ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (a) Δίνονται πιο κάτω μερικά σημεία σε κυλινδρικές συντεταγμένες· εκφράστε το καθένα από αυτά σε ορθογώνιες και σε σφαιρικές συντεταγμένες: $(1, 45°, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, 45°, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, -\pi/6, 0)$, $(2, 3\pi/4, -2)$.

(b) Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από ορθογώνιες σε σφαιρικές και σε κυλινδρικές συντεταγμένες: $(2, 1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$.

2. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων (που είναι γραμμένες σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

(a) $(r, \theta, z) \to (r, \theta, -z)$
(b) $(r, \theta, z) \to (r, \theta + \pi, -z)$
(c) $(r, \theta, z) \to (-r, \theta - \pi/4, z)$

3. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων (που είναι γραμμένες σε σφαιρικές συντεταγμένες):

(a) $(\rho, \theta, \phi) \to (\rho, \theta + \pi, \phi)$
(b) $(\rho, \theta, \phi) \to (\rho, \theta, \pi - \phi)$
(c) $(\rho, \theta, \phi) \to (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$

4. (a) Περιγράψτε τις επιφάνειες r =σταθερά, θ=σταθερά και z=σταθερά στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων.

(b) Περιγράψτε τις επιφάνειες ρ=σταθερά, θ=σταθερά και ϕ=σταθερά στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

5. Δείξτε ότι για την αναπαράσταση του τυχόντος σημείου του $\mathbf{R}^3$ με σφαιρικές συντεταγμένες κατά μοναδικό τρόπο, είναι αναγκαίο να πάρουμε μόνο τιμές του θ μεταξύ του 0 και 2π, τιμές του ϕ μεταξύ 0 και π και τιμές του $\rho \geq 0$. Ορίζονται οι συντεταγμένες μονοσήμαντα, αν επιτρέψουμε $\rho \leq 0$;

6. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες και το ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ (βλέπε Σχήμα 1.4.8),

(a) εκφράστε καθένα από τα $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ συναρτήσει των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ και (x, y, z)· και

(b) υπολογίστε το $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ με δύο τρόπους: αναλυτικά, χρησιμοποιώντας το (a), και γεωμετρικά.

7. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες και το ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ (βλέπε Σχήμα 1.4.9),

(a) εκφράστε καθένα από τα $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ συναρτήσει των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ και (x, y, z)· και

(b) υπολογίστε το $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ και $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ με δύο τρόπους: αναλυτικά και γεωμετρικά.

8. Εκφράστε το επίπεδο $z = x$: (a) σε κυλινδρικές και (b) σε σφαιρικές συντεταγμένες.

9. Δείξτε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες:

(a) ρ είναι το μήκος του $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
(b) $\phi = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$, όπου $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
(c) $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$, όπου $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

10. Δύο επιφάνειες περιγράφονται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τις εξισώσεις $\rho = f(\theta, \phi)$ και $\rho = -2f(\theta, \phi)$, όπου $f(\theta, \phi)$ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών. Εξηγήστε γεωμετρικά πώς μπορούμε να πάρουμε τη δεύτερη επιφάνεια από την πρώτη.

11. Μία στρογγυλή μεμβράνη στον χώρο, βρίσκεται πάνω από το χωρίο $x^2 + y^2 \leq a^2$. Η μέγιστη συντεταγμένη z ενός σημείου της μεμβράνης είναι b. Υποθέτουμε ότι (x, y, z) είναι ένα σημείο της κεκλιμένης μεμβράνης. Δείξτε ότι το αντίστοιχο σημείο (r, θ, z) σε κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιεί τις συνθήκες $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq b$.

12. Μία δεξαμενή με σχήμα ορθού κυλίνδρου, ακτίνας 10 ποδών και ύψους 16 ποδών είναι μισογεμάτη και ακουμπάει στην πλευρά της. Περιγράψτε τον χώρο που καταλαμβάνει ο αέρας μέσα στη δεξαμενή, διαλέγοντας κατάλληλες κυλινδρικές συντεταγμένες.

13. Ενας παλμογράφος πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να αντέχει στη θερμότητα που του μεταδίδει το σφαιρικό του περίβλημα διαμέτρου d, το οποίο θάβεται σε βάθος $d/3$ μέσα στη γη, και το προεξέχον μέρος του θερμαίνεται από τον ήλιο (υποθέτουμε ότι η γη είναι επίπεδη). Η ανάλυση της διάδοσης της θερμότητας απαιτεί να περιγραφεί με σφαιρικές συντεταγμένες το θαμμένο μέρος του περιβλήματος. Βρείτε τις.

14. Ενα στοιχείο φίλτρου λαδιού είναι ένας πορώδης ορθός κύλινδρος μέσα στον οποίο το λάδι διαχέεται από τον άξονα προς την εξωτερική καμπύλη επιφάνεια. Περιγράψτε το με κυλινδρικές συντεταγμένες, αν η διάμετρος του φίλτρου είναι 4,5 ίντσες, το ύψος του 5,6 ίντσες και το κέντρο του στοιχείου διαπερνάται από την κορυφή μέχρι κάτω, ώστε να δέχεται μια βίδα διαμέτρου $\frac{5}{8}$ ιντσών.

***15.** Περιγράψτε την επιφάνεια που δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από την $\rho = \cos 2\theta$.