Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της $f(x,y,z) = z^2x + y^3$ στο σημείο $(1,1,2)$ κατά την κατεύθυνση $(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$ είναι $2\sqrt{5}$.

2. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται και κατά τις δεδομένες κατευθύνσεις:

   (α) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2), \mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

   (β) $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (1,0)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$

   (γ) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $(x_0,y_0) = (0,-1)$, $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$

   (δ) $f(x,y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0,y_0) = (4,-2)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j}$

3. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται κατά τις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων που είναι *παράλληλα* στο δεδομένο διάνυσμα:

   (α) $f(x,y) = x^y$, $(x_0,y_0) = (e,e)$, $\mathbf{d} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

   (β) $f(x,y,z) = e^x + yz$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$, $\mathbf{d} = (1,-1,1)$

   (γ) $f(x,y,z) = xyz$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,1)$, $\mathbf{d} = (1,0,-1)$

4. Περπατάτε πάνω στο γράφημα της $f(x,y) = y\cos(\pi x) - x\cos(\pi y) + 10$ και στέκεστε στο σημείο $(2,1,13)$. Βρείτε μια κατεύθυνση xy κατά την οποία πρέπει να περπατήσετε ώστε να παραμείνετε στο ίδιο επίπεδο.

5. (α) Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Αν $\mathbf{v}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της κατά κατεύθυνση παραγώγου της f στο $\mathbf{x}_0$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ είναι $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.

   (β) Έστω $f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3$. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της κατά κατεύθυνση παραγώγου της f στο σημείο $(1,2,3)$.

6. Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στην καμπύλη $x^3 + xy + y^3 = 11$ στο σημείο $(1,2)$.

7. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $f(x,y,z) = xyz$ κατά την κατεύθυνση που είναι κάθετη στην επιφάνεια $yx^2 + xy^2 + yz^2 = 3$ στο $(1,1,1)$.

8. Βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα των παρακάτω επιφανειών στα δεδομένα σημεία:

   (α) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$, στο σημείο $(1, 2, \frac{1}{3})$

   (β) $y^2 - x^2 = 3$, στο σημείο $(1,2,8)$

   (γ) $xyz = 1$, στο σημείο $(1,1,1)$

9. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου των παρακάτω επιφανειών $z = f(x,y)$ στο σημείο που υποδεικνύεται:

   (α) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, στο σημείο $(1,2,-3)$

   (β) $z = (\cos x)(\cos y)$, στο σημείο $(0,\pi/2,0)$

   (γ) $z = (\cos x)(\sin y)$, στο σημείο $(0,\pi/2,1)$

10. Υπολογίστε την κλίση ∇f καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

    (α) $f(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

    (β) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

    (γ) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

11. Για τις συναρτήσεις της Άσκησης 10, ποια είναι η κατεύθυνση ταχύτερης αύξησης στο σημείο $(1,1,1)$; [Ο Οδηγός μελέτης περιέχει τη λύση μόνο για το ερώτημα (γ).]

12. Δείξτε ότι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ στο σημείο $(0,0,2)$ είναι το $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

13. Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\cos(xy) = e^z - 2$ στο $(1,\pi,0)$.

14. Επαληθεύστε τα Θεωρήματα 13 και 14 για την $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

15. Δείξτε ότι από τον ορισμό που ακολουθεί το Θεώρημα 14 παίρνουμε, ως ειδική περίπτωση, τον τύπο για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x,y)$, θεωρώντας το γράφημα ως μια επιφάνεια στάθμης της $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ (βλ. Ενότητα 2.3).

16. Έστω $f(x,y) = -(1-x^2-y^2)^{1/2}$ για (x,y) τέτοια ώστε $x^2+y^2 < 1$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα με συνιστώσες $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία.

17. Για τις παρακάτω συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, βρείτε τα ∇f και $\mathbf{g}'$ και υπολογίστε την $(f\circ\mathbf{g})'(1)$.

    (α) $f(x,y,z) = xz + yz + xy$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$

    (β) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

    (γ) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

18. Υπολογίστε την κατά κατεύθυνση παράγωγο της f κατά τις δεδομένες κατευθύνσεις $\mathbf{v}$ και στα δεδομένα σημεία P.

(α) $f(x,y,z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$,
$\mathrm{P} = (4,-2,-1)$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{14}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

(β) $f(x,y,z) = x^{yz}$, $\mathrm{P} = (e,e,0)$, $\mathbf{v} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j} + \frac{4}{13}\mathbf{k}$

19. Στέκεστε πάνω στο γράφημα της $f(x,y) = 100 - 2x^2 - 3y^2$ στο σημείο $(2,3,65)$.

(α) Ποιες είναι οι συντεταγμένες xy του υψηλότερου σημείου του γραφήματος;

(β) Δείξτε ότι η κλίση της f στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα (α) είναι το μηδενικό διάνυσμα.

20. Βρείτε τα δύο σημεία του υπερβολοειδούς $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$, όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $2x + 2y + z = 5$.

21. Έστω $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r = \|\mathbf{r}\|$. Αποδείξτε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

22. Ο Captain Ralph αντιμετωπίζει προβλήματα κοντά στη φωτεινή πλευρά του Ερμή. Η θερμοκρασία του σκάφους όταν βρίσκεται στη θέση (x,y,z) δίνεται από την $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, όπου τα x, y και z μετριούνται σε μέτρα. Την τρέχουσα χρονική στιγμή βρίσκεται στο $(1,1,1)$.

(α) Κατά ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί ώστε η θερμοκρασία να μειωθεί όσο το δυνατόν ταχύτερα;

(β) Αν το σκάφος ταξιδεύει με e^8 μέτρα το δευτερόλεπτο, πόσο γρήγορα θα μειωθεί η θερμοκρασία αν κινηθεί κατά αυτή την κατεύθυνση;

(γ) Δυστυχώς, το μέταλλο του σκάφους θα ραγίσει αν ψυχθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $\sqrt{14}e^2$ βαθμούς το δευτερόλεπτο. Περιγράψτε το σύνολο των δυνατών κατευθύνσεων κατά τις οποίες μπορεί να κινηθεί το σκάφος ώστε η θερμοκρασία να μειωθεί όχι ταχύτερα από αυτό τον ρυθμό.

23. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι *ανεξάρτητη από τη δεύτερη μεταβλητή* αν υπάρχει συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x,y) = g(x)$ για κάθε x στον $\mathbb{R}$. Υπολογίστε το ∇f συναρτήσει της g' σε αυτή την περίπτωση.

24. Έστω f και g συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}$. Υποθέστε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Δείξτε ότι οι σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων περιέχονται στα σύνολα στάθμης της f, δηλαδή η f είναι σταθερή σε αυτές τις σφαίρες.

25. Μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ καλείται *άρτια* συνάρτηση αν $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x}$ στον $\mathbb{R}^n$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και άρτια, βρείτε την $\mathbf{D}f$ στην αρχή των αξόνων.

26. Υποθέστε ότι ένα βουνό έχει σχήμα ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = c - ax^2 - by^2$, όπου a, b και c είναι θετικές σταθερές, x και y είναι οι συντεταγμένες του χάρτη (ανατολή–δύση και βορράς–νότος) και z είναι το ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (τα x, y, z μετριούνται όλα σε μέτρα). Κατά ποια κατεύθυνση αυξάνεται γρηγορότερα το ύψος στο σημείο $(1,1)$; Αν αφήσουμε έναν βόλο στο $(1,1)$, κατά ποια κατεύθυνση θα ξεκινήσει να κυλάει;

27. Ένας μηχανικός θέλει να κατασκευάσει μια σιδηροδρομική γραμμή που να ανεβαίνει το βουνό της Άσκησης 26. Η κλίση του βουνού είναι πολύ απότομη για την ισχύ των μηχανών. Ποιες κατευθύνσεις μπορούν να ακολουθήσουν οι ράγες στο σημείο $(1,1)$ ώστε να ανεβαίνουν με κλίση 3% — δηλαδή με γωνία με εφαπτομένη 0,03; (Υπάρχουν δύο δυνατότητες.) Κάντε ένα σχέδιο σημειώνοντας τις δύο δυνατές κατευθύνσεις με κλίση 3% στο $(1,1)$.

28. Στην ηλεκτροστατική, η δύναμη $\mathbf{P}$ με την οποία έλκονται μεταξύ τους δύο αντίθετα φορτισμένα σωματίδια δίνεται από την $\mathbf{P} = k(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)$ (*νόμος του Coulomb*), όπου k είναι μια σταθερά και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Δείξτε ότι η $\mathbf{P}$ είναι η κλίση της $f = -k/\|\mathbf{r}\|$.

29. Το ηλεκτροστατικό δυναμικό V που δημιουργούν δύο άπειρα παράλληλα νήματα με γραμμικές πυκνότητες φορτίου λ και $-\lambda$ είναι $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$, όπου $r_1^2 = (x-x_0)^2 + y^2$ και $r_2^2 = (x+x_0)^2 + y^2$. Θεωρούμε ότι τα νήματα έχουν τη διεύθυνση του άξονα z και διέρχονται από το επίπεδο xy στα $(-x_0, 0)$ και $(x_0, 0)$. Βρείτε το $\nabla V(x,y)$.

30. Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις f κατά μήκος της διαδρομής $\mathbf{c}(t)$:

(α) $f(x,y) = xy$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(β) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

31. Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο εκτινάσσεται από το σημείο $(1,1,\sqrt{3})$ της επιφάνειας $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ κατά την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια με φορά προς το επίπεδο xy τη χρονική στιγμή $t = 0$, με ταχύτητα 10 μονάδων το δευτερόλεπτο. Πότε και σε ποιο σημείο θα συναντήσει το επίπεδο xy;

32. Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και θεωρήστε την $\mathbf{D}f(x,y,z)$ ως μια γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο πυρήνας της $\mathbf{D}f$ (δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων που απεικονίζονται στο μηδέν) είναι το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που είναι ορθογώνιο με το ∇f.