ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜ

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΜΟΣ ΙΙΙ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 20

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν στο Μάθημα 20, περί καμπυλότητας.

1. Έστω το ελικοειδές με παραμέτρηση

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv), \quad b \neq 0.$$

Δείξτε ότι

$$K = -\frac{b^2}{(b^2+u^2)^2}, \quad H = 0.$$

2. Για τη *σαγματοειδή* επιφάνεια $z = xy$, δείξτε ότι

$$K = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad H = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

3. Δείξτε ότι η επιφάνεια με παραμέτρηση

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (u, v, \log(\cos u) - \log(\cos v)),$$

είναι ελαχιστική ($H \equiv 0$).

4. Βρείτε τύπους για την K και την H του γραφήματος μίας $\mathcal{C}^2$ συνάρτησης $z = f(x,y)$ χρησιμποιώντας την παραμέτρηση

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = (x, y, f(x,y)).$$

Κατόπιν:

(1) Βρείτε την K και την H της κυλινδρικής επιφάνειας $z = f(x)$.

(2) Βρείτε την K και την H του ελλειπτικού παραβολοειδούς

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

(3) Βρείτε την K και την H του υπερβολικού παραβολοειδούς

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

5. Δείξτε ότι η

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u)$$

είναι μία παραμέτρηση του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση αυτή, βρείτε την καμπυλότητα K και δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\, dS = 2.$$

6. Δείξτε ότι η επιφάνεια του Enneper που ορίζεται από την

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\ u^2 - v^2\right)$$

είναι ελαχιστική.

7. (*) Ο *τόρος* ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\phi, \quad y = (R + r\cos\theta)\sin\phi, \quad z = r\sin\theta,$$

με $(\theta,\phi) \in (0,2\pi)^2$. Βρείτε τύπο για την καμπυλότητα K και βάσει αυτού δείξτε ότι η ολική καμπυλότητα του τόρου είναι 0.

8. Έστω η επιφάνεια εκ περιστροφής

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = (x, f(x)\cos y, f(x)\sin y), \quad x \in (a,b),$$

με f θετική και $\mathcal{C}^2$. Δείξτε ότι

(1)

$$K = -\frac{f''}{f(1+(f')^2)^2}.$$

(2) Η μόνη τέτοια επιφάνεια μηδενικής καμπυλότητας είναι εκ περιστροφής ευθυγράμμου τμήματος, δηλαδή είτε κύλινδρος είτε (κόλουρος) κώνος.

9. (*) Μία παραμέτρηση $\mathbf{\Phi}$ λέγεται *σύμμορφη* αν

$$E = G \quad \text{και} \quad F = 0.$$

Αποδείξτε ότι αν $H = K = 0$, τότε η $\mathbf{\Phi}$ παραμετρά τμήμα επιπέδου.
(*Υπόδειξη:* $H = 0 \implies N = -L$. Από την άλλη, $K = 0 \implies L = N = M = 0$. Συνεπώς, αν $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και $\mathbf{\Phi}$ η παραμέτρηση, έχουμε

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Phi}_{uu} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Phi}_{vv} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Phi}_{uv} = 0.$$

Τώρα,

$$0 = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Phi}_u)_u = \mathbf{n}_u\cdot\mathbf{\Phi}_u + \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Phi}_{uu} = \mathbf{n}_u\cdot\mathbf{\Phi}_u.$$

Επειδή $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$, είναι $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_u = 0$ και άρα $\mathbf{n}_u = \lambda\mathbf{\Phi}_u + \mu\mathbf{\Phi}_v$. Λόγω της παραπάνω σχέσης, $\lambda = 0$ και $\mathbf{n}_u = \mu\mathbf{\Phi}_v$. Όμως, από την $0 = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Phi}_v)_u$ παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι $\mathbf{n}_u\cdot\mathbf{\Phi}_v = 0$ και άρα $\mu = 0$, οπότε $\mathbf{n}_u = \mathbf{0}$. Εργαζόμενοι/ες αναλόγως, δείξτε ότι και $\mathbf{n}_v = \mathbf{0}$ για να συμπεράνετε ότι αν η παραμέτρηση είναι ορισμένη σε συνεκτικό σύνολο, τότε το $\mathbf{n}$ είναι σταθερό καί άρα η $\mathbf{\Phi}$ παραμετρά τμήμα επιπέδου).