Ασκήσεις

1. Έστω $f(x,y)=x^2+3y^2$. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f υπό τον δεδομένο περιορισμό.

   (α) $x^2+y^2=1$

   (β) $x^2+y^2\leq 1$

2. Θεωρήστε όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο p. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange, δείξτε ότι το ορθογώνιο μέγιστου εμβαδού είναι τετράγωνο.

Στις Ασκήσεις 3 έως 7 βρείτε τα ακρότατα της f υπό τους δεδομένους περιορισμούς.

3. $f(x,y,z)=x-y+z$, υπό τον $x^2+y^2+z^2=2$

4. $f(x,y)=x-y$, υπό τον $x^2-y^2=2$

5. $f(x,y)=x$, υπό τον $x^2+2y^2=3$

6. $f(x,y,z)=x+y+z$, υπό τον $x^2-y^2=1, 2x+z=1$

7. $f(x,y)=3x+2y$, υπό τον $2x^2+3y^2=3$

Στις Ασκήσεις 8 έως 11 βρείτε τα σχετικά ακρότατα της $f|S$.

8. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x^2+y^2, S=\{(x,2)\mid x\in\mathbb{R}\}$

9. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x^2+y^2, S=\{(x,y)\mid y\geq 2\}$

10. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x^2-y^2, S=\{(x,\cos x)\mid x\in\mathbb{R}\}$

11. $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,
    $(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2, S=\{(x,y,z)\mid z\geq 2+x^2+y^2\}$

12. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$ στον μοναδιαίο δίσκο (βλ. Παράδειγμα 11 της Ενότητας 3.3).

13. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ ορισμένη στον μοναδιαίο δίσκο $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, να βρείτε τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στον μοναδιαίο κύκλο. Χρησιμοποιήστε τα για να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στον D.

14. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z)=2x+y$ υπό τον περιορισμό $x+y+z=1$.

15. Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y)=4x+2y$ υπό τον περιορισμό $2x^2+3y^2=21$.

16. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange, να βρείτε την απόσταση του σημείου $(2,0,-1)$ από το επίπεδο $3x-2y+8z+1=0$. Συγκρίνετε την απάντησή σας με το Παράδειγμα 12 της Ενότητας 1.3.

17. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x, y, z) = xyz$ στη μοναδιαία μπάλα $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

18. Έστω S η σφαίρα ακτίνας 1 με κέντρο το $(1, 2, 3)$. Να βρείτε την απόσταση της S από το επίπεδο $x + y + z = 0$. (Υποδειξη: Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange να βρείτε την απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας.)

19. (α) Να βρείτε τρεις αριθμούς που να έχουν γινόμενο 27 και το ελάχιστο δυνατό άθροισμα.

(β) Να βρείτε τρεις αριθμούς που να έχουν άθροισμα 27 και το μέγιστο δυνατό γινόμενο.

20. Ένα ορθογώνιο κουτί χωρίς οροφή πρέπει να έχει εμβαδόν επιφάνειας 16 m^2. Να βρείτε τις διαστάσεις που μεγιστοποιούν τον όγκο του.

21. Σχεδιάστε ένα κυλινδρικό κουτί (με καπάκι) που να χωράει 1 λίτρο (= 1000 cm^3) νερού χρησιμοποιώντας την ελάχιστη δυνατή ποσότητα μετάλλου.

22. Δείξτε ότι οι λύσεις των εξισώσεων (4) και (5) βρίσκονται σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με τα κρίσιμα σημεία της

$$\begin{aligned} &h(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \\ &\quad = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - c_1] \\ &\quad - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - c_k]. \end{aligned}$$

23. Να βρείτε το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y - z$ στην μπάλα $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

24. Επαναλάβετε την Άσκηση 23 για την $f(x, y, z) = x + yz$.

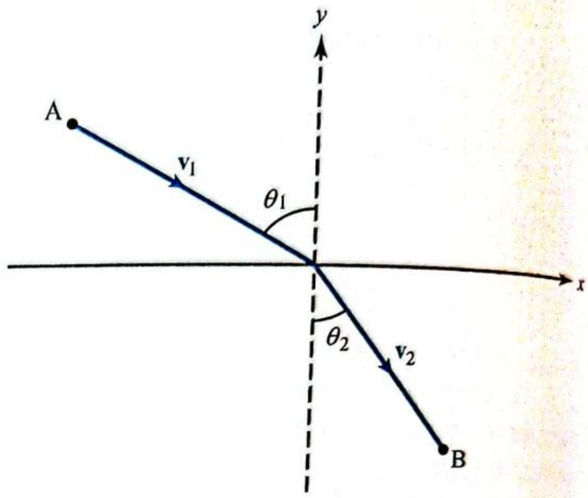
25. Πρόκειται να μικρύνουμε έναν ορθογώνιο καθρέφτη εμβαδού A τετραγωνικών μέτρων. Αν το κόστος κοπής κατά μήκος των οριζόντιων ακμών είναι p λεπτά ανά μέτρο, και κατά μήκος των κατακόρυφων ακμών q λεπτά ανά μέτρο, να βρείτε τις διαστάσεις που θα ελαχιστοποιήσουν το συνολικό κόστος.

26. Ένα αρδευτικό κανάλι στην Αριζόνα έχει τσιμεντένιες πλευρές, πυθμένα τραπεζοειδούς διατομής εμβαδού $A = y(x + y \tan\theta)$ και βρεχόμενη περίμετρο $P = x + 2y/\cos\theta$, όπου x το πλάτος του πυθμένα, y το ύψος του νερού και θ η πλευρική κλίση, μετρημένη ως προς την κατακόρυφο. Η καλύτερη σχεδίαση για δεδομένη κλίση θ προκύπτει με επίλυση της $P =$ ελάχιστο υπό τη συνθήκη $A =$ σταθερά. Δείξτε ότι $y^2 = (A\cos\theta)/(2 - \sin\theta)$.

27. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο δεύτερης παραγώγου, μελετήστε τη φύση των ακροτάτων στις Ασκήσεις 3 και 7.

28. Μια ακτίνα φωτός ταξιδεύει από το σημείο A στο σημείο B διασχίζοντας το σύνορο μεταξύ δύο μέσων (βλ. Σχήμα 3.4.7). Στο πρώτο μέσο η ταχύτητά της είναι v_1 ενώ στο δεύτερο v_2. Δείξτε ότι η διαδρομή διανύεται στον ελάχιστο χρόνο όταν ισχύει ο *νόμος του Snell*:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$



Σχήμα 3.4.7 Ο νόμος διάθλασης του Snell.

29. Μια υπηρεσία παράδοσης δεμάτων απαιτεί οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου κουτιού να είναι τέτοιες ώστε το μήκος συν το διπλάσιο του πλάτους συν το διπλάσιο του ύψους να μην υπερβαίνει τα 108 εκατοστά ($l + 2w + 2h \leq 108$). Ποιος είναι ο όγκος του μεγαλύτερου κουτιού που μπορεί να παραδώσει η εταιρεία;

30. Έστω P ένα σημείο μιας επιφάνειας S του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση $f(x, y, z) = 1$, όπου η f είναι κλάσης C^1. Υποθέστε ότι το P είναι ένα σημείο στο οποίο η απόσταση της S από την αρχή των αξόνων μεγιστοποιείται. Δείξτε ότι το διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο P είναι κάθετο στην S.

31. Έστω A ένας μη μηδενικός συμμετρικός πίνακας 3×3, δηλαδή τα στοιχεία του ικανοποιούν την $a_{ij} = a_{ji}$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$.

(α) Ποιο είναι το ∇f;

(β) Θεωρήστε τον περιορισμό της f στη μοναδιαία σφαίρα $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ του $\mathbb{R}^3$. Από το Θεώρημα 7 γνωρίζουμε ότι η f πρέπει να έχει μέγιστο και ελάχιστο στην S. Δείξτε ότι πρέπει να υπάρχουν $\mathbf{x} \in S$ και $\lambda \neq 0$ τέτοια ώστε $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. (Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ καλείται ***ιδιοδιάνυσμα*** και ο πραγματικός αριθμός λ ***ιδιοτιμή***.)

(γ) Ποια είναι τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στην $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

32. Υποθέστε ότι ο A στη συνάρτηση f της Άσκησης 31 δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός.

(α) Ποιο είναι το ∇f;

(β) Μπορείτε να συμπεράνετε την ύπαρξη ιδιοδιανύσματος και ιδιοτιμών όπως στην Άσκηση 31;

33. (α) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $x + y^2$ υπό τον περιορισμό $2x^2 + y^2 = 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη φραγμένη εσσιανή, χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία.

34. Απαντήστε στο ερώτημα που διατυπώνεται στην τελευταία γραμμή του Παραδείγματος 9.

35. Προσπαθήστε να βρείτε τα ακρότατα της $xy + yz$ μεταξύ των σημείων που ικανοποιούν την $xz = 1$.

36. Η συνάρτηση παραγωγής μιας εταιρείας είναι $Q(x, y) = xy$. Το κόστος παραγωγής είναι $C(x, y) = 2x + 3y$. Αν η εταιρεία μπορεί να δαπανήσει $C(x, y) = 10$, ποια είναι η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να παραχθεί;

37. Βρείτε το σημείο της καμπύλης $(\cos t, \sin t, \sin(t/2))$ που απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων.

38. Μια εταιρεία χρησιμοποιεί μάλλινες και βαμβακερές ίνες για να παράγει υφάσματα. Η ποσότητα του υφάσματος που παράγεται δίνεται από την $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, όπου x είναι το βάρος του μαλλιού σε κιλά, y το βάρος του βαμβακιού σε κιλά, $x > 1$ και $y > 1$. Αν το μαλλί κοστίζει p δολάρια ανά κιλό, το βαμβάκι q δολάρια ανά κιλό και η εταιρεία μπορεί να δαπανήσει B δολάρια για πρώτες ύλες, ποιος πρέπει να είναι ο λόγος βαμβακιού προς μαλλί ώστε να παράγεται όσο το δυνατόν περισσότερο ύφασμα;

39. Πραγματοποιήστε την ανάλυση του Παραδείγματος 10 για τη συνάρτηση παραγωγής $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, όπου A και α είναι θετικές σταθερές και $0 < \alpha < 1$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση ονομάζεται ***συνάρτηση παραγωγής Cobb–Douglas*** και μερικές φορές χρησιμοποιείται ως ένα απλό μοντέλο για τις εθνικές οικονομίες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η Q είναι η συνολική παραγωγή της οικονομίας για δεδομένο κεφάλαιο και εργασία.