Ασκήσεις

Σχεδιάστε τις καμπύλες που είναι εικόνες των διαδρομών των Ασκήσεων 1 έως 4.

1. $x = \sin t,\ y = 4\cos t$, όπου $0 \le t \le 2\pi$

2. $x = 2\sin t,\ y = 4\cos t$, όπου $0 \le t \le 2\pi$

3. $\mathbf{c}(t) = (2t - 1, t + 2, t)$

4. $\mathbf{c}(t) = (-t, 2t, 1/t)$, όπου $1 \le t \le 3$

5. Θεωρήστε τον κύκλο C ακτίνας 2, με κέντρο την αρχή των αξόνων.

(α) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του C που να έχει αντιωρολόγιο προσανατολισμό και να ξεκινά από το $(2, 0)$.

(β) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του C που να έχει ωρολόγιο προσανατολισμό και να ξεκινά από το $(0, 2)$.

(γ) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του C αν κέντρο του είναι το σημείο $(4, 7)$.

6. Δώστε μια παραμετρικοποίηση για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες:

(α) Την ευθεία που διέρχεται από τα $(1, 2, 3)$ και $(-2, 0, 7)$.

(β) Το γράφημα της $f(x) = x^2$.

(γ) Το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ και $(1,\ 0)$ (Χωρίστε το σε ευθύγραμμα τμήματα.)

(δ) Την έλλειψη που δίνεται από την $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Στις Ασκήσεις 7 έως 10, βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας της δεδομένης διαδρομής.

7. $\mathbf{c}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

8. $\mathbf{c}(t) = (\sin 3t)\mathbf{i} + (\cos 3t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$

10. $\mathbf{r}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$

Στις Ασκήσεις 11 έως 14, υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανύσματα της δεδομένης διαδρομής.

11. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$

12. $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$

13. $\mathbf{c}(t) = (t\sin t, 4t)$

14. $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^2)$

15. Πότε είναι *οριζόντιο* το διάνυσμα ταχύτητας ενός σημείου της στεφάνης ενός τροχού ακτίνας R που κυλάει με ταχύτητα v; Ποια είναι η ταχύτητα σε αυτό το σημείο;

16. Αν η θέση ενός σωματιδίου στον χώρο τη χρονική στιγμή t είναι $(6t, 3t^2, t^3)$, ποιο είναι το διάνυσμα ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή $t = 0$;

Στις Ασκήσεις 17 και 18, βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην κάθε διαδρομή για τη συγκεκριμένη τιμή του t που σας δίνεται.

17. $(\sin 3t, \cos 3t, 2t^{5/2})$, $t = 1$

18. $(\cos^2 t, 3t - t^3, t)$, $t = 0$

Στις Ασκήσεις 19 έως 22, υποθέστε ότι ένα σωματίδιο που ακολουθεί τη δεδομένη διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ *ξεφεύγει ακολουθώντας την εφαπτομένη τη χρονική στιγμή* $t = t_0$. *Υπολογίστε τη θέση του σωματιδίου την υποδεικνυόμενη χρονική στιγμή* t_1.

19. $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, όπου $t_0 = 2, t_1 = 3$

20. $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, όπου $t_0 = 1, t_1 = 2$

21. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, όπου $t_0 = 0, t_1 = 1$

22. $\mathbf{c}(t) = (\sin e^t, t, 4 - t^3)$, όπου $t_0 = 1, t_1 = 2$

23. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματίδιου που κινείται πάνω σε μια έλικα είναι $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$.

(α) Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t_0 = 4\pi$.

(β) Είναι ποτέ το $\mathbf{c}'(t)$ ορθογώνιο με το $\mathbf{c}(t)$;

(γ) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της εφαπτόμενης ευθείας της $\mathbf{c}(t)$ στο $t_0 = 4\pi$.

(δ) Πού θα τέμνει αυτή η ευθεία το επίπεδο xy;

24. Θεωρήστε τη σπείρα που δίνεται από την $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$. Δείξτε ότι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{c}$ και $\mathbf{c}'$ είναι σταθερή.

25. Έστω $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2, 2t)$ και $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$.

(α) Βρείτε την $(f \circ \mathbf{c})(t)$.

(β) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης $f \circ \mathbf{c}$ στο $t = 1$.