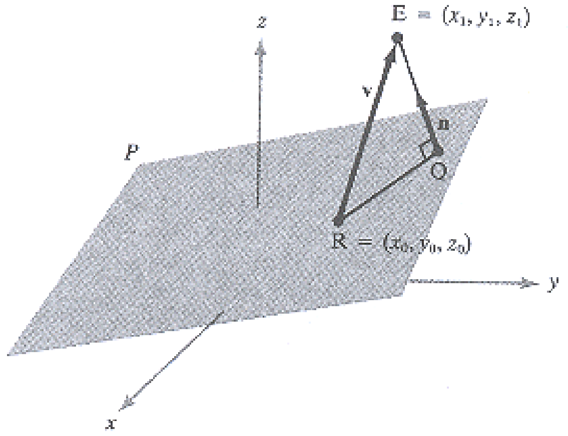
είναι το μήκος της προβολής του $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{RE}}$ (του διανύσματος από το R προς το E) πάνω στο $\mathbf{n}$· άρα,

$$\begin{aligned} \text{απόσταση} &= |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}| = |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}]\cdot\mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.3.7 Γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού της απόστασης του σημείου E από το επίπεδο P.

Αν το επίπεδο μας δοθεί στη μορφή $Ax+By+Cz+D = 0$, διαλέγουμε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) πάνω σ' αυτό και παρατηρούμε ότι $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο, συμπεραίνουμε ότι

$$\text{απόσταση} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Επαληθεύστε ότι αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες της 3×3 ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

τότε αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας (διαλέξτε δύο οποιεσδήποτε γραμμές και δύο οποιεσδήποτε στήλες).

2. Υπολογίστε τις

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$

3. Υπολογίστε το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. Υπολογίστε το $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, όπου τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι όπως στην Άσκηση 3 και $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

5. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα **a** και **b** της Άσκησης 3.

6. Ένα τρίγωνο έχει κορυφές τα (0, 0, 0), (1, 1, 1) και (0, −2, 3). Βρείτε το εμβαδόν του.

7. Ποιός είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $5\mathbf{i}-3\mathbf{k}$, και $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$;

8. Ποιός είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $\mathbf{i}$, $3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, και $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$;

Στις Ασκήσεις 9 ώς 12, περιγράψτε όλα τα μοναδιαία διανύσματα που είναι ορθογώνια προς τα δοθέντα διανύσματα.

9. $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

10. $-5\mathbf{i}+9\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}$

11. $-5\mathbf{i}+9\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}$, $\mathbf{0}$

12. $2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

13. Υπολογίστε τα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ και $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, αν $\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

14. Επαναλάβετε την Άσκηση 13 με $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=-6\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

15. Βρείτε μία εξίσωση για το επίπεδο το οποίο
(a) είναι κάθετο στο $\mathbf{v}=(1,1,1)$ και περνάει από το (1, 0, 0).
(b) είναι κάθετο στο $\mathbf{v}=(1,2,3)$ και περνάει από το (1, 1, 1).
(c) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t)=(5,0,2)t+(3,-1,1)$ και περνάει από το $(5,-1,0)$.
(d) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t)=(-1,-2,3)t+(0,7,1)$ και περνάει από το $(2,4,-1)$.

16. Βρείτε μία εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από τα (a) (0, 0, 0), (2, 0, −1) και (0, 4, -3), (b) (1, 2, 0), (0, 1, −2) και (4, 0, 1), και (c) (2, −1, 3), (0, 0, 5) και (5, 7, −1).

ΠΡ

17. (a) Δείξτε τις ταυτότητες $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ για τό τριπλό διανυσματικό γινόμενο.
(b) Δείξτε ότι $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ αν και μόνο αν $(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
(c) Δείξτε ότι $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u}+(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (*η ταυτότητα του Jacobi.*)*

ΠΡ

18. (a) Δείξτε, χωρίς να καταφύγετε στη γεωμετρία, ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\\ &= -\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})\\ &= -\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = -\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\end{aligned}$$

(b) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}') &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')\\ &\quad-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}')(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}) = \begin{vmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}' & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'\end{vmatrix}\end{aligned}$$

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε το μέρος (a) και την Άσκηση 17(a).]

19. Επαληθεύστε τον κανόνα του Cramer, που αναφέρθηκε στην Ιστορική Σημείωση πριν από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου.

20. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το $(2,-1,3)$ και είναι κάθετο στην $\mathbf{v}=(1,-2,2)+t(3,-2,4)$.

21. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το $(1,2,-3)$ και είναι κάθετο στην $\mathbf{v}=(0,-2,1)+t(1,-2,3)$.

22. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(1,-2,-3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x-y-2z+4=0$.

23. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες

$$\mathbf{v}_1=(0,1,-2)+t(2,3,-1)$$

και

$$\mathbf{v}_2=(2,-1,0)+t(2,3,-1)$$

24. Βρείτε την απόσταση του $(2,1,-1)$ από το επίπεδο $x-2y+2z+5=0$.

25. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathbf{v}=(-1,1,2)+t(3,2,4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x+y-3z+4=0$.

26. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από τα $(3,2,-1)$ και $(1,-1,2)$, και είναι παράλληλο στην ευθεία $\mathbf{v}=(1,-1,0)+t(3,2,-2)$.

27. Επαναλάβετε τις Ασκήσεις 19 και 20 της Παραγράφου 1.1 χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο και όσα γνωρίζετε για το κάθετο διάνυσμα ενός επιπέδου.

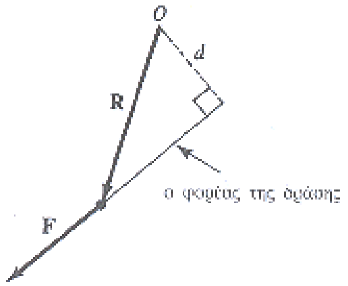
28. Αν δοθούν τα διανύσματα **a** και **b**, είναι σωστό ότι οι εξισώσεις $\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ και $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|$ ορίζουν μονοσήμαντα κάποιο διάνυσμα **x**; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με δύο τρόπους, γεωμετρικά και αναλυτικά.

29. Προσδιορίστε την απόσταση του επιπέδου $12x+13y+5z+2=0$ από το σημείο $(1,1,-5)$.

---

*(Σ.τ.Ε.) Η (b) είναι άμεση συνέπεια της (c). Ίσως η σειρά των ερωτημάτων θα έπρεπε να αντιστραφεί.

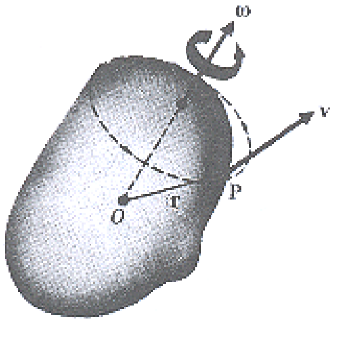
30. Βρείτε την απόσταση του σημείου (6, 1, 0) από το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.



Πρ

Σχήμα 1.3.8 Ροπή δύναμης.

31. Στην Μηχανική, *η ροπή M μιας δύναμης* $\mathbf{F}$ *ως προς σημείο O* ορίζεται σαν το γινόμενο του μέτρου της δύναμης $\mathbf{F}$ επί την κάθετη απόσταση d του σημείου O από την ευθεία δράσης της $\mathbf{F}$. (Θυμηθείτε από το Παράδειγμα 10 της Παραγράφου 1.1 ότι μπορούμε να θεωρούμε τις δυνάμεις ως διανύσματα.) Το διάνυσμα ροπής $\mathbf{M}$ είναι το διάνυσμα μέτρου M του οποίου η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο των O και $\mathbf{F}$, η δε φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Δείξτε ότι $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, όπου $\mathbf{R}$ είναι τυχόν διάνυσμα με αρχή το O και τελικό σημείο πάνω στην ευθεία δράσης της $\mathbf{F}$ (βλέπε Σχήμα 1.3.8).



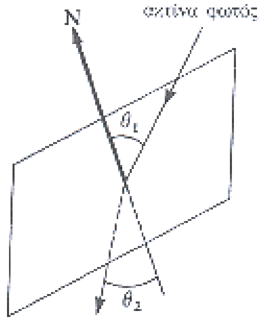
Σχήμα 1.3.9 Το σημείο P έχει διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v}$.

32. Η *γωνιακή ταχύτητα* $\boldsymbol{\omega}$ περιστροφής ενός στερεού σώματος έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και μέτρο ίσο με τον ρυθμό της περιστροφής σε rad ανά δευτερόλεπτο. Η φορά του $\boldsymbol{\omega}$ καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

(a) Εστω $\mathbf{r}$ ένα διάνυσμα από τον άξονα προς ένα σημείο P του στερεού σώματος. Δείξτε ότι η ποσότητα $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ δίνει την ταχύτητα του P, όπως στο Σχήμα 1.3.9, με $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_1$ και $\mathbf{r} = \mathbf{v}_2$.

(b) Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα στην περίπτωση της στροφής ενός κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του, με P ένα σημείο στην περιφέρεια.

33. Δύο μέσα με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 διαχωρίζονται από μία επίπεδη επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το $\mathbf{N}$. Εστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ μοναδιαία διανύσματα πάνω στις προσπίπτουσες και διαθλώμενες ακτίνες αντίστοιχα, δηλαδή να έχουν τη διεύθυνση των ακτίνων του φωτός. Δείξτε ότι $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ χρησιμοποιώντας *τον νόμο του Snell*, $\sin\theta_1 / \sin\theta_2 = n_2/n_1$, όπου θ_1 και θ_2 είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης αντίστοιχα (βλέπε Σχήμα 1.3.10).



Σχήμα 1.3.10 Νόμος του Snell.

***34.** Δικαιολογήστε τα βήματα στον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

Πρ

***35.** Δείξτε ότι αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής ενός πίνακα στη δεύτερη γραμμή του, τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται· δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[Πιό γενικά, αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο οποιασδήποτε γραμμής (στήλης) ενός πίνακα σε μιαν άλλη γραμμή (στήλη) του, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.]