Moduli χωρίων στην ομάδα Heisenberg

Σεραφείμ Σ. Γιαννόπουλος

12 Σεπτεμβρίου 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ένα σημαντικό τμήμα της μιγαδικής ανάλυσης αφορά προβλήματα μεγιστοποίησης. Πρώτα απ΄ ολα, με εκτιμήσεις συναρτησοειδών, και περιγραφή των πεδίων τιμών τους σε διάφορες συμπαγείς κλάσεις σύμμορφων και σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων. Το modulus μιας οικογένειας καμπυλών είναι κλασσικό εργαλείο στη μελέτη ιδιοτήτων σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων στο μιγαδικό επίπεδο και σε γενικότερους μετρικούς χώρους. Διάφορες εκδοχές της μεθόδου έχουν χρησιμοποιηθεί για να βρούμε μεγιστικές σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις που να ελαχιστοποιούν τη μεγιστική κύμανση ανάμεσα σε μιά καθορισμένη κλάση απεικονίσεων στο μιγαδικό επίπεδο ή σε μια επιφάνεια Riemann.

Στο πρώτο και βασικότερο κεφάλαιο, προτείνεται μια μέθοδος για τον προσδιορισμό μεγιστικών σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων στην ομάδα Heisenberg κάνοντας χρήση του **modulus** μιας οικογένειας καμυλών, αφού πρώτα δούμε πώς αυτο ορίζεται στην ομάδα Heisenberg. Η προσέγγιση επιτρέπει τη μελέτη ελαχιστοποιητών όχι μόνο για το συναρτησοειδές της μέγιστης διαταραχής, αλλα και για το συναρτησοειδές μέσης διαταραχής ΄(οπου η υποψήφια μεγιστική απεικόνιση δέν απαιτείται να έχει σταθερή διαταραχή). Ώς αντίστοιχο του κλασσικού ευκλείδειου προβλήματος μεγιστοποίησης, θεωρούμε την κλάση των σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων ανάμεσα σε δύο σφαιρικούς δακτυλίους στην Heisenberg.

Χρησιμοποιώντας λογαριθμικές συντεταγμένες μπορεί να οριστεί το ανάλογο της κλασσικής ευκλείδειας **απεικόνισης ακτινικής τάνυσης**. Αναφέρονται επίσης οι μεγιστικές της ιδιότητες ώς προς τη μέση και τη μέγιστη διαταραχή. Αποδεικνύεται ότι αυτή ακριβώς η ακτινική τάνυση ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές μέσης διαταραχής και ότι ελαχιστοποιεί επίσης και το συναρτησοειδές μέγιστης διαταραχής μέσα σε μια μικρότερη κλάση απεκονίσεων που διατηρούν τις σφαίρες. Αποδεικνύεται ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί επίσης να εφαρμοσθεί στη μελέτη ελαχιστοποιητών για ένα συναρτησοειδές μέσης κύμανσης στη κλάση των απεικονίσεων ανάμεσα στο δακτύλιο και το μιγαδικό επίπεδο. Προβλήματα ελαχιστοποίησης που αφορούν τη μέση κύμανση συναρτησοειδών, έχουν επίσης μελετηθεί με άλλες μεθόδους στην ευκλείδια περίπτωση.

Απ΄ την άλλη, η μέθοδος του modulus για οικογένειες καμπυλών, φαίνεται να δουλεύει στην υποριμμάνια περίπτωση της πρώτης ομάδας Heisenberg που μπορεί να εφαρμοσθεί στη μελέτη μεγιστικών σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων το συναρτησοειδές μέσης ή μεγιστικής διαταραχής. Η ιδέα είναι να βρούμε μια απεικόνιση που έχει την **ελαχιστική ιδιότητα τάνυσης** (σνμ. ΕΙΤ) για μια δοθείσα οικογένεια καμπυλών που σχετίσεται με το χωρίο που θελουμε να μελετήσουμε. Μια απεικόνιση λέμε ότι έχει την ΕΙΤ για μια οικογένεια καμπυλών, άν η μέγιστη "συρρίκνωση" της απεικόνισης λαμβάνεται στην κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου που είναι εφαπτομενικό στην οικογένεια καμπυλών. Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται οτι αυτό το κατασκεύασμα μπορεί επιτυχώς να εφαρμοσθεί στη μελέτη μεγιστικών σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων ανάμεσα σε σφαιρικούς δακτυλίους της ομάδας Heisenberg. Ώς αποτέλεσμα λαμβάνουμε μια μεγιστική **απεικόνιση τάνυσης** που ελαχιστοποιεί τη μέση διαταραχή στη κλάση όλων των σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων μεταξύ δύο σφαιρικών δακτυλίων.

Κεφάλαιο 2

Η ομάδα Heisenberg

2.1 Προκαταρκτικά

Ορίζουμε τη πρώτη ομάδα Heisenberg $\mathbb{H}^1$ ώς το $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ με πράξη ομάδας την:

$$(z,t) * (z',t') = (z + z', t + t' - 2\Im(zz'))$$

Αποδεικνύεται ότι το $(\mathbb{H}^1, *)$ είναι ομάδα με αντίστροφο του (z,t), το $(-z,-t)$. Ορίζουμε τώρα, για $p = (z,t)$ και $q = (z',t')$, όπου $\|(z,t)\|_H := (|z|^4 + t^2)^{\frac{1}{4}}$, την **νόρμα Heisenberg**. Η $\|\cdot\|_H$ δέν είναι νόρμα δεδομένου ότι δεν ικανοποιεί τη τριγωνική ανισότητα.

Ορίζεται τώρα με φυσιολογικό τρόπο, μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική στον $\mathbb{H}^1$ μέσω του τύπου:

$$d_H(p,q) := \|p^{-1} * q\|_H \quad , \quad p,q \in \mathbb{H}^1$$

Μπορούμε να ελέγξουμε 'οτι ο $(\mathbb{H}^1, d)$ είναι μετρικός χώρος. Η d_H λέγεται **απόσταση Heisenberg**. Η άλγεβρα Lie των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{h}^1$ παράγεται απο τα:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

με μόνη μη-τετριμμένη σχέση, αυτη του μεταθέτη: $[X,Y] = -4T$. Έχει μία διάσπαση:

$$\mathfrak{h}^1 = span\{X,Y\} \oplus spanT$$

Χρησιμοποίουμε επίσης τα οριζόντια μιγαδικά διανυσματικά πεδία:

$$Z = \frac{1}{2}(X - iY) = \frac{\partial}{\partial z} + iz\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad Z = \frac{1}{2}(X + iY) = \frac{\partial}{\partial z} - iz\frac{\partial}{\partial t}$$

Η **μετρική Haar** μ στον $\mathbb{H}^1$ είναι η συνηθισμένη 3−διάστατη μετρική Lebesque, στον $\mathbb{R}^3$ Η **οριζόντια δέσμη** είναι η υποδέσμη $H\mathbb{H}^1 = \{X,Y\}$ ή σε μιγαδικό συμβολισμό, $H\mathbb{H}^1 = \{Z,\bar{Z}\}$ της εφαπτόμενης δέσμης $T\mathbb{H}^1$.

Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γράφουμε:

$$\int f(z,t) d\mathcal{L}^3(z,t) := \int f(x+iy,t) = d\mathcal{L}^3(x,y,t)$$

2.2 Λογαριθμικές συντεταγμένες

Ενδιαφέροντα παραδείγματα σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων της ομάδας Heisenberg προκύπτουν χρησιμοποιώντας λογαριθμικές συντεταγμένες. Ας δούμε πώς κατασκευάζονται παρακάτω. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τις λογαριθμικές συντεταγμένες του επιπέδου, τροποποιημένες. Ξεκινάμε με σφαιρικές συντεταγμένες στην ομάδα Heisenberg. Θεωρόντας $\mathbb{H}^1 := \mathbb{C}\times\mathbb{R}$, αυτές δίνονται από τους τύπους:

$$\mathcal{S}(r,\theta,\phi) := (r\cos^{1/2}\theta e^{i\phi}, r^2\sin\theta) \text{ για κάθε } (r,\theta,\phi) \in [0,\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi)$$

Αλλάζουμε τώρα μταβλητές εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$T(r,\theta,\phi) = (\xi,\psi,\eta) = \left(2\log r, -\theta, \frac{1}{3}(\pi-\theta-2\phi)\right)$$

Οι νέες συντεταγμένες δίδονται από:

$$\Phi(\xi,\psi,\eta) = (z,t) = \left(i\cos^{1/2}\psi\cdot e^{\frac{\xi+i(\psi-3\eta)}{2}}, -\sin\psi e^{\xi}\right)$$

Στο χωρίο

$$\tilde{\mathbb{H}}^1_0 := \mathbb{R}\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times\mathbb{R}$$

η απεικόνιση Φ είναι λεία και τοπικά ενρριπτική με Ιακωμβιανή ίση με:

$$\det\Phi_*(\xi,\psi,\eta) = -\frac{3}{4}e^{2\xi} \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι η

$$\Phi : \tilde{\mathbb{H}}^1_0 \to \mathbb{H}^1_0 := \mathbb{H}^1 \setminus \{(z,t)\in\mathbb{H}^1 : z=0\}$$

είναι λεία απεικόνιση κάλυψης. Είναι τότε γνωστό, ότι για κάθε καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ και για κάθε σημείο ξ,ψ,η στο σύνολο $\Phi^{-1}(\{\gamma(a)\})$, υπάρχει μια μοναδική ανύψωση $\tilde{\gamma}:[a,b]\to\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ τέτοια ώστε $\Phi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$ και $\tilde{\gamma}=(\xi,\psi,\eta)$. Άν η γ είναι απολύτως συνεχής (με την ευκλείδεια έννοια), ή αν είναι $\mathcal{C}^k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}_0$, τότε η $\tilde{\gamma}$ κληρονομεί τις ίδιες ιδιότητες ομαλότητας.

Οχι μόνο καμπύλες μπορούμε να πάρουμε, αλλά και συνεχείς συναρτήσεις απο απλά συνεκτικά χωρία του $\mathbb{H}^1$ όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα. Πάραυτα, δέν ισχύει ότι κάθε απεικόνιση επάγει $\tilde{f}:\tilde{\mathbb{H}}^1_0\to\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ μια καλώς ορισμένη απεικόνιση $f:\mathbb{H}^1_0\to\mathbb{H}^1_0$ με την ιδιότητα $\Phi\circ\tilde{f}=f\circ\Phi$.

Θεώρημα 1. *Έστω Q ένα απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ και έστω $f:\Phi(Q)\to\mathbb{H}^1_0$ μια $\mathcal{C}^k, k\in\mathbb{N}_0$ απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια $\mathcal{C}^k$ απεικόνιση $\tilde{f}:Q\to\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ τέτοια ώστε $\Phi\circ\tilde{f}=f\circ\Phi$. Αντιστρόφως, άν $\tilde{f}:Q\to\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ είναι μια $\mathcal{C}^k$ απεικόνιση σ' ένα $Q\subseteq\tilde{\mathbb{H}}^1_0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε (ξ,ψ,η) και (ξ',ψ',η') στο Q, έχουμε ότι:*

$$\Phi(\xi,\psi,\eta) = \Phi(\xi\,\psi\,\eta) \text{ συνεπάγεται ότι } \Phi(\tilde{f}(\xi,\psi,\eta)) = \Phi(\tilde{f}(\xi',\psi',\eta'))$$

Τότε, μπορεί κανείς να ορίσει μια $\mathcal{C}^k$ απεικόνιση $f:\Phi(Q)\to\mathbb{H}^1_0$ μέσω της σχέσης $\Phi\circ\tilde{f}=f\circ\Phi$

Στα επόμενα θα κάνουμε αρκετή χρήση των λογαριθμικών συντεταγμένων: Θα ορίσουμε μια σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση f ανάμεσα σε χωρία της ομάδας Heisenberg, καθορίζοντας έναν τύπο για την f, και αντιστρόφως, θα δουλέψουμε με την ανύψωση $\tilde{f}$ της $f \circ \Phi$ όπου αυτό είναι βολικότερο.
Ο λόγος για τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις λογαριθμικές συντεταγμένες, και θέν θα περιοριστούμε απλά στις Heisenberg σφαιρικές συντεταγμένες είναι διπλός: Απο τη μια παρατηρείται ότι η μορφή επαφής και οι συνθήκες επαφής έχουν ένα απλούστερο τύπο μ΄ αυτό τον τρόπο. Απ΄ την άλλη υπάρχη μια καθαρά γεωμετρική μετάφραση: στις λογαριθμικές συντεταγμένες, οι άξονες συντεταγμένων $\xi = 0, \psi = 0, \eta = 0$ είναι αντιστοίχως η Heisenberg μοναδιαία μπάλα, το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, και το σύνορο του σύνηθους flat pack.

Στα επόμενα θα εκφράσουμε τη συνθήκη επαφής, τύπους για επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα, για οριζόντια διανυσματικά πεδία, το συντελεστή Beltrami, καθώς και τη συνθήκη ελάχιστης τάνυσης σε λογαριθμικές συντεταγμένες. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\tilde{f}(\xi, \psi, \eta) = (\Xi(\xi, \psi, \eta), \Psi(\xi, \psi, \eta), H(\xi, \psi, \eta))$$

και γράφουμε $\Xi_\xi = \frac{\partial \Xi}{\partial \xi}$ και ομοίως για τις άλλες μερικές παραγώγους

Συνθήκη Επαφής Η μορφή επαφής έχει απλή εξίσωση όταν εκφράζεται σε λογαριθμικές συντεταγμένες. Έστω U ανοιχτο στον $\mathbb{H}_0^1$ τέτοιο ώστε ένας τοπικός άτλας συντεταγμένων του $\mathbb{H}_0^1$ μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας την $(\Phi|_U)^{-1} = (\xi, \psi, h)$. Τότε η απεικόνιση επαφής t έχει τοπική έκφραση:

$$\tau = -e^{-\xi}(\sin\psi d\xi + 3\cos\psi dh)$$

Θεώρημα 2. *Έστω Q ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{H}_0^1$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\mathcal{C}^k, k \in \mathbb{N}$ απεικονισεις $f : Q\mathbb{H}_0^1$ και $f : \Phi(Q) \to$ τέτοιες ώστε $\Phi \circ f = f \circ \Phi$ στο Q. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- *Η απεικόνιση f είναι ενρριπτική απεικόνιση επαφής.*
- *Η απεικόνιση $f = (\Xi, \Psi, H)$ έχει την ιδιότητα:*

$$\Phi(f(\xi\psi, h)) = \Phi(f(\xi', \psi', h')) \Leftrightarrow \Phi(\xi, \psi, h) = \Phi(\xi, \psi, \eta)$$

για $(\xi, \psi, \eta), (\xi', \psi', \eta')$ αν και μόνο άν υπάρχει μια πουθενά μιδενιζόμενη συνάρτηση $\tilde{\lambda} : Q \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} e^{\Xi}(\sin\Psi\Xi_\xi + 3\cos\Psi H_\xi) &= \tilde{\lambda} e^{\xi}\sin\psi \\ e^{\Xi}(\sin\Psi\Xi_\psi + 3\cos\Psi H_\psi) &= 0 \\ e^{\Xi}(\sin\Psi\Xi_\eta + 3\cos\Psi H_\eta) &= \tilde{\lambda} e^{\xi}\cos\psi \end{aligned}$$

Επιπλέον, άν η () ισχύει, τότε:

$$H_\psi + \frac{1}{3}\tan\Psi \cdot \Xi_\psi = 0$$

$$W_{\xi,\eta}H + \frac{1}{3}\tan\Psi \cdot W_{\xi,\eta}\Xi = 0$$

με $W_{\xi,\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\tan\psi}{3}\frac{\partial}{\partial\eta}$

Απόδειξη Άν οι δύο απεικονίσεις f και $\tilde{f}$ σχετίζονται μεσω της $\Phi \circ \tilde{f} = f \circ \Phi$, τότε είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η f είναι ενρριπτική άν και μόνο άν η (12) ισχύει.
Από τη συνθήκη επαφής παρατηρούμε ότι σε κάθε $p \in \Phi(Q)$ και $f(p) \in f(\Phi(Q))$ μπορούμε να ορίσουμε χάρτες τοπικών συντεταγμένων χρησιμοποιώντας την απεικόνιση Φ έτσι ώστε η τοπική έκφραση της f ώς προς τους χάρτες να είναι ακριβώς η $\tilde{f}$. Αυτό συμβαίνει λόγω μοναδικότητας της συνεχούς μεταφοράς διαμέσου ενός σημείου. Η μορφή επαφής τ δίνεται τότε από την (11). Η συνθήκη του ότι υπάρχει $\lambda(p) \neq 0$ έτσι ώστε $(f^*\tau) = \lambda(p)\tau_p$ να είναι ισοδύναμομε τη () με $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \Phi$. Να παρατηρήσουμε ότι $\psi, \Psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ το οποίο μας επιτρέπει να διαιρέσουμε τις εξισώσεις με $\cos\psi$ και $\cos\Psi$. Απ΄ τη δεύτερη εξίσωση έπεται ότι

$$\tan\Psi\Xi_\psi + 3H_\psi = 0$$

Επιπλέον, μπορούμε ναλύσουμε την τρίτη εξίσωση ώς προς $\tilde{\lambda}$ και να εισάγουμε το αποτέλεσμα στη πρώτη εξίσωση.Αυτό δίνει:

$$\tan\Psi(\Xi_\psi - \frac{1}{3}\tan\psi\Xi_\eta) + 3(H_\xi - \frac{1}{3}\tan\psi H_\eta) = 0$$

Το αποτέλεσμα λαμβάνεται αν εισάγουμε το συντομότερο συμβολισμό με το διαφορικό τελεστή $W_{\xi,\eta}$

2.3 Επιφανειακό και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Με τον όρο **καμπύλη** στον $\mathbb{H}^1$ θα εννοούμε πάντα μια συνεχή απεικόνιση ορισμένη σε ένα (κλειστό) διάστημα. Τα σημεία μιας απεικόνισης $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1$ συμβολίζονται ώς

$$\gamma(t) = (\gamma_I(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$

Η καμπύλη λέγεται **ευθυγραμμίσιμη** άν το μήκος της $l(\gamma)$ (ώς προς τη Heisenberg μετρική d_H) είναι πεπερασμένο. Αποδεικνύεται τότε ότι υπάρχει μιά μοναδική παραμέτριση ώς προς το μήκος τόξου (η οποία μάλιστα είναι και Lipschitz συνεχής με σταθερά 1):

$$\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to (\mathbb{H}^1, d_H)$$

Θεωρούμε $\rho : \mathbb{H}^1 \to [0,\infty]$ μια μή αρνητική Borel συνάρτηση και γράφουμε

$$\int_\gamma \rho dl := \int_0^{l(\gamma)} \tilde{\gamma}(s)ds$$

για το επικαμπύλιο ολκλήρωμα ώς προς το μήκος τόξου.

Μία απόλυτα συνεχής καμπύλη

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}^1 \quad , \quad s \mapsto \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$$

λέγεται **οριζόντια** άν:

$$\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{H}^1 \quad \text{σχ.π στο } [a,b]$$

Αποδεικνύεται ότι μια καμπύλη είναι απολύτως συνεχής ώς προς τη μετρική Heisenberg d_H άν και μόνο άν είναι οριζόντια καμπύλη. Επιπροσθέτως, το μήκος μιας λείας ευθυγραμμίσιμης καμπύλης $\gamma = (\gamma_I, \gamma_3)$ ως προς τη d_H δίδεται απο το ολοκλήρωμα της νόρμας του οριζόντιου μέρους του εφαπτόμενου διανύσματος:

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Στη πραγματικότητα, ο ίδιος τύπος ισχύει για τυχαίες οριζόντιες καμπύλες και για ολοκληρώματα $\int_a^b \rho dl$, χωρίς απαραιτήτως $\rho = 1$.

Έστω Γ μια οικογένεια καμπυλών στον $\mathbb{H}^1$, δηλαδή συνεχείς απεικονίσεις στο επίπεδο. Δοθείσας μιας περιοχής Ω στον $\mathbb{H}^1$, λέμε ότι μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1$ βρίσκεται στο Ω αν

$$\gamma((a,b)) \subseteq \Omega \quad \text{και} \quad \gamma(a)\gamma(b) \in \Omega$$

Ψποθέτουμε ότι το σύνορο του Ω έχει δύο ξένες συνιστώσες: $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Λέμε τότε ότι η γ συνδέει το $\partial\Omega_1$ με το $\partial\Omega_2$ στο Ω, άν η γ βρίσκεται στο Ω και

$$\gamma(a) \in \partial\Omega_1 \quad \text{και} \quad \gamma(b) \in \Omega_2$$

Άν η γ είναι ευθυγραμμίσιμη ώς προς τη μετρική Heisenberg d_H ή $d_c c$, μπορεί να παραμετριστεί ώς πρός μήκος τόξου,

$$\gamma = \gamma \circ s_\gamma$$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{H}^1$ ένα μετρήσιμο ασύνολο, και έστω $Q \subseteq \mathbb{H}_0^1$ ένα ανοιχτό σύνολο τέτοιο ώστε το $\Phi(Q)$ να συμπίπτει με το Ω μέχρις συνόλου μέτρου 0, και έτσι ώστε η Φ_Q να είναι αντιστρέψιμη. Τότε, μια συνάρτηση $h : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη άν και μόνο αν η $(h \circ \Phi)|\det \Phi_*|$ να είναι ολοκληρώσιμη στο Q, και στη περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\int_\Omega h(p) d\mathcal{L}^3(p) = \frac{3}{4} \int_Q e^{2\xi} h(\Phi(\xi,\psi,h)) d\mathcal{L}^3(\xi,\psi,h)$$

Στην ιδιαίτερη περίπτωση του σφαιρικού δακτύλιου

$$A(a,b) = \{p \in \mathbb{H}^1 : a < \|p\|_H < b\} \quad , \quad 0 < a < b$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $h : A(a,b) \to \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_{A(a,b)} h(p) d\mathcal{L}^3(p) = \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\psi}{3}} \int_{\log a^2}^{\log b^2} h(\Phi(\xi,\psi,\eta)) e^{2\xi} d\xi d\eta d\psi$$

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο modulus, ο ακόλουθος τύπος για επικαμπύλια ολοκληρώματα σε όρους λογαριθμικών συντεταγμένων είναι χρήσιμος. Η απόδειξη της του πρώτου μέρους της πρότασης είναι ευθύς υπολογισμός. Η απόδειξη γίνεται περισσότερο δύσκολη αν υποθέσουμε ότι η καμπύλη γ μπορεί να τέμνει τον $t-$άξονα, περιπτωση η οποία θα θηφθεί υπ΄ οψην στις εφαρμογές μας.

Θεώρημα 3. *Μια καμπύλη* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1_0$ *είναι οριζόντια άν και μόνο άν υπάρχει απόλυτα συνεχής καμπύλη*

$$\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{H}^1_0 \quad , \quad \tilde{\gamma}(s) = (\xi(s), \psi(s), \eta(s))$$

με $\Phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ *και*

$$\sin(\psi(s))\dot{\xi}(s) + 3\cos(\psi(s)\dot{\eta}(s)) = 0, \quad \sigma\chi.\forall s \in [a,b]$$

Άν μια οριζόντια καμπύλη γ *ικανοποιεί την:*

$$\gamma(s) \in \mathbb{H}^1_0, \quad \sigma\chi.\forall s \in [a,b]$$

τότε υπάρχει:

$$\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}, \quad s \mapsto (\xi(s), \psi(s), \eta(s))$$

με τη $s \mapsto \xi(s)$ *να είναι απολύτως συνεχής και τέτοια ώστε για* $s \in [a,b] \cap \gamma^{-1}(\mathbb{H}^1_0)$ *να ισχύει* $\Phi(\tilde{\gamma}(s)) = \gamma(s)$ *και η () ισχύει σχεδόν παντού.*
Επιπλέον για κάθε Borel συνάρτηση $\rho : \mathbb{H}^1 \to [0,\infty]$, *έχουμε:*

$$\rho d = \int_a^b \rho(\Phi(\tilde{\gamma}(s)))\frac{1}{2}e^{\frac{\xi(s)}{2}}(1 + \tan^2(\psi(s)))^{\frac{1}{4}}(\dot{\xi}(s)^2 + \dot{\psi}(s)^2)$$

Απόδειξη Άν $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \tilde{\mathbb{H}}^1_0$ είναι μια απολύτως συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την () τότε θεωρούμε την απολύτως συνεχή $\gamma := \Phi \circ \tilde{\gamma}$. Αντιστρόφως, αν η $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1_0$ είναι οριζόντια τότε θεωρούμε $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \tilde{\mathbb{H}}^1_0$ να είναι μια μεταφορά (lift) της γ ώς προς την απεικόνιση κάλυψης Φ. Η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη άν η εικόνα $\gamma([a,b])$ δέν περιλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου στο $\mathbb{H}^1_0$.

Για την ώρα ας υποθέσουμε ότι μας δίδεται μια σχεδόν παντού διαφορίσιμη απεικόνιση $\gamma : [a,b]\mathbb{H}^1 \setminus \{0\}$ και $\gamma : \tilde{[a,b]} \to \mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$, έτσι ώστε $\Phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ για κάθε $s \in [a,b] \cap \gamma^{-1}(\mathbb{H}^1_0)$ Ψπάρχει γειτονιά του s για την οποία επίσης έχουμε $\Phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Έπεται ότι,

$$\dot{\gamma}(s) = i\sqrt{\cos(\psi(s))\dot{\psi(s)}}e^{\frac{\xi(s)+i(\psi(s))-3\eta(s)}{2}}\frac{1}{2}\big((\dot{\xi}(s) - \tan(\psi(s)\dot{\psi}(s)) + i(\dot{\psi(s)} - 3\dot{\eta}(s))\big)$$

και η συνθήκη για μια οριζόντια καμπύλη γίνεται:

$$-e^{\xi(s)}(\cos(\psi(s))\dot{\psi}(s) + \sin(\psi(s)\dot{\xi}(s))) = -\cos(\psi(s))e^{\xi(s)}(\dot{\psi}(s) - 3\dot{\eta}(s))$$

Αυτό αποδεικνύει τη () με την προυπόθεσηότι $\gamma = \Phi \circ \tilde{\gamma}$ σχεδόν παντού. Αφού $\cos(\psi(s)) \neq 0$ μπορούμε περεταίρω να λύσουμε την για $\dot{\eta}(s) = -\frac{1}{3}\tan(\psi(s))\dot{\xi}(s)$. Τότε η () δίνει:

$$|\dot{\gamma}_I(s)| = \sqrt{\cos(\psi(s))}e^{\frac{\xi(s)}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{(\dot{\xi}(s) - \tan(\psi(s)\dot{\psi}(s))^2) + (\dot{\psi}(s) - \tan(\psi(s)\dot{\xi}(s))^2)} =$$

$$\sqrt{\cos(\psi(s))}e^{\frac{\xi(s)}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2(\psi(s)}\sqrt{\dot{\xi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} =$$

$$\frac{1}{2}e^{\frac{\xi(s)}{2}}(1 + \tan^2(\psi(s)))^{\frac{1}{4}}(\dot{\xi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)^{\frac{1}{2}}$$

Για μια οριζόντια καμπύλη $\gamma : [a.,b] \to \mathbb{H}^1 \setminus \{0\}$, ο τύπος για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έπεται αμέσως, καθώς $\int_\gamma \rho dl = \int_a^b \rho(\gamma(s))|\dot{\gamma}_I(s)|ds$.

Απομένει να ελέγξουμε την ύπαρξη της $\tilde{\gamma}$ για μια οριζόντια καμπύλη γ που τέμνει τον τ-άξονα. Άν $s \in [a,b]$ είναι τέτοιο ώστε $\gamma(s) \in \mathbb{H}_0^1$, τότε απο συνέχεια της γ, έχουμε επίσης $\gamma(t) \in \mathbb{H}_0^1$ για τα t που βρίσκονται σε μια γειτονειά του s και η απεικόνιση $\tilde{\gamma}$ μπορεί να ορισθεί τοπικά. Για να γίνει αυτό πιο συγκεκριμένο, έστω $J(s)$ το μεγαλύτερο διάστημα έτσι ώστε $\gamma(t) \in \mathbb{H}_0^1 \forall t \in J(s)$. Τότε για δύο σημεία $s,t \in [a,b]$ με $\gamma(s),\gamma(t) \in \mathbb{H}_0^1$, είτε έχουμε $J(s) = J(t)$ είτε $J(s) \cap J(t) = \varnothing$. Επομένως, υπάρχει μια οικογένεια $J_i, i \in I$, απο ξένα μή κενα διαστήματα, έτσι ώστε $[a,b] \cap \gamma^{-1}(\mathbb{H}_0^1) = \bigcup_{i\in I} J_i$. Τώρα, για κάθε $i \in J$, η καμπύλη $\tilde{\gamma}|_{J_i} : J_i \to \mathbb{H}_0^1$ έχει lift $\tilde{\gamma}$, δηλαδή υπάρχει μια απολύτως συνεχής καμπύλη $\tilde{\gamma}|_{J_i} : J_i \to \tilde{\mathbb{H}}_0^1$ τέτοια ώστε $\Phi \circ \tilde{\gamma}|_{J_i} = \gamma_{J_i}$. Ορίζουμε: $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\tilde{\gamma} := (\xi(s),\psi(s),\eta(s)) := \begin{cases} \tilde{\gamma}|_{J_i}(s) & s \in J_i \\ (\log(\gamma_3(s)), -\frac{\pi}{2}, 0) & s \in [a,b] \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} J_i) \text{ με } \gamma_3(s) > 0 \\ (\log(-\gamma_3(s)), \frac{\pi}{2}, 0) & s \in [a,b] \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} J_i) \text{ με } \gamma_3(s) < 0 \end{cases}$$

κάποιος βλέπει αμέσως ότι $\Phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ για $s \in [a,b] \cap \gamma^{-1}(\mathbb{H}_0^1)$, οτι η $\tilde{\gamma}$ είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, και ότι η συνιστώσα $s \mapsto \xi(s)$ είναι απολύτως συνεχής.

Διανυσματικά πεδία Παρακάτω, εκφράζουμε τα διανυσματικά πεδία $Z, \bar{Z}$ και T σε όρους λογαριθμικών συντεταγμένων που δίνονται τοπικά απο την Φ. Ένας ευθύς υπολογιμός δίχνει ότι:

$$Z = -i\sqrt{\cos\psi}e^{\frac{-\xi+3i(\eta-\psi)}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\tan\psi}{3}\frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{\partial}{\partial\psi}\right)$$

$$\bar{Z} = -i\sqrt{\cos\psi}e^{\frac{-\xi+3i(\eta-\psi)}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\tan\psi}{3}\frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{\partial}{\partial\psi}\right)$$

$$T = -\frac{\sin\psi}{e^\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sin\psi}{e^\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sin\psi}{e^\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

Συντελεστής Beltrami και διαταραχή Έστω f και $\tilde{f} = (\Xi, \Psi, H)$ είναι $\mathcal{C}^1$ απεικονίσεις όπως στη πρόταση (). Θέτουμε

$$W := W_{\xi,\eta} - i\frac{\partial}{\partial\psi} := \left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\tan\psi}{3}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - i\frac{\partial}{\partial\psi}$$

$$W := W_{\xi,\eta} + i\frac{\partial}{\partial\psi} := \left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\tan\psi}{3}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}$$

Οι συντελεστές Beltrami της f δίνονται από:

$$\mu_f(\Phi(\xi,\psi,\eta)) = -e^{i3(\psi-\eta)}\frac{\bar{W}(\Xi + i\Psi)}{W(\Xi + i\Psi)}\Big|_{(\xi,\psi,\eta)}$$

2.4 Moduli χωρίων στην ομάδα Heisenberg

Για να αποδειχθούν τα βασικά αποτελέσματα, εισάγεται κατάλληλη ορολογία που επεξηγείται αργότερα. Αρχικά θεωρούμε μιάς κατάλληλη οικογένεια ευθυγραμμίσιμων καμπυλών που φυλώνουν το Ω (η ευθυγραμμισιμότητα είναι ώς προς τη Heisenberg μετρική που ορίστικε παραπάνω. Έπεται ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών είναι οι χώροι που παράγονται απο τα $\Re z$ και $\Im z$ σχεδόν παντού. Συνήθως δουλεύουμε με παραμετρίσεις μιας καμπύλης που είναι απόλυτα συνεχής. Μια τέτοια καμπύλη λέγεται **οριζόντια**. Για $\gamma(s) = (\gamma_I(s), \gamma_3(s)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, s \in [a,b]$ αυτή η συνθήκη γράφεται:

$$\gamma_3(s) = i(\bar{\gamma}_I(s)\dot{\gamma}_I(s) - \gamma_I(s)\dot{\bar{\gamma}}_I(s)) = -2\Im(\bar{\gamma}_I(s)\dot{\gamma}_I(s)) \quad \sigma\chi. \forall s \in [a,b]$$

Το Heisenberg μήκος μιας οριζόντιας καμπύλης γ συμπίπτει με το σύνηθες ευκλείδειο μήκος της προβολής γ_I στο $\mathbb{C}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{adm}(\Gamma)$ το σύνολο όλων των μή αρνητικών Borel συναρτήσεων $\rho : \mathbb{H}^1 \to [0,\infty]$ για τις οποίες $\int_\gamma \rho dl \geq 1$ για όλες τις ευθυγραμμίσιμες $\gamma \in \Gamma$. Για μια οριζόντια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ώς προς το μήκος τόξου δίνεται από τον τύπο: $\int_\gamma \rho dl = \int_a^b \rho(\gamma(s))|\gamma_I(s)|ds$. Το $4-$modulus είναι σύμμορφη αναλλοίωτος για μια οικογένεια Γ απο καμπύλες του $\mathbb{H}^1$ και ορίζεται μέσω του τύπου:

$$M_4(\Gamma) := \inf_{r \in \mathrm{adm}(\Gamma)} \int_{\mathbb{H}^1} \rho^4(p) d\mathcal{L}^3(p)$$

Το modulus και η μέση διαταραχή συνδέονται μέσω της ακόλουθης πρότασης:

Θεώρημα 4. *Έστω $f : \Omega \to \Omega'$ μια σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ των χωρίων Ω, Ω' στο $\mathbb{H}^1$. Για μια οποιαδήποτε οικογένεια οριζόντιων καμπυλών Γ στο Ω έχουμε*

$$M_4(f(\Gamma)) \leq \int_\Omega K(p,f)^2 \rho^4(p) d\mathcal{L}^3(p) \quad \forall \rho \in \mathrm{adm}(\Gamma)$$

Εδώ, και σ′ αυτά που ακολουθούν, συμβολίζουμε με $f(\Gamma) := \{f \circ \gamma : \gamma \in \Gamma\}$, την εικόνα της f πάνω σε μια οικογένεια καμπυλών Γ. Σε ότι ακολουθεί, σταθεροποιούμε μία μεγιστική συχνότητα ρ_0 για την οποία το infimum στον ορισμό του $M_4(\Gamma)$ λαμβάνεται. Ας υποθεσουμε ότι Λ είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$. Έστω $0 < A < B$, και έστω

$$\gamma : (A,B) \times \Lambda \to \Omega$$

μία αμφιδιαφόριση που φυλλώνει ένα φραγμένο χωρίο Ω στην ομάδα Heisenberg, και με την ιδιότητα οτι η:

$$\gamma(\cdot, \lambda) : (A,B) \to \Omega$$

είναι μιά οριζόντια καμπύλη με $|\gamma_I(\dot{s}, \lambda)| \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και

$$d\mathcal{L}^3(\gamma(s,\lambda)) = |\gamma(\dot{s},\lambda)|^4 ds d\mu(\lambda)$$

για ένα μέτρο μ στη Λ. Τότε αποδεικνύεται ότι η

$$\rho_0(p) = \begin{cases} ((B-A)|\dot{\gamma}_I(\gamma^{-1}(p))|)^{-1} & p = \gamma(s,\lambda) \in \Omega \\ 0 & p \notin \Omega \end{cases}$$

είναι μεγιστική για την οικογένεια καμπυλών

$$\Gamma_0 = \{\gamma(\cdot,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

μέ

$$M_4(\Gamma) = \frac{1}{(B-A)^3}\int_\Lambda d\mu(\lambda)$$

Έχοντας στόχο να εντοπίσουμε ένα ελαχιστοποιητή f_0 για το συναρτησοειδές μέσης διαταραχής, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1. *Μία $\mathcal{C}^1$ σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση που διατηρεί τον προσανατολισμό $f_0 : \Omega \to \mathbb{H}^1$ έχει την ελαχιστική ιδιότητα τάνυσης (ΕΙΤ) για μια οικογένεια Γ_0 από $\mathcal{C}^1$ οριζόντιες καμπύλες σε ένα χωρίο Ω, άν για κάθε $\gamma \in \Gamma_0, \gamma : [a,b] \to \Omega$, έχουμε:*

$$\mu_{f_0}(\gamma(s))\frac{\dot{\overline{\gamma_I(s)}}}{\dot{\gamma_I}(s)} < 0 \quad \forall s \in [a,b]$$

Να παρατηρήσουμε ότι σ' αυτό τον ορισμό, απαιτούμε ιδιαίτερα μιά έκφραση $\mu_{f_0}(\gamma(s))\frac{\dot{\overline{\gamma_I(s)}}}{\dot{\gamma_I}(s)}$ να παίρνει πραγματικές τιμές.

Έστω $f_0 : \Omega \to \Omega'$ μία σχεδόν σύμμορφη αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό, ανάμεσα σε χωρία της ομάδας Heisenberg. Έστω γ μία φύλλωση του Ω όπως αυτή περιγράφηκε παραπάνω. Ας υποθέσουμε περαιτέρω ότι η f_0 έχει την IET για την

$$\Gamma_0 = \{\gamma(\cdot,\lambda), \lambda \in \Lambda)\}$$

και ότι η διαταραχή της f_0 είναι σταθερή κατα μήκος κάθε καμπύλης γ, δηλαδή:

$$K(\gamma(s,\lambda), f_0) \equiv K_{f_0}(\lambda)$$

για όλα τα $(s,\lambda) \in (A,B)\times\Lambda$. Το κυριότερο αποτέλεσμα απ' το πρώτο μέρος της εργασίας είναι η ακόλουθη συνθήκη για μεγιστικότητα του ολοκληρώματος μέσης διαταραχής.

Θεώρημα 5. *Η τανυστική απεικόνιση f_k είναι μία σχεδον σύμμορφη απεικόνιση που διατηρεί τον προσανατολισμό από το $A(a,b)$ στο $A(a^k,b^k)$ με μέγιστη διαταραχή $K_{f_k} = \frac{1}{k^2}$. Ελαχιστοποιεί τη μέση διαταραχή μέσα στη κλάση $\mathcal{F} : \forall f \in \mathcal{F}$ έχουμε:*

$$\int_{A(a,b)} K(p,f_k)^2\rho_0(p)^4 d\mathcal{L}^3(p) \le \int_{A(a,b)} K(p,f)^2\rho_0(p)^4 d\mathcal{L}^3(p)$$

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των f_k είναι οτι μηδενίζουν τη μέγιστη διαταραχή στη πιο περιορισμένη κλάση $\mathcal{F}_0$ των σφαιρών που διατηρούν τις σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις οι οποίες είναι $\mathcal{C}^1$ λείες και διατηρούν τον $t-$άξονα. Δέν γνωρίζουμε επίσης, άν οι f_k είναι μεγιστικές για τη μέγστη διαταραχή μέσα στη μεγαλύτερη κλάση $\mathcal{F}$.

2.5 Moduli δακτυλίων

Παρακάτω μελετάται η περίπτωση σγαιρικών δακτυλίων της ομάδας Heisenberg της μορφής

$$A(a,b) := \{(z,t) \in \mathbb{H}^1 : a < |z|^4 + t^2 < b^2\} \quad (0 < a < b)$$

σε αντιστοιχία με την περίπτωση στο μιγαδικό επίπεδο. Η περίπτωση αυτή είναι σημαντική, αφού αναμένεται ότι η μελέτη των απεικονίσεων στον δακτύλιο δίνει πληροφορίες για τους εκθέτες Sobolev και Holder για σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις, γεγονός που ισχύει και στην ευκλείδεια περίπτωση. Στο μιγαδικό επίπεδο, το modulus για το δακτύλιο έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί αν μια απεικόνιση είναι σχεδόν συμμορφή σ΄ ένα σημείο.
Για να εκμεταλλευθούμε τη σφαιρική συμμετρία είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τις λογαριθμικές συντεταγμένες που οριστηκαν παραπάνω. Η ιδέα είναι να γενικεύσουμε τις λογαριθμικές συντεταγμένες του μιγαδικού επιπέδου στην Heisenberg περίπτωση. Όπως προαναφέραμε παίρνοντας τις σφαιρικές σφαιρικές συντεταγμ΄νες της Heisenberg:

$$(z,t) = (r\cos^{\frac{1}{2}}\theta e^{i\phi}, r^2\sin\theta) \quad , \quad (r,\theta,\phi) \in [0,\infty] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi)$$

και εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\xi = 2\log r \quad , \quad \psi = -\theta \quad , \quad \eta = \frac{1}{3}(\pi - \theta - 2\phi)$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}^n, \psi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και $\psi - 3\pi \leq 3\eta < \psi + \pi$, λαμβάνουμε μια παραμέτριση της ομάδας Heisenberg σε λογαριθμικές συντεταγμένες (ξ,ψ,η) που δίνεται από:

$$(z,t) = \left(i\cos^{1/2}\psi \dot{e}^{\frac{\xi+i(\psi-3\eta)}{2}}, -\sin\psi e^{\xi}\right)$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6. *Έστω Γ μια οικογένεια από οριζόντιες καμπύλες, που ενώνουν τις δύο συνιστώσες του συνόρου του $A(a,b)$. Ισχύει ο τύπος:*

$$M_4(\Gamma) = \pi^2 \left(\log\frac{a}{b}\right)^{-3}$$

με μεγιστική πυκνότητα $\rho_0(z,t) = (\log\frac{b}{a})^{-1}\frac{|z|}{\sqrt{|z|^4+t^2}}$ για $(z,t) \in A(a,b)$. Υποθέτουμε ότι Γ_0, ρ_0, f_0 ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες. Έστω $\Gamma \subseteq \Gamma_0$ μια οικογένεια καμπυλών στο Ω τέτοια ώστε $\rho_0 \in amd(\Gamma)$ και έστω $\mathcal{F}$ η κλάση των ψευδοσύμμορφων απεικονείσεων f απ΄ το Ω στο Ω' με την ιδιότητα:

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) \leq M_4(f(\Gamma))$$

Τότε

$$\int_\Omega K(p,f_0)^2\rho_0^4(p)d\mathcal{L}^3(p) \leq \int_\Omega K(p,f)^2\rho_0^4(p)d\mathcal{L}^3(p)$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη Ορίζουμε την οικογένεια:

$$\Gamma_1 := \{\text{οριζόντιες καμπύλες που ενώνουν το σύνορο } \|(z,t)\| = b \text{ με το } \|(z,t)\| = a\}$$

Έπειτα ορίζουμε την οιποικογένεια Γ_1^0 με

$$\Gamma_1^0 := \Big\{\gamma_{\psi,\eta} : \gamma_{\psi,\eta}(s) := \Big(s, \psi, \eta - \frac{\tan\psi}{3}s\Big), \quad s \in [2\log a, 2\log b]\Big\}$$

Η συνθήκη οριζοντιότητας στις λογαριθμικές συντεταγμένες είναι:

$$\sin\psi(s)\dot{\xi}(s) + 3\cos\psi(s)\dot{\eta}(s) = 0$$

Παρατηρούμε ότι αν $\gamma_{\psi,\eta} \in \Gamma_1^0$ τότε:

$$\sin\psi(s)\dot{\xi}(s) + 3\cos\psi(s)\dot{\eta}(s) = \sin\psi + 3\cos\psi(\frac{\tan\psi}{3})$$

Έστω ρ αποδεκτή στη Γ_1, δήλ με $\int_\gamma \rho \geq 1 \quad \forall\gamma \in \Gamma_1$. Έστω $\gamma \in \Gamma_1^0$. Τότε:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{1}{2}\int_{2\log a}^{2\log b} \rho^4(\xi,\psi,\eta)e^{\frac{\xi}{2}}\cos^{-\frac{1}{2}}\psi d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\int_{2\log a}^{2\log b} \rho^4(\xi,\psi,\eta)e^{2\xi}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int_{2\log a}^{2\log b} \cos^{-\frac{2}{3}}\psi d\xi\Big)^{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{2\log a}^{2\log b} \rho^4(\xi,\psi,\eta)e^{2\xi}\Big)^{\frac{1}{4}}\cos^{-\frac{1}{2}}\psi 2^{3/4}\log\frac{b}{a}^{3/4} \\
&\Rightarrow \Big(\int_{\log a}^{\log b} \rho^4(\xi,\psi,\eta)e^{2\xi}d\xi\Big)^{\frac{1}{4}} \geq 2^{1/4}\cos^{1/2}\psi\log\frac{b}{a}^{-3/4} \\
&\Rightarrow \Big(\int_{\log a}^{\log b} \rho^4(\xi,\psi,\eta)e^{2\xi}d\xi\Big)^{\frac{1}{4}} \geq 2^{1/4}\cos^{1/2}\psi\log\frac{b}{a}^{-3/4}
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε ώς προς ψ και η για να πάρουμε:

$$\int\int\int \rho^4 \geq 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\psi d\psi\Big(\log\frac{b}{a}\Big)^{-3}\int_{-2]pi/3}^{2\pi/3} d\eta = \frac{4\pi^2}{3}\Big(\log\frac{b}{a}\Big)^{-3}$$

Πολλαπλασιάσουμε με $\frac{3}{4}$ για να παρουμε το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να εντοπίσουμε μια συνάρτηση ακραίας πυκνότητας, η οποία να ικανοποιεί την

$$\int\int\int_{A(a,b)} \rho_0^4 d\mathcal{L}^3 = \pi^2\big(\log(\frac{a}{b})\big)^{-3}$$

Τότε έχουμε τελειώσει διότι

$$\pi^2\big(\log(\frac{a}{b})\big)^{-3} \leq M(\Gamma) \leq \inf_{\rho\in\mathrm{adm}(a,b)}\int\int\int_{A(a,b)} \rho^4 d\mathcal{L}^3$$

Έστω

$$\Gamma_2^0 := \left\{\gamma_{s,\eta} : \gamma_{\xi,\eta}(s) := \left(s, \psi, \eta - \frac{\tan\psi}{3} s\right)\right\}$$

Η συνθήκη οριζοντιότητας στις λογαριθμικές συντεταγμένες είναι:

$$\sin\psi(s)\dot{\xi}(s) + 3\cos\psi(s)\dot{\eta}(s) = 0$$

Ψςώνουμε στην τετάρτη και πολλαπλασιάζουμε με $\frac{3}{4}$ για να πάρουμε:

$$\frac{3}{4} 2^4 I^{-3} \leq \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 e^{2\xi} d\psi$$

Ολοκληρώνοντας ώς προς ψ και η παίρνουμε:

$$\int\int\int_{A(a,b)} \rho^4 d\mathcal{L}^3 \geq 12 I^{-3} \int_{\log a^2}^{\log b^2} \int_{\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{-2\pi}{3}} =$$

$$12 I^{-3} 2 \log(\frac{b}{a}) \frac{4\pi}{3} = 2^5 \pi I^{-3} \log\frac{b}{a}$$

Παίρνοντας infimum:

$$Mod(\Gamma_2) \geq 2^5 \pi I^{-3} \log\frac{b}{a}$$

Θεωρού́με την $\rho_0(\xi, \psi, \eta) = 2I^{-1} e^{-\frac{\xi}{2}} \cos^{-\frac{1}{6}} \psi_{A(a,b)}$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_0 e^{\frac{\xi(s)}{2}} cos^{-\frac{1}{2}} \psi(s) (\dot{\xi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s))^{\frac{1}{2}} ds =$$

$$\frac{1}{2} 2I^{-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\xi(s)}{2}} \cos^{-\frac{1}{6}} \psi(s) e^{\frac{\xi(s)}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} (\dot{\xi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s))^{\frac{1}{2}} ds \times$$

$$I^{-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{2}{3}} \psi(s) (\dot{\xi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s))^{\frac{1}{2}} ds \geq I^{-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{2}{3}} \psi(s) |\dot{\psi}(s)| ds = I^{-1} I = 1$$

Τέλος υπολογίζουμε:

$$\int_{\rho_0}^{4} ds =$$

$$\frac{3}{4} \int_{\log a^2}^{\log b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{-2\pi}{3}} e^{2\xi 2^4 I^{-4} e^{-2\xi}} \cos^{-2/3} \psi d\xi d\psi d\eta =$$

$$12 I^{-3} 2 \log(\frac{b}{a}) \frac{4\pi}{3} = 2^5 \pi I^{-3} \log\frac{b}{a}$$

2.6 Ανισότητα modulus

Έινα γνωστό ότι οι σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις στο μιγαδικό επίπεδο ικανοποιούν την ανισότητα modulus σε αντιστοιχία με τη περίπτωση στο μιγαδικό επίπεδο. O Tang απέδειξε μια ανισότητα modulus για C^2 απεικονίσεις σε συμπαγείς λείες και ισχυρα ψευδοκυρτές CR-3 πολλαπλότητες. Εδώ δίνεται μια ανισότητα, σε όρους μέσης κύμανσης.

Θεώρημα 7. *Υποθέτουμε ότι $f:\Omega\to\Omega'$ είναι μια σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ δύο χωρίων του $\mathbb{H}^1$, και Γ είναι μια οικογένεια καμπυλών στο Ω.Τότε ισχύουν οι εκτιμήσεις:*

$$M_4(\Gamma)\le\int_{\Omega'}K(f^{-1}(\zeta,\tau),f)^2\tilde{\rho}^4(\zeta,\tau)d\mathcal{L}^3(\zeta,\tau)\quad\forall\tilde{\rho}\in\mathrm{adm}(f(\Gamma))$$

$$M_4(f(\Gamma))\le\int_{\Omega}K((z,t),f)^2\rho^4(z,t)d\mathcal{L}^3(z,t)\quad\forall\rho\in\mathrm{adm}(\Gamma)$$

Και επομένως:

$$\frac{1}{K_f^2}M_4(\Gamma)\le M_4(f(\Gamma))\le K_f^2M_4(\Gamma)$$

Άν η απεικόνιση f είναι σύμμορφη, τότε είναι επίσης λεία απεικόνιση με $\bar{Z}f_I=0$ και έπεται ότι $M_4(f(\Gamma))=M_4(\Gamma)$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε πρώτα την 1η σχέση, απ΄ την οποία οι δύο επόμενες προκύποτουν εύκολα.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι καμπύλες της Γ ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Άν μια καμπύλη γ ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα, θεωρούμε τις κλειστές υποκαμπύλες γ' και η απόδειξη εκφυλίζεται στη περίπτωση των κλειστών καμπυλων. Έστω Γ_0 η οικογένεια όλων των ευθυγραμμίσιμων καμπυλών στη Γ για τις οποίες η f είναι απόλυτα συνεχής (οι μή ευθυγραμμίσιμες καμπύλες έχουν modulus 0). Αφού η f είναι ψευδοσύμμορφη έχουμε $M_4(\Gamma)=M_4(\Gamma_0)$. Επιπλέον, η f είναι **P−διαφορίσιμη**, δηλαδή Pansu διαφορίσιμη , σχεδόν παντού. Για το P−διαφορικό έχουμε διαφορετικές διατυπώσεις του κανόνα της αλυσίδας τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα. Θεωρούμε τώρα τυχαία πυκνότητα $\tilde{\rho}$ η οποία είναι αποδεκτή για την $f(\Gamma)$ και έστω E_0 το σύνολο όλων των σημείων $(z,t)\in\Omega$ για τα οποία η f δέν είναι P−διαφορίσιμη. Χρησιμοποιώντας τη ψευδοσυμμορφία της f, έπεται ότι $\mathcal{L}^3(E_0)=0$. Αφού το $\mathcal{L}^3$ είναι μέτρο Borel, υπάρχει σύνολο Borel $E\supset E_0$ με $\mathcal{L}(E)=0$. Στο $\tilde{\rho}$ μπορούμε να αναθέσουμε μιά **πυκνότητα έλξης** $\rho_{\tilde{\rho}}$ που ορίζεται ώς:

$$\rho_{\tilde{\rho}}:=\begin{cases}\tilde{\rho}(f(z,t)(|Z_{f_I}(z,t)+\bar{Z}_{f_I}(z,t)|)) & ,\quad (z,t)\in\Omega\smallsetminus E\\ \infty & ,\quad (z,t)\in E\\ 0 & ,\quad (z,t)\in\mathbb{H}^1\smallsetminus\Omega\end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η $\rho_{\tilde{\rho}}$ είναι Borel αφού το E είναι Borel σύνολο, η $\tilde{\rho}$ είναι συνάρτηση Borel και η συνέχεια της f συνεπάγεται ότι οι κατευθυνόμενες παραγώγοι $Zf_I,\tilde{Z}f_I$ είναι Borel συναρτήσεις στο χωρίο που ορίζονται. Θα δείξουμε ότι η $\rho_{\tilde{\rho}}$ είναι αποδεκτή για τη Γ_0. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε $\gamma:[a,b]\to\Omega$ μια τυχαία καμπύλη της Γ_0. Απ΄ τον ορισμό της Γ_0 η γ είναι ευθυγραμμίσιμη, και γι΄ αυτό έχει παραμέτριση ώς προς μήκος τόξου, έστω $\tilde{\gamma}:[0,l(\gamma)]\to\Omega$. Έχουμε να διαχωρίσουμε δύο περιπτώσεις.

1. Άν $\mathcal{L}^1(\{s \in [0, l(\gamma)] : \tilde{\gamma}(s) \in E\}) > 0$, τότε

$$\int_\gamma \rho_{\tilde{\rho}} dl = \int_0^{l(\gamma)} \rho_{\tilde{\rho}}(\tilde{\gamma}(s)) ds = \infty$$

2. Άν $\mathcal{L}^1(\{s \in [0, l(\gamma)] : \tilde{\gamma}(s) \in E\}) = 0$, τότε οι εικόνες των καμπυλών έχουν καλές ιδιότητες παραγωγισιμότητας. Πράγματι, αν $\tilde{\gamma}(s) \notin E$ σχεδόν για κάθε $s \in [0, l(\gamma)]$. Σ' αυτό το σημείο ανακαλούμε οτι άν μια $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to (\mathbb{H}^1, d_{\mathbb{H}^1})$ είναι Lipschitz, τότε η $\tilde{\gamma}$ είναι σχεδόν παντού $P-$διαφορίσιμη με:

   $$\lim_{c \to 0} \delta_{\frac{1}{c}}(\tilde{\gamma}(s)^{-1} * \tilde{\gamma}(s+c)) = (\dot{\tilde{\gamma}}_I(s), 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{H}^1$$

   σχεδόν για κάθε $s \in [0, l(\gamma)]$. Απ' το κανόνα της αλυσίδας για το $P-$διαφορικό, λαμβάνουμε $(f_I \dot{\circ} \tilde{\gamma})(s) = Z f_I(\tilde{\gamma})$

Συνδιάζοντας τις δύο περιπτώσεις συνάγουμε ότι $\rho_{\tilde{\rho}} \in \mathrm{adm}(\Gamma_0)$. Αρα καταλήγουμε ώς ακολούθως:

$$\begin{aligned} M_4(\Gamma_0) &= \inf_{\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_0)} \int_\Omega \rho^4(z,t) d\mathcal{L}^3(z,t) \\ &\leq \int_\Omega \rho_{\tilde{\rho}}^4(z,t) d\mathcal{L}^3(z,t) = \int_\Omega \rho_{\tilde{\rho}}^4(z,t)(|Z f_I(z,t)| + |\bar{Z} f_I(z,t)|)^4 d\mathcal{L}^3(z,t) \\ &\leq \int_\Omega \rho_{\tilde{\rho}}^4(z,t) d\mathcal{L}^3(z,t) = \int_\Omega \rho_{\tilde{\rho}}^4(z,t)(|Z f_I(z,t)| + |\bar{Z} f_I(z,t)|)^4 d\mathcal{L}^3(z,t) \end{aligned}$$

Θεώρημα 8. *Άν η $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1$ είναι οριζόντια (ισοδύναμα απόλυτα συνεχής 'ως προς τη d_H)), τότε για οποιαδήποτε μή-αρνητική Borel συνάρτηση $\rho : \mathbb{H}^1 \to [0, \infty]$ έχουμε:*

$$\int_\gamma \rho dl = \int_a^b \rho(\gamma(t)) |\dot{\gamma}_I(t)| dt$$

Κεφάλαιο 3

Σχεδόν Σύμμορφες Απεικονίσεις και modulus

3.1 Σχεδόν σύμμορφες Απεικονίσεις

Ένας ορισμός της έννοιας της σχεδόν σύμμορφης απεικόνισης, βασιζόμενος στον ορισμό της μετρικής στην ομάδα Heisenberg μπορει να δωθεί μέσω της Heisenberg απόστασης ώς εξής:

Ορισμός 2. *Έστω χωρία Ω, Ω' στο $\mathbb{H}^1$. Ένας ομοιομορφισμός $f : \Omega \to \Omega'$ λέγεται* **σχεδόν σύμμορφος** *άν το:*

$$H(p,f) := \limsup H(p,r,f) := \limsup \frac{\max_{d_h(p,q)=r} d_H(f(p),f(q))}{\min_{d_h(p,q)=r} d_H(f(p),f(q))} \quad , \quad p \in \Omega$$

είναι ομοιόμορφα άνω φραγμένο.

Ανάλογα με το μιγαδικό επίπεδο, υπάρχουν ισοδύναμοι αναλυτικοί ορισμοί για σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις του $\mathbb{H}^1$, εκτός αυτού της μετρικής. Εκτός απο ιδιότητες Sobolev ομαλότητας, οι σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις ικανοποιούν τη **συνθήκη επαφής**, αφού διατηρούν την 1−μορφή $\tau = dt + 2\Im \bar{z} dz$, δηλαδή $f * \tau = \lambda\tau$ σχεδόν παντού για κάποια μη-μηδενική συνάρτηση λ. Αυτο συνεπάγεται περιορισμούς που κληρονομούνται απο τις σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις της ομάδας Heisenberg, αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι οι ιδιότητες καθορίζονται απο την συμπεριφορά των απεικονίσεων στη προβολή στο μιγαδικό επίπεδο.

Πιο αναλυτικά, έστω $f = (f_1 + if_2, f_3)$ μια σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα στην ομάδα Heisenberg και έστω $f_I = f_1 + if_2$. Αποδεικνύεται ότι τα οριζόντια διαφορικά

$$Zf_I \quad \text{και} \quad \bar{Z}f_I$$

υπάρχουν και τα δύο με την έννοια των κατανομών και σχεδόν παντού. Εδώ, το f_I έχει παραγωγισθεί ώς προς τα **οριζόντια διανυσματικά πεδία**:

$$Z = \frac{\theta}{\theta z} + i\bar{z}\frac{\theta}{\theta t} \quad \text{και} \quad \bar{Z} = \frac{\theta}{\theta \bar{z}} - iz\frac{\theta}{\theta t}$$

Σε αντιστοιχία με τη μιγαδική περίπτωση, ο παραπάνω μετρικός ορισμός συνεπάγεται για μια σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση που διατηρεί τον προσανατολισμό, ότι υπαρχει μια μετρίσιμη συνάρτηση μ με μιγαδικές τιμές, και με $||\mu||_\infty < 1$ τέτοια ώστε:

$$\bar{Z} = \mu Z f_I \quad \text{και} \quad \bar{Z} f_I I = \mu Z f_I I \quad \text{σχεδόν παντού}$$

με $f_{II} = f3 + i|f_I|^2$. Μπορούμε να ορίσουμε συντελεστή Beltrami, καθώς και τον **λόγο διαταραχής**:

$$\mu_f(z,t) := \frac{\bar{Z} f_I(z,t)}{Z f_I(z,t)} \quad \text{και} \quad K((z,t),f) := \frac{|Z f_I(z,t)| + |\bar{Z} f_I(z,t)|}{Z f_I(z,t)| - |\bar{Z} f_I(z,t)|}$$

για σημεία (ζ,τ) οπου οι εκφράσεις αυτές έχουν νόημα. Επιπλέον, θέτουμε:

$$||\mu||_\infty := \sup_(z,t)|\mu_f(z,t)| \quad \text{και} \quad K_f := \sup_{(z.t)} K((z,t),f)$$

Είναι εύκολο να ελεγξουμε ότι τα μ_f και K_f σχετίζονται μέσω των ακόλουθων τύπων:

$$K((z,t),f) = \frac{1 + |\mu_f(z,t)|}{1 - \mu_f(z,t)} \quad , \quad K_f = \frac{1 + ||\mu_f||_\infty}{1 - ||\mu_f||_\infty}$$

Δουλεύουμε κυρίως με τη διαταραχή:

$$K((z,t),f) := \frac{(|Z f_I(z,t)| + |\bar{Z} f_I(z,t)|)^2}{(Z f_I(z,t)| - |\bar{Z} f_I(z,t)|)^2}$$

που μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για απεικονίσεις που διατηρούν τον προσανατολισμό. Για μια σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση έχουμε $1 \leq K_f^2 \leq \infty$. Κάθε λεία απεικόνιση επαφής με $1 \leq K_f^2 < \infty$ είναι σχεδόν σύμμορφη.

Δοθέντων δύο τόπων Ω, Ω' η βασική μας ερώτηση είναι να αναζητήσουμε, ανάμεσα σε μια κλάση $\mathcal{F}$ σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων, απεικονίσεις που είναι ῾ὅσο το δυνατόν περισσότερο σύμμορφεσ᾿᾿. Λέμε ότι μια απεικόνιση f_0 είναι είναι μεγιστική ώς προς προς τη μέγιστη διαταραχή, σε μια δοθείσα κλάση $\mathcal{F}$ σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων, άν $f_0 \in \mathcal{F}$ και

$$K_{f_0}^2 = \min_{f \in \mathcal{F}} K_f^2$$

Ομοίως, λέμε ότι η f_0 είναι **μεγιστική ώς πρός τη μέση διαταραχή** άν

$$\int_\Omega K(p_0, f_0)^2 \rho_0(p)^4 d\mathcal{L}^3(p) = \min_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega K(p,f)^2 \rho_0(p)^4 d\mathcal{L}^3(p)$$

για μια συγκεκριμένη πυκνότητα ρ_0 που αντιστοιχεί στη γεωμετρία ενός χωρίου Ω. Εδώ, το $\mathcal{L}^3$ είναι το μέτρο Lebesque του $\mathbb{R}^3$ που επάγει ένα αναλλοίωτο μέτρο Haar του $\mathbb{H}^1$.

Χρησιμοποιώντας συνήθη επειχηρήματα που ισχύουν σε κανονικές οικογένειες και μέσω του θεωρήματος (), έπεται ότι κάτω απο κατάλληλες συνθήκες για την $\mathcal{F}$ ότι υπάρχει ένας ελαχιστοποιητής για τη μέγιση διαταραχή αλλά δέν υπάρχει γενική μέθοδος που να καθορίζει ένα τέτοιο ελαχιστοποιητή κάτω απο συγκεκριμένες συνθήκες. Η αιτία για το δεύτερο πρόβλημα είναι δυσκολότερη, αφού υπάρχουν παραδείγματα μή ύπαρξης ελαχιστοποιητών ακόμα και στην ευκλείδια περίπτωση (βλ. ()). Ο σκοπός αυτης της εργασίας είναι να δώσει αποτελέσματα ύπαρξης για τους ελαχιστοποιητές της μέγιστης και της μέσης διαταραχής καθώς και κρητίρια στο πώς να αποδειχθεί ότι μια συγκεκριμένη απεικόνιση είναι ελαχιστοποιητής, χρησιμοποιώντας το modulus μιας οικογένειας καμπυλών.

3.2 Συνθήκες Μεγιστικότητας

Όπως δείξαμε στην εισαγωγή, ένας απ΄ τους βασικούς στόχους της εργασίας είναι να περιγράψει μια μέθοδο με την οποία κάποιος να μπορεί να εντοπίσει απεικονίσεις που ελαχιστοποιούν την μέγιστη ή τη μέση διαταραχή ανάμεσα σε μια κλάση $\mathcal{F}$ απο σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις ανάμεσα σε δυό χωρία Ω, Ω' του $\mathbb{H}^1$ (που πιθανώς υπόκειται σε καθορισμένες συνοριακές συνθήκες). Στις επόμενες παραγράφους χρησιμοποιούμε τη μέθοδο modulus για να εντοπίσουμε τέτοιες μεγιστικές σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις.Η ανισότητα του modulus καθορίζει ένα κάτω φράγμα για τη διαταραχή. Η ιδέα ανάγεται σε προγενέστερα παραδείγματα από τον Grotzsch. Πιώ πρόσφατα, εφαρμόσθηκε στο () με σκοπό να αποδειχθεί οτι μια συγκεκριμένη σχεδον σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα σε "P 3-πολλαπλότητες είναι ελαχιστοποιητής για τη μέγιστη διαταραχή στη κλάση ομοτοπίας του.

Ορισμός 3. *Λέμε ότι μιά $\mathcal{C}^1$ λεία σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση που διατηρεί τον προσανατολισμό $f_0 : \Omega \to \Omega'$ ανάμεσα σε$\mathbb{H}^1$ έχει την* **ελαχιστική ιδιότητα τάνυσης** *για μια οικογένεια Γ_0 της $\mathcal{C}^1$ οριζόντιων καμπυλών στο Ω αν για όλες τις $\gamma \in \Gamma_0, \gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^1$, κάποιος έχει:*

$$\mu_{f_0}(\gamma(s))\frac{\gamma_I(s)}{\gamma_I(s)} < 0 \quad \forall s \in [a,b] \mu\epsilon \mu_{f_0}(\gamma(s)) \neq 0$$

Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη ορολογία απ΄ το μιγαδικό επίπεδο, παρατηρούμε ότι μια απεικόνιση **Teichmuller**, *δηλαδή μια μεγιστική σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση f^μ με συντελεστή Beltrami $\mu = k\frac{|\phi|}{\phi}$ όπου το ϕ είναι ένα τετραγωνικό διαφορικό, έχει την "ίδιοτητα ελαξιστικής τάνυσησ" για τις κάθετες προβολές της ϕ βλ. ()*

Άν μια απεικόνιση f_0 έχει την IET σε μια οικογένεια καμπυλών Γ_0, αυτό σημαίνει γεωμετρικά ότι η Γ_0 αποτελείται απο καμπύλες που είναι εφαπτομενικές στην κατεύθυνση της ελαχιστικής τάνυσης.

Λήμμα 1. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$ μια $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση σ΄ ένα τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{H}^1$ και έστω επίσης $\gamma : [a,b] \to \Omega$ μια οριζόντια καμπύλη. Τότε:*

$$(f_0 \dot{\circ} \gamma)_I(s,\lambda) = \bar{Z}_{f_0 I}(\gamma(s,\lambda))|)\dot{|\gamma)}_I(s,\lambda)$$

Τότε, για μια $\mathcal{C}^1$ σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση f που διατηρεί τον προσανατολισμό έχουμε

$$(|Zf_I(\gamma(s))|)|\dot{\gamma}_I(s)| \leq |(f_I \dot{\circ} \gamma(s))| \leq (Zf_I(\gamma(s))| + |\bar{Z}f_I(\gamma(s))|)|\dot{\gamma}_I(s)|$$

σχεδόν για κάθε s. Άν μια απεικόνιση f_0 έχει την ΕΙΤ για μια υποοικογένεια Γ_0, τότε απ΄ τνν () έχουμε ισότητα.

$$(|Zf_I(\gamma(s))|)|\dot{\gamma}_I(s)| = |((f_0)_I \circ \gamma)(s)|$$

3.3 Απεικονίσεις με σταθερή διαταραχή

Για να υποδείξουμε μια μέθοδο για απεικονίσεις με ΕΙΤ και modulus μιας οικογένειας καμπυλών, αποδεικνύουμε πρώτα ένα αποτέλεσμα για απεικονίσεις με σταθερή διαταραχή.

Θεώρημα 9. *Άν μιά σχεδόν σύμμορφη $\mathcal{C}^1$ αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό $f_0 : \Omega \to \Omega'$ έχει την ΕΙΤ για μια υποοικογένεια Γ_0 τών $\mathcal{C}^1$ οριζόντιων καμπυλών, τότε:*

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_0) \int_\Omega \rho^4(z,t)} K((z,t), f_0)^2 d\mathcal{L}^3(z,t)$$

Άν υποθέσουμε επιπλέον ότι η διαταραχή $K((z,t), f_0)^2 \equiv K_{f_0}$ είναι σταθερή, τότε

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) = K_{f_0}^2 M_4(\Gamma_0)$$

Εδώ, καθώς και στα επόμενα, γράφουμε:

$$\int h(z,t) d\mathcal{L}^3(z,t) := \int h(x+iy,t) d\mathcal{L}^3(x,y,t)$$

για μια συνάρτηση $h : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Απόδειξη (Περιγραφικά) Η απόδειξη της ανισότητας του modulus:

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) \leq \int_\Omega \rho^4(z,t) K((z,t), f_0)^2 d\mathcal{L}^3$$

για όλες τις $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_0)$ είναι μέρος της κλασσικής απόδειξης στη λεία περίπτωση (βλ. ()). με χρήση ενός τύπου αλλαγής μεταβλητών για ψευδοσύμμορφες απεικονίσεις του $\mathbb{H}^1$. Έπειτα η ισότητα λαμβάνεται από το γεγονός ότι η f_0 έχει την ΕΙΤ για την Γ_0. Σε κάθε πυκνότητα $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_0)$, αντιστοιχεί κανείς μία **πυκνότητα ώθησης**:

$$\rho'(\zeta,\tau) := \begin{cases} \frac{\rho}{|Z(f_0)_I| - |\bar{Z}(f_0)_I|} \circ f_0^{-1}(\zeta,\tau) & (\zeta,\tau) \in \Omega' \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αφού η f_0 έχει την ΕΙΤ για τη Γ_0, έχουμε:

$$\int_{f_0 \circ \gamma} \rho' dl =$$

$$\int_a^b \frac{\rho(\gamma(s))(|Z(f_0)_I(\gamma(s))| - |\bar{Z}(f_0)_I(\gamma(s))|)|}{|Z(f_0)_I(\gamma(s))| - |\bar{Z}(f_0)_I(\gamma(s))|} \dot{\gamma}_I(s)| ds =$$

$$\int_\gamma \rho dl$$

για κάθε $\gamma \in \Gamma_0$. Αυτό δείχνει ότι $\{\rho' : \rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_0)\} = \mathrm{adm}(f_0(\Gamma_0))$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητών (βλ. παράρτημα) με

$$J(;f_0) = (|Z(f_0)_I|^2 - |\bar{Z}(f_0)_I|^2)$$

υπολογίζουμε:

$$\int_{\Omega'} \rho'^4(\zeta,\tau) d\mathcal{L}^3(\zeta,\tau) = \int_{\Omega} \rho^4(z,t) K((z,t), f_0)^2 d\mathcal{L}^3$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ώς ακολούθως:

$$M_4(f_0(\Gamma)) = \inf \int_{\Omega'} \tilde{\rho}^4(\zeta,\tau) d\mathcal{L}^3(\zeta,\tau) = \inf \int_{\Omega}' \rho'^4(\zeta,\tau) d\mathcal{L}^3(\zeta,\tau) =$$

$$\inf_{\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma)} \int_{\Omega} \rho^4(z,t) K((z,t), f_0)^2 d\mathcal{L}^3(z,t)$$

Το γεγονός αυτό, σε συνδιασμό με την ανισότητα που ισχύει για τυχαίες σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συγκεκριμένες περιπτώσεις για να προσδιορίσουμε μια απεκόνισηώς ελαχιστοποιητή της διαταραχής. Ένα παράδειγμα δίνεται στο (). Η αντίστοιχη προσέγγιση για σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις που ορίζονται στο επίπεδο αναλύονται με περισσότερη λεπτομέρεια στο ().

3.4 Απεικονίσεις με μή σταθερή διαταραχή

Θα ελαφρύνουμε τώρα την παραπάνω συνθήκη απαιτώντας η διαταραχή της απεικόνισης συντεταγμένων να είναι σταθερή μόνο κατα μήκος των προβολών μιας δοθείσας φύλλωσης για το χωρίο.

Θεώρημα 10. *Έστω Λ ένα χωρίο στο $\mathbb{R}^2$. Έστω $0 < A < B$ και*

$$\gamma : (A,B) \times \Lambda \to \Omega$$

μία αμφιδιαφόριση που φυλλώνει ένα φραγμένο χωρίο Ω στην ομάδα Heisenberg και με την ιδιότητα:

$$\gamma(\cdot,\lambda) : [A,B] \to \bar{\Omega}$$

είναι οριζόντια καμπύλη με $|\gamma_I(\dot{s},\lambda)| \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και

$$d\mathcal{L}^3(\gamma(s,\lambda)) = |\dot{\gamma}_I(\gamma^{-1}(p))|^4 ds d\mu(\lambda)$$

για ένα μέτρο μ στο Λ. Τότε η,

$$\rho_0(p) = \begin{cases} ((B-A)|\dot{\gamma}_I(\gamma^{-1}(p))|)^{-1} & p = \gamma(s,\lambda) \in \Omega \\ 0 & p \notin \Omega \end{cases}$$

είναι μια μεγιστική πυκνότητα για την οικογένεια

$$\Gamma_0 = \{\gamma(\cdot,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

με

$$M_4(\Gamma_0) = \frac{1}{(B-A)^3} \int_{\Lambda} d\mu(\lambda)$$

Εδώ, $\dot{\gamma}(s,\lambda) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma(s,\lambda)$

Απόδειξη Η πυκνότητα ρ_0 είναι αποδεκτή για τη Γ_0 διότι για κάθε $\gamma(\cdot,\lambda) \in \Gamma_0$ (που απο υπόθεση είναι οριζόντια καμπύλη) έχουμε

$$\int_{\gamma(\cdot,\lambda)} \rho_0 dl = \int_A^B \rho_0(\gamma(s,\lambda))|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|ds = 1$$

Ένας άμεσος υπολογισμός δίνει:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho_0^4(p)d\mathcal{L}^3(p) &= \\ \int_\Lambda \int_A^B \rho_0^4(\gamma(s,\lambda))|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|^4 ds d\mu(\lambda) &= \\ \frac{1}{(B-A)^3}\int_\Lambda d\mu(\lambda) & \end{aligned}$$

Επομένως,

$$M_4(\Gamma_0) \le \frac{1}{(B-A)^3}\int_\Lambda d\mu(\lambda)$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε μια τυχαία πυκνότητα $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_0)$. Αφού είναι αποδεκτή για την οικογένεια καμπυλών Γ_0, εφαρμόζοντας ανισότητα Holder παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &\le \int_{\gamma(;\lambda)} \rho dl = \int_A^B \rho(\gamma(s,\lambda)|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|)ds \\ &\le \left(\int_A^B \rho^4(\gamma(s,\lambda))|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|^4 ds\right)^{\frac{1}{4}} (B-A)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Επομένως,

$$\frac{1}{(B-A)^3} \le \int_A^B \rho^4 \int_A^B \rho^4(\gamma(s,\lambda))|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|^4 ds$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας ώς προς $d\mu$ πάνω απ το Λ παίρνουμε

$$\frac{1}{(B-A)^3}\int_\Lambda \int_A^B \rho^4(\gamma(s,\lambda))|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)^4| ds d\mu(\lambda) = \int_\Omega \rho^4(p)d\mathcal{L}^3(p)$$

Αφού το ρ επιλέχθηκε τυχαία ανάμεσα στις αποδεκτές πυκνότητες, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα.

Παρακάτω, θέτουμε συνθήκες για τη φύλλωση και την απεικόνιση, έτσι ώστε να λάβουμε ισότητα στην ανισότητα του modulus για τη μέση διαταραχή.

Θεώρημα 11. *Έστω $f_0 : \Omega \to \Omega'$ μία σχεδόν σύμμορφη αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό ανάμεσα σε χωρία της ομάδας Heisenberg. Έστω γ μία φύλλωση του Ω όπως περιγράφηκε παραπάνω. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η f_0 έχει την EIT για τη*

$$\Gamma_0 = \{\gamma(\cdot,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

και ώστε

$$K(\gamma(s,\lambda), f_0) \equiv K_{f_0}(\lambda)$$

για όλα τα $(s,\lambda) \in (A,B) \times \Lambda$. *Τότε:*

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) = \frac{1}{(B-A)^3} \int_\Lambda K_{f_0}^2(\lambda) d\mu(\lambda)$$

Απόδειξη Έστω $\rho \in \mathrm{adm}(f_0(\Gamma_0))$ μια τυχαία, αποδεκτή πυκνότητα. Η $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση f_0 απεικονίζει μια καμπύλη $\gamma(\cdot,\lambda)$ στο Γ_0 (που απο υπόθεση είναι $\mathcal{C}^1$ και οριζόντιο) πάλι σε μια οριζόντια καμπύλη. Βρίσκουμε ότι:

$$1 \le \int_A^B \rho'(f_0 \circ \gamma(s,\lambda)) |(f_0 \dot{\circ} \gamma)_I(s,\lambda)| ds =$$

$$\int_A^B \rho'(f_0 \circ \gamma(s,\lambda)) (|Z_{f_0}(\gamma(s,\lambda))| - |\bar{Z}_{f_0 I}(\gamma(s,\lambda))|) |\dot{\gamma})_I(s,\lambda)| ds$$

Για τη τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η απεικόνιση f_0 έχει την IET για την υποοικογένεια των οριζόντιων καμπυλών Γ_0. Κατόπιν, εφαρμόζοντας ανισότηταHolder λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{(B-A)^3} \le \int_A^B \rho'(f_0(\gamma(s,\lambda)))^4 (|Z_{f_0}(\gamma(s,\lambda))| - |\bar{Z}_{f_0 I}(\gamma(s,\lambda))|)^4 |\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|^4 ds$$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές της ανισότητας με $K_{f_0}(\lambda)$ (εδώ χρησιμοποιείται το γεγονός ότι η διαταραχή είναι σταθερή κατα μήκος των καμπυλών $(\gamma(;\lambda))$, και ολοκληρώνουμε πάνω απ΄ το Λ ώς προς μ. Αυτό δίνει

$$\frac{1}{(B-A)^3} \int_\Lambda K_{f_0}^2(\lambda) d\mu(\lambda) \le$$

$$\int_\Lambda \int_A^B \rho'^4(f_0(\gamma(s,\lambda))) J(\gamma(s,\lambda), f_0 |\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|^4) ds d\mu(\lambda)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$(|Z(f_0)_I| - |\bar{Z}(f_0)_I|)^4 K^2(;f_0) =$$

$$(|Z(f_0)_I| + |\bar{Z}(f_0)_I|)^2 (|Z(f_0)_I| - |\bar{Z}(f_0)_I|)^2 = J(\cdot, f_0)$$

(βλέπε ()). Τότε έπεται απο τη διάσπαση του μέτρου $\mathcal{L}^3$ και την αλλαγή μεταβλητών ότι

$$\frac{1}{(B-A)^3} \int_\Lambda K_{f_0}^2(\lambda) d\mu(\lambda) \le \int_\Omega \rho'^4(f_0(p)) J(p, f_0) d\mathcal{L}^3(p) =$$

$$\int_{\Omega'} \rho'(q)^4 d\mathcal{L}^3(q)$$

(βλέπε () για λεπτομέρειες) Αφού το ρ' επιλέχθηκε τυχαία ανάμεσα στις αποδεκτές πυκνότητες λαμβάνουμε

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) \geq \frac{1}{(B-A)^3}\int_\Lambda K^2_{f_0}(\lambda)d\mu(\lambda)$$

Τώρα θεωρούμε την πυκνότητα ώθησης που δίνεται από:

$$\rho_0'(q) = \begin{cases} \frac{(B-A)\cdot|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|}{(|Z(f_0)_I(\gamma(s,\lambda))|-|\bar{Z}(f_0)_I(\gamma(s,\lambda))|)} & q = f_0(\gamma(s,\lambda)) \in \Omega' \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αυτή είναι αποδεκτή για τη Γ_0. Πράγματι

$$\int_A^B {\rho'}_0(f_0\circ\gamma(s,\lambda))|(f_0\dot{\circ}\gamma)_I(s,\lambda)|ds = \int_A^B \frac{1}{B-A}ds = 1$$

Επομένως,

$$M_4(f_0(\Gamma_0)) \leq \int_{\Omega'} {\rho'}_0^4 d\mathcal{L}^3(q) = \int_\Omega {\rho'}_0(f_0(p))^4 J(p,f_0)d\mathcal{L}^3(p) =$$

$$\int_\Lambda\int_A^B {\rho'}_0(f_0(\gamma(s,\lambda))^4 J(\gamma(s,\lambda),f_0)|\dot{\gamma}_I(s,\lambda)|^4 ds d\mu(\lambda) =$$

$$\int_\Lambda\int_A^B \frac{1}{(B-A)^4}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.
Η πρόταση 7 δείχνει τον ισχυρισμό του θεωρήματος 1 στην εισαγωγή.

Έστω ξανά $f, \tilde{f} = (\Xi, \Psi, H)$ δύο $\mathcal{C}^1$ απεικονίσεις, όπως στη πρόταση 9, και ας υποθέσουμε ότι η f είναι σχεδόν σύμμορφη και διατηρει τον προσανατολισμό. Έστω $\tilde{\Gamma}$ μια οικογένεια απο $\mathcal{C}^1$ καμπύλες και

3.5 Η απεικόνιση τάνυσης

Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους συμβολισμούς, θέτουμε: $A := \log a^2$, $B := \log b^2$, και $\Lambda = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\Omega = A(a,b)$ και θεωρούμε τη φύλλωση $\gamma : (A,B)\times\Lambda \to \Omega$ του σφαιρικού δακτυλίου Ω που δίνεται σε λογαριθμικές συντεταγμένες από τον τύπο:

$$\gamma(s,(\psi,\eta)) = (s,\psi,\eta - \frac{\tan\psi}{3}s)$$

Η απεικόνιση f_0, λέγεται **απεικόνιση τάνυσης**, και είναι η ζητούμενη μεγιστική απεικόνιση για την οικογένεια: $f_k : A(a,b) \to A(a^k,b^k)$, $0 < k < 1$. Η τάνυση γράφεται σε λογαριθμικές συντεταγμένες:

$$(\xi,\psi,\eta) \mapsto (k,\xi,\tan^{-1}(\frac{\tan\psi}{k}),\eta)$$

Η ομοιότητα ανάμεσα στο επίπεδο μοντέλο και στη τάνυση της Heisenberg είναι φανερή αν γράψουμε $z \mapsto z|z|^{k-1}$ σε επίπεδες λογαριθμικές συντεταγμένες. Να παρατηρήσουμε ότι ο συμβολισμός στην κάθετη κατεύθυνση ψ εμφανίζει εμμέσως την ιδιότητα επαφής της απεικόνισης· Η προφανής "τάνυση" $(\xi,\psi,\eta) \mapsto (k\xi,\psi,\eta)$ δέν είναι απεικόνιση επαφής. Για να επιδειχθει η πολυπλοκότητα των τύπων για τις f_k, παρατηρούμε ότι σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αυτές δίνονται από τους τύπους:

$$f_k(z,t) = \big(k^{\frac{1}{2}} z\big(\frac{|z|^2+it}{k|z|^2+it}\big)^{\frac{1}{2}}||z|^2-it|^{\frac{k-1}{2}}, t\cdot\frac{||z|^2-it|^k}{|k|z|^2-it|}\big)$$

Για $t=0$, ξαναπαίρνουμε τη κλασσική ακτινική τάνυση, $g_k(z,0) = (z|z|^{k-1},0)$. Αν αντικαταστήσουμε τυπικά τον εκθέτη k με -1 στο τύπο της απεικόνισης τάνυσης, λαμβάνουμε την αντιστροφή $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$. Ένα παρόμοιο φαινόνενο συμβαίνει και στη τάνυση f_k της Heisenberg. Αρχίζοντας απ' το $(\xi,\psi,\eta) \mapsto (-\xi,-\psi,\eta)$, λαμβάνουμε:

$$f_{-1}(z,t) = \big(\frac{z}{|z|^4-it}, \frac{-t}{|z|^4+t^2}\big)$$

που είναι μια σύμμορφη αντίστροφη στη μοναδιαία σφαίρα του Koranyi (βλ. (βιβλιογραφια)). Παρατηρούμε ότι η αντιστροφή που δίνεται στο ((σελ. 315» μπορεί να ληφθεί σάν σύνθεση της απεικόνισης f_{-1} με μια περιστροφή στον t−άξονα κατα π.

Έστω $A(a,b)$, $0<a<b$, ο σφαιρικός δακτύλιος, και έστω $0<k<1$. Σε ότι ακολουθεί, θα δώσουμε ένα παράδειγμα μιάς σχεδόν σύμμορφης απεικόνισης $f_k : A(a,b) \mapsto A(a^k,b^k)$, την **τάνυση**, το οποίο αποδεικνύεται ότι, είναι ο ελαχιστοποιητής μιας καθορισμένης μέσης κύμανσης. Σε λογαριθμικές συντεταγμένες, η απεικόνιση δίνεται από:

$$\tilde{f}_k(\xi,\psi,h) = \left(k\xi, \tan^{-1}\left(\frac{\tan\psi}{k}\right), \eta\right)$$

Αυτός ο τύπος προκύπτει ως εξής: Έχοντας υπ' οψιν την απεικόνιση ακτινικής τάνυσης σε λογαριθμικές συντεταγμένες, αναζητούμε μια απεικόνιση $f_k = (\Xi,\Psi,H)$, με $\Xi(\xi,\psi,h) = \Xi(\xi) = k\xi$. Από τη συνθήκη επαφής (Θεώρημα 4), έπεται άμεσα ότι $H_\psi = 0$, γι' αυτό $H(\xi,\psi,h) = H(\xi,h)$ με συνθήκη περιοδικότητας $H(\xi,h+\frac{4\pi}{3}) = H(\xi,h)(\mod \frac{4\pi}{3})$. Επιπλέον:

$$\Psi(\xi,\psi,h) = \tan^{-1}\left(\frac{H_h(\xi,h)\tan\psi - 3H_\xi(\xi,h)}{k}\right)$$

με $H_h(\xi,h) \neq 0$. Η απεικόνιση τάνυσης λαμβάνεται θέτοντας $H(\xi,h) = h$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η απεικόνιση δίνεται από:

$$f_k(z,t) = \left(k^{\frac{1}{2}} z\left(\frac{|z|^2+it}{k|z|^2+it}\right)^{\frac{1}{2}} ||z|^2-it|^{\frac{k-1}{2}}, t\frac{||z|^2-it|^k}{|k|z|^2-it|}\right)$$

Για να διατυπώσουμε το κύριο αποτέμεσμα αυτου του μέρους της εργασίας, ας συμβολίσουμε με $\mathcal{F}$ τη κλάση όλων των σχεδόν σύμμορφων απεικονίσεων $A(a,b) \to A(a^k,b^k)$ που απεικονίζει ομοιομορφικά το εσωτερικό με το εξωτερικό σύνορο του $A(a,b)$ στις αντίστοιχες συνοριακές συνιστώσες του $A(a^k,b^k)$.

Απόδειξη θεωρήματος 2: Αρχικά αποδεικνύουμε ότι οι f_k είναι σχεδόν σύμμορφες. Εφόσον η $f_k : A(a,b) \mapsto A(a^k,b^k)$ είναι ομοιομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι η $f_k|_{A(a,b)\cap\mathbb{H}_0^1}$ είναι σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση. Τότε, οι f_k είναι σχεδόν σύμμορφες από γνωστό θεώρημα. Οι υποθέσεις του θεωρήματος (4) ικανοποιούνται απο τη λεία απεικόνιση $f_k : \mathbb{H}_1^0 \to \mathbb{H}_0^1$. Γι' αυτό, η **τάνυση** $f_k|_{A(a,b)\cap\mathbb{H}_0^1}$ είναι λεία απεικόνιση επαφής επί της εικόνας του. Ο τύπος () δίνει:

$$\mu_(\Phi(\xi,\psi,\eta)) = -e^{3i(\psi-\eta)}\frac{k^2-1}{k^2+1+2\tan^2\psi}$$

για όλα τα $(\xi,\psi,\eta) \in \tilde{\mathbb{H}_0^1}$. Ένας ευθύς υπολογισμός δείχνειότι $\|\mu_{f_k}\|_\infty < 1$ και

$$K(\Phi(\xi,\psi,\eta),f_k) = \frac{1+\tan^2\psi}{k^2+\tan^2\psi}$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι οι f_k είναι λείες απεικονίσεις που διατηρούν τον προσανατολισμό στο $A(a,b)\cap\mathbb{H}_0^1$. Η επέκταση σε ολόκληρο το δακτύλιο είναι σχεδόν σύμμορφη με:

$$\|\mu_{f_k}\|_\infty = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

και με διαταραχή που δίνεται από την $K_{f_k} = \frac{1}{k^2}$. Αποδεικνύουμε έπειτα ότι

$$\int_{A(a,b)} K(p,f_k)^2\rho_0(p)^4 d\mathcal{L}^3 \leq \int_{A(a,b)} K(p,f)^2\rho_0(p)^4 d\mathcal{L}^3$$

με $\rho_0(z,t) = (\log\frac{b}{a})^{-1}\frac{|z|}{\sqrt{|z|^4+t^2}}$ για όλες τις $f \in \mathcal{F}$. Για να το κάνουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώτημα 1.
Έστω $A = \log a^2, B = \log b^2$ και $\Lambda = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \times (-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$. Ορίζουμε:

$$\tilde{\gamma} : (A,B)\times\Lambda \to \tilde{\mathbb{H}_0^1} \quad , \quad \tilde{\gamma}(s,\psi,\eta) = (\xi(s),\psi(s),\eta(s)) = (s,\psi,\eta - \frac{\tan\psi}{3}s)$$

και

$$\gamma : (A,B)\times\Lambda \to \Omega \quad , \quad \gamma(s,\psi,\eta) = \Phi(\tilde{\gamma}(s,\psi,\eta))$$

. Το σύνολο $\Omega := \gamma((A,B)\times\Lambda)$ είναι ένα φραγμένο χωρίο μέσα στο $A(a,b)\cap\mathbb{H}_0^1$ και η γ ορίζει μια λεία αμφιδιαφόριση ανάμεσα στο $(A,B\times\Lambda)$ και το Ω με πουθενά μηδενιζόμενη ιακωμβιανή ορίζουσα $|\det\gamma_*(s,\psi,\eta)| = \frac{3}{4}e^{2s}$. Επιπλέον για καθένα σταθεροποιημένο $(\psi,\eta)\in\Omega$ η καμπύλη

$$\gamma(\cdot,\psi,\eta) : (A,B) \to \Omega \quad , \quad s \mapsto \Phi(s,\psi(s),\eta - \frac{\tan\psi}{3}s)$$

είναι οριζόντια: απλά παρατηρούμε ότι

$$\sin(\psi(s))\dot{\xi}(s) + 3\cos(\psi(s))\dot{\eta}(s) = \sin\psi + 3\cos\psi\Big(-\frac{\tan\psi}{3}\Big) = 0$$

και κάνουμε χρήση της πρότασης 10. Επιπροσθέτως

$$|\dot{\gamma}_I(s,\psi,\eta)| = \frac{1}{2}e^{\frac{s}{2}}(\cos\psi)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall s \in (A,B)$$

Γι΄ αυτό, το στοιχείο όγκου μπορεί να γραφεί ώς

$$d\mathcal{L}^3(\gamma(s,\lambda))\frac{3}{4}e^{2s}dsd\psi d\eta = |\dot{\gamma}_I(s,\psi,\eta)|^4 dsd\mu(\psi,\eta)$$

Η οικογένεια καμπυλών που θα έχουμε σαν πρότυπο θα είναι η οικογένεια

$$\Gamma_0 = \{\gamma(\cdot,\psi,\eta) : (\psi,\eta) \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \times (-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})\}$$

Σύμφωνα με την πρόταση 6, μια μεγιστική συχνότητα για τη Γ_0 είναι η ρ_0 όπου:

$$\rho_0(p) := \begin{cases} (\log\frac{b}{a})^{-1} & p = \gamma(s,\psi,\eta) \\ 0 & p \notin \Omega \end{cases}$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε το κριτήριο που δίνεται απ την (22) για να πιστωποιήσουμε άν η απεικόνιση τεντώματος f_k έχει την EIT για την υποοικογένεια Γ_0. Πράγματι έχουμε ότι

$$\frac{\dot{\xi}(s) - i\dot{\psi}(s)}{\dot{\xi}(s) + i\dot{\psi}(s)}\frac{\bar{W}(\Xi + i\Psi)}{W(\Xi + i\Psi)} = frack^2 - 1k^2 + 1 + 2\tan^2\psi < 0$$

για όλα τα s. Αυτό είναι αληθές για $0 < k < 1$. Επομένως, απ΄ την πρόταση 7, έχουμε:

$$M_4(f_k(\Gamma_0)) = \frac{1}{2^3\log(\frac{a}{b}}\Big)^3 \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα 1, πρέπει να βρούμε μια μεγαλύτερη καμπύλη $\Gamma \subseteq \Gamma_0$ για την οποία η ρ_0 είναι ακόμη αποδεκτή, και τέτοια ώστε $M_4(f_k(\Gamma_0)) \leq M_4(f(\Gamma)) \quad \forall f \in \mathcal{F}$. Μια φυσική επιλογή για την Γ είναι η οικογένεια όλων των οριζόντιων καμπυλών που συνδέουν τις δύο συνιστώσες του συνόρου του $A(a,b)$. Οι συνοριακές συνθήκες για τις απεικονίσεις της κλάσης $\mathcal{F}$ εγγυώνται ότι η εικόνα $f(\Gamma)$ θα είναι απαραιτήτως οικογένεια του ιδίου τύπου στο $A(a^k,b^k)$. Χρησιμοποιώντας την απόλυτη συνέχεια των ψευδοσύμμορφων απεικονίσεων σε σχεδόν κάθε καμπύλη (μέχρι μιας negligible οικογένειας καμπυλών με μηδενικό modulus) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$M_4(f_k(\Gamma_0)) \leq M_4(f(\Gamma)) \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Μένει να δείξουμε ότι γ πυκνότητα ρ_0 μπορεί να μεταβληθεί μόνο σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, έτσι ώστε $\rho_0 \in \mathrm{adm}(\Gamma)$. Αυτό έπεται απ΄ τον υπολογισμό του modulus του σφαιρικού δακτυλίου

(βλ. (». Παρακάτω δίνεται η απόδειξη κάνοντας χρής λογαριθμικών συντεταφμένων.
Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A(a,b) \setminus \Omega$ είναι ένα $\mathcal{L}^3$ σύνολο μέτρου μηδέν που περιέχει το $A(a,b) \setminus \Omega$. Η modified συχνότητα είναι αποδεκτή για την μεγαλύτερη οικογένεια Γ και συμφωνεί με την αρχική συχνότητα σχεδόν παντού, επομένως το ολοκλήρωμα της μέσης διαταραχής δέν μεταβάλλεται καθόλου.
Πρέπει να ελέγξουμε ότι η ρ_0 είναι αποδεκτή για την επεκτεταμένη οικογένεια Γ. Για να το κάνουμε αυτό, έστω γ μια καμπύλη σ' αυτή την οικογένεια.Μπορούμε ναυποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\gamma(s) \in \mathbb{H}_0^1$ σχεδόν για κάθε s. Να παρατηρήσουμε ότι σε λογαριθμικές συντεταγμένες

Θεώρημα 12. *Για κάθε $f \in \mathcal{F}_0$, η μέγειστη διαταραχή είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όση και η μέγιστη διαταραχή της ακτινικού τεντώματος*

$$K_f \geq K_{f_k} = \frac{1}{k^2}$$

Απόδειξη Η πρόταση () μπορεί να εφαρμοσθεί για κάθε $f \in \mathcal{F}_0$ για να δείξουμε την ύπαρξη μιας $\mathcal{C}^1$ απεικόνισης

$$\tilde{f} = (\Xi, \Psi, H) : Q = [\log a^2, \log b^2] \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to [k \log a^2, k \log b^2] \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$$

τέτοιας ώστε

$$H_\Psi + \frac{1}{3} \tan \Psi \cdot \Xi_\psi = 0$$

και επιπλέον

$$W_{\xi,\eta} H + \frac{1}{3} \tan \Psi \cdot W_{\xi,\eta} \Xi = 0$$

για όλα τα $(\xi, \psi, \eta) \in Q$, και οι περιοδικές και ενρριπτικές συνθήκες της πρότασης () ικανοποιούνται.
Απο την υπόθεση ότι η f διατηρεί τις σφαίρες, έπεται ότι η

$$\Xi(\xi, \psi, \eta) = \Xi(\xi)$$

είναι συνάρτηση μόνο του ξ. Είναι συνεχής στο $[\log a^2, \log b^2]$ και διαφορίσιμη στο $(\log a^2, \log b^2)$ απο υπόθεση, με συνοριακές συνθήκες $\Xi(\log a^2) = k \log a^2$ και $\Xi(\log b^2) = k \log b^2$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_0 \in (\log a^2, \log b^2)$ τέτοιο ώστε

$$k \log a^2 - k \log b^2 = \Xi(\log a^2) - \Xi(\log b^2) = \Xi_\xi(\xi_0)(\log a^2 - \log b^2)$$

και γι' αυτό

$$\Xi_\xi(\xi_0) = k$$

Περαιτέρω μεγιστικά προβλήματα Η πρόταση 5 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει ένα πρόβλημα παρόμοιο με το κλασσικό προβλημα του Grotzsch στο μιγαδικό επίπεδο (βλ. Αλη). Έστω $a, b > 0$ και ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο $R_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq a, 0 \leq \Im(z) \leq b\}$ το οποίο φυλλώνεται με καμπύλες $\gamma_{x,I} = x + is, s \in [0, b], x \in [0, a]$. Μια τέτοια καμπύλη μπορεί να μεταφερθεί (lifted) σε μια οριζόντια καμπύλη στην ομάδα Heisenberg με μοναδικό τρόπο μέχρι κάθετης μεταφοράς. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε για $c > 0$ το χωρίο

$$\Omega = \{(z, t - \Im(z^2)) \in \mathbb{H}^1 : z \in R_{a,b}, t \in (0, c)\}$$

η οποία θα απεικονισθεί στο

$$\Omega' = \{(z, t - \Im(z^2)) \in \mathbb{H}^1 :\}$$

Παράρτημα Α′

Moduli χωρίων στο Μιγαδικό επίπεδο

Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

- $\mathbb{C} = \{z = x + yi : |z| \leq \infty\}$ το πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο.
- $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ η σφαίρα του Riemann.
- L^p είναι η κλάση των Lebesque $p-$ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Α′.1 Ορισμός του modulus χωρίων του επιπέδου.

Έστω $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, μία πραγματική συνάρτηση, μετρήσιμη και μή αρνητική σχ.π., και με $\rho \in L^2(\mathbb{C})$. Έστω Γ μια οικογένεια καμπυλών στο μιγαδικό επίπεδο. Κάθε $\gamma \in \Gamma$ θα θεωρείται αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών τόξων.

Για μια τέτοια ρ θέτουμε

$$L_\gamma(\rho) = \int_\gamma \rho |dz|$$

αν η ρ είναι μετρήσιμη στη γ, και $L_\gamma(\rho) = \infty$ αλλιώς. Ορίζουμε:

$$L_\gamma = \inf_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma(\rho)$$

Ορισμός 4. *Ορίζουμε το* **modulus** *μιας τέτοιας επιτρεπτής καμπύλης γ ώς:*

$$M(\Gamma) = \inf_\rho \frac{A(\rho)}{L^2(\rho)}$$

Α′.2 Modulus παραλληλογράμμων

Θεώρημα 13. *Έστω D το ορθογώνιο $\{z = x + yi : 0 < x < l, 0 < y < 1\}$ και Γ η οικογένεια καμπυλών στο D που ενώνει τις απέναντι οριζόντιες πλευρές του D. Τότε $m(D, \Gamma) = l$.*

Απόδειξη Έστω $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma)$. Τότε $\int_\gamma \rho \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma$ Επιλέγουμε $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ που αποτελείται από τις ευθείες που ενώνουν τις απέναντι πλευρές:

$$\gamma_y(t) := (t, y) \quad \forall t \in [0, a]$$
$$z(t) := t + iy \quad \text{με } \dot{z}(t) = 1$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \int_0^a \rho(\gamma_y(t)) \|\dot{z}(t)\| dt = \int_0^a \rho(\gamma_y(t)) dt \\
&\leq \big(\rho^2(\gamma_y(t)) dt\big)^{1/2} \Big(\int_0^a 1^2 dt \Big) \Rightarrow \\
a^{-1/2} &\leq \Big(\int_0^a \rho^2(\gamma_y(t)) dt \Big)^{1/2} \Rightarrow \\
\frac{1}{a} &\leq \int_0^a \rho^2(t, y) dt = \int_0^a \rho^2(x, y) dx
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ώς προς y λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} \int_0^b dy &\leq \int_0^b \int_0^a \rho^2(x, y) dx dy = \int \int_R \rho^2 d\mathcal{L}^2 \Rightarrow \\
\frac{b}{a} &\leq \int \int_R \rho^2 d\mathcal{L}^2
\end{aligned}$$

Παίρνοντας inftimum στην παραπάνω ανισότητα λαμβάνουμε:

$$M(\Gamma) \geq \frac{b}{a}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αναζητου΄με μια $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma)$ για την οποία $\int \int_R \rho 2 d\mathcal{L}^2 = \frac{b}{a}$ Πρός τούτο, επιλέγουμε $\rho_0(x, y) := \frac{1}{a}$ Η ρ είναι αποδεκτή. Έστω $\gamma \in \Gamma$. Έχουμε:

$$\int_\gamma \rho = \frac{1}{a} \int_\gamma ds = \frac{1}{a} a = 1$$

Επιπλέον:

$$\int_0^a \int_0^b \frac{1}{a^2} dx dy = \frac{b}{a} \Rightarrow M_2(\Gamma) = \frac{b}{a}$$

A′.3 Moduli δακτυλίων στο επίπεδο

Έστω G ένας διπλά συνεκτικός τόπος στο πεπερασμένο μιγαδκό επίπεδο, και έστω C_1 και C_2 η φραγμένη και μή φραγμένη συνιστώσα του συμπληρώματος. Λέμε ότι η κλειστή καμπλύλη γ στο G **διαχωρίζει** τις C_1 και C_2 άν η γ έχει μή μηδενικό δείκτη στροφής ώς προς τα σημεία της C_1.

Θεώρημα 14. *Έστω Γ η οικογένεια κλειστών καμπυλών της G που διαχωρίζει τις C_1 και C_2. Το module $M(G) = \lambda(\Gamma)^{-1}$. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το δακτύλιο $G := \{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. Τότε:*

$$1 \leq \int_\gamma \rho \int_a^b$$

Απόδειξη Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ και ορίζουμε τις υποοικογένειες:

$$\Gamma_1 := \{\text{οι καμπύλες που ενώνουν τα δύο σύνορα}\}$$

$$\Gamma_2 := \{\text{οι κλειστές καμπύλες ομοτοπικές του } 0\}$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τα $Mod(\Gamma_1)$, και $Mod(\Gamma_2)$.

Για την Γ_1: Θεωρούμε την υποοικογένεια:

$$\Gamma_1^0 := \{\gamma_\phi(t) = te^{i\phi}, z \in [a,b]\}$$

Έστω $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_1)$. Τότε $\forall \gamma \in \Gamma_1^0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \int_\gamma \rho = \int_a^b \rho(te^{i\phi})dt \qquad (afo'u|\dot{\gamma}_\phi(t)| = 1) \\
&= \int_a^b \rho(re^{i\phi})\frac{r^{1/2}}{r^{1/2}}dr \\
&\leq \Big(\int_a^b (re^{i\phi})rdr\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b \frac{dr}{r}\Big)^{1/2} \Rightarrow \\
1 &\leq \Big(\int_a^b (re^{i\phi})rdr\Big)^{1/2}\Big(\ln\frac{a}{b}\Big)^{1/2} \Rightarrow \\
\Big(\ln\frac{b}{a}\Big)^{-1} &\leq \int_a^b \rho^2(re^{i\phi})rdr
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ώς προς ϕ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
2\pi\Big(\ln\frac{b}{a}\Big)^{-1} &\leq \int_0^{2\pi}\int_a^b \rho^2(re^{i\phi})rdrd\phi \\
&= \int_{\mathcal{A}} \rho^2(z)d\mathcal{L}^2(z)
\end{aligned}$$

Παίρνοντας το infimum πάνω στο $\mathrm{adm}(\Gamma_1)$ λαμβάνουμε:

$$M(\Gamma_1) \geq 2\pi\Big(\ln\frac{b}{a}\Big)^{-1}$$

Για την Γ_2: Θεωρούμε την υποοικογένεια:

$$\Gamma_2^0 := \{\gamma_\phi(t) = te^{i\phi}, z \in [a,b]\}$$

Έστω $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma_1)$. Τότε $\forall \gamma \in \Gamma_1^0$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \int_\gamma \rho = \int_a^b \rho(te^{i\phi})dt \qquad (afo'u|\dot{\gamma}_\phi(t)| = 1)\\
&= \int_a^b \rho(re^{i\phi})\frac{r^{1/2}}{r^{1/2}}dr\\
&\leq \Big(\int_a^b (re^{i\phi})rdr\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b \frac{dr}{r}\Big)^{1/2} \Rightarrow\\
1 &\leq \Big(\int_a^b (re^{i\phi})rdr\Big)^{1/2}\Big(\ln\frac{a}{b}\Big)^{1/2} \Rightarrow\\
\Big(\ln\frac{b}{a}\Big)^{-1} &\leq \int_a^b \rho^2(re^{i\phi})rdr
\end{aligned}
$$

Ολοκληρώνοντας ώς προς ϕ παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
2\pi\Big(\ln\frac{b}{a}\Big)^{-1} &\leq \int_0^{2\pi}\int_a^b \rho^2(re^{i\phi})rdrd\phi\\
&= \int_{\mathcal{A}} \rho^2(z)d\mathcal{L}^2(z)
\end{aligned}
$$

Παίρνοντας το infimum πάνω στο adm(Γ_1) λαμβάνουμε:

$$M(\Gamma_1) \geq 2\pi\Big(\ln\frac{b}{a}\Big)^{-1}$$

Α$'$.4 Σχεδόν σύμμορφες απεικονίσεις

Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία διαφορίσιμη με τη πραγματική έννοια απεκόνιση. Το διαφορικό στο τυχαίο $w := f(z)$ γράφεται ώς:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

ή, απλουστεύοντας λίγο το συμβολισμό:

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$$

Εφαρμοσμένη παραπάνω, η τριγωνική ανισότητα δίνει:

$$|dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)$$

Ορισμός 5. *Η f λέγεται $k-$σχεδόν σύμμορφη ($k-$quasiconformal) άν η*

$$K_f(z) := \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή $\exists k_f \geq 1$ με $K_f(z) \leq k_f \quad \forall z \in \Omega$

Ας εξηγήσουμε λίγο πώς προκύπτει αυτός ο ορισμός, ο οποίος κατα βάση οφείλεται στον Grotzsch:

Έστω $w = f(z)$ ένας C^1 ομοιομορφισμός απο ένα τόπο σ΄ ένα άλλο. Σε ένα σημείο z_0 επάγεται μια γραμμική απεικόνιση των διαφορικών:

$$du = u_x dx + u_y dy$$

$$du = u_x dx + u_y dy$$

που μπορούμε να γράψουμε επίσης σε μιγαδική μορφή:

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$$

με

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) \quad , \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$$

Γεωμετρικά η () αναπαριστά ένα αφινικό μετασχηματισμό απ΄ το επίπεδο (dx, dy) στο επίπεδο (du, dv). Απικονίζει κύκλους με κέντρο την αρχή, σε ελλίψεις. Θέλουμε να υπολογίσουμε το λόγο ανάμεσα στους άξονες καθώς και τις κατευθύνσεις τους.

Με κλασσικό συμβολισμό, γράφει κανείς:

$$du^2 + dv^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

με

$$E = u_x^2 + v_x^2 \quad , \quad F = u_x u_y + v_x v_y \quad , \quad G = u_y^2 + v_y^2$$

Οι ιδιοτιμές καθορίζονται από

$$\det \begin{pmatrix} E - \lambda & F \\ F & G - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

και είναι οι

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{E + G \pm \left[(E-G)^2 + 4F^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Ο λόγος $a : b$ των αξόνων είναι

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{E + G \pm \left[(E-G)^2 + 4F^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2(EG - F^2)}$$

Ο μιγαδικός συμβολισμός είναι περισσότερο βολικός. Παρατηρούμε πρώτα ότι:

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

Αυτό δίνει

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J$$

δηλαδή την Ιακωμβιανή. Η Ιακωμβιανή είναι θετική για τις απεικονίσεις που διατηρούν το προσανατολισμό και αρνητική για τις απεικονίσεις που τον αντιστρέφουν. Προς το παρον θεωρούμε μόνο την πρώτη περίπτωση. Τότε $|f_{\bar{z}}| < |f_z|$.
Έπεται άμεσα απ΄ την (2) ότι

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|) \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)$$

οπου και τα δύο όρια υπάρχουν. Κατα λήγουμε ότι ο λόγος του μεγάλου πρός το μικρό άξονα είναι

$$D_f := \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \geq 1$$

απ΄ όπου φανερώνεται το κίνητρο για τον παραπάνω ορισμό.

Α΄.5 Ανισότητα modulus

Θεώρημα 15. *Έστω Ω, Ω' χωρία του μιγαδικού επιπέδου και $f : \Omega \to \Omega'$ μία $k-$σχεδόν σύμμορφη απεικόνιση. Ισχύει η ανισότητα:*

$$M_2(f(\Gamma)) \leq \int\int_\Omega K_f \rho^2 d\mathcal{L}^2, \quad \forall \rho \in \mathrm{adm}(\Gamma)$$

Απόδειξη Έστω $\rho \in \mathrm{adm}(\Gamma)$. Ορίζουμε

$$\rho' := \begin{cases} \frac{\rho}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \circ f^{-1}, & \text{στο}\Omega \\ 0 & ,\text{αλλού} \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $\rho \in \mathrm{adm}(f(\Gamma))$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{f\circ\gamma} = \int_{f\circ\gamma} \frac{\rho}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \circ f^{-1}$$

Έστω $\gamma : [0, l] \to \Omega$. Τότε $f \circ \gamma : [0, l] \to]\Omega'$ Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_0^l \frac{\rho}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} |f \circ \dot{\gamma}(t)| det \geq \int_0^l \frac{\rho(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} = \int_0^\rho \rho(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|dt = \int_\gamma \rho \geq 1$$

εφόσον η ρ είναι αποδεκτή.

Υπολογίζουμε τώρα το $\int\int_{f(\Omega)} \rho'^2 d\mathcal{L}^2$. Θέτουμε:

$$I := \int\int_{f(\Omega)} \frac{\rho \circ f^{-1}}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

και εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητών $\zeta := f(z), z \in \Omega$ για να πάρουμε:

$$I = \int\int \frac{\rho^2}{(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)^2}(|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2) d\mathcal{L}^2(z) = \int\int_\Omega \rho^2(z) \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} d\mathcal{L}^2 = \int\int_\Omega \rho^2(z) K_f(z) d\mathcal{L}^2(z)$$

Οπότε:

$$M_2(f(\Gamma)) = \inf_{\rho \epsilon \mathrm{adm}(f(\Gamma))} \int\int_{f(\Omega)} \rho'^2 d\mathcal{L}^2 \leq I = \int\int_{\Omega} K_f(z)\rho^2(z) d\mathcal{L}^2(z)$$

Βιβλιογραφία

[1] Alhfors, L., *Lectures on quasiconformal mappings*, Springer-Verlag, Lecture notes in Mathematics, MA, 1994.

[2] Koranyi, A., Riemann, M., *Horizontal normal vectors and Conformal capacity of spherical rings in the Heisenberg group*, Bull. Sci. Math, 1987.

[3] Koranyi, A., Riemann, M., *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Adv. Math, 1995.

[4] Platis I., *The geometry of Complex hyperbolic packs*, MAth. Proc. Campridge Philos. Soc., 2009.