Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις 1 έως 6, υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$, $\partial^2 f/\partial y^2$ για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις. Επαληθεύστε το Θεώρημα 1 σε κάθε περίπτωση.

1. $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)^2$, στο χωρίο όπου $(x,y) \neq (0,0)$

2. $f(x,y,z) = e^z + (1/x) + xe^{-y}$, στο χωρίο όπου $x \neq 0$

3. $f(x,y) = \cos(xy^2)$

4. $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$

5. $f(x,y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$

6. $f(x,y) = \log(x-y)$

7. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $\mathbf{x}_0$.

(α) $f(x,y) = \sin(xy)$, $\mathbf{x}_0 = (\pi, 1)$

(β) $f(x,y) = xy^8 + x^2 + y^4$, $\mathbf{x}_0 = (2,-1)$

(γ) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$

8. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \sec^3(4y-3x)$.

9. Μπορεί να υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$ κλάσης C^2 με $f_x = 2x - 5y$ και $f_y = 4x + y$;

10. Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας είναι $u_t = ku_{xx}$. Ελέγξτε αν η $u(x,t) = e^{-kt}\sin(x)$ είναι λύση.

11. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

(α) $f(x,t) = \sin(x-ct)$

(β) $f(x,t) = \sin(x)\sin(ct)$

(γ) $f(x,t) = (x-ct)^6 + (x+ct)^6$

12. (α) Δείξτε ότι η $T(x,t) = e^{-kt}\cos x$ ικανοποιεί τη μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(β) Δείξτε ότι η $T(x,y,t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y)$ ικανοποιεί τη διδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(γ) Δείξτε ότι η $T(x,y,z,t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y + \cos z)$ ικανοποιεί την τριδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

13. Βρείτε τις $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 z/\partial y\,\partial x$ και $\partial^2 z/\partial y^2$ των

(α) $z = 3x^2 + 2y^2$

(β) $z = (2x^2 + 7x^2y)/3xy$, στο χωρίο όπου $x \neq 0$ και $y \neq 0$

14. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των

(α) $z = \sin(x^2 - 3xy)$

(β) $z = x^2y^2e^{2xy}$

15. Βρείτε τις f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} και f_{xyz} για την

$$f(x, y, z) = x^2y + xy^2 + yz^2.$$

16. Έστω $z = x^4y^3 - x^8 + y^4$.

(α) Υπολογίστε τις $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial x$, $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial x$ και $\partial^3 z/\partial x\,\partial x\,\partial y$ (που γράφεται επίσης ως $\partial^3 z/\partial x^2\partial y$).

(β) Υπολογίστε τις $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial y$, $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial y$ και $\partial^3 z/\partial y\,\partial y\,\partial x$ (που γράφεται επίσης ως $\partial^3 z/\partial y^2\partial x$).

17. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 δείξτε ότι αν η $f(x, y, z)$ είναι κλάσης C^3, τότε

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}.$$

18. Επαληθεύστε ότι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$$

για την $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$.

19. Επαληθεύστε ότι $f_{xzw} = f_{zwx}$ για την $f(x, y, z, w) = e^{xyz}\sin(xw)$.

20. Αν η $f(x, y, z, w)$ είναι κλάσης C^3, δείξτε ότι $f_{xzw} = f_{zwx}$.

21. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = x \arctan(x/y)$

(β) $f(x, y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

(γ) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

22. Έστω $w = f(x, y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω $x = u + v$, $y = u - v$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

23. Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση C^2 και έστω $\mathbf{c}(t)$ μια καμπύλη C^2 στον $\mathbb{R}^2$. Βρείτε την παράγωγο δεύτερης τάξης $(d^2/dt^2)((f \circ \mathbf{c})(t))$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας δύο φορές.

24. Έστω $f(x, y, z) = e^{xz}\tan(yz)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $z = k(s, t)$, και έστω η συνάρτηση $m(s, t) = f(g(s, t), h(s, t), k(s, t))$. Βρείτε την m_{st} χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και επιβεβαιώστε ότι η απάντησή σας είναι συμμετρική ως προς s και t.

25. Μια συνάρτηση $u = f(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης που ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

καλείται ***αρμονική συνάρτηση***. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ είναι αρμονική.

26. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές; (Βλ. Άσκηση 25.)

(α) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(β) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(γ) $f(x, y) = xy$

(δ) $f(x, y) = y^3 + 3x^2y$

(ε) $f(x, y) = \sin x \cosh y$

(στ) $f(x, y) = e^x \sin y$

27. (α) Είναι η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ αρμονική; Η $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$;

(β) Η εξίσωση του Laplace για συναρτήσεις n μεταβλητών είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Να βρείτε ένα παράδειγμα συνάρτησης n μεταβλητών που να είναι αρμονική και να δείξετε ότι είναι αρμονική.

28. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές:

(α) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(β) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

29. Έστω ότι οι f και g είναι συναρτήσεις C^2 μίας μεταβλητής και έστω $\phi = f(x - t) + g(x + t)$.

(α) Αποδείξτε ότι η ϕ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση: $\partial^2\phi/\partial t^2 = \partial^2\phi/\partial x^2$.

(β) Σχεδιάστε το γράφημα της ϕ συναρτήσει των t και x αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = 0$.

30. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x, t) = 2 + e^{-t}\sin x$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας: $g_t = g_{xx}$. [Η $g(x, t)$ αναπαριστά τη θερμοκρασία μιας μεταλλικής ράβδου στη θέση x τη χρονική στιγμή t.]

(β) Σχεδιάστε το γράφημα της g για $t \geq 0$. (Υποδειξη: Βρείτε τις τομές με τα επίπεδα $t = 0$, $t = 1$ και $t = 2$.)

(γ) Τι συμβαίνει στην $g(x, t)$ καθώς $t \to \infty$; Ερμηνεύστε αυτό το όριο σε σχέση με τη συμπεριφορά της θερμότητας στη ράβδο.

31. Δείξτε ότι το δυναμικό του Νεύτωνα $V = -GmM/r$ ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{για} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

32. Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

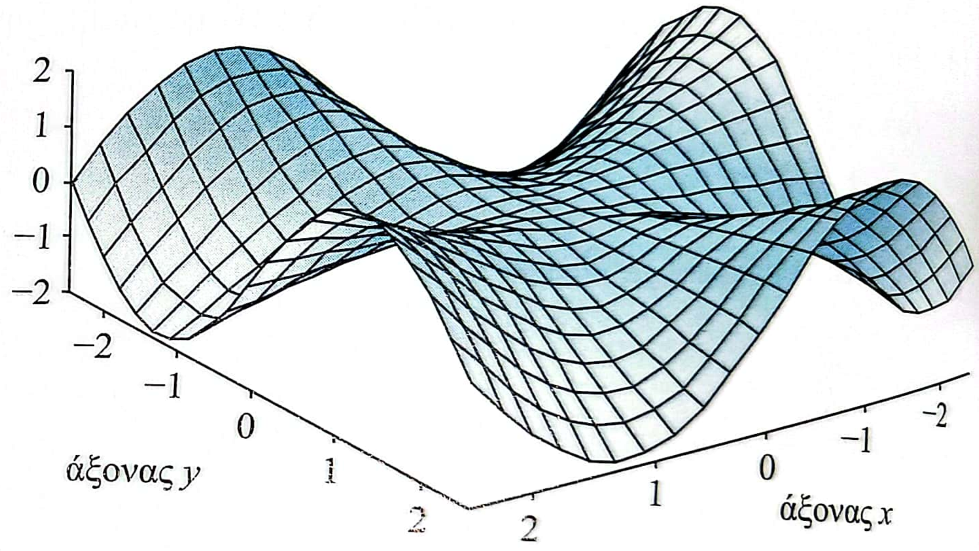
(βλ. Σχήμα 3.1.4).

(α) Αν $(x,y) \neq (0,0)$, υπολογίστε τις $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$.

(β) Δείξτε ότι $(\partial f/\partial x)(0,0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0,0)$.

(γ) Δείξτε ότι $(\partial^2 f/\partial x\,\partial y)(0,0) = 1$, $(\partial^2 f/\partial y\,\partial x)(0,0) = -1$.

(δ) Τι πήγε στραβά; Γιατί δεν είναι ίσες οι μεικτές μερικές παράγωγοι;



Σχήμα 3.1.4 Το γράφημα της συνάρτησης της Άσκησης 32.