Εργαστήριο 6

6.1.2

(4) Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα αποτελούν βάσεις των αντίστοιχων αφφινικών χώρων R^n

α) $\{1, 2\}$ στον R

$$\underset{x_0}{1},\ \underset{x_1}{2}$$

$2-1 = 1$ γραμμ. ανεξ.

β) $\{(-1,0), (2,2), (3,5)\}$ στον R^2

$$\underset{x_0}{(-1,0)},\ \underset{x_1}{(2,2)},\ \underset{x_2}{(3,5)}$$

$$D(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 3\cdot 5 - 4\cdot 2 - 1\cdot 0 = 7 \neq 0$ άρα είναι

5) Βρείτε όλα τα $\alpha \in R$ για τα οποία το

$B(\alpha) = \{(1,2),(2,4),(3,\alpha)\}$ αποτελεί αρχική βάση του R^2.

Κατόπιν βρείτε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες που αντιστοιχούν ~~...~~ στη βάση αυτή

$$D(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \alpha - 2 - 4 = \alpha - 6$ άρα πρέπει $\alpha \neq 6$

Βαρυκεντρικές συντεταγμένες

$$(x_1, x_2) = \lambda_1(1,2) + \lambda_2(2, \alpha-2) =$$
$$= (\lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2(\alpha-2))$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2(\alpha-2) = x_2 \end{cases}$$

$$D = \alpha - 6$$

$$D\lambda_1 = \begin{vmatrix} x_1 & 2 \\ x_2 & \alpha-2 \end{vmatrix} = x_1(\alpha-2) - 2x_2$$

$$D\lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_1$$

φα $\lambda_1 = \frac{x_1(\alpha-2) - 2x_2}{\alpha - 6}$

$\lambda_2 = \frac{x_2 - 2x_1}{\alpha - 6}$

ωι $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

6.1.5

(2) Προσδιορίστε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία τα $(1, \lambda, 1) + <(2,4,\lambda), (-1,-2,1)>$ αποτελεί

διδιάστατο αφφινικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

Πρέπει τα $(2,4,\lambda)$ και $(-1,-2,1)$

να είναι γρ. ανεξάρτητα

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & \lambda \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4+2\lambda, 2+\lambda, 0) \quad \boxed{\lambda \neq -2}$$

(4) Έστω η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 - x_3 + 5, 3x_1 - x_2 - 2, 2x_1)$

και το επίπεδο $X(\lambda, \mu) = (1+\lambda, 2+\mu, \lambda+\mu)$.

Ν.δ.ο. f αφφινική και βρείτε την $f(X(\lambda))$

$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2, 2x_1) + (5, -2, 0)$

Η αντίστοιχη $g(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2, 2x_1)$

έχει πίνακα

$$A_g = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A_g = -2 \neq 0$ άρα f αφφινική

$x(\lambda,\mu) = (1+\lambda, 2+\mu, \lambda+\mu)$

$x_1 = 1+\lambda$, $x_2 = 2+\mu$, $x_3 = \lambda+\mu$

$f(x(\lambda,\mu)) = (-\lambda-1+2(2+\mu)-\lambda-\mu+5,$
$3+3\lambda-2-\mu-2, 2+2\lambda) =$

$= (8,-1,2)+\lambda(-2,3,2)+\mu(1,-1,0)$

(6) Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι αφφινική απεικόνιση με προσαρτημένη γραμμική απ. g, τότε η f είναι διαφορίσιμη απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$ και η παράγωγος σε κάθε σημείο είναι ο πίνακας της g.

$$Df = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ Τα στοιχεία του είναι συνεχείς συναρτήσεις

$\det Df = \alpha d - bc \neq 0$

(8) Νδο η αφφινική ανάκλαση είναι όντως αφφινική απεικόνιση

Η αφφινική ανάκλαση είναι αφ. απεικόνιση γιατί είναι της μορφής $f(x) = g(x) + \delta$ όπου g ανάκλαση (γραμμ. απεικόνιση)

5) Δείξτε ότι η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3 - 3,\ x_2 - 3x_3 + 7,\ x_3)$$

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Είναι αφινικός του $A(3)$ και βρείτε τον A_f και την f^{-1}

$$A_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_f = 2 \neq 0$$

Βρίσκουμε τον $(A_f)^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

...

(11) Βρείτε την παράλληλη προβολή ~~[illegible]~~ απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ στο επίπεδο $P: x_1 + x_2 - x_3 = 4$ στην κατεύθυνση του $v = (1,0,1)$.

$P: (1,1,-1)(x_1, x_2, x_3) = 4$

$A = (1,1,-1)$
$b = 4$

$A \cdot v = (1,1,-1)(1,0,1) = 0$ άρα

η προβολή του σημείου

7.1.2

3 α) Νδο το $F_N = \{[e_0], \dots, [e_n], [e_0+e_1+\dots+e_n]\}$ είναι προβολικό πλαίσιο του $\mathbb{R}P^n$ με αντίστοιχη βάση προβολικών συντεταγμένων τις συνήθεις ομογ. συντεταγμένες

$e_0=(1,0,\dots,0), \dots, e_n=(0,\dots,0,1)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$

$v_i = e_i, i=0,\dots,n$

$$V_n = \sum_{i=0}^{n} e_i = (1,1,\dots,1)$$

άρα είναι προβ. πλαίσιο

β) νδο αν $v_0=(2,-1)$, $v_1=(-1,1)$, $v_3=(1,0)$ τότε το

$$F=\{p(v_0), p(v_1), p(v_2)\}$$ είναι προβ. πλαίσιο για το $\mathbb{R}P^1$.

Βρείτε τις προβολικές συντεταγμένες του σημείου $[X]_F$ ως προς το πλαίσιο αυτό.

Προβ. πλαίσιο για την προβ. ευθεία

$$v_3 = v_0 + v_1$$

$$x = \lambda_0(2,-1) + \lambda_1(-1,1) = (x_0, x_1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2\lambda_0 - \lambda_1 \\ x_1 &= -\lambda_0 + \lambda_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_0 &= x_0 + x_1 \\ \lambda_1 &= x_0 + 2x_1 \end{aligned}$$

$$[x]_F = [x_0 + x_1 : x_0 + 2x_1]$$

5) Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες ανήκουν στην αντίστοιχη προβολική ομάδα και για όσους ανήκουν βρείτε τον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό

β) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

άρα ο $[M]$ είναι στοιχείο της $P(2)$

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_1 : x_0 : x_2]$$

δ) iii) $[m]([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) =$

$= [x_n : x_{n-1} : \dots : x_1 : x_0]$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \det = -1$$

άρα προβ. μετασχ.

7.2.2.

(2) Για ποια $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $[m]$ που απεικονίζει τα $[1:0]$, $[0:1]$, $[1:1]$ στα

$[2:3]$, $[-1:\alpha]$, $[\alpha:1]$ αντίστοιχα;

για $\lambda, \mu \neq 0$ σχηματίζουμε τη

$$N = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ 3\lambda & \alpha\mu \end{pmatrix}$$

$\det N = (2\alpha + 3)\lambda\mu$

πρέπει $\alpha \neq -\frac{3}{2}$

Βρίσκω τον μετασχηματισμό

$(1,1) \to [2\lambda - \mu : 3\lambda + \alpha\mu] =$

$= [\alpha : 1]$

άρα $\quad 2\lambda - \mu = \alpha$

$3\lambda + \alpha\mu = 1$

βρίσκω λ, μ ... ...

(4) Βρείτε το $\alpha \neq 0, \pm 1$ για το οποίο υπάρχει στοιχείο του $P(L)$ που να απεικονίζει τα $[-\alpha:1]$, $[0:1]$, $[\alpha:1]$ το $[1:1]$ στα $[\alpha:1]$, $[1:0]$, $[-\alpha:1]$ και $[1:2]$ αντίστοιχα.
Αν ναι, βρείτε το

$A = (-\alpha, 1)$ $B = (0,1)$, $C = (\alpha, 1)$, $D = (1,1)$

$A' = (\alpha, 1)$ $B' = (1,0)$ $C' = (-\alpha, 1)$ $D' = (1,2)$

$$C = pA + qB$$
$$(\alpha, 1) = p(-\alpha, 1) + q(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad p = -1, \quad q = 2$$

$$D = rA + sB$$
$$(1,1) = r(-\alpha, 1) + s(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad r = -1/2, \quad s = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$[A, B, C, D] = \frac{qr}{ps} = \frac{2}{\alpha + 1}$$

Όμοια $[A', B', C', D']$ και δείχνω ότι ισα με $[A, B, C, D]$

7.3.3

(3) + (4) Βρείτε τις ευθείες L_i, $i=1,2,3$ που περνούν από τα [A] και [B] όταν είναι τα

α) $[1:0:5]$, $[0:-1:9]$

β) $[2:3:2]$, $[-1:4:1]$

γ) $[0:1:-1]$, $[-2:6:1]$

L_1: $[(1,0,5) \times (0,-1,9)] \cdot X = 0$

L_2 $[(2,3,2) \times (-1,4,1)] \cdot X = 0$

L_3. $[(0,1,-1) \times (-2,6,1)] \cdot X = 0$

$L_1 \cap L_2$: $[((1,0,5) \times (0,-1,9)) \times ((2,1,2) \times (-1,4,1))]$

(5) Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σημεία είναι συνευθειακά και αν είναι προσδιορίστε την ευθεία που ανήκουν

α) $[-2:8:1]$, $[3:4:0]$, $[-2:5:2]$

ορίζουσα: $\begin{vmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16-48+23 \neq 0$

άρα όχι συνευθειακά

γ) $[0:1:-1/4]$, $[2:2:-1]$ $[1:-1:0]$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1/4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{4}(-2-2) = -1+1=0$$ άρα συνευθειακά

Ευθεία: $[(0,1,-1/4)\times(2,2,-1)]\cdot x=0$

7.3.6

(1) Βρείτε όλους τους προβολικούς μετασχ. που απεικονίζουν τα $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ και $[0:0:1]$ στα $[2:0:1]$, $[0:-1:2]$, $[0:0:1]$ αντίστοιχα. Ν.δ.ο. από όλους αυτούς μόνο ένας απεικονίζει το $[1:1:1]$ στο $[3:-1:0]$

Έστω $\lambda, \mu, \nu \neq 0$

Σχηματίζεται ο $\begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ \lambda & 2\mu & \nu \end{bmatrix}$

$$[1:1:1] \to [3:-1:0]$$
$$[2\lambda : -\mu : \lambda+2\mu+\nu] \to [3:-1:0]$$

$2\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 3/2$

$\mu = 4$

$\nu = -\frac{7}{2}$

(6) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

~~α) [illegible]~~

β) βρείτε τα σταθερά ~~το~~ σημεία του αντίστοιχου προβολικού μετασχ. [m]

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right] =$$

$$= -(\lambda-2)^3(\lambda-3) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ και 3

Για $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$

... $(1,0)$. $\left[1 : 0 : \frac{1}{2}\right]$

6

(3)

(7) Βρείτε αν υπάρχει $f \in A(2)$ που απεικονίζει τα $(0,0)$ $(1,0)$ και $(0,1)$ αντίστοιχα στα $(1,-2)$ $(1,1)$ και $(0,2)$.

$(1,-2)$ $\quad$ $(1,1)$ $\quad$ $(0,2)$

x_0 $\quad$ x_1 $\quad$ x_2

$$D(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

όποτε υπάρχει $f \in A(2)$

(είναι αφινικά ανεξάρτητα)
(βάση)

(9) Για $\alpha > 0$ βρείτε αν υπάρχει $f \in A(2)$ που απεικονίζει τα $(-\alpha, 0)$, $(0,\alpha)$ και $(\alpha, 0)$ στα $(0,0)$, $(\alpha, 0)$ και $(0,\alpha)$ αντίστοιχα

$$\det = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 \neq 0$$

$$\det = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 \neq 0$$