετατόπιση, και την κατακόρυφη μετατόπιση.

(γ) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας από τον τύπο του ημιτόνου αθροίσματος δυο γωνιών

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta).$$

T 48. *Οφιοειδής του Νεύτωνα* Σχεδιάστε την οφιοειδή καμπύλη του Νεύτωνα, $y = 4x/(x^2 + 1)$. Κατόπιν σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα την $y = 2\sin(2\tan^{-1} x)$. Τι παρατηρείτε; Εξηγήστε.