Επαναληπτικές ασκήσεις Κεφαλαίου 2

1. Περιγράψτε τα γραφήματα των:

(α) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$

(β) $f(x, y) = xy + 3x$

2. Περιγράψετε μερικές κατάλληλες επιφάνειες στάθμης και τομές των γραφημάτων των:

(α) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

(β) $f(x, y, z) = x^2$

(γ) $f(x, y, z) = xyz$

3. Υπολογίστε την παράγωγο $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = (x^2 y, e^{-xy})$

(β) $f(x) = (x, x)$

(γ) $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$

(δ) $f(x, y, z) = (x, y, z)$

4. Υποθέστε ότι $f(x, y) = f(y, x)$ για κάθε (x, y). Αποδείξτε ότι

$$(\partial f/\partial x)(a, b) = (\partial f/\partial y)(b, a).$$

5. Έστω $f(u, v) = (\cos u, v + \sin u)$ και $g(x, y, z) = (x^2 + \pi y^2, xz)$. Υπολογίστε την $D(f \circ g)$ στο $(0, 1, 1)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

6. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε την $D(f \circ g)(-2, 1)$ για τις συναρτήσεις $f(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, u^2 v - w^3)$ και $g(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.

7. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε την $D(f \circ g)(-1, 2)$ για τις συναρτήσεις $f(u, v, w) = (v^2 + w^2, u^3 - vw, u^2 v + w)$ και $g(x, y) = (3x + 2y, x^3 y, y^2 - x^2)$.

8. Έστω $f(x, y) = (xy, \frac{x}{y}, x + y)$ και $g(w, s, t) = (we^s, se^{wt})$. Βρείτε την $D(f \circ g)(3, 1, 0)$.

9. Έστω η διαδρομή $\mathbf{r}(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(\pi t), t)$. Πού θα τμήσει η εφαπτόμενη ευθεία της $\mathbf{r}$ στο $t = 5$ το επίπεδο xy;

10. Έστω $f(x, y) = x^2 e^{-xy}$.

(α) Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο γράφημα της f στο $(1, 2)$.

(β) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο $(1, 2)$.

(γ) Ποιο σημείο της επιφάνειας που δίνεται από την $z = x^2 - y^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο που βρήκατε στο (β);

11. Έστω $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία.

12. Έστω $F(u, v)$ και $u = h(x, y, z)$, $v = k(x, y, z)$ (παραγωγίσιμες) πραγματικές συναρτήσεις και έστω ότι η $f(x, y, z)$ ορίζεται από την $f(x, y, z) = F(h(x, y, z), k(x, y, z))$. Βρείτε έναν τύπο για την κλίση της f συναρτήσει των μερικών παραγώγων των F, h και k.

13. Βρείτε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2, (x_0, y_0) = (1, 1)$

(β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2, (x_0, y_0) = (2, -1)$

(γ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy, (x_0, y_0) = (-1, -1)$

(δ) $f(x, y) = \log(x + y) + x\cos y + \arctan(x + y)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

(ε) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x_0, y_0) = (1, 1)$

(στ) $f(x, y) = xy, (x_0, y_0) = (2, 1)$

14. Υπολογίστε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο καθεμίας από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που υποδεικνύεται.

(α) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $\quad (1, 1, 1)$

(β) $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$, $\quad (1, 1, 1)$

(γ) $(\cos x)(\cos y)e^z = 0$, $\quad (\pi/2, 1, 0)$

(δ) $e^{xyz} = 1$, $\quad (1, 1, 0)$

15. Σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = 1/xy$

(β) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$

16. Θεωρήστε τη συνάρτηση θερμοκρασίας $T(x, y) = x\sin y$. Σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης. Υπολογίστε το ∇T και εξηγήστε τη σημασία του.

17. Βρείτε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy - 1}{x}$

(β) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|(x + y)/(x - y)|}, x \neq y$

18. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y, z) = xe^z + y\cos x$

(β) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{10}$

(γ) $f(x, y, z) = (x^2 + y)/z$

19. Υπολογίστε την $\dfrac{\partial}{\partial x}[x\exp(1+x^2+y^2)]$.

20. Έστω ότι οι $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ και $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ δίνονται από τις $f(x,z) = (x^2 - y^2, 0, \sin(xy), 1)$ και $g(x,y) = (ye^{x^2}, xe^{y^2})$. Υπολογίστε την $D(f\circ g)(1,2)$.

21. Έστω $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2+10)}$. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $(2,1)$ κατά την κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.

22. Έστω $y(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που ορίζεται πεπλεγμένα από την $F(x, y(x)) = 0$. Από την Άσκηση 19(α) της Ενότητας 2.5 γνωρίζουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Θεωρήστε την επιφάνεια $z = F(x,y)$ και υποθέστε ότι η F είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς x και ως προς y, δηλαδή $\partial F/\partial x > 0$ και $\partial F/\partial y > 0$. Θεωρώντας το γράφημα και το επίπεδο $z = 0$, δείξτε ότι, για σταθερό z ίσο με 0, το y πρέπει να *μειώνεται* καθώς αυξάνεται το x και το x πρέπει να *μειώνεται* καθώς αυξάνεται το y. Συμφωνεί αυτό με το αρνητικό πρόσημο στον τύπο της dy/dx;

23. (α) Θεωρήστε το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ [Σχήμα 2.Ε.1(α)]. Έστω ότι το (x_0, y_0) ανήκει σε μια καμπύλη στάθμης C, οπότε το $\nabla f(x_0,y_0)$ είναι κάθετο σε αυτή την καμπύλη. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος είναι το επίπεδο που (i) περιέχει την ευθεία που είναι κάθετη στο $\nabla f(x_0,y_0)$ και ανήκει στο οριζόντιο επίπεδο $z = f(x_0,y_0)$ και (ii) έχει κλίση $\|\nabla f(x_0,y_0)\|$ ως προς το επίπεδο xy.
(Με τον όρο *κλίση* ενός επιπέδου P ως προς το επίπεδο xy εννοούμε την εφαπτομένη της γωνίας θ, $0 \le \theta \le \pi$, που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{p}$ στο P με κατεύθυνση προς τα πάνω με το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{k}$.)

(β) Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x,y) = (x+\cos y)x^2$ στο $(1,0,2)$ είναι αυτό που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.Ε.1(α).

24. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = x^2+y^2$ στο σημείο $(1,-2,5)$. Εξηγήστε τη γεωμετρική σημασία της κλίσης της $f(x,y) = x^2+y^2$ (βλ. Άσκηση 23) για αυτή την επιφάνεια.

25. Κατά ποια κατεύθυνση είναι ίση με το μηδέν η κατά κατεύθυνση παράγωγος της $f(x,y) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ στο $(1,1)$;

26. Βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο δεδομένο σημείο και κατά τη δεδομένη κατεύθυνση.

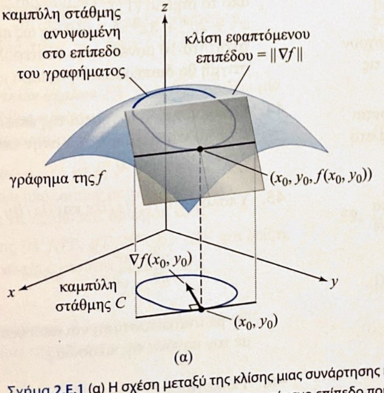
(α) $f(x,y,z) = e^x\cos(yz)$, $p_0 = (0,0,0)$, $\mathbf{v} = (2,1,-2)$

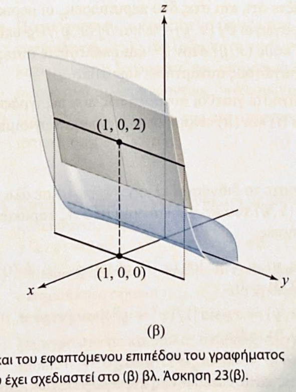
(β) $f(x,y,z) = xy+yz+zx$, $p_0 = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (10,-1,2)$

27. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο και το κάθετο διάνυσμα στο υπερβολοειδές $x^2+y^2-z^2 = 18$ στο $(3,5,-4)$.

28. Έστω $(x(t), y(t))$ μια διαδρομή στο επίπεδο, $0 \le t \le 1$, και έστω $f(x,y)$ μια συνάρτηση C^1 δύο μεταβλητών. Υποθέστε ότι $(dx/dt)f_x + (dy/dt)f_y \le 0$. Δείξτε ότι $f(x(1), y(1)) \le f(x(0), y(0))$.

29. Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Το επίπεδο τοξικότητας δίνεται από την $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. Το έντομο βρίσκεται στο $(-1,2)$. Κατά ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί ώστε να ελαττωθεί το ταχύτερο δυνατό η τοξικότητα;





Σχήμα 2.Ε.1 (α) Η σχέση μεταξύ της κλίσης μιας συνάρτησης και του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος [Άσκηση 23(α)]. Για το συγκεκριμένο εφαπτόμενο επίπεδο που έχει σχεδιαστεί στο (β) βλ. Άσκηση 23(β).

30. Βρείτε την κατεύθυνση κατά την οποία αυξάνεται ταχύτερα η συνάρτηση $w = x^2 + xy$ στο σημείο $(-1, 1)$. Ποιο είναι το μέτρο του ∇w σε αυτό σημείο; Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία αυτού του μέτρου.

31. Έστω f μια βαθμωτή συνάρτηση που ορίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f είναι ***ομογενής βαθμού*** p στο S αν $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ για κάθε πραγματικό λ και για κάθε $\mathbf{x}$ στο S για το οποίο $\lambda\mathbf{x} \in S$.

(α) Αν μια τέτοια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}$, δείξτε ότι $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$. Αυτό είναι γνωστό ως ***θεώρημα του Euler*** για τις ομογενείς συναρτήσεις. [Υπόδειξη: Για σταθερό $\mathbf{x}$, ορίστε την $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ και υπολογίστε την $g'(1)$.]

(β) Βρείτε το p και ελέγξτε το θεώρημα του Euler για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = x - 2y - \sqrt{xz}$ στο χωρίο όπου $xz > 0$.

32. Αν $z = [f(x - y)]/y$ (όπου η f είναι παραγωγίσιμη και $y \neq 0$), δείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα $z + y(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.

33. Αν θέσουμε $z = f((x + y)/(x - y))$ για κάποια συνάρτηση f κλάσης C^1, δείξτε ότι

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

34. Έστω ότι η f έχει μερικές παραγώγους $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$, όπου $i = 1, 2, \dots, n$, σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου U του $\mathbb{R}^n$. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\mathbf{x}_0$ του U, δείξτε ότι $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_i = 0$ για κάθε i.

35. Θεωρήστε τις συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{R}^2$ ως εξής:

(i) $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

(ii) $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^4)$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

(α) Δείξτε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, οι μερικές παράγωγοι $\partial f(x, y)/\partial x$ και $\partial f(x, y)/\partial y$ υπάρχουν για κάθε (x, y) στον $\mathbb{R}^2$ και υπολογίστε αυτές τις παραγώγους συναρτήσει των x και y.

(β) Εξηγήστε γιατί οι συναρτήσεις που περιγράφονται στα (i) και (ii) είναι ή δεν είναι παραγωγίσιμες στο $(0, 0)$.

36. Υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(x, y)$ σε όλα τα σημεία (x, y) του $\mathbb{R}^2$ για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x, y) = x^2y^2 \log(x^2 + y^2)$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

(β) $f(x, y) = xy \sin[1/(x^2 + y^2)]$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

37. Βρείτε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(1, 1)$ κατά την κατεύθυνση $(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$:

(α) $f(x, y) = x \tan^{-1}(x/y)$

(β) $f(x, y) = \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

(γ) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

38. (α) Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Βρείτε τα $\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ και ένα διάνυσμα που να έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{u}$, αλλά μοναδιαίο μήκος.

(β) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $e^{xy}\sin(xyz)$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ στο $(0, 1, 1)$.

39. Έστω $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ το ύψος ενός βουνού στη θέση (x, y). Κατά ποια κατεύθυνση, με αφετηρία το $(1, 0)$, θα πρέπει να ξεκινήσει κανείς να περπατάει ώστε να ανέβει όσο το δυνατόν ταχύτερα;

40. Υπολογίστε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

στο $x = 1$, $y = 2$.

41. (α) Δώστε μια προσεκτική διατύπωση της γενικής μορφής του κανόνα της αλυσίδας.

(β) Έστω $f(x, y) = x^2 + y$ και $\mathbf{h}(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$. Έστω $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$. Υπολογίστε την dg/du στο $u = 0$ απευθείας *και* χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

42. (α) Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης της $f(x, y) = -x^2 - 9y^2$ για $c = 0, -1, -10$.

(β) Στο σχήμα σας, σχεδιάστε το ∇f στο $(1, 1)$. Σχολιάστε.

43. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένα σωματίδιο εκτινάσσεται από το σημείο $(1, 1, 1)$ της επιφάνειας $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ κάθετα ως προς την επιφάνεια με ταχύτητα 10 μονάδων το δευτερόλεπτο. Ποια χρονική στιγμή θα διαπεράσει τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 103$;

44. Σε ποιο σημείο ή σημεία της επιφάνειας της Άσκησης 43 είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια παράλληλο στην ευθεία $x = y = z$;

45. Υπολογίστε τις $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$ αν

$$z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \qquad u = e^{-x-y}, \qquad v = e^{xy}$$

(α) με αντικατάσταση και απευθείας υπολογισμό και (β) με τον κανόνα της αλυσίδας.

46. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους όπως στην Άσκηση 45, αν $z = uv$, $u = x + y$ και $v = x - y$.

47. Ποιο είναι το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό; Υποθέστε ότι $w = f(x, y)$ και $y = x^2$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Συνεπώς, $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, οπότε $\partial w/\partial y = 0$. Βρείτε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να διαπιστώσετε ότι αυτό είναι όντως λάθος.

48. Μια βάρκα πλέει κινούμενη βορειοανατολικά με 20 km/h. Αν θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία πέφτει με ρυθμό 0,2°C/km κατά τη βορειοανατολική κατεύθυνση και με ρυθμό 0,3°C/km κατά την ανατολική κατεύθυνση, βρείτε τον χρονικό ρυθμό μείωσης της θερμοκρασίας που παρατηρείται στη βάρκα.

49. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε έναν τύπο για την $(d/dt)\exp\,[f(t)g(t)]$.

50. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε έναν τύπο για την $(d/dt)(f(t)^{g(t)})$.

51. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = [\ln(1 + x^2 + 2z^2)]/(1 + y^2)$ και τη διαδρομή $\mathbf{c}(t) = (t, 1 - t^2, \cos t)$.

52. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2/(2 + \cos y)$ και τη διαδρομή $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

53. Υποθέστε ότι η $u(x, t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $u_t + uu_x = 0$ και ότι το x, σαν συνάρτηση $x = f(t)$ του t, ικανοποιεί την $dx/dt = u(x, t)$. Αποδείξτε ότι η $u(f(t), t)$ είναι σταθερή ως προς t.

54. Η μετατόπιση στη χρονική στιγμή t και σε οριζόντια θέση x μιας χορδής βιολιού δίνεται από την $u = \sin(x - 6t) + \sin(x + 6t)$. Υπολογίστε την ταχύτητα της χορδής στο $x = 1$ όταν $t = \frac{1}{3}$.

55. Ο ***νόμος των ιδανικών αερίων*** $PV = nRT$ συνδέει μια σταθερά R, το πλήθος n των μορίων του αερίου, τον όγκο V, τη θερμοκρασία σε Kelvin T και την πίεση P.

(α) Δείξτε ότι καθένα από τα n, P, T, V είναι συνάρτηση των υπόλοιπων μεταβλητών και προσδιορίστε τις εξισώσεις ορισμού τους.

(β) Υπολογίστε τις $\partial V/\partial T$, $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$ και δείξτε ότι το γινόμενό τους ισούται με -1.

56. Η ***δυνητική θερμοκρασία*** θ ορίζεται συναρτήσει της θερμοκρασίας T και της πίεσης p από την

$$\theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{0{,}286}.$$

Η θερμοκρασία και η πίεση μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις της θέσης (x, y, z) στην ατμόσφαιρα αλλά και του χρόνου t.

(α) Βρείτε τύπους για τις $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$, $\partial\theta/\partial z$, $\partial\theta/\partial t$ συναρτήσει των μερικών παραγώγων των T και p.

(β) Η συνθήκη $\partial\theta/\partial z < 0$ θεωρείται ότι περιγράφει μια ασταθή ατμόσφαιρα, διότι μια απλή ανοδική η καθοδική ώθηση έχει ως αποτέλεσμα μεγάλες κατακόρυφες μετακινήσεις αέριων μαζών. Οι μετεωρολόγοι χρησιμοποιούν τον τύπο

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p}\right),$$

όπου $g = 32{,}2$ και C_p είναι μια θετική σταθερά. Πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία κατά την ανοδική κατεύθυνση σε μια ασταθή ατμόσφαιρα;

57. Ο ειδικός όγκος V, η πίεση P και η θερμοκρασία T ενός αερίου van der Waals συνδέονται μέσω της $P = RT/(V - \beta) - \alpha/V^2$, όπου α, β και R είναι σταθερές.

(α) Εξηγήστε γιατί οποιαδήποτε δύο από τα V, P και T μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες μεταβλητές που καθορίζουν την τρίτη μεταβλητή.

(β) Βρείτε τις $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$, $\partial V/\partial T$. Βρείτε ποιες μεταβλητές είναι σταθερές και δώστε τη φυσική ερμηνεία κάθε μερικής παραγώγου.

(γ) Επαληθεύστε ότι $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$ (όχι $+1$).

58. Το ύψος h του ηφαιστείου Mauna Loa της Χαβάης περιγράφεται (χοντρικά) από τη συνάρτηση $h(x, y) = 2{,}59 - 0{,}00024y^2 - 0{,}00065x^2$, όπου h είναι το ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας σε μίλια και x και y είναι οι αποστάσεις σε μίλια προς ανατολή-δύση και βορρά-νότο από την κορυφή του βουνού. Στο $(x, y) = (-2, -4)$:

(α) Πόσο γρήγορα αυξάνεται το ύψος κατά την κατεύθυνση $(1, 1)$ (δηλαδή κατά τη βορειοανατολική κατεύθυνση); Εκφράστε την απάντησή σας σε μίλια ύψους ανά μίλια οριζοντίως διανυόμενης απόστασης.

(β) Ποια είναι κατεύθυνση της πιο απότομης ανηφορικής διαδρομής;

59. (α) Κατά ποια κατεύθυνση είναι ίση με μηδέν η κατά κατεύθυνση παράγωγος της $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ στο $(1, 1)$;

(β) Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα για ένα οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0) του πρώτου τεταρτημορίου.

(γ) Περιγράψτε τις καμπύλες στάθμης της f. Ειδικότερα, σχολιάστε τις με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β).

60. (α) Δείξτε ότι η καμπύλη $x^2 - y^2 = c$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $dy/dx = x/y$ για *οποιαδήποτε* τιμή του c.

(β) Σχεδιάστε μερικές από τις καμπύλες $x^2 - y^2 = c$, φερ' ειπείν για $c = \pm 1$. Σχεδιάστε ένα μικρό τμήμα της κλίσης x/y σε διάφορα σημεία (x, y) αυτών των καμπυλών και επιβεβαιώστε ότι τα τμήματα αυτά φαίνονται να είναι εφαπτόμενα στην καμπύλη. Τι συμβαίνει όταν $y = 0$; Τι συμβαίνει όταν $c = 0$;

61. Υποθέστε ότι η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση μίας μεταβλητής και ότι η συνάρτηση $u = g(x, y)$ ορίζεται από την

$$u = g(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Δείξτε ότι η u ικανοποιεί μια (μερική) διαφορική εξίσωση της μορφής

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$$

και βρείτε τη συνάρτηση $G(x, y)$.

62. (α) Έστω F μια συνάρτηση μίας μεταβλητής και f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Δείξτε ότι το διάνυσμα κλίσης της $g(x, y) = F(f(x, y))$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα κλίσης της $f(x, y)$.

(β) Έστω $f(x, y)$ και $g(x, y)$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\nabla f = \lambda \nabla g$ για κάποια συνάρτηση $\lambda(x, y)$. Ποια σχέση συνδέει τις καμπύλες στάθμης των f και g; Εξηγήστε γιατί μπορεί να υπάρχει κάποια συνάρτηση F τέτοια ώστε $g(x, y) = F(f(x, y))$.