

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ



ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ

---

Μαθηματικά Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις

---

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

# Πρόλογος

Οι πρόχειρες αυτές σημειώσεις απευθύνονται στους πρωτοετείς φοιτητές και τις φοιτήτριες του Τμήματος Χημικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και αφορούν στο σύνολο της ύλης που δίδαξα κατά τα χειμερινά εξάμηνα των Ακαδημαϊκών Ετών 2017-18 και 2019-20, αντίστοιχα. Εδώ καλύπτεται ένα μεγάλο μέρος του Λογισμού μίας και περισσότερων μεταβλητών, έτσι ώστε οι έννοιες να παρουσιάζονται με τον απλούστερο τρόπο, αλλά όχι εις βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας. Κατά ένα μεγάλο μέρος, οι σημειώσεις αυτές βασίζονται στο βιβλίο *Mathematics for Chemists* του D.M. Hirst, εκδόσεις MacMillan, 1976.

Ηράκλειο Κρήτης  
Νοέμβριος 2019



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Ανασκόπηση βασικών εννοιών</b>	<b>1</b>
1.1	Συναρτήσεις . . . . .	1
1.1.1	Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων . . . . .	2
1.1.2	Διάφοροι τύποι συναρτήσεων . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Διαφορικός λογισμός μίας μεταβλητής</b>	<b>17</b>
2.1	Όρια . . . . .	17
2.2	Συνέχεια . . . . .	20
2.3	Παραγωγή . . . . .	21
2.4	Κανόνες παραγωγής . . . . .	23
2.4.1	Παράγωγοι δυνάμεων του $x$ . . . . .	23
2.4.2	Παράγωγοι αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου . . . . .	23
2.4.3	Κανόνας της αλυσίδας . . . . .	24
2.4.4	Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	24
2.4.5	Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης . . . . .	25
2.4.6	Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης . . . . .	25
2.4.7	Παράγωγος της $a^x$ . . . . .	26
2.4.8	Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων . . . . .	27
2.4.9	Παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης . . . . .	27
2.5	Παράγωγοι υψηλότερης τάξης . . . . .	28
2.6	Εφαρμογές της παραγωγής . . . . .	28
2.6.1	Ρυθμός μεταβολής . . . . .	28
2.6.2	Μέγιστα και ελάχιστα, σημεία καμπής . . . . .	29
2.6.3	Σχεδίαση καμπύλης . . . . .	33
2.6.4	Διαφορικά . . . . .	35
2.7	Παραγωγή πεπλεγμένων συναρτήσεων . . . . .	37
2.8	Ασκήσεις . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Ολοκληρωτικός λογισμός μίας μεταβλητής</b>	<b>41</b>
3.1	Το άοριστο ολοκλήρωμα . . . . .	41
3.2	Μέθοδοι ολοκλήρωσης . . . . .	42
3.2.1	Στοιχειώδη ολοκληρώματα . . . . .	42
3.2.2	Μέθοδος αντικατάστασης . . . . .	43
3.2.3	Μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες . . . . .	46
3.2.4	Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων . . . . .	49
3.3	Το ορισμένο ολοκλήρωμα . . . . .	53
3.3.1	Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως άθροιση . . . . .	53
3.3.2	Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος . . . . .	54



3.4	Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος . . . . .	57
3.4.1	Εμβαδόν χωρίου . . . . .	57
3.4.2	Εμβαδόν χωρίου μεταξύ δύο καμπυλών . . . . .	59
3.4.3	Μήκος τόξου . . . . .	59
3.4.4	Όγκοι στερεών από περιστροφή . . . . .	61
3.4.5	Έργο παραγόμενο από δύναμη . . . . .	62
3.4.6	Κέντρο μάζας . . . . .	63
3.5	Ασκήσεις . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Σειρές</b>	<b>69</b>
4.1	Σειρές Taylor . . . . .	69
4.1.1	Αναπτύγματα Taylor στοιχειωδών συναρτήσεων . . . . .	70
4.1.2	Παραδείγματα και εφαρμογές . . . . .	71
4.2	Σειρές Fourier . . . . .	74
4.3	Ασκήσεις . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών</b>	<b>79</b>
5.1	Διανυσματική άλγεβρα . . . . .	79
5.1.1	Διανύσματα . . . . .	79
5.1.2	Εσωτερικό γινόμενο . . . . .	81
5.1.3	Ευθείες και επίπεδα . . . . .	82
5.1.4	Παραγωγίσιμες καμπύλες . . . . .	87
5.2	Παραγωγή συναρτήσεων πολλών μεταβλητών . . . . .	89
5.2.1	Εφαπτόμενο επίπεδο . . . . .	90
5.2.2	Ορισμός της παραγώγου . . . . .	91
5.2.3	Μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης . . . . .	92
5.2.4	Παράγωγος διανυσματικών συναρτήσεων . . . . .	93
5.2.5	Διανυσματικά πεδία . . . . .	94
5.2.6	Περιπτώσεις του κανόνα της αλυσίδας . . . . .	96
5.2.7	Πολικές συντεταγμένες . . . . .	97
5.2.8	Κυλινδρικές συντεταγμένες . . . . .	99
5.2.9	Σφαιρικές συντεταγμένες . . . . .	99
5.2.10	Διαφορικό συνάρτησης . . . . .	100
5.2.11	Διαφορικά και πεπλεγμένες συναρτήσεις . . . . .	103
5.2.12	Ολοκληρωτικές καμπύλες, πεδία κλίσεων . . . . .	105
5.3	Ασκήσεις . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Ολοκληρωτικός λογισμός πολλών μεταβλητών</b>	<b>113</b>
6.1	Πολλαπλή ολοκλήρωση . . . . .	113
6.2	Το Θεώρημα Fubini . . . . .	115
6.2.1	Το Θεώρημα Fubini για ορθογώνια . . . . .	115
6.2.2	Το Θεώρημα Fubini για γενικότερα χωρία . . . . .	118
6.3	Εφαρμογές των πολλαπλών ολοκληρωμάτων . . . . .	122
6.3.1	Εμβαδά και όγκοι . . . . .	122
6.4	Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής . . . . .	125
6.4.1	Πολικές συντεταγμένες και διπλά ολοκληρώματα . . . . .	125
6.4.2	Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής για διπλά ολοκληρώματα . . . . .	126
6.4.3	Κυλινδρικές συντεταγμένες και τριπλά ολοκληρώματα . . . . .	127
6.4.4	Σφαιρικές συντεταγμένες και τριπλά ολοκληρώματα . . . . .	128

6.5	Ασκήσεις . . . . .	129
<b>7</b>	<b>Επικαμπύλια ολοκληρώματα και το Θεώρημα Green</b>	<b>133</b>
7.1	Επικαμπύλια ολοκληρώματα . . . . .	133
7.1.1	Θεμελιώδες θεώρημα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων . . . . .	136
7.1.2	Διατήρηση της ενέργειας . . . . .	137
7.2	Το Θεώρημα του Green . . . . .	139
7.2.1	Το Θεώρημα απόκλισης στο επίπεδο . . . . .	141
7.3	Ασκήσεις . . . . .	141
<b>8</b>	<b>Επιφανειακά ολοκληρώματα, Stokes και Gauss</b>	<b>145</b>
8.1	Επιφάνειες . . . . .	145
8.2	Επιφανειακά ολοκληρώματα . . . . .	147
8.3	Το Θεώρημα του Stokes . . . . .	151
8.4	Το Θεώρημα απόκλισης του Gauss . . . . .	153
8.5	Ασκήσεις . . . . .	154



# Κεφάλαιο 1

## Ανασκόπηση βασικών εννοιών

### 1.1 Συναρτήσεις

Αν και είμαστε εξοικειωμένοι με την έννοια της συνάρτησης από το σχολείο, θα την επαναλάβουμε εδώ καθώς είναι θεμελιώδης για ό,τι ακολουθεί.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η μεταβλητή  $x$  λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο  $A$  και η μεταβλητή  $y$  λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο  $B$ . Λέμε ότι η  $y$  είναι συνάρτηση του  $x$  και γράφουμε

$$y = y(x) \quad \text{ή} \quad y = f(x),$$

αν σε κάθε  $x_1$  του  $A$  αντιστοιχίζεται **ένα και μόνο**  $y_1$  του  $B$ :

$$x_1 \mapsto y_1.$$

Λόγου χάρη, αν

$$y = 2x^2 + x + 1,$$

τότε για  $x = 1$ ,  $y = 4$ , για  $x = 2$ ,  $y = 11$  κ.ο.κ. Η  $x$  καλείται ανεξάρτητη μεταβλητή (γιατί επιλέγουμε μια τιμή του  $x$  και κατόπιν την αντιστοιχούμε σε μία τιμή του  $y$ ). Το  $y$  ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις όταν θέλουμε να εκφράσουμε ένα φυσικό φαινόμενο με ποσοτικό τρόπο. Για παράδειγμα, όταν μία ουσία  $A$  μειώνεται μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης,<sup>1</sup> η συγκέντρωση  $a$  στον χρόνο  $t$  της ουσίας δίνεται από την

$$a = a(t) = a_0 e^{-kt},$$

όπου  $a_0$  είναι η αρχική συγκέντρωση της ουσίας και  $k$  είναι μία σταθερά.

---

<sup>1</sup>Θα δούμε αργότερα ότι τέτοιου είδους εξισώσεις είναι της μορφής

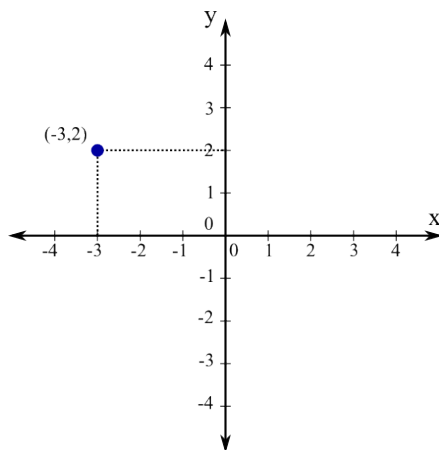
$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

όπου  $F(x, y)$  είναι συνάρτηση των  $x$  και της άγνωστης  $y$  και  $dy/dx$  είναι η πρώτη παράγωγος της  $y$ . Στο παραπάνω παράδειγμα, η  $a$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{da}{dt} = -ka.$$

### 1.1.1 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

Ο ευκολότερος αλλά και βολικότερος τρόπος για να παραστήσουμε μία συνάρτηση είναι μέσω του γραφήματός της. Έχουμε ένα σύστημα καθέτων αξόνων, τον άξονα των  $x$  και τον άξονα των  $y$  που τέμνονται στην αρχή  $O$ . Κάθε σημείο  $P_1$  του επιπέδου καθορίζεται από δύο αριθμούς  $x_1, y_1$  επάνω στους άξονες των  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, όπως στο σχήμα: εδώ  $P_1(x_1, y_1) = (-3, 2)$ .



Συντεταγμένες σημείου

Γράφουμε τότε

$$P_1 = P_1(x_1, y_1)$$

και το ζεύγος  $(x_1, y_1)$  καλείται *συντεταγμένες* του  $P_1$ . Το  $x_1$  είναι η *τετμημένη* του  $P_1$  και το  $y_1$  είναι η *τεταγμένη* του  $P_1$ .

Όταν έχουμε μία συνάρτηση  $y = f(x)$ , το σύνολο

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x))\},$$

καλείται *γράφημα* της  $f$ . Αποτυπώνουμε τα σημεία του  $\text{Gr}(f)$  στο σύστημα αξόνων μας και παίρνουμε μία *καμπύλη*<sup>2</sup> που είναι η *γραφική παράσταση* της  $f$ .

### 1.1.2 Διάφοροι τύποι συναρτήσεων

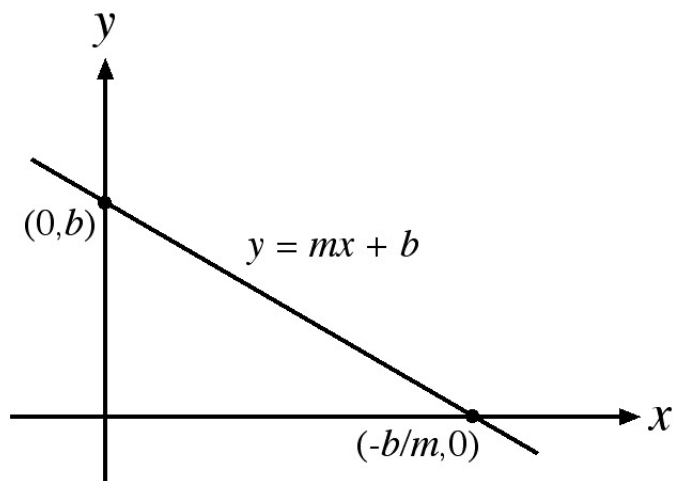
**Αφφινική συνάρτηση.**

Αυτή έχει τύπο

$$y = mx + b,$$

και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία.

<sup>2</sup>Συνήθως, λέγοντας καμπύλη μας έρχεται στο νου ένα σχήμα που είναι κάπως λείο. Στην πραγματικότητα, μία γραφική παράσταση συνάρτησης μπορεί να είναι ένα πολύ μπερδεμένο σχήμα.



Η γραφική παράσταση της αφηνικής συνάρτησης είναι ευθεία

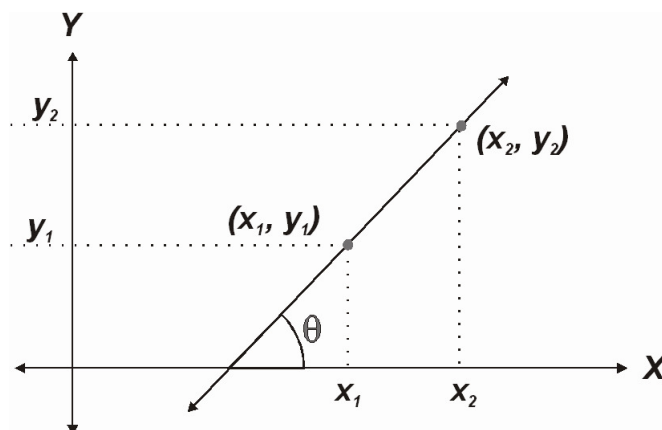
Τέμνει τους άξονες των  $x$  και  $y$  αντίστοιχα στα σημεία

$$\left(-\frac{b}{m}, 0\right) \text{ και } (0, b).$$

Η κλίση της  $y$  ορίζεται από την

$$\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \tan \theta$$

και προφανώς δεν εξαρτάται από την επιλογή των σημείων  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ .



Κλίση ευθείας

Οι αφηνικές συναρτήσεις είναι σημαντικές στην ανάλυση των χημικών δεδομένων διότι χαρακτηρίζονται από τις δύο παραμέτρους  $m$  και  $b$ . Επίσης, είναι οι πιο εύκολα αναγνωρίσιμες συναρτήσεις, με την έννοια ότι για ένα απολύτως τυχαίο σύνολο σημείων είναι ιδιαίτερα δύσκολο να αναγνωρίσουμε σε ποια καμπύλη ανήκει. Όταν είναι δυνατόν, προσπαθούμε να μετατρέψουμε μία συνάρτηση σε αφηνική: για παράδειγμα, η μεταβολή της σταθεράς ισορροπίας  $K$  με τη θερμοκρασία  $T$  δίνεται από τη σχέση

$$\ln K = -\frac{\Delta H^0}{RT} + c,$$

όταν η αντίδραση θερμότητας  $\Delta H^0$  δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία  $T$ . Εδώ, η  $R$  είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το αέριο και η  $c$  είναι μία άλλη σταθερά. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι κάπως σύνθετη. Όμως, αν θέσουμε

$$\ln K = K', \quad T' = \frac{1}{T},$$

παίρνουμε την αφηνική

$$K' = -\frac{\Delta H^0}{R}T' + c,$$

η οποία σχεδιάζεται εύκολα. Παρατηρούμε δε ότι η κλίση της ευθείας είναι  $-\frac{\Delta H^0}{R}$ , απ' όπου μπορούμε να πάρουμε την αντίδραση θερμότητας  $\Delta H^0$ .

### Τετραγωνική συνάρτηση.

Αυτή έχει τύπο

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

και η γραφική της παράσταση είναι μία παραβολή. Η παραβολή αυτή τέμνει τον άξονα των  $y$  στο σημείο  $(0, c)$ . Όσο για την τομή της με τον άξονα των  $x$ , έχουμε ότι (δείτε το σχήμα):

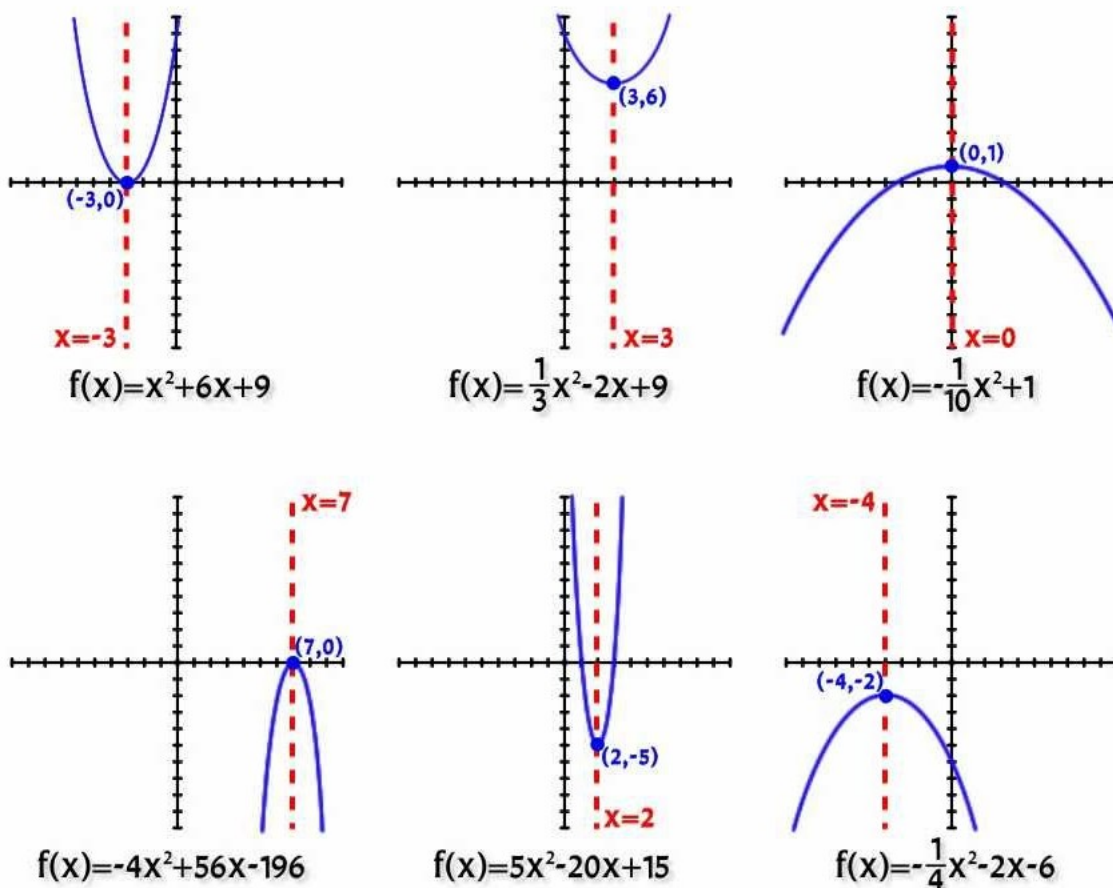
- Εάν  $D = b^2 - 4ac > 0$ , τότε τον τέμνει στα σημεία  $(x_1, 0)$  και  $(x_2, 0)$ , όπου

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Εάν  $D = 0$ , τότε εφάπτεται στον άξονα των  $x$  στο σημείο  $(x_{12}, 0)$ , όπου

$$x_{12} = -\frac{b}{2a}.$$

- Εάν  $D < 0$  τότε δεν τέμνει τον άξονα των  $x$ .



Γραφικές παραστάσεις τετραγωνικών συναρτήσεων (παραβολές) διαφόρων ειδών

**Σχόλιο 1.1.1. Μονότιμες και πλειότιμες συναρτήσεις.** Με τον τρόπο που δώσαμε τον ορισμό της συνάρτησης, όταν  $y = y(x)$ , τότε για κάθε  $x_1$  από τα  $x$  αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα  $y_1$  από τα  $y$ . Ορίσαμε δηλαδή αυτό που στα Μαθηματικά καλούμε *μονότιμη* συνάρτηση. Γραφικά, αυτό μπορούμε να το φανταστούμε και ως εξής: Κάθε κάθετη ευθεία στον άξονα των  $x$  τέμνει το πού μία φορά την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Γιατί είναι σημαντικές οι μονότιμες συναρτήσεις; Μεταξύ άλλων, στην Κβαντομηχανική απαιτούμε από τις συναρτήσεις κύματος να ορίζονται μονότιμα.

Από την άλλη μεριά, οι πλειότιμες συναρτήσεις προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τη φράση *ένα και μόνο ένα* στον ορισμό της μονότιμης συνάρτησης. Παραδείγματα πλειοτίμων συναρτήσεων είναι οι

$$y^2 = x, \quad y^4 = x.$$

### Πολυωνυμική συνάρτηση.

Μια πολυωνυμική συνάρτηση ( $n$  βαθμού) έχει τύπο

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

**Σχόλιο 1.1.2. Πεδία ορισμού.** Στα προηγούμενα παραδείγματα συναρτήσεων, το  $x$  έπαιρνε κάθε τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ . Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε. Ας πούμε, για να



ορίζεται καλώς η

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}},$$

θα πρέπει  $x^2 - 16 > 0$ . Συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι το

$$(-\infty, -4) \cup (4, +\infty).$$

**Σχόλιο 1.1.3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.** Στη Χημεία, όπως και αλλού, συχνά μία ποσότητα εξαρτάται από δύο ή και περισσότερες μεταβλητές. Λόγου χάρη, η πίεση  $P$  ενός αερίου εξαρτάται από τον όγκο  $V$ , τη θερμοκρασία  $T$  και τον αριθμό των moles  $n$ . Σε ένα ιδανικό αέριο, η καταστατική εξίσωση είναι η

$$P = P(V, T, n) = \frac{nRT}{V},$$

όπου  $R$  είναι η σταθερά του αερίου.

**Σχόλιο 1.1.4. Πεπλεγμένες συναρτήσεις.** Ας γράψουμε τον τύπο της πίεσης ως

$$V = \frac{nRT}{P}.$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε επακριβώς να εκφράσουμε το  $V$  ως συνάρτηση  $V = V(n, T, P)$ . Τούτο δεν είναι πάντοτε δυνατόν. Ας δούμε την καταστατική εξίσωση *Van der Waals*

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \quad a, b, \text{ σταθερές.} \quad (1.1)$$

Εάν σε αυτήν την περίπτωση προσπαθήσουμε να λύσουμε ως προς  $V$ , μάλλον δε θα τα καταφέρουμε. Εάν όμως επιθυμούμε να θεωρούμε τον όγκο  $V$  ως  $V(P, T, n)$ , τότε θα καλούμε τη  $V$  *πεπλεγμένη συνάρτηση των  $P, T, n$* .

**Άρτιες και περιττές συναρτήσεις.**

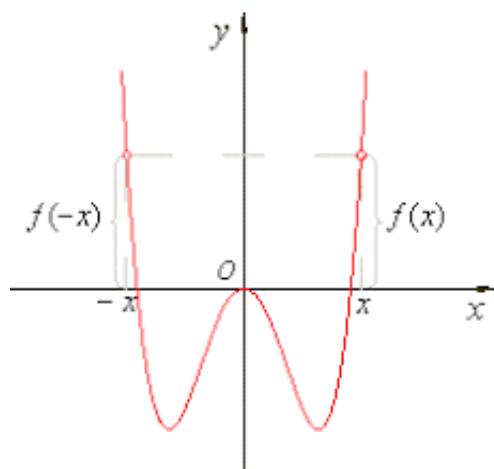
Μία συνάρτηση  $y = f(x)$  λέγεται *άρτια* αν

$$f(x) = f(-x)$$

για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της. Η  $y = f(x)$  λέγεται *περιττή* αν

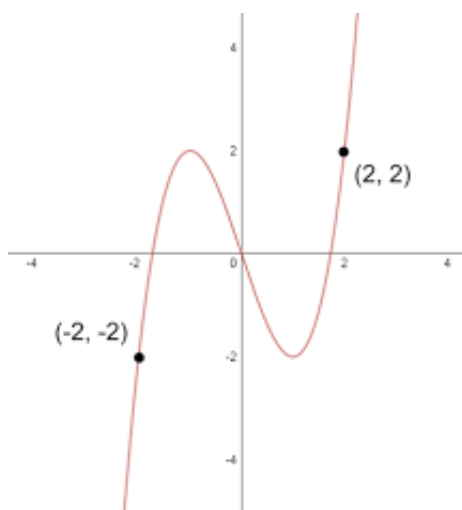
$$f(x) = -f(-x)$$

για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της. Οι άρτιες και οι περιττές συναρτήσεις συνδέονται αντίστοιχα με τις έννοιες της *συμμετρίας ως προς άξονα* και της *συμμετρίας ως προς σημείο*. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των  $y$



Άρτια συνάρτηση

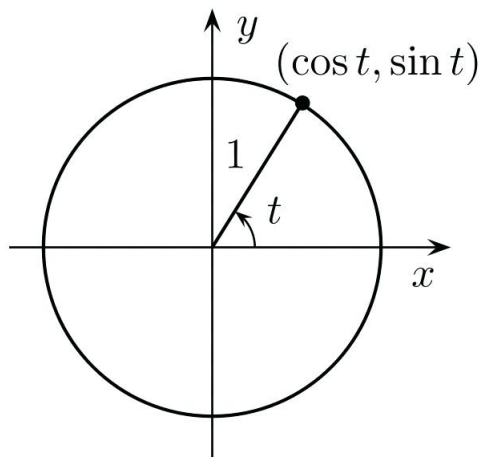
ενώ η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.



Περιττή συνάρτηση

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Θυμόμαστε ότι το ακτίνιο (rad) είναι μέτρο γωνίας. Όπως στο σχήμα,



Τριγωνομετρικός κύκλος

$$t = \text{srad}$$

όπου  $s$  είναι το μήκος τόξου. Έχουμε ότι  $360^\circ = 2\pi \text{rad}$  και γενικά

$$\mu \text{ μοίρες} = \frac{\pi}{180} \text{rad.}$$

Ως γνωστόν,

$$\sin t = y, \quad \cos t = x, \quad \tan t = \frac{y}{x},$$

είναι το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη του  $\theta$ , αντίστοιχα. Για τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών ισχύει ο κανόνας ΟΗΕΣ:

- Στο πρώτο τεταρτημόριο όλα είναι θετικά.
- Στο δεύτερο τεταρτημόριο το ημίτονο είναι θετικό.
- Στο τρίτο τεταρτημόριο η εφαπτομένη είναι θετική.
- Στο τέταρτο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό.

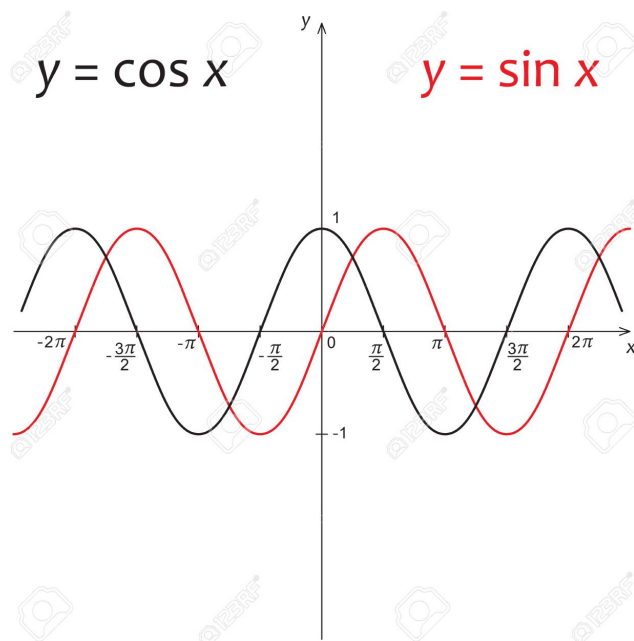
Ως συναρτήσεις, οι  $\sin x$ ,  $\cos x$  ορίζονται σε όλο το  $\mathbb{R}$  μέσω της περιοδικότητάς τους:

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε ένα τμήμα τους ορισμένο σε διάστημα μήκους  $2\pi$ , τότε επαναλαμβάνοντας παντού αυτό το τμήμα παίρνουμε τις πλήρεις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Τα παρακάτω ισχύουν:

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1.$$

Η ημιτονοειδής και η συνημιτονοειδής συνάρτηση περιγράφουν συστήματα ταλαντώσεων όπως η κυματική κίνηση, η απλή αρμονική κίνηση, κ.ά.

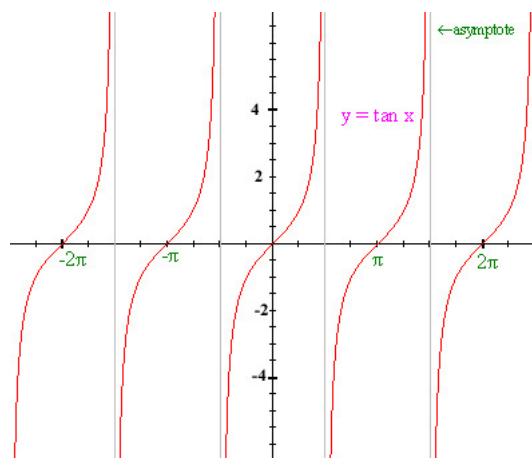


Η  $y = \sin x$  και η  $y = \cos x$

Η συνάρτηση  $\tan x$  δεν ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Επειδή

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

και η  $\cos x$  μηδενίζεται σε όλα τα  $2k\pi \pm \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , το πεδίο ορισμού της  $\tan x$  είναι όλο το  $\mathbb{R}$  εκτός από αυτά τα σημεία. Στο σχήμα φαίνεται η  $\tan x$ :



Η  $y = \tan x$

Υπάρχουν και άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Βρείτε τα πεδία ορισμού τους!

- Η συνεφαπτομένη

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Η τέμνουσα

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

- Η συντέμνουσα

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Θυμόμαστε από το σχολείο διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους.

- Της αντίθετης γωνίας:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

- Της παραπληρωματικής γωνίας:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

- Της συμπληρωματικής γωνίας:

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x, \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x, \quad \tan(\pi/2 - x) = \cot x.$$

- Τον θεμελιώδη νόμο της τριγωνομετρίας:<sup>4</sup>

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

- Τους τύπους αθροισμάτων-διαφορών:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

- Τους τύπους του διπλασίου τόξου:

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

Χρήσιμοι τέλος είναι και οι τύποι:

$$2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a + b) - \cos(a - b),$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

<sup>4</sup>Ουσιαστικά πρόκειται περί του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

**Η εκθετική συνάρτηση.**

Ένας τρόπος να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση  $\exp(x)$  είναι μέσω της άπειρης σειράς<sup>5</sup>

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Εδώ το  $n!$  ( $n$  παραγοντικό) ορίζεται για κάθε φυσικό  $n$  ως  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ . Η εκθετική συνάρτηση είναι η μοναδική με την ιδιότητα: ο ρυθμός μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  είναι  $y$ .<sup>6</sup>

Η εκθετική συνάρτηση περιγράφει διάφορα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου όπως τη ραδιενεργή μείωση, την αύξηση του πληθυσμού βακτηρίων (νόμος του Malthus), την κατανομή σωματιδίων όπως αυτή εξαρτάται από τα επίπεδα ενέργειας και τη θερμοκρασία, κ.ά. Ως προς το τελευταίο παράδειγμα, έστω ότι έχουμε  $N$  σωματίδια και ας συμβολίσουμε με  $N_i$  των αριθμό εκείνων των σωματιδίων που βρίσκονται σε επίπεδο με ενέργεια  $E_i$ . Αν  $T$  είναι η θερμοκρασία, τότε η κατανομή Boltzmann μας λέει ότι

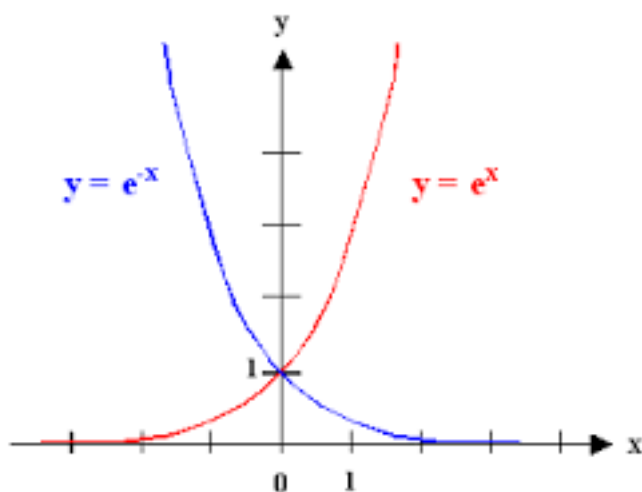
$$\frac{N_i}{N} = \frac{\exp(-E_i/(kT))}{\sum_i \exp(-E_i/(kT))},$$

όπου  $k$  είναι η σταθερά Boltzmann.

Θα θεωρούμε γνωστά τα παρακάτω:

- $\exp(0) = 1$ .
- $\exp(1) = e \sim 2.71$ , η βάση των Νεπερείων λογαρίθμων.
- $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$ .
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ .

Θα γράφουμε επίσης και  $y = \exp(x) = e^x$ . Στο σχήμα βρίσκονται οι γραφικές παραστάσεις των  $e^x$  και  $e^{-x}$ .



Η  $y = e^x$  και η  $y = e^{-x}$

<sup>5</sup>Τέτοιες σειρές λέγονται *σειρές Taylor* και θα τις εξετάσουμε αναλυτικότερα παρακάτω.

<sup>6</sup>Θα δούμε παρακάτω ότι αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος της  $\exp$  είναι ο εαυτός της.

Μπορούμε να ορίσουμε και την συνάρτηση  $y = a^x$  για κάθε  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Η συνάρτηση αυτή έχει τις ίδιες ιδιότητες με την  $\exp(x)$ . Όσο για την γραφική της παράσταση, ομοιάζει με της  $e^x$  αν  $a > 1$  και με της  $e^{-x}$  αν  $a \in (0, 1)$ .

### Υπερβολικές συναρτήσεις.

Κατασκευάζονται από την  $\exp(x)$ :

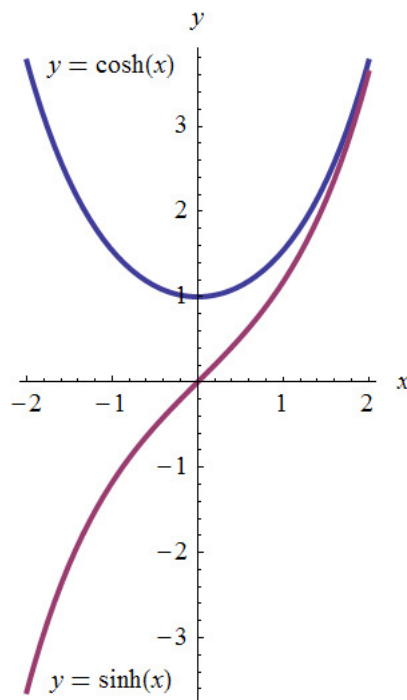
- Το υπερβολικό συνημίτονο:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Το υπερβολικό ημίτονο:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Προσέξτε ότι σε αντίθεση με την συνήθη συνημιτονοειδή και ημιτονοειδή, αυτές δεν είναι περιοδικές συναρτήσεις. Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι όπως παρακάτω (η  $\cosh x$  είναι άρτια και η  $\sinh x$  είναι περιττή).



Η  $y = \cosh x$  και η  $y = \sinh x$

Έχουμε τον βασικό νόμο

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

και μπορούμε να ορίσουμε σε αναλογία με τις συνήθεις τριγωνομετρικές, τις συναρτήσεις υπερβολικής εφαπτομένης  $\tanh x$ , υπερβολικής συνεφαπτομένης  $\coth x$ , υπερβολικής τέμνουσας  $\operatorname{sech} x$  και υπερβολικής συντέμνουσας  $\operatorname{cosech} x$ .

**Αντίστροφες συναρτήσεις.**

Η απλή αφορμική συνάρτηση  $y = 5x + 1$  λύνεται ως προς  $x$ :

$$x = \frac{y-1}{5}.$$

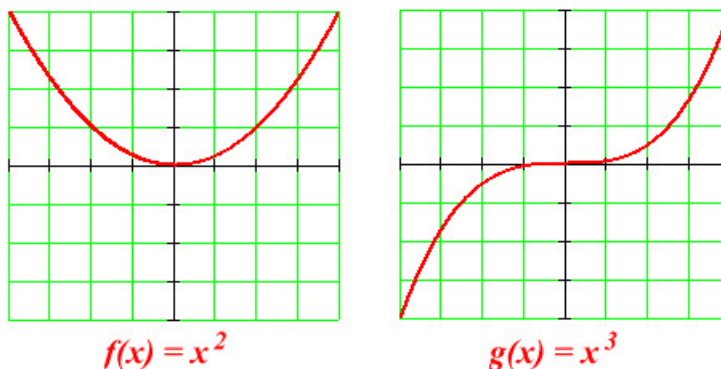
Η  $x$  είναι τότε η *αντίστροφη* της  $y$ . Προφανώς, κάτι τέτοιο δεν είναι πάντοτε δυνατόν για τυχαία  $y = f(x)$ , παρά μόνο αν η  $y$  είναι 1-1:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \implies y_1 \neq y_2.$$

Τότε, η  $y = f(x)$  λέγεται *αντιστρέψιμη* και η *αντίστροφη*  $f^{-1}$  της  $f$  δίνεται από τον τύπο

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Σχηματικά αυτό σημαίνει πως κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα των  $x$  τέμνει το γράφημα της  $y = f(x)$  το πολύ σε ένα σημείο. Η  $f(x) = x^2$  και η  $g(x) = x^3$  είναι κλασικά παραδείγματα μη αντιστρέψιμης και αντιστρέψιμης συνάρτησης, αντίστοιχα.

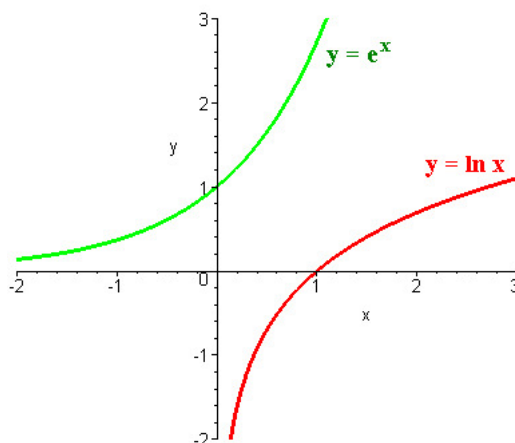


Αντιστρέψιμη (δεξιά) και μη αντιστρέψιμη (αριστερά) συνάρτηση

Η συνάρτηση του κανονικού λογαρίθμου  $y = \ln x$  ορίζεται ως η αντίστροφη της εκθετικής  $\exp$ :

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

Η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα:





$$\text{Η } y = \ln x$$

Έχουμε τις ιδιότητες για  $x, x_1, x_2$  θετικά και  $n$  πραγματικό:

- $\ln(1) = 0$ .
- $\ln(e) = 1$ .
- $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ .
- $\ln(x_1/x_2) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$ .
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$ .

Σε πλήρη αναλογία με την  $\ln$  ορίζεται και η  $\log_a$  (λογαριθμική με βάση  $a$ ) ως η αντίστροφη της  $a^x$ :

$$y = \log_a x \iff x = a^y.$$

Η συνάρτηση του δεκαδικού λογαρίθμου  $\log_{10} x$  θα συμβολίζεται απλά με  $\log x$ . Οι δεκαδικοί λογάριθμοι βρίσκουν στη Χημεία εφαρμογή για παράδειγμα στο

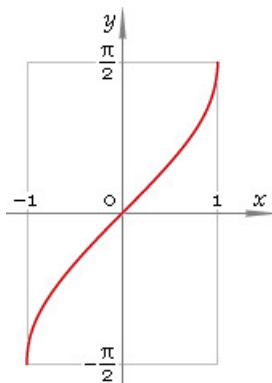
$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+],$$

όπου  $[\text{H}^+]$  είναι η συγκέντρωση των ιόντων υδρογόνου.

Τέλος σημειώνουμε ότι μπορούμε να περνάμε από τη μία λογαριθμική συνάρτηση στην άλλη, χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής βάσης

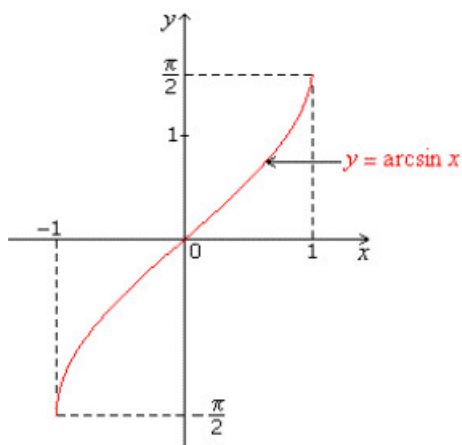
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Εάν θέλουμε να θεωρήσουμε τις αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τότε θα πρέπει κατ' αρχάς να τις περιορίσουμε στα τμήματα εκείνα του πεδίου ορισμού τους στα οποία είναι 1-1. Έτσι, περιορίζοντας την  $\sin x$  στο  $[-\pi/2, \pi/2]$  παίρνουμε την αντίστροφή της  $\arcsin x$  (τόξο ημιτόνου),  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ .



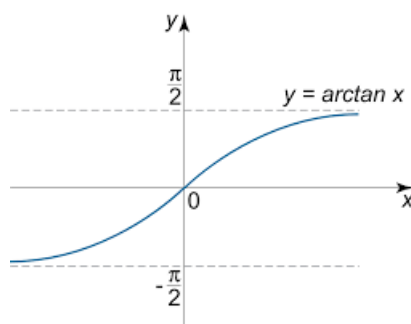
$$\text{Η } y = \arcsin x$$

Παρομοίως, περιορίζοντας την  $\cos x$  στο  $[0, \pi]$  παίρνουμε την αντίστροφή της  $\arccos x$  (τόξο συνημιτόνου),  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .



Η  $y = \arcsin x$

Για την αντίστροφη της  $\tan x$ , την περιορίζουμε πρώτα στο  $(-\pi/2, \pi/2)$  και παίρνουμε την αντίστροφη της  $\arctan x$  (τόξο εφαπτομένης),  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ .



Η  $y = \arctan x$

## Ασκήσεις

1. Βρείτε τις κλίσεις των ευθειών που περνούν αντίστοιχα από τα σημεία:

- i)  $(-5, 1)$  και  $(3, -2)$ ,
- ii)  $(3, 2)$  και  $(11, -1)$ ,
- iii)  $(4, 2)$  και  $(8, 5)$ .

2. Σχεδιάστε σαν ευθείες (κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών) τις παρακάτω:

- i)  $y = x^2$ ,
- ii)  $y = \sqrt{x}$ ,
- iii)  $\ln K = \ln K_0 + A\sqrt{u}$ , όπου  $K > 0$ ,  $A$  σταθερές,
- iv)  $\ln y = \ln a + b \ln x$  όπου  $a, b$  σταθερές.

3. Θυμηθείτε τα τριώνυμα! Λύστε τις εξισώσεις:

i)  $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ,

ii)  $3x^2 + 4x - 9 = 0$ ,

iii)  $x^2 + 3x + 5 = 0$ .

4. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπους

$$\text{i) } y = \frac{x-3}{3x^2-1}, \quad \text{ii) } y = \sqrt{(x-1)(x-3)}, \quad \text{iii) } y = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)(x-2)}.$$

5. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές;

i)  $y = x^3 + 6x$ ,

ii)  $y = \tan(x)$ ,

iii)  $y = x \sin(x)$ ,

iv)  $y = \arcsin(x)$ .

6. Εκφράστε τις παρακάτω ποσότητες με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

i)  $\sin(3a) \cdot \cos(3a)$ ,

ii)  $\sin(2a) \cdot \sin(7a)$ ,

iii)  $\cos(4a) \cdot \cos(5a)$ .

7. Στη φασματοσκόπηση Raman εμφανίζεται το γινόμενο

$$\cos(2\pi\nu_k t) \cdot \cos(2\pi\nu t)$$

όπου  $\nu_k$  και  $\nu$  είναι συχνότητες. Εκφράστε την σαν άθροισμα συνημιτόνων.

8. Ένα στάσιμο κύμα είναι το άθροισμα των δύο κυμάτων

$$\psi_1(x, t) = a_0 \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right)$$

και

$$\psi_2(x, t) = a_0 \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \nu t\right)\right)$$

που ταξιδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις. Εκφράστε το άθροισμα

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$$

σαν γινόμενο μιας συνημιτονοειδούς συνάρτησης που εξαρτάται μόνο από το  $x$  και μιας συνημιτονοειδούς συνάρτησης που εξαρτάται μόνο από το  $t$ .

9. Βρείτε όπου και αν αντιστρέφονται τις αντίστροφες των

i)  $y = e^{kx+l}$ ,  $k \neq 0$

ii)  $y = x^3 + 1$ ,

iii)  $y = x^2 - 5x + 6$ .

## Κεφάλαιο 2

# Διαφορικός λογισμός μίας μεταβλητής

Η Χημεία ενδιαφέρεται για τις μεταβολές, άρα μας χρειάζεται η μέθοδος που χειρίζεται τον ρυθμό μεταβολής με ποσοτικό τρόπο.

### 2.1 Όρια

Η ιδέα είναι απλή, όσο και θεμελιώδης για τον λογισμό. Ας πάρουμε την  $y = x^2$  για τις τιμές του  $x$  κοντά στο 3 αλλά όχι για 3:

$x$	2.9	2.95	2.98	2.999	3.001	3.01
$y$	8.41	8.70	8.94	8.994	9.006	9.06

Βλέπουμε ότι καθώς το  $x$  πλησιάζει το 3 ( $x \rightarrow 3$ , το  $x$  τείνει στο 3), τόσο από τα αριστερά ( $x \rightarrow 3^-$ ) αλλά όσο και από τα δεξιά ( $x \rightarrow 3^+$ ), τότε το  $y$  πλησιάζει το 9 όσο επιθυμούμε. Αυτό γράφεται με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2.$$

Στη γενική περίπτωση, για τυχούσα  $f(x)$  γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

και διαβάζουμε ότι το όριο της  $f(x)$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  είναι  $l$ .<sup>1</sup>

Ας πάρουμε ένα μη τετριμμένο παράδειγμα. Έστω η

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Επειδή το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, αν απλώς αντικαταστήσουμε για  $x = 1$  παίρνουμε

$$\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0},$$

<sup>1</sup>Το  $x_0$  δεν ανήκει κατ' ανάγκη στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Οφείλει όμως να μπορεί να πλησιάζεται όσο περισσότερο γίνεται από σημεία του πεδίου ορισμού. Αν για παράδειγμα το πεδίο ορισμού μιας  $f$  είναι το  $(-1, 1)$ , τότε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  δεν έχει νόημα. Όμως τα  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  έχουν κατ' αρχάς νόημα, παρ' όλο που τα  $\pm 1$  δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της  $f$ .

κάτι που δεν προσδιορίζεται. Το  $\frac{0}{0}$  εντός του πλαισίου συμβολίζει ακριβώς την απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$ . Εδώ όμως, για  $x \neq 1$  έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

και συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 1 = 2.$$

Στην περίπτωση αυτή, η απροσδιοριστία *άρθηκε* και το όριο υπολογίστηκε. Γενικά, το να βρούμε το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

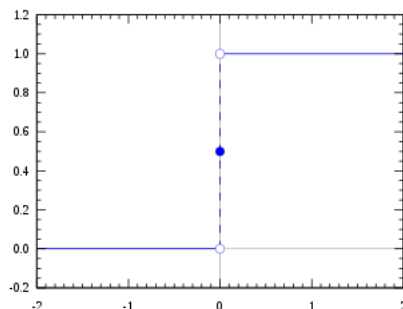
είναι εφικτό είτε α) με απευθείας αντικατάσταση του  $x$  με το  $x_0$ , είτε β) στην περίπτωση που κάτι τέτοιο μας δώσει απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$ , να προσπαθήσουμε να άρουμε την απροσδιοριστία χρησιμοποιώντας κάποιες απλές αλγεβρικές πράξεις.

Το τελευταίο όμως και πάλι δεν είναι δυνατόν όταν έχουμε ένα όριο όπως το<sup>2</sup>

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Μπορεί επίσης μία συνάρτηση να είναι όπως η

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 1/2 & x = 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$



Το αριστερό όριο είναι διαφορετικό από το δεξί: το όριο στο 0 δεν υπάρχει

Βλέπουμε τότε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Λέμε τότε ότι το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  δεν υπάρχει. Γενικά,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l.$$

Όταν υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ , τότε

<sup>2</sup> Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 1, δείτε το Παράδειγμα 4.1.6.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = lm,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = l/m, m \neq 0,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = kl, k \in \mathbb{R}.$

Ενδέχεται, να μας παρουσιαστούν απροσδιόριστες μορφές του τύπου

$$\frac{a}{0} \quad a \neq 0.$$

Τότε, αν  $a > 0$  έχουμε

$$\frac{a}{0^+} = +\infty, \quad \frac{a}{0^-} = -\infty.$$

Αν  $a < 0,$

$$\frac{a}{0^+} = -\infty, \quad \frac{a}{0^-} = +\infty.$$

Εδώ χρειάζεται λίγο προσοχή. Το να γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty,$$

δε σημαίνει ότι υπάρχει όριο. Είναι απλώς η ένδειξη συνεχούς αύξησης ή μείωσης της  $f$  κοντά στο  $x_0.$

Τέλος, αν το  $+\infty$  ή το  $-\infty$  βρίσκονται ως ανοικτά άκρα στο πεδίο ορισμού της  $f,$  μπορούμε να θεωρήσουμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \text{ή/και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Αν η  $f$  είναι πολυωνυμική,  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n.$$

Το αποτέλεσμα είναι κάποιο άπειρο, που βρίσκεται από τους κανόνες

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος,} \\ -\infty & n \text{ περιτός,} \end{cases}$$

καθώς και από τους κανόνες

$$a(+\infty) = +\infty, \quad a(-\infty) = -\infty,$$

αν  $a > 0$  ενώ

$$a(+\infty) = -\infty, \quad a(-\infty) = +\infty,$$

αν  $a < 0.$

Αν η  $f$  είναι ρητή,

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m},$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m},$$

και για να εντοπίσουμε το όριο, ακολουθούμε όλους τους κανόνες που δηλώσαμε ως τώρα.

**Σχόλιο 2.1.1.** Θα ωφεληθείτε πάρα πολύ εάν ανατρέχοντας τις γραφικές παραστάσεις των στοιχειωδών συναρτήσεων του προηγούμενου κεφαλαίου, κάνετε έναν κατάλογο με τα όριά τους. Ας πούμε βλέποντας την  $\ln x$  παίρνουμε αμέσως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Προσέξτε όμως: το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  δεν ορίζεται ούτε ως κάποιο  $\infty$ ! Παρατηρήσετε τη συνάρτηση: η αέναη ταλάντωση της τη φέρνει σε οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στο  $-1$  και στο  $1$  καθώς το  $x$  μεγαλώνει (ή μικραίνει) απεριόριστα.

## 2.2 Συνέχεια

Στο πρώτο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, είδαμε ότι για την  $y = x^2$  ισχύει

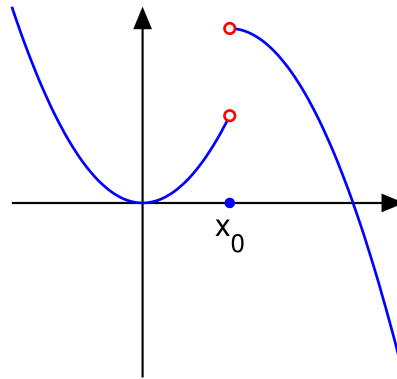
$$\lim_{x \rightarrow 3} y(x) = 9 = y(3).$$

Λέμε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι *συνεχής* στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Προσοχή!** Η έννοια της συνέχειας δεν έχει νόημα αν το  $x_0$  δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ . Έχουμε επίσης

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0).$$



Άλμα (ασυνέχεια) στο  $x_0$

Η συνέχεια μιας  $f$  στο  $x_0$  σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν κόβεται στο  $(x_0, f(x_0))$ , όπως λ.χ. στο παραπάνω σχήμα όπου έχουμε *ασυνέχεια* (άλμα) στο  $x_0$ .

Μια συνάρτηση λέγεται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, άρα μία συνεχής συνάρτηση μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού αλλά μπορεί να οριστεί κάποιο είδος ορίου, λέμε ότι υπάρχει εν γένει ασυνέχεια. Κάποιες φορές, αυτή η ασυνέχεια *αίρεται*: ας πούμε, η  $\sin x/x$  δεν ορίζεται στο  $0$ , αλλά από την άλλη είδαμε ότι ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$ . Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε την συνάρτηση αυτή στο  $0$  ως εξής: θεωρούμε τη νέα συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Η  $f$  αυτή είναι συνεχής στο 0. Βέβαια, σε άλλες περιπτώσεις κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν. Η συνάρτηση  $\ln x$  δεν μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στο 0 εφ' όσον  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν τις παρακάτω ιδιότητες: αν  $f, g$  συνεχείς στο  $x_0$  που ανήκει στο πεδίο ορισμού και των δύο, και  $k \in \mathbb{R}$ , τότε οι

$$f \pm g, \quad kf, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

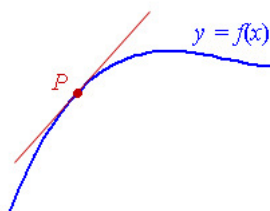
είναι συνεχείς στο  $x_0$ -η τελευταία με την προϋπόθεση  $g(x_0) \neq 0$ . Όλες οι συναρτήσεις που έχουμε δει είναι ευρέως συνεχείς. Οι όποιες ασυνεχείές τους φαίνονται στα σχήματά τους.

## 2.3 Παραγωγήιση

Θυμηθείτε την κλίση μιας ευθείας:

$$\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

όπου  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  είναι οποιαδήποτε σημεία της ευθείας. Προφανώς δεν μπορούμε να ορίσουμε κάτι παρόμοιο σε οποιαδήποτε καμπύλη. Ενδέχεται όμως να μπορούμε σε κάποιο σημείο  $P(x_0, y_0)$  να φέρουμε την εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο  $P$  και να μετρήσουμε την κλίση της.



Εφαπτομένη καμπύλης

Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι θα αποτελέσει μία ακριβή διαδικασία. Αντ' αυτού, παίρνουμε ένα σημείο  $Q_1$  της καμπύλης της  $y = f(x)$  διαφορετικό από το  $P$  και έστω  $Q_1 = Q(x_1, y_1)$ . Τότε,

$$\text{κλίση του } PQ_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

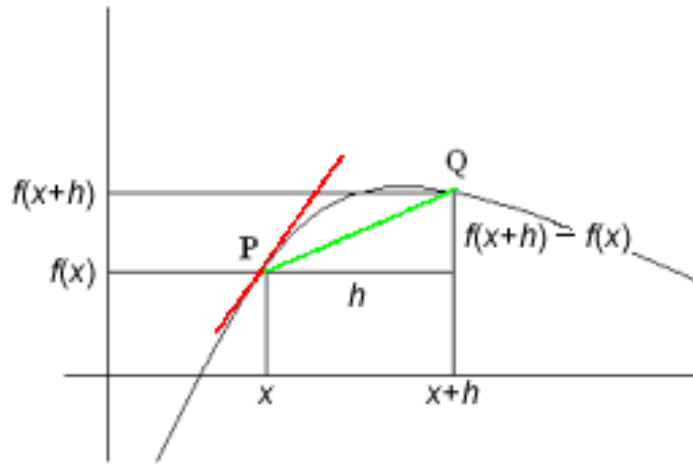
Εάν πάρουμε κάποιο άλλο σημείο  $Q_2(x_2, y_2)$  μεταξύ των  $P$  και  $Q_1$ , η κλίση του  $PQ_2$  θα είναι πιο κοντά στην κλίση της εφαπτομένης στο  $P$ . Καταλαβαίνουμε με αυτόν τον τρόπο ότι παίρνουμε βέλτιστη προσέγγιση της κλίσης της εφαπτομένης όσο πιο κοντά στο  $P$  παίρνουμε το σημείο  $Q$ . Προς τούτο λοιπόν, θεωρούμε ένα μικρό  $h$  και το σημείο της καμπύλης  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ . Η κλίση θα είναι αυτό που ονομάζεται *πηλίκο Νεύτωνα*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και η βέλτιστη προσέγγιση παίρνεται αφήνοντας το  $h \rightarrow 0$ :

$$\text{κλίση στο } P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$





Η κλίση της καμπύλης  $y = f(x)$  είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $y$  με το  $x$  στο  $x_0$ . Η σημαντική αυτή ποσότητα καλείται *παράγωγος* της  $y$  ως προς  $x$  στο  $x_0$ . Υπάρχουν διάφοροι συμβολισμοί:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Εάν για κάποια συνάρτηση  $f$  υπάρχει η παράγωγός  $f'(x_0)$  τότε η  $f$  λέγεται *παραγωγίσιμη* στο  $x_0$ . Αν αυτό συμβαίνει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε ορίζεται η συνάρτηση  $f'(x)$  (ή,  $dy/dx$ ,  $\dot{f}(x)$ ) που καλείται (πρώτη) *παράγωγος* της  $f$ .

**Σχόλιο 2.3.1.** Ενδέχεται σε κάποια καμπύλη να υπάρχει η εφαπτομένη στο  $(x_0, y_0)$ , παρ' όλα αυτά η  $y$  να μην είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Λόγου χάρη, έστω η  $y = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 0$ . Είναι για  $h > 0$

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow_{h \rightarrow 0} +\infty.$$

Σαφέστατα λοιπόν η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όμως δέχεται εφαπτομένη, την ευθεία  $x = 0$  (που έχει άπειρη κλίση).

**Σχόλιο 2.3.2.** Για συνάρτηση  $y = f(x)$  παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , η εφαπτόμενη ευθεία έχει τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ο παραπάνω τύπος δίνει την *αφηνική προσέγγιση* της  $f$  κοντά στο  $x_0$ .

Αποδεικνύεται ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $x_0$  είναι και συνεχής στο  $x_0$ . Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Προτού δώσουμε συγκεκριμένο παράδειγμα, ας σκεφτούμε ότι εφ' όσον μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη ευθεία στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  σε μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , η γραφική της παράσταση δεν μπορεί να παρουσιάζει δόντι εκεί. Τώρα λοιπόν, ας πάρουμε την

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0, \\ x & x > 0. \end{cases}$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0. (Άσκηση!)

**Σχόλιο 2.3.3.** Η έννοια της εφαπτομένης είναι κάπως διευρυμένη στις παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Λόγου χάρη, η εφαπτομένη της  $y = x^3$  στο 0 είναι η  $y = 0$  που διαπερνά τη συνάρτηση! Αν το σκεφτούμε όμως, δεν υπάρχει κατ' αρχάς τίποτα παράξενο αφού κάθε όριο ορίζεται πλευρικά και έτσι η εφαπτομένη είναι η ένωση της αριστερής και της δεξιάς εφαπτομένης.

## 2.4 Κανόνες παραγωγίσισης

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένους κανόνες παραγωγίσισης που θα μας φανούν πολύ χρήσιμοι σε ό,τι ακολουθεί:

### 2.4.1 Παράγωγοι δυνάμεων του $x$

$y$	$\frac{dy}{dx}$
$c$	$0$
$x$	$1$
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$\vdots$	$\vdots$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$nx^{n-1}$

Σημειώνουμε ότι ο τελευταίος τύπος αποδεικνύεται ότι ισχύει και για  $n \in \mathbb{R}$ .

### 2.4.2 Παράγωγοι αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου

Έστω  $f$  και  $g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις και  $k \in \mathbb{R}$ . Τότε, οι  $f \pm g$ ,  $kf$ ,  $f \cdot g$  και  $f/g$  είναι παραγωγίσιμες (η τελευταία εκεί όπου  $g \neq 0$ ) και ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

- Παράγωγος αθροίσματος:

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}.$$

- Παράγωγος βαθμωτού γινομένου:

$$\frac{d(kf)}{dx} = k \frac{df}{dx}.$$

- Παράγωγος γινομένου (κανόνας Leibniz):

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx}.$$

- Παράγωγος πηλίκου:

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

### 2.4.3 Κανόνας της αλυσίδας

Ο κανόνας της αλυσίδας μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε συνθέσεις παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα την

$$y = (x^2 + 3x + 5)^{5/2}.$$

Αν θέσουμε  $u = x^2 + 3x + 5$ , μπορούμε να γράψουμε

$$y = u^{5/2},$$

όπου η  $u$  είναι μια συνάρτηση  $g(x)$  του  $x$ . Από την άλλη, αν

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

μπορούμε να θέσουμε

$$u = g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Τέτοιου είδους καταστάσεις προκύπτουν συχνότατα και εξηγούμε τώρα πώς ο κανόνας της αλυσίδας μας βοηθά για να παραγωγίσουμε τέτοιες συναρτήσεις.

**ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ.** Αν  $y = f(u)$  και  $u = g(x)$ , τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Στα παραδείγματά μας τώρα: για το πρώτο,

$$\frac{dy}{du} = \frac{5}{2}u^{3/2}, \quad \frac{du}{dx} = 2x + 3.$$

Άρα,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}(x^2 + 3x + 5)^{3/2}(2x + 3).$$

Για το δεύτερο,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Άρα,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \left( -\frac{2}{(x-1)^2} \right) = -\frac{1}{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}.$$

### 2.4.4 Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Είναι

$y$	$\frac{dy}{dx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

και χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης παίρνετε επίσης:

$y$	$\frac{dy}{dx}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

(Άσκηση!)

### 2.4.5 Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Ας θυμηθούμε ότι

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε τη σειρά αυτή όρο προς όρο: παίρνουμε

$$\frac{d \exp(x)}{dx} = \exp(x)!$$

Αυτό είναι πολύ σημαντικό: η εκθετική συνάρτηση θα μπορούσε όντως να είχε οριστεί ως η συνάρτηση που έχει παράγωγο τον εαυτό της.

Εάν έχουμε τη συνάρτηση  $\exp f(x)$ , τότε με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{d \exp(f(x))}{dx} = \exp(f(x)) \frac{df(x)}{dx}.$$

**Άσκηση.** Δείξτε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{de^{1/x}}{dx} &= -\frac{1}{x^2} e^{1/x}, \\ \frac{de^{4x^2+2x}}{dx} &= (8x+2)e^{4x^2+2x}. \end{aligned}$$

Για  $f(x) = a$  σταθερά,

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}.$$

Το παραπάνω, παρόλη την απλότητά του, απεικονίζει τη σύνθετη μαθηματική έννοια των ιδιοσυναρτήσεων ενός τελεστή. Εδώ, τελεστής είναι το  $\frac{d}{dx}$  που δρά στη συνάρτηση  $e^{ax}$  για να δώσει την  $ae^{ax}$ , δηλαδή, την ίδια τη συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με μία σταθερά. Λέμε τότε ότι η  $e^{ax}$  είναι *ιδιοσυνάρτηση* του τελεστή  $\frac{d}{dx}$ .

### 2.4.6 Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

Αν και η παράγωγος της  $\ln x$  υπολογίζεται με τον κανόνα εύρεσης της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης, θα την υπολογίσουμε εδώ ανεξάρτητα από τον κανόνα αυτόν. Έχουμε

$$y = \ln x \iff x = e^{\ln y}.$$

Ιδίως δε,

$$x = e^{\ln x},$$

και παίρνοντας παραγώγους και στα δύο μέλη προκύπτει

$$1 = \frac{de^{\ln x}}{dx} = e^{\ln x} \frac{d \ln x}{dx} = x \frac{d \ln x}{dx}.$$

Οπότε

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Για διάφορες λογαριθμικές παραστάσεις, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\frac{d \ln(f(x))}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}.$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω έκφρασης λέγεται *λογαριθμική παράγωγος* της  $f$  και πάρα πολλές φορές είναι χρήσιμη σε υπολογισμούς παραγώγων συναρτήσεων όπως η παρακάτω:

$$y = (x - 1)^{12}(x + 1)^{50}.$$

Η παράγωγος εδώ μπορεί να υπολογιστεί με τους μέχρι τώρα γνωστούς κανόνες, αλλά η διαδικασία είναι μάλλον χρονοβόρα. Παίρνοντας λογαρίθμους,<sup>3</sup> έχουμε

$$\ln y = 12 \ln(x - 1) + 50 \ln(x + 1).$$

Παραγωγίζοντας,

$$\frac{y'}{y} = \frac{12}{x - 1} + \frac{50}{x + 1}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x - 1)^{12}(x + 1)^{50} \left( \frac{12}{x - 1} + \frac{50}{x + 1} \right) \\ &= 12(x - 1)^{11}(x + 1)^{50} + 50(x - 1)^{12}(x + 1)^{49} \\ &= 12(x^2 - 1)^{11}(x + 1)^{39} + 50(x^2 - 1)^{12}(x + 1)^{37} \\ &= (x^2 - 1)^{11}(x + 1)^{37}(12(x + 1)^2 + 50(x^2 - 1)). \end{aligned}$$

**Άσκηση.** Υπολογίστε χρησιμοποιώντας λογαριθμική παράγωγο την παράγωγο της

$$y = \frac{(3x^2 + 2x + 4)^{3/2}}{(x^4 + 5x^2 + 3x)^2(x + 1)}.$$

### 2.4.7 Παράγωγος της $a^x$

Μπορούμε πάντοτε να γράψουμε

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Οπότε,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln a.$$

<sup>3</sup>Παρατηρήστε ότι δεν παίρνουμε περιορισμούς για το αν οι λογαριθμίσιμες ποσότητες είναι θετικές, ως οφείλαμε. Αποδεικνύεται ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, σε κάθε περίπτωση.

## 2.4.8 Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων

Δείξτε ως άσκηση (και συμπληρώστε τα κενά):

$y$	$\frac{dy}{dx}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	
$\coth x$	
$\operatorname{sech} x$	
$\operatorname{cosech} x$	

## 2.4.9 Παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης

Έστω ότι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση αντιστρέφεται. Έχουμε εξ ορισμού

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Παίρνουμε παράγωγο ως προς  $y$  στο δεξί μέλος:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy}.$$

Οπότε, αν  $dy/dx \neq 0$ ,

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}.$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τον κανόνα αυτόν για να βρούμε την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης. Θα τον εφαρμόσουμε εδώ για να βρούμε την παράγωγο του τόξου ημιτόνου.

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Παραγωγίζουμε δεξιά ως προς  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d \sin y}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Αντιστρέφουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{1 - \sin^2 y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Άσκηση.** Με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω, δείξτε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \frac{d \arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \frac{d \arctan x}{dx} &= \frac{1}{1 + x^2}, \\ \frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} &= -\frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

## 2.5 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Εάν η παράγωγος  $dy/dx$  μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $y = f(x)$  είναι η ίδια παραγωγίσιμη, τότε ορίζεται η δεύτερη παράγωγος της  $f$  ως η παράγωγος της παραγώγου:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

και συμβολίζεται και με  $f''(x)$  (όπως και με  $\ddot{f}(x)$ ).

Αναλόγως, αν η δεύτερη παράγωγος είναι παραγωγίσιμη, ορίζεται η τρίτη παράγωγος της  $f$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{ή} \quad f'''(x),$$

και με την ίδια συλλογιστική ορίζεται η τέταρτη παράγωγος της  $f$

$$\frac{d^4y}{dx^4} \quad \text{ή} \quad f^{(iv)}(x),$$

και γενικότερα, η  $n$ -οστή παράγωγος της  $f$

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{ή} \quad f^n(x).$$

**Άσκηση.** Ως εφαρμογή των παραπάνω, θεωρήσετε το πολώνυμο  $n$ -βαθμού

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Τότε αφού πρώτα δείξετε ότι

$$p^{(n+1)}(x) \equiv 0,$$

κατόπιν αποδείξτε τον τύπο:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

**Σχόλιο 2.5.1. Προσοχή!** Υπάρχει κίνδυνος με τις παραγώγους υψηλότερης τάξης των αντιστρόφων. Ενώ έχουμε δει ότι

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

δεν ισχύει εν γένει ότι λ.χ.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

## 2.6 Εφαρμογές της παραγώγισης

### 2.6.1 Ρυθμός μεταβολής

Η παράγωγος συνάρτηση  $dy/dx$  μιας  $y = f(x)$  είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $y$  με το  $x$ . Άρα, η παράγωγος περιγράφει κάθε μη στάσιμο σύστημα, όπως λ.χ., τα παρακάτω:

- *Ραδιενεργή μείωση*: Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k \text{ σταθερά,}$$

είναι η εξίσωση που δίνει το ρυθμό μείωσης της ραδιενεργής ποσότητας  $x$  με τον χρόνο  $t$ .

- *Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση*: Αν η  $x = x(t)$  είναι η συνάρτηση θέσης ενός σωματιδίου που κινείται πάνω σε έναν άξονα τότε η

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

είναι η ταχύτητα του σωματιδίου και η

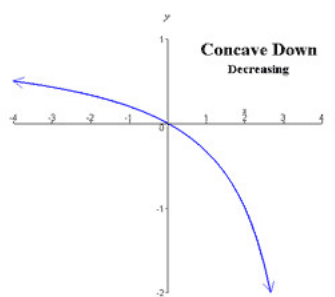
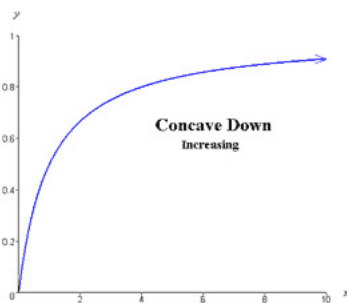
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου.

### 2.6.2 Μέγιστα και ελάχιστα, σημεία καμπής

Στην παράγραφο αυτή θα υποθέσουμε ότι η  $y = y(x)$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη δεύτερη παράγωγο και με τα παρακάτω σχήματα θα θυμηθούμε πράγματα γνωστά από το σχολείο:

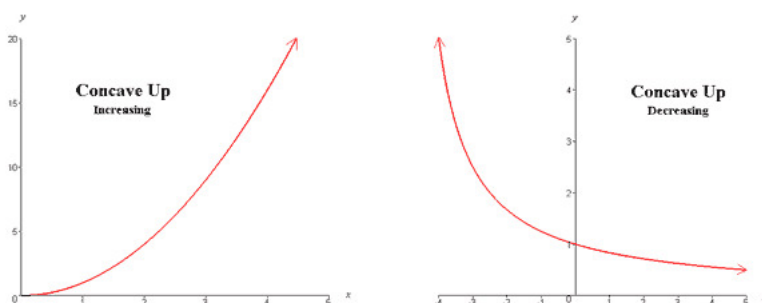
$$A. \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$



Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η  $y$  είναι *κοίλη* ( $\curvearrowright$ ), ή, ότι *στρέφει τα κοίλα άνω*. Στο αριστερό σχήμα, η  $y$  είναι *γνησίως αύξουσα* ( $\nearrow$ ) ( $dy/dx > 0$ ), ενώ στο δεξί είναι *γνησίως φθίνουσα* ( $\searrow$ ) ( $dy/dx < 0$ ).

$$B. \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$





Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η  $y$  είναι *κυρτή* ( $\curvearrowright$ ), ή, ότι *στρέφει τα κοίλα κάτω*. Στο αριστερό σχήμα, η  $y$  είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο δεξί είναι γνησίως φθίνουσα.

Στην περίπτωση όπου  $\frac{dy}{dx}(x_0) = 0$  σε κάποιο  $x_0$  του πεδίου ορισμού, τότε το  $(x_0, y_0)$  καλείται *κρίσιμο σημείο της  $y$* . Στα κρίσιμα σημεία, η εφαπτομένη ευθεία είναι πάντοτε παράλληλη με τον άξονα των  $x$ .

Εάν, το πρόσημο της παραγώγου αλλάζει *εκατέρωθεν* του  $x_0$ , τότε λέμε ότι η  $y$  παρουσιάζει *τοπικό ακρότατο* στο  $x_0$ . Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται οι δύο περιπτώσεις: α) του *τοπικού μεγίστου* (τ.μ.)

$dy/dx$	+	0	-
$y$	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$

και β) του *τοπικού ελαχίστου* (τ.ε.)

$dy/dx$	-	0	+
$y$	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$

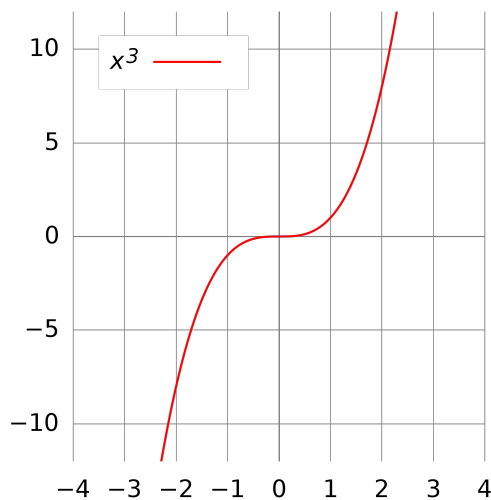
**Σχόλιο 2.6.1. Προσοχή!** Οι παραπάνω είναι και οι μόνες περιπτώσεις ύπαρξης τοπικού ακρότατου. Αν η παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο, τότε *δεν* έχουμε τοπικό ακρότατο. Επίσης, όπως μας εξασφαλίζει ένα θεώρημα του Fermat, τα δυνητικά τοπικά ακρότατα ε βρίσκονται μόνο ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία. Δεν υπάρχει κανένα νόημα να ψάχνουμε τοπικά ακρότατα σε σημεία  $x_0$  όπου δεν μηδενίζεται η παράγωγος.

Τα τοπικά ακρότατα μπορούν να εντοπιστούν και με το

**Κριτήριο της δευτέρας παραγώγου.** Έστω  $x_0$  κρίσιμο σημείο της  $y$ . Τότε, αν:

- $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) < 0$ , η  $y$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .
- $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) > 0$ , η  $y$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ .

Θυμηθείτε τώρα τη γραφική παράσταση της  $y = x^3$ .



Σημείο καμπής στο  $(0,0)$

Στο  $(0,0)$  παρουσιάζεται η ιδιομορφία όπου η εφαπτομένη διαπερνά τη γραφική παράσταση. Επίσης,  $\frac{d^2x^3}{dx^2}(0) = 0$  και η κυρτότητα αλλάζει εκατέρωθεν του 0. Έτσι λοιπόν, λέμε ότι η  $y$  παρουσιάζει σημείο καμπής στο  $x_0$  αν  $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = 0$  και το πρόσημο της δεύτερας παραγώγου αλλάζει εκατέρωθεν του  $x_0$ . Οι παρακάτω είναι οι μόνες δυνατές περιπτώσεις σημείου καμπής:

$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	0	-
$y$	↪	σημ. καμπ.	↩

και

$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	0	+
$y$	↩	σημ. καμπ.	↪

**Σχόλιο 2.6.2. Προσοχή!** Οι παραπάνω είναι και οι μόνες περιπτώσεις ύπαρξης σημείου καμπής. Αν η δεύτερη παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο, τότε δεν έχουμε σημείο καμπής. Επίσης, τα δυνητικά σημεία καμπής ευρίσκονται μόνο ανάμεσα στις ρίζες της δεύτερας παραγώγου.

**Παράδειγμα 2.6.3.** Έστω η συνάρτηση

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Είναι

$$\frac{dy}{dx} = x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} = \frac{(x-1)^3}{x^2}.$$

Η μόνη ρίζα είναι το 1 και το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται μόνο από το  $x - 1$ . Έχουμε λοιπόν ότι η  $y$  είναι

- ↩ στο  $(0,1)$  και
- ↪ στο  $(1,+\infty)$ .

Άρα παρουσιάζει τ.ε. στο 1, το  $y(1) = -3/2$ . Όσον αφορά τη δεύτερη παράγωγο, έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}.$$

Ο αριθμητής έχει ρίζα το 1. Με σχήμα Horner, έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x^3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η δεύτερη παράγωγος είναι παντού θετική στο πεδίο ορισμού της, εκτός από το 1 στο οποίο μηδενίζεται. Οπότε, δεν έχουμε σημείο καμπής το 1 και η  $y$  είναι παντού  $\curvearrowright$ .

**Παράδειγμα 2.6.4.** Η ταχύτητα μιας αυτοκαταλυτικής αντίδρασης δίνεται από την

$$v = kx(a-x),$$

όπου  $a$  είναι η αρχική συγκέντρωση του αντιδρώντος υλικού,  $x$  είναι η ποσότητα που αποσυντίθεται σε χρόνο  $t$  και  $k$  είναι μία θετική σταθερά. Η πρώτη παράγωγος

$$\frac{dv}{dx} = k(a-2x).$$

μηδενίζεται όταν  $x = a/2$ , όταν δηλαδή ήδη το μισό του υλικού έχει αποσυντεθεί. Επειδή

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -2k < 0,$$

έχουμε σύμφωνα με το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου μέγιστη αποσύνθεση στο σημείο αυτό.

**Παράδειγμα 2.6.5.** Σε σταθερή πίεση, ο όγκος  $V$  ενός γραμμαρίου νερού περιγράφεται ως συνάρτηση της θερμοκρασίας  $T$  από την

$$V(T) = a + bT + cT^2 + dT^3,$$

όπου  $a, b, c, d$   $b < 0, d > 0$ , είναι σταθερές. Η παράγωγος είναι

$$\frac{dV}{dT} = b + 2cT + 3dT^2$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{d^2V}{dT^2} = 2c + 6dT.$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ρίζα  $T_0$  της πρώτης παραγώγου, τότε

$$\frac{d^2V}{dT^2}(T_0) = 2c + 6dT_0 = \frac{cT_0 + 3dT_0^2 + 3dT_0^2}{T_0} = \frac{3dT_0^2 - b}{T_0} > 0.$$

Έχουμε λοιπόν ελαχιστοποίηση του όγκου.

### 2.6.3 Σχεδίαση καμπύλης

Είναι συχνά χρήσιμο να είμαστε σε θέση να κάνουμε ένα πρόχειρο σχέδιο μιας καμπύλης δείχνοντας τα βασικά χαρακτηριστικά της, χωρίς κατ' ανάγκη να είμαστε απόλυτα ακριβείς. Με ένα παράδειγμα, δείχνουμε τη διαδικασία. Έστω η

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}, \quad x \neq -1, -2.$$

1. Βρίσκουμε τις τιμές μηδενισμού της  $y$ , δηλαδή, τα σημεία τομής της με τον άξονα των  $x$ . Εδώ είναι  $x = 1, x = 2$ .
2. Βρίσκουμε την  $y(0)$ , δηλαδή, το σημείο τομής με τον άξονα των  $y$ . Εδώ,  $y(0) = 1$ .
3. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της  $y$  στο  $\pm\infty$ , δηλαδή, ψάχνουμε για οριζόντιες ασυμπτώτους. Εδώ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1,$$

και όντως, η  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

4. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της  $y$  στα σημεία που δεν ορίζεται. Εδώ είναι τα  $x = -1, x = -2$ . Δείτε τώρα ότι

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0}.$$

Οπότε,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0^-} = -\infty,$$

ενώ,

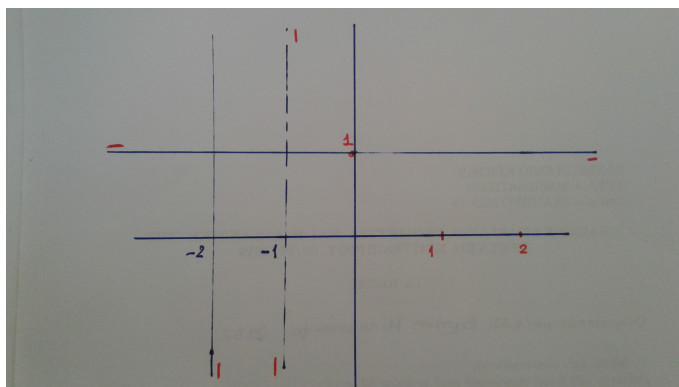
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0^+} = +\infty.$$

Δεν έχει καμμία σημασία που τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά. Σε κάθε περίπτωση, η  $x = -1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Με τον ίδιο τρόπο, μπορείτε να δείξετε ότι

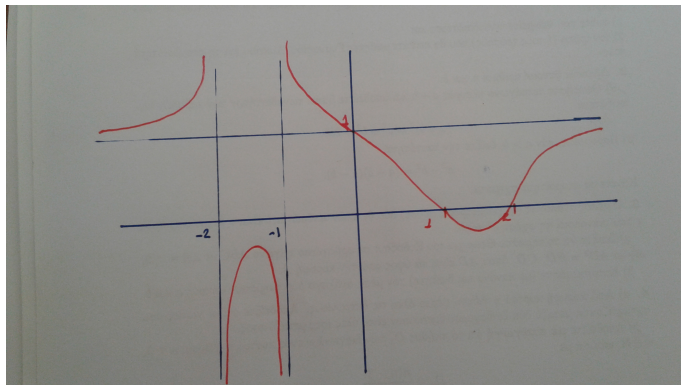
$$\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-12}{x+2} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } x \rightarrow -2^-, \\ -\infty & \text{αν } x \rightarrow -2^+. \end{cases}$$

Άρα, και η  $x = -2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Οι έως εδώ πληροφορίες για την  $y$  βρίσκονται τώρα στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε, μπορεί κανείς από τις πληροφορίες αυτές και μόνο να συμπληρώσει το σχήμα της  $y$  ως εξής:

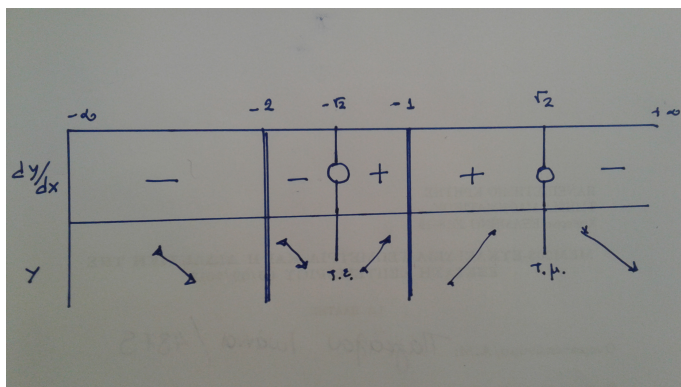


Αυτό το σχήμα είναι σχεδόν ακριβές και δείτε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά τα κριτήρια της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου. Κι αυτό γιατί τα κριτήρια αυτά είναι τοπικής σημασίας, μας προσδιορίζουν τοπικά ακρότατα και σημεία καμψής. Ουσιαστικά λοιπόν, το παρακάτω σχέδιο έγινε με τη χρήση ορίων και της συνέχειας της  $y$ .

Δείτε τώρα τη δυσκολία να υπολογίσουμε ακριβώς τα ακρότατα και τα σημεία καμψής. Ήδη, η πρώτη παράγωγος έχει κάποιους υπολογισμούς:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6(x^2 - 2)}{(x^2 + 3x + 2)^2}$$

Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή, καθώς ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:



Καταλαβαίνουμε ότι η  $y$  έχει τοπικό ελάχιστο στο  $-\sqrt{2}$ , το  $-34$  και τοπικό μέγιστο στο  $\sqrt{2}$ , το  $-0.029$  (περίπου).

Το μόνο που μας απέμεινε είναι η κυρτότητα και τα σημεία καμψής. Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-12(x^3 - 6x - 6)}{(x^2 + 3x + 2)^3}$$

και μηδενίζεται όταν  $x^3 - 6x - 6 = 0$ . Προσέξτε ότι έχουμε μία πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού και δεν υπάρχουν εύκολες ρίζες (δηλαδή, ακέραιες). Για την ακρίβεια, υπάρχει μόνο μία πραγματική ρίζα, η 2.87 (περίπου). Για το πρόσημο τώρα της δευτέρας παραγώγου, πρέπει να εξετάσουμε και το πρόσημο του αριθμητή, αλλά και του παρονομαστή. (Άσκηση!)

Συμπεραίνουμε λοιπόν κατόπιν όλων αυτών ότι η πιο πάνω υπολογιστική πληροφορία συνέβαλε μάλλον λίγο στη σχεδίαση της γραφικής παράστασης της  $y$ . Αυτός είναι μάλλον ο κανόνας στην περίπτωση απλών συναρτήσεων, όπως οι πολυωνυμικές και οι ρητές.

**Παράδειγμα 2.6.6.** Η εξίσωση van der Waals

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

δεν αντιπροσωπεύει ακριβώς την  $PVT$  συμπεριφορά ενός αερίου κοντά στο σημείο υγροποίησης αλλά χρησιμοποιείται για να ορίσουμε τις κρίσιμες σταθερές των  $P, V$  και  $T$ , τις οποίες και συμβολίζουμε με  $P_c, V_c$  και  $T_c$ , για τις οποίες ισχύει  $dP/dV = 0$  και  $d^2P/dV^2 = 0$ . Δηλαδή, το σημείο εκείνο για το οποίο το μέγιστο και το ελάχιστο συγχωνεύονται στο σημείο καμπής. Λύνοντας την εξίσωση έχουμε

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}.$$

Οπότε

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2n^2 a}{V^3}.$$

Επίσης,

$$\frac{d^2P}{dV^2} = \frac{2nRT}{(V - nb)^3} - \frac{6n^2 a}{V^4}.$$

Ο μηδενισμός των δύο παραπάνω εξισώσεων δίνει:

$$V_c = 3b, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

## 2.6.4 Διαφορικά

Θυμηθείτε τον ορισμό της παραγώγου:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ας τον γράψουμε ισοδύναμα ως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h} = 0.$$

Για να έχει νόημα το όριο, πρέπει η διαφορά  $f(x+h) - f(x)$  να είναι περίπου ίση με  $hf'(x)$  όταν το  $h$  είναι αρκούντως μικρό, δηλαδή,

$$f(x+h) = f(x) + h(f'(x) + \phi(h)),$$

όπου  $\phi(h) \rightarrow 0$  καθώς  $h \rightarrow 0$ .

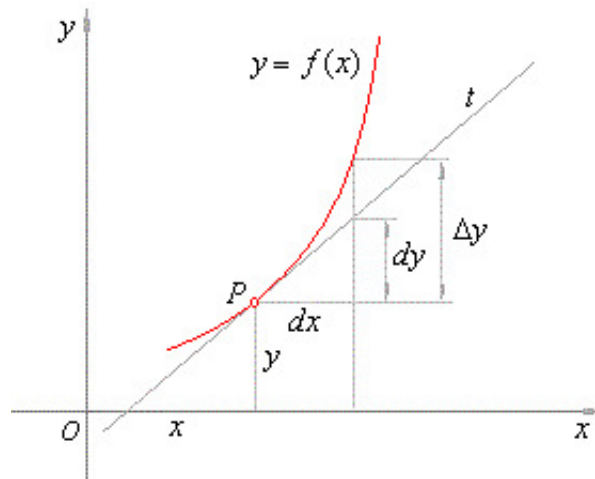
Η μεταβολή της  $f$  στο  $x$  είναι η

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta y = f'(x)\Delta x, \quad \text{όπου } \Delta x = (x+h) - x = h.$$

Πρακτικά, αυτό που κάνουμε είναι μία γραμμικοποίηση της  $f$  κοντά στο  $x$  και αντί να μελετάμε τις πραγματικές μεταβολές, μελετάμε τις μεταβολές στην εφαπτομένη (που είναι η ίδια η γραμμικοποίηση).



Σύγκριση μεταβολής και πραγματικής μεταβολής

Πού χρησιμοποιείται αυτό; Ας δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο καλούμαστε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός λεπτού σφαιρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας  $r$  και πάχους  $\Delta r$ . Ο όγκος σφαίρας ακτίνας  $r$  είναι

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

οπότε

$$\Delta V \sim \frac{dV}{dr}\Delta r = 4\pi r^2\Delta r.$$

Από την άλλη, ο πραγματικός όγκος είναι:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= 4\pi r^2\Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3, \end{aligned}$$

ώστε οι δυνάμεις που είναι ανώτερες ή ίσες της δευτέρας αγνοούνται στη γραμμικοποίηση.

Η σχέση

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x$$

είναι πάντοτε προσεγγιστική, σε αντίθεση με την

$$dy = f'(x)dx,$$

που ορίζει το διαφορικό της  $f$  στο  $x$ , και είναι η προηγούμενη σχέση αλλά στο όριο. Για να γίνει αυτό σαφές, δείτε ότι

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

(και όξι  $\sim$  όπως στη σχέση της μεταβολής). Στη Χημεία, αλλά και στη Φυσική, είναι σύνηθες να προκύπτει μία σχέση της μορφής

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x$$

και κατόπιν, περνώντας στο όριο να συνάγουμε

$$dy = f'(x)dx,$$

παίρνοντας έτσι έκφραση για την παράγωγο.

**Παράδειγμα 2.6.7.** Η ποσότητα ενός αερίου σε πίεση  $P$  βρίσκεται εντός κυλίνδρου διατομής  $A$ . Πιέζοντας εσωτερικό πιστόνι κατά  $\Delta l$  και υποθέτοντας ότι η  $P$  παραμένει περίπου σταθερή, αν συμβολίσουμε με  $W$  το έργο που παράγει το αέριο, τότε

$$\Delta W \sim PA \cdot \Delta l.$$

Επειδή  $A \cdot \Delta l = \Delta V$ , η μεταβολή του όγκου  $V$ , έχουμε

$$\Delta W \sim P \cdot \Delta V.$$

Αφήνοντας το  $\Delta V \rightarrow 0$ ,

$$dW = PdV$$

και εκφράσαμε το φυσικό μας πρόβλημα με μία εξίσωση διαφορικών. Θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο πώς από την έκφραση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί το έργο  $W$ .

**Παράδειγμα 2.6.8.** Η εξίσωση *Clapeyron-Clausius* είναι η

$$V_1 dP - S_1 dT = V_2 dP - S_2 dT,$$

όπου  $V_1, V_2, S_1, S_2$  είναι ο μοριακός όγκος και η μοριακή εντροπία σε δύο φάσεις, ενώ  $dP$  και  $dT$  είναι τα διαφορικά της πίεσης και της θερμοκρασίας, αντίστοιχα. Μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta V \cdot dP = \Delta S \cdot dT.$$

Εδώ όμως, οι  $\Delta V$  και  $\Delta S$  παριστάνουν μεταβολές όγκου και εντροπίας, αντίστοιχα, που δεν είναι κατ' ανάγκη μικρές. Κατά συνέπεια δεν μπορούμε να πάρουμε όρια και να συμπεράνουμε ότι  $dV \cdot dP = dS \cdot dT$  (!)

## 2.7 Παραγωγή της πεπλεγμένων συναρτήσεων

Εάν θέλαμε να βρούμε την παράγωγο της πεπλεγμένης συνάρτησης

$$y^2 - 2xy + 1 = 0,$$

θα μπορούσαμε, για  $x^2 - 1 > 0$  να γράφαμε ισοδύναμα

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$



και κατόπιν να παραγωγίσουμε. Υπάρχουν πολλά *στραβά* εδώ. Εκτός της προϋπόθεσης  $x^2 - 1 > 0$ , έχουμε **δύο** συναρτήσεις. Ακόμα και έτσι όμως, αυτό δε θα μπορούσαμε να το κάνουμε (εύκολα τουλάχιστον) για την έκφραση

$$x^5 + 4xy^3 - 3y^5 = 2. \quad (2.1)$$

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε εδώ είναι να θεωρήσουμε ότι (τουλάχιστον τοπικά) η  $y$  είναι συνάρτηση του  $x$  και να παραγωγίσουμε ως προς  $x$  την (2.1). Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η  $x$  είναι συνάρτηση του  $y$  και να παραγωγίσουμε την (2.1) ως προς  $y$ .

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε

$$2y \frac{dy}{dx} - 2y + 2x \frac{dy}{dx} = 0,$$

οπότε, αν  $y \neq x$  παίρνουμε την παράγωγο σε πεπλεγμένη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}.$$

Στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε

$$2y - 2x - 2y \frac{dx}{dy} = 0,$$

οπότε, πάλι για  $y \neq x$  παίρνουμε το αναμενόμενο

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y}.$$

Σε κάθε περίπτωση, λέμε ότι η παράγωγος δίνεται υπό *πεπλεγμένη μορφή*.

## 2.8 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x + 2}.$$

2. Υπάρχουν τα παρακάτω όρια;

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x + 3}.$$

3. Βρείτε χρησιμοποιώντας *μόνο* τον ορισμό, τις παραγώγους των:

i)  $x^2 + 1$ ,

ii)  $x^3$ ,

iii)  $2x^2 - 3x$ ,

iv)  $\frac{1}{x+1}$ .

4. Βρείτε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται:

$$\text{i) } y = x^{2/3}, (8, 4) \quad \text{ii) } y = \frac{3x^2}{5} - 2x^8, (1, -7/5).$$

5. Παραγωγίστε τις παρακάτω ως προς  $x$ :

i)  $7x^3 + 4x^2$ ,

ii)  $2x^{1/3}$ ,

iii)  $x^{-3/4}/2$ ,

iv)  $(2x^2 - 1)(x^2 + 4)$ .

v)  $\frac{2x^2-1}{x^2+4}$ .

vi)  $(1 - 5x^2)^6$ .

vii)  $\sqrt{x/(1-x)}$ .

viii)  $\sin(3x) + \cos^3(x)$ .

ix)  $\ln(\cos(x)) + e^{5-3x}$ .

6. Σχεδιάστε τις

$$\text{a) } y = \frac{x-3}{(x-2)^2}, \quad \text{b) } y = \frac{x^2-9}{x(x-1)}, \quad \text{c) } y = \frac{x^2(2-x)}{x+2}.$$

7. Ένα σωματίδιο κινούμενο στο χρόνο  $t$  διανύει απόσταση

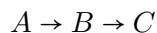
$$s(t) = t^3 - 2t + 1.$$

Σε ποια χρονική στιγμή έχει μηδενική επιτάχυνση;

8. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα σημεία και τα σημεία καμπής των

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x, \quad y = \frac{x}{1+x^2}.$$

9. Η συγκέντρωση  $b$  του  $B$  στις διαδοχικές αντιδράσεις



δίνεται από την

$$b = b(t) = a_0 \left( \frac{k_1}{k_2 - k_1} \right) \cdot (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Βρείτε τη χρονική στιγμή  $t_0$  στην οποία η συγκέντρωση μεγιστοποιείται.

10. Η πιθανότητα  $P$  να βρεθεί ηλεκτρόνιο στην πρώτη στοιβάδα του ατόμου τού υδρογόνου σε απόσταση  $r$  από τον πυρήνα, δίνεται από την

$$P = P(r) = 4\pi r^2 \left( \frac{e^{-2r/a_0}}{\pi a_0^2} \right),$$

όπου  $a_0$  είναι σταθερά. Σε ποια απόσταση μεγιστοποιείται η  $P$ ;

11. Η πιθανότητα  $P$  ενός μορίου μάζας  $m$  σε ένα αέριο σε θερμοκρασία  $T$  να έχει ταχύτητα  $c$  δίνεται από την

$$P = P(T) = c^2 \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-mc^2/2kT},$$

όπου  $k$  είναι η σταθερά Boltzmann. Δείξτε ότι η μέγιστη πιθανότητα είναι για  $c = \sqrt{2kT/m}$ .

12. Βρείτε τις  $dy/dx$  και  $dx/dy$  στις παρακάτω:

1.  $3x^2 + 7xy + 9y^2 = 6,$

2.  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0,$

3.  $x^3 + y^3 = 3xy.$

13. Με λογαριθμική παραγωγή υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω:

(i)  $y = \sqrt{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}},$

(ii)  $y = (\sin(x))^{\tan(x)},$

(iii)  $y = \frac{x(x^2+1)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}.$

## Κεφάλαιο 3

# Ολοκληρωτικός λογισμός μίας μεταβλητής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε το ρυθμό μεταβολής, δηλαδή την παράγωγο μιας συνάρτησης. Εδώ θα ασχοληθούμε με το αντίστροφο πρόβλημα: εάν μας δίνεται μια συνάρτηση  $f(x)$ , υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση  $F(x)$  τέτοια ώστε

$$\frac{dF}{dx} = f(x); \quad (3.1)$$

Τιθέμενο με αυτόν τον απλό τρόπο, το πρόβλημα δεν έχει εν γένει εύκολη απάντηση. Μία τυχαία  $f$  μπορεί να είναι πάρα πολύ κακή και δεν μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη τέτοιας  $F$ . Παρ' όλα αυτά, θα δούμε ότι για τις περισσότερες, αν όχι όλες τις συναρτήσεις που έχουμε συναντήσει ως τώρα, καθώς και για τις συνθέσεις τους, η ύπαρξη τέτοιας  $F$  είναι εξασφαλισμένη.

### 3.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη παραγωγίσιμης  $F$  που ικανοποιεί την (3.1) και θα την καλούμε *παράγουσα* (ή, *αντιπαράγωγο*) της  $f$ . Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι και κάθε συνάρτηση της μορφής  $F(x) + c$  όπου  $c$  είναι τυχούσα σταθερά, είναι επίσης παράγουσα της  $f$ .<sup>1</sup>

Το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

είναι ακριβώς η μονοπαραμετρική οικογένεια των παραγουσών της  $f$ . Το αόριστο ολοκλήρωμα έχει μόνο μία ιδιότητα, η οποία όμως είναι σημαντική: αν  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$$

---

<sup>1</sup> Αποδεικνύεται ότι όλες οι παράγουσες είναι αυτής της μορφής. Αυτό γίνεται ως εξής: έστω  $G$  μία παράγουσα της  $f$ . Τότε

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

και άρα

$$\frac{d(F - G)}{dx} = 0.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής τότε, συνάγεται ότι  $G(x) = F(x) + c$ .

### 3.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Η αόριστη ολοκλήρωση είναι όπως είπαμε η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Για να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα  $\int f(x)dx$  σκεφτόμαστε ως εξής:

ποιά συνάρτηση  $F$ , αν παραγωγιστεί, θα μας δώσει την  $f$ ;

Για πολλές συναρτήσεις, η ερώτηση αυτή έχει απλή απάντηση, δείτε τους παρακάτω πίνακες. Για κάποια ολοκληρώματα όμως, όπως το

$$\int e^{-x^2} dx,$$

που απαντάται σχεδόν παντού, στη στατιστική θερμοδυναμική, στην κινητική θεωρία αερίων, στη στατιστική κ.λ.π., δεν υπάρχει (απλή τουλάχιστον) απάντηση.

#### 3.2.1 Στοιχειώδη ολοκληρώματα

Στους παρακάτω πίνακες περιέχονται ορισμένες στοιχειώδεις συναρτήσεις, οι παράγουσές τους και τα αόριστα ολοκληρώματά τους. Κατ' αρχάς έχουμε τις μονωνυμικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$a$ σταθ.	$ax$	$ax + c$
$x^n, n \in \mathbb{R}, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\ln x  + c$

Ακολουθούν οι τριγωνομετρικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$-\cot x + c$

Για τις εκθετικές έχουμε:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$e^x$	$e^x$	$e^x + c$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

Ορισμένες υπερβολικές τριγωνομετρικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x + c$

Τέλος, κάποιες αντίστροφες τριγωνομετρικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$\arccos x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\arctan x + c$

### 3.2.2 Μέθοδος αντικατάστασης

Κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής, μπορούμε να φέρουμε ένα ολοκλήρωμα σε μία από τις τυπικές μορφές των παραπάνω πινάκων.

**Παράδειγμα 3.2.1.** Έστω το

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}.$$

Θέτουμε  $y = ax + b$  και άρα  $dy = adx$ . Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{a} \int y^{-1/2} dy \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c \\ &= -\frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + c. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.2.2.** Έστω το

$$I = \int \frac{dx}{(a-x)^2}.$$

Θέτουμε  $y = a - x$  και άρα  $dy = -dx$ . Άρα,

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dy}{y^2} \\ &= \frac{1}{y} + c \\ &= \frac{1}{a-x} + c. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.2.3.** Στη στατική θερμοδυναμική, εμφανίζεται το ολοκλήρωμα

$$I_0 = \int (2J+1) \exp\left(\frac{-BJ(J+1)}{kT}\right) dJ.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{d}{dJ} \left( \frac{-BJ(J+1)}{kT} \right) = -\frac{B}{kT} \cdot (2J+1).$$

Με άλλα λόγια, μας εμφανίζεται η ιδανική κατάσταση όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι της μορφής

$$I = k \int f(g(x))g'(x)dx, \quad k \text{ σταθερά.}$$

Στην περίπτωση αυτή, η αντικατάσταση

$$y = g(x), \quad dy = g'(x)dx$$

δίνει

$$I = k \int f(y)dy.$$

Στο παράδειγμά μας, η αντικατάσταση

$$y = -\frac{BJ(J+1)}{kT}, \quad dy = -\frac{B}{kT} \cdot (2J+1)dJ$$

συνεπάγεται ότι

$$I_0 = -\frac{kT}{B} \int \exp(y)dy = -\frac{kT}{B} \exp\left(\frac{-BJ(J+1)}{kT}\right) + c.$$

### Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Χρησιμοποιούμε ευρέως τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις σε ολοκληρώματα των παρακάτω μορφών (δεξιά φαίνονται οι αντικαταστάσεις):

•

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad x = a \cosh y.$$

•

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x = a \sin y.$$

•

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x = a \sinh y.$$

Ενδεικτικά, υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα. Είναι για  $a > 0$ :

$$x = a \sinh y \implies dx = a \cosh y dy.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a \cosh y dy}{\sqrt{a^2 \sinh^2 y + a^2}} \\ &= \frac{a}{a} \int \frac{\cosh y dy}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} \\ (\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1) &= \int \frac{\cosh y dy}{\sqrt{\cosh^2 y}} \\ (\cosh y > 0) &= \int dy = y + c \\ &= \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + c. \end{aligned}$$

### Αλγεβρικές αντικαταστάσεις

Κάποιες φορές, ολοκληρώματα τα οποία περιέχουν ρίζες, *ενδέχεται* να απλοποιηθούν θέτοντας τη ρίζα ως τη νέα μεταβλητή.

**Παράδειγμα 3.2.4.** Για το ολοκλήρωμα

$$I = \int x\sqrt{4x+1} dx$$

θέτουμε  $y = \sqrt{4x+1}$ , οπότε

$$x = \frac{y^2 - 1}{4}, \quad dx = \frac{1}{2}y dy.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int y^2(y^2 - 1) dy \\ &= \frac{1}{8} \int (y^4 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} \right) + c \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{(4x+1)^{5/2}}{5} - \frac{(4x+1)^{3/2}}{3} \right) + c. \end{aligned}$$

**Άσκηση:** Υπολογίστε το

$$I = \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$$



**Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών ολοκληρωτέων ποσοτήτων**

Μερικές φορές οι απλοί τριγωνομετρικοί τύποι μας βοηθούν να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που περιέχουν παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 3.2.5.** • Το ολοκλήρωμα της  $\tan x$  (αναλόγως προκύπτει και το ολοκλήρωμα της  $\cot x$ ):

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c.$$

• Το ολοκλήρωμα της  $\sin^2 x$  (αναλόγως προκύπτει και το ολοκλήρωμα της  $\cos^2 x$ ):

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

• Το ολοκλήρωμα της  $\cos^3 x$  (όπως και αυτό της  $\sin^3 x$ ) είναι ελαφρώς πιο περίπλοκο:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int \cos x - \int \sin^2 x (\sin x)' dx \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c. \end{aligned}$$

**3.2.3 Μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες**

Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες είναι η δεύτερη (μετά τη μέθοδο της αντικατάστασης) εξαιρετικά χρήσιμη μέθοδος ολοκλήρωσης που βλέπουμε. Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό κάποιων ολοκληρωμάτων απαιτείται συνδυασμός των δύο μεθόδων, ή ακόμα και κάποιο τέχνασμα. Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες συνίσταται στο να γράψουμε τον κανόνα του Leibniz της παραγώγισης του γινομένου συναρτήσεων στην ολοκληρωτική του μορφή:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \quad (3.2)$$

Κάποιες ευρείες κατηγορίες ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι οι παρακάτω:

• Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \sin(ax + b) dx \quad \text{και} \quad \int P(x) \cos(ax + b) dx,$$

όπου  $P(x)$  είναι πολυώνυμο.

Εδώ, γράφουμε στο αριστερό ολοκλήρωμα

$$\sin(ax + b) = - \frac{(\cos(ax + b))'}{a},$$

ενώ στο δεξιό γράφουμε

$$\cos(ax + b) = \frac{(\sin(ax + b))'}{a}.$$

Για παράδειγμα

$$\int x \sin x dx = - \int x (\cos x)' dx = -x \cos x + \int (x)' \cos x dx = -x \cos x + x + c.$$

**Άσκηση:** Υπολογίστε το

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Θα χρειαστεί να κάνετε δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση. Γενικά για τέτοια ολοκληρώματα κάνουμε  $n$  φορές παραγοντική ολοκλήρωση, όπου  $n$  είναι ο βαθμός του  $P(x)$ .

- Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \exp(ax + b) dx,$$

όπου  $P(x)$  είναι πολυώνυμο.

Εδώ γράφουμε

$$\exp(ax + b) = \frac{(\exp(ax + b))'}{a}.$$

Για παράδειγμα

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

**Άσκηση:** Υπολογίστε το

$$\int (x^2 - 1) e^{2x} dx.$$

- Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \ln(ax + b) dx,$$

όπου  $P(x)$  είναι πολυώνυμο.

Εδώ, σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, γράφουμε

$$P(x) = Q'(x)$$

όπου  $Q$  είναι παράγουσα του  $P$ . Για παράδειγμα

$$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

**Άσκηση:** Υπολογίστε το

$$\int (x + 1) \ln(3x) dx.$$

- Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \exp(dx + f) \sin(ax + b) dx \quad \text{και} \quad \int \exp(dx + f) \cos(ax + b) dx.$$

Με ένα παράδειγμα δείχνουμε πώς υπολογίζουμε τέτοια ολοκληρώματα. Έστω το

$$I = \int e^x \sin x dx.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \text{κάνουμε δεύτερη φορά κατά παράγοντες ολοκλήρωση!} \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Παίρνουμε συνεπώς

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

Σημειώνουμε ότι θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$I = - \int e^x (\cos x)' dx$$

και να κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση. Θα έπρεπε απλώς να είμαστε προσεκτικοί την δεύτερη φορά που θα κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και να γράψουμε πάλι τον τριγωνομετρικό παράγοντα σαν παράγωγο και όχι τον εκθετικό.

**Άσκηση:** Υπολογίστε το

$$\int e^{-x} \cos(3x) dx.$$

### Αναδρομικοί τύποι

Δίνουμε παρακάτω δύο παραδείγματα ολοκληρωμάτων τα οποία υπολογίζονται μέσω αναδρομικού τύπου:

**Παράδειγμα 3.2.6.** Έστω το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int x^n e^x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n (e^x)' dx \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\ &= x^n e^x - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Μπορούμε συνεπώς από τον αναδρομικό τύπο

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$$

να υπολογίσουμε οποιοδήποτε τέτοιο ολοκλήρωμα. Λόγου χάρη

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_2 \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - I_0) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 1)e^x + c. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.2.7.** Έστω το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int \sin^{n-1} x (\cos x)' dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} + (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

**Άσκηση:** Βρείτε αναδρομικό τύπο για το

$$J_n = \int \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίστε κατόπιν το  $J_4$ .

### 3.2.4 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Στη γενική του μορφή, ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης είναι της μορφής

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

όπου  $P(x)$  και  $Q(x)$  είναι πολυώνυμα. Ίσως η πιο εύκολη μορφή ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης είναι εκείνη στην οποία ο αριθμητής είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της παραγώγου του παρονομαστή.

$$I = \int \frac{kQ'(x)}{Q(x)} dx = k \ln |Q(x)| + c.$$

Εάν ο βαθμός  $\deg P$  του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού  $\deg Q$  του παρονομαστή, πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Εδώ,  $D(x)$  είναι πολυώνυμο,  $\deg r < \deg Q$  και έτσι

$$I = \int D(x)dx + \int \frac{p(x)}{Q(x)}dx.$$

Η διαίρεση πολυωνύμων μπορεί πολλές φορές να είναι μία μακροσκελής διαδικασία. Για κάποιες περιπτώσεις όμως απλουστεύεται, όπως στα παρακάτω παραδείγματα όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή.

**Παράδειγμα 3.2.8.** Για το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{3x+1}{2x-3}dx,$$

προσπαθούμε να εμφανίσουμε τον παρονομαστή στον αριθμητή:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-3) + \frac{11}{2}}{2x-3}dx \\ &= \frac{3}{2} \int dx + \frac{11}{2} \int \frac{dx}{2x-3} \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln|2x-3| + c. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.2.9.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-x-2}dx \\ &= \int \frac{(x^2-x-2) + (4x-2)}{x^2-x-2}dx \\ &= \int dx + 2 \int \frac{2x-1}{x^2-x-2}dx \\ &= x + 2 \ln|x^2-x-2| + c. \end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση βεβαίως, όταν έχουμε αναγάγει το αρχικό ολοκλήρωμα σε κάποιο της μορφής

$$I = \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx,$$

με  $\deg r < \deg Q$ , δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι  $r = kQ'$ . Τότε, θα χρησιμοποιούμε την τεχνική της *ανάλυσης σε απλά κλάσματα*, που περιγράφεται στα παρακάτω παραδείγματα.

**Παράδειγμα 3.2.10.** Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}.$$

Βλέπουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή και ότι ο παρονομαστής είναι γινόμενο μονωνύμων υψωμένων στην πρώτη δύναμη. Τότε υπάρχουν αριθμοί  $A, B$  τέτοιοι ώστε:

$$\frac{xdx}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Υπολογίζουμε τους  $A, B$  με το τέχνασμα του *Heaviside*: Απαλείφουμε πρώτα τους παρονομαστές:

$$x = A(x + 2) + B(x + 1).$$

Για  $x = -1$  παίρνουμε  $A = -1$  και για  $x = -2$  παίρνουμε  $B = 2$ . Άρα,

$$I = - \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c.$$

**Άσκηση.** Στην άσκηση αυτή καλείστε να λύσετε τη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

όπου  $k, a, b$  είναι σταθερές, κάνοντας τα εξής βήματα: χωρίζετε πρώτα τις μεταβλητές

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt$$

και κατόπιν παίρνετε ολοκληρώματα και στα δύο μέλη:

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k \int dt = kt + c.$$

Υπολογίστε τώρα το αριστερό ολοκλήρωμα με την τεχνική της ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Η λύση είναι (υπό πεπλεγμένη μορφή)

$$\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| = kt + c.$$

**Παράδειγμα 3.2.11.** Ενδέχεται να έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$I = \int \frac{x dx}{(x-1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

και απαλείφοντας τους παρονομαστές,

$$x = A(x-1) + B.$$

Για  $x = 1$ , παίρνουμε  $B = 1$ . Θέτουμε τώρα οποιαδήποτε τιμή για το  $x$ , αρκεί να είναι διαφορετική του 1. Η απλούστερη είναι η  $x = 0$  και παίρνουμε έτσι

$$0 = -A + 1 \implies A = 1.$$

Άρα,

$$I = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

**Παράδειγμα 3.2.12.** Για το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

θέτουμε

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

και απαλείφοντας τους παρονομαστές

$$x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Για  $x = 1$  παίρνουμε  $A = 1/2$ . Για να βρούμε τώρα τα  $B, C$  θέτουμε δύο τυχαίες τιμές για το  $x$ , διαφορετικές του 1. Για  $x = 0$  παίρνουμε  $c = 1/2$  και για  $x = -1$  παίρνουμε  $B = 1/2$ . Οπότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + c. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.2.13.** Τέλος, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο παρονομαστής είναι τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα, όπως στο

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Στην περίπτωση αυτή, συμπληρώνουμε το τετράγωνο στον παρονομαστή:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x+1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left( \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα

$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \quad dy = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$$

και έτσι

$$I = \frac{8}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c.$$

Σημειώνουμε ότι η μέθοδος του τελευταίου παραδείγματος χρησιμοποιείται για να φέρουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

σε κάποια από τις μορφές

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

### 3.3 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Επανερχόμαστε στο αρχικό ερώτημα αυτού του κεφαλαίου. Δοθείσης συνάρτησης  $f$  υπάρχει παραγωγίσιμη  $F$  ώστε

$$\frac{dF}{dx} = f(x);$$

Είδαμε ότι αν υπάρχει αυτή η  $F$ , την οποία ονομάσαμε παράγουσα της  $f$ , τότε όλες οι παράγουσες  $G$  της  $f$  ικανοποιούν τη σχέση  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c$  σταθερά, και με τον τρόπο αυτόν ορίσαμε το αόριστο ολοκλήρωμα της  $f$ . Παρ' όλο όμως που δείξαμε την ύπαρξη παράγουσας για πάρα πολλές  $f$ , δεν έχουμε απαντήσει ακόμη στο αρχικό ερώτημα της ύπαρξης παράγουσας για τυχαία  $f$ .

Προς αυτή την κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι η  $f$  ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  και ας υποθέσουμε επίσης ότι  $F$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $[a, b]$ . Ορίζουμε τότε το *ορισμένο ολοκλήρωμα της  $f$  από τη σχέση*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b.$$

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού μας εξασφαλίζει την ύπαρξη παράγουσας για κάθε συνεχή  $f$  που ορίζεται σε κλειστό διάστημα  $[a, b]$ . Κατά συνέπεια, ο ορισμός που δώσαμε έχει νόημα για μια πολύ μεγάλη κατηγορία συναρτήσεων.

Για παράδειγμα,

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 5)dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x \right]_1^2 = \frac{11}{6},$$

όπως και επίσης,

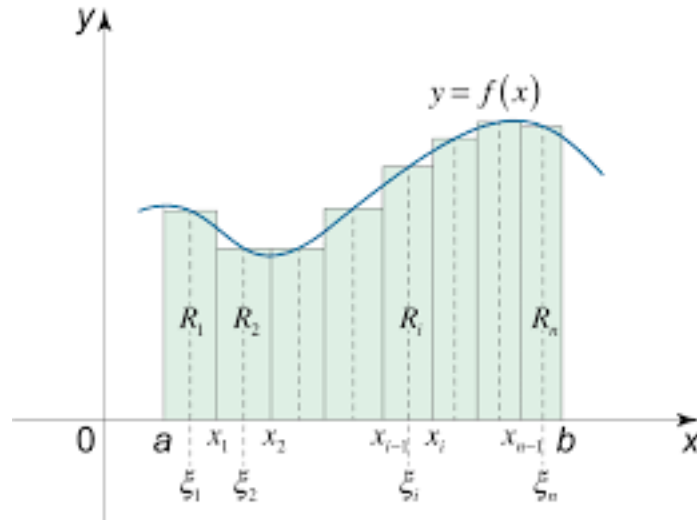
$$\int_0^{\pi/6} \cos(3x)dx = \left[ \frac{\sin(3x)}{3} \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}.$$

#### 3.3.1 Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως άθροιση

Δίνουμε παρακάτω μια χαλαρή περιγραφή του ιστορικού τρόπου ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος (από τον Riemann<sup>2</sup>). Υποθέτοντας όπως στο σχήμα

<sup>2</sup>Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο πρώτος που υπολόγισε ορισμένο ολοκλήρωμα ήταν ο Αρχιμήδης, περίπου 1700 χρόνια πριν την εισαγωγή του Λογισμού από τους Νεύτωνα και Leibniz. Ο ορισμός του Riemann εν πολλοίς ακολουθεί την ιδέα του Αρχιμήδη.





Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως άθροισμα

ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , διαιρούμε το  $[a, b]$  σε υποδιαστήματα μήκους  $(b-a)/n$ . Είναι δηλαδή,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

και για κάθε  $k = 1, \dots, n$ ,

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Παίρνουμε τώρα αριθμούς  $\xi_1, \dots, \xi_n$  εντός των διαστημάτων  $[x_{k-1}, x_k]$  και θεωρούμε το άθροισμα<sup>3</sup>

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n}. \quad (3.3)$$

Μία άλλη εκδοχή του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού μας λέει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.4)$$

### 3.3.2 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Το ορισμένο ολοκλήρωμα, σε αντίθεση με το αόριστο είναι πλούσιο σε ιδιότητες, κάποιες από τις οποίες παραθέτουμε παρακάτω:

- **Γραμμικότητα.** Αν  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[a, b]$  και  $k, l \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\int_a^b (kf(x) + lg(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx.$$

<sup>3</sup>Έχουμε τις εξής παρατηρήσεις για το άθροισμα της Εξίσωσης 3.3: πρώτον, χρησιμοποιείται για την αριθμητική προσέγγιση των ολοκληρωμάτων-παίροντας  $n$  αρκούντως μεγάλο, η προσέγγιση μπορεί να είναι πολύ ικανοποιητική. Δεύτερον, δεν είναι αναγκαίο το διάστημα  $[a, b]$  να χωρίζεται σε υποδιαστήματα ίσου μήκους όπως κάναμε για μεγαλύτερη ευκολία εδώ. Η Εξίσωση 3.4 μπορεί να γραφεί στη γενική της μορφή:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

- *Εναλλαγή ορίων ολοκλήρωσης.*

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

- *Κανόνας του Châsles.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- *Άρτιες συναρτήσεις σε συμμετρικό διάστημα.* Αν  $f(x) = f(-x)$  στο  $[-a, a]$  τότε

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

- *Περιττές συναρτήσεις σε συμμετρικό διάστημα.* Αν  $f(x) = -f(-x)$  στο  $[-a, a]$  τότε

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

- *Θετικότητα και εμβαδόν.* Αν  $f(x) \geq 0$  στο  $[a, b]$ , τότε

$$I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

και το  $i$  είναι το εμβαδόν  $\text{Area}(D)$  του χωρίου που περικλείουν ου  $y = f(x)$  και οι ευθείες  $y = 0$ ,  $x = a$  και  $x = b$ . Επίσης, προκύπτει πορισματικά ότι εάν  $f(x) \leq g(x)$  στο  $[a, b]$ , τότε

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Αν  $f$  συνεχής στο  $[a, b]$ , τότε το Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου για συνεχείς συναρτήσεις μας εξασφαλίζει ότι

$$\min_{x \in [a, b]} (f(x)) = m \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a, b]} (f(x)).$$

Από εδώ, προκύπτει η ιδιότητα

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

- Η παρακάτω ιδιότητα είναι γνωστή ως *Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού*: εάν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in [a, b]$ :

$$\bar{f} = f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Η τιμή  $\bar{f}$  καλείται *μέση (ολοκληρωτική) τιμή της  $f$*  στο  $[a, b]$ .

**Άσκηση.** Έστω οι κυματοσυναρτήσεις

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{2n\pi x}}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, l > 0.$$

Δείξτε ότι για  $n$  περιττό και  $m$  άρτιο ισχύει

$$\int_{-l/2}^{l/2} \psi_n(x) \cdot \psi_m(x)dx = 0.$$

### Μη γνήσια ολοκληρώματα

Μέχρι τώρα είδαμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί καλώς για συνεχείς συναρτήσεις  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Τί γίνεται όμως σε όλες τις άλλες περιπτώσεις;

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση συνεχούς  $f$  ορισμένης σε ανοικτό διάστημα  $(a, b)$ . Αποδεικνύεται ότι εάν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x),$$

τότε δεν έχουμε κανένα πρόβλημα: το ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $(a, b)$  ορίζεται ακριβώς όπως το ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $[a, b]$ . Εάν όμως κάποιο από τα δύο παραπάνω όρια απειρίζεται, τα πράγματα μπορεί να είναι τελείως διαφορετικά.

Προς τούτο, ας πάρουμε το παράδειγμα της  $f(x) = 1/x$  στο  $(0, 1]$ , όπου

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Τι νόημα μπορεί να έχει το

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x};$$

Θεωρούμε το εξής όριο, το οποίο καλούμε πρωταρχική τιμή του μη γνήσιου ολοκληρώματος  $I$ :

$$\text{p.v.} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x}.$$

Βλέπουμε, ότι

$$\text{p.v.} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (-\ln a) = +\infty.$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι το μη γνήσιο ολοκλήρωμα  $I$  αποκλίνει (στο άπειρο). Δείτε όμως ότι για το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}},$$

είναι:

$$\text{p.v.} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^{1/2}}.$$

Βλέπουμε, ότι

$$\text{p.v.} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{a}) = 2.$$

Λέμε τότε ότι το μη γνήσιο ολοκλήρωμα  $I$  συγκλίνει (στο 2.)

Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε μη φραγμένο διάστημα: Λόγου χάρη, έστω το

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx.$$

Είναι

$$\text{p.v.} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-kx} dx = \frac{1}{k} \lim_{a \rightarrow +\infty} (1 - e^{-ka}).$$

Συνεπώς, αν  $k < 0$  το πιο πάνω όριο είναι  $-\infty$  και το  $I$  αποκλίνει στο άπειρο, ενώ όμως αν  $k > 0$  το ολοκλήρωμα συγκλίνει στο  $1/k$  και γράφουμε

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k}.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η απόκλιση ενός μη γνησίου ολοκληρώματος μπορεί να είναι ταλαντωμένη. Για παράδειγμα, για το

$$I = \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

έχουμε

$$\text{p.v.} \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sin a.$$

Το όριο αυτό απλώς δεν υπάρχει, εφ' όσον η τιμή ταλαντώνεται μεταξύ  $-1$  και  $1$ .

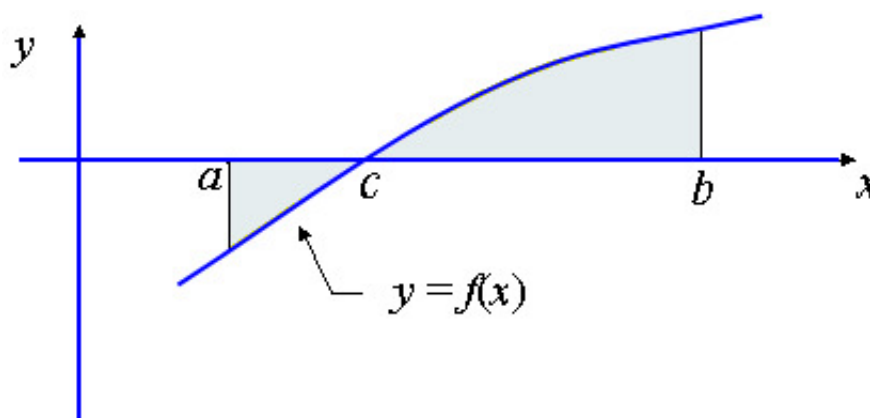
### 3.4 Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

#### 3.4.1 Εμβαδόν χωρίου

Έχουμε ήδη δει ότι όταν  $f(x) \geq 0$  στο  $[a, b]$ , τότε

$$\text{Area}(D) = \int_a^b f(x) dx,$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο που περικλείουν οι  $y = f(x)$ , οι  $x = a$ ,  $x = b$  και  $y = 0$ . Έστω τώρα ότι η  $f$  δεν είναι αυστηρά θετική και έστω πάλι  $D$  το χωρίο που ορίζουν η καμπύλη  $y = f(x)$ , οι  $x = a$ ,  $x = b$  και  $y = 0$ . Στο παρακάτω σχήμα, το  $D$  είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο:



Εμβαδόν χωρίου

Τότε το εμβαδόν του είναι

$$\text{Area}(D) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Παράδειγμα 3.4.1.** Το εμβαδόν του χωρίου  $D$  που περικλείουν οι  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 5$ : επειδή  $x^2 > 0$  στο  $[1, 5]$ ,

$$\text{Area}(D) = \int_1^5 x^2 dx = \frac{124}{3}.$$

**Παράδειγμα 3.4.2.** Το εμβαδόν του χωρίου  $D$  που περικλείουν οι  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ : επειδή  $\frac{x}{x^2+1} \geq 0$  στο  $[0, 1]$ ,

$$\text{Area}(D) = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

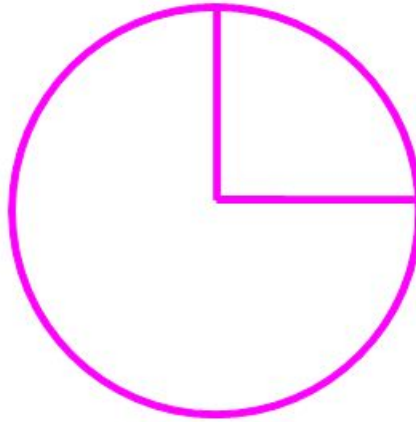
**Παράδειγμα 3.4.3.** Το εμβαδόν του χωρίου  $D$  που περικλείουν οι  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ : προσέχουμε τώρα ότι  $\frac{x}{x^2+1} \leq 0$  στο  $[-1, 0]$ , συνεπώς

$$\text{Area}(D) = - \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \ln 2.$$

**Παράδειγμα 3.4.4.** Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας  $r$ : χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ο κύκλος  $C$  είναι κέντρου  $(0,0)$ , δηλαδή δίνεται από την

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Για  $y \geq 0$  είναι  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  και από συμμετρία (δείτε το σχήμα),



$$\text{Area}(C) = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Θεωρούμε το άριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση

$$x = r \sin y, \quad dx = r \cos y dy.$$

Οπότε,

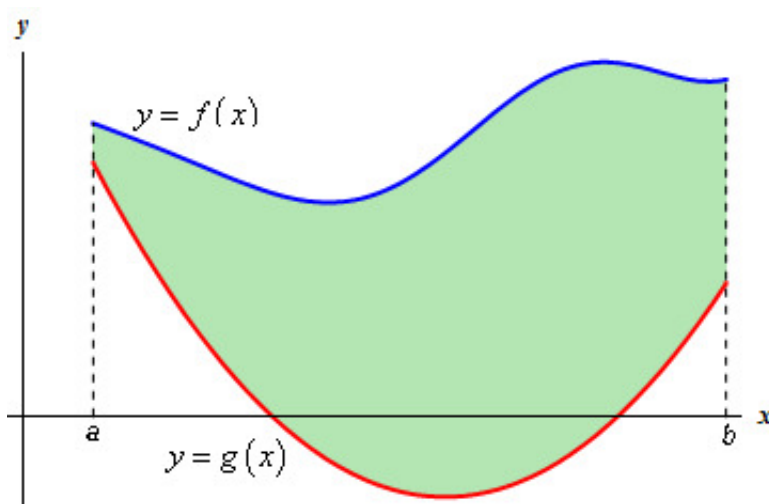
$$\begin{aligned} I &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 y} \cdot \cos y dy \\ &= r^2 \int \cos^2 y dy \\ &= \frac{r^2}{2} \int (1 + \cos(2y)) dy \\ &= \frac{r^2}{2} \left( y + \frac{\sin(2y)}{2} \right) + c \\ &= \frac{r^2}{2} \left( \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right) \right) + c. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \text{Area}(C) &= 2r^2 \left[ \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right) \right]_0^r \\ &= 2r^2 \left[ \arcsin(1) + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(1)) \right] \\ &= 2r^2 [\pi/2 + 0] \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

### 3.4.2 Εμβαδόν χωρίου μεταξύ δύο καμπυλών

Έστω οι  $f(x)$  και  $g(x)$  ορισμένες και συνεχείς σε κλειστό διάστημα  $[a, b]$ . Έστω  $D$  το χωρίο που περικλείουν οι  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ .



Εμβαδόν χωρίου μεταξύ δύο καμπυλών

Τότε

$$\text{Area}(D) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

**Παράδειγμα 3.4.5.** Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου  $D$  που περικλείουν οι  $y = x^2$  και  $y = x^3$ , λύνουμε κατ' αρχάς την εξίσωση

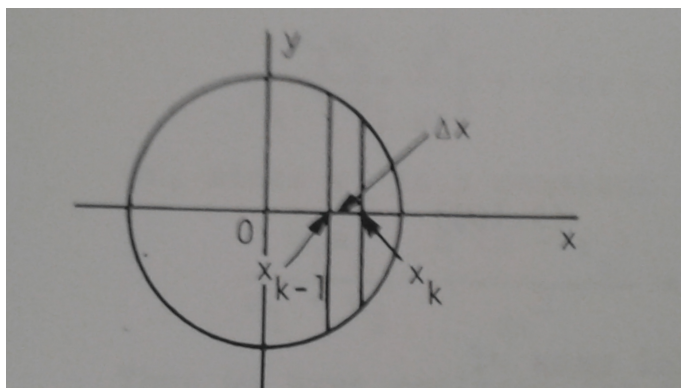
$$x^2 = x^3 \implies x = 0, 1.$$

κατά συνέπεια τα όρια ολοκλήρωσης είναι τα 0, 1. Στο  $[0, 1]$  ισχύει ότι  $x^3 \leq x^2$ , οπότε

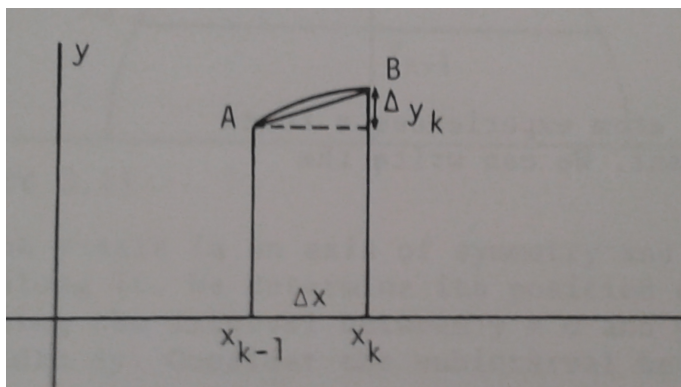
$$\text{Area}(D) = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

### 3.4.3 Μήκος τόξου

Με ολοκλήρωση μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μιας παραγωγίσιμης καμπύλης  $y = f(x)$ .



Δείτε το τμήμα στο υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$ .



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2}.$$

Όμως το  $\Delta y_k/\Delta x$  είναι η κλίση της χορδής  $AB$ . Υπάρχει ένα σημείο  $\xi_k$  στο διάστημα για το οποίο η κλίση της καμπύλης  $f'(\xi_k)$  είναι ίση με την κλίση της  $AB$ . Οπότε, το μήκος της χορδής είναι

$$\Delta x \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}.$$

Καθώς το  $\Delta x \rightarrow 0$ , το μήκος της χορδής προσεγγίζει το μήκος του τόξου  $AB$ . Άρα στο όριο, το συνολικό μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , είναι

$$l(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Παράδειγμα 3.4.6.** Για το μήκος κύκλου ακτίνας  $r$ , θεωρούμε την κατάσταση του Παραδείγματος 3.4.4. Είναι

$$l(C) = 4 \int_0^r \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Έχουμε

$$l(C) = 4r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

και κάνουμε την αντικατάσταση

$$x = r \sin y, \quad dx = r \cos y dy,$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos y dy}{\cos y} \\ &= y + c = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + c. \end{aligned}$$

Άρα,

$$l(C) = 4r \left[ \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_0^r = 2\pi r.$$

**Σχόλιο 3.4.7.** Ο υπολογισμός του μήκους καμπύλης πάρα πολλές φορές δεν είναι καθόλου εύκολος. Λόγου χάρη, πάρτε την παραβολή  $y = x^2$  στο  $[0, 1]$ . Για το μήκος της έχουμε

$$l(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx,$$

που ναι μεν επιλύεται, αλλά δεν μπορεί με κανένα τρόπο να θεωρηθεί ως ένα απλό ολοκλήρωμα.

**Άσκηση.** Βρείτε το μήκος της παραπάνω καμπύλης. Θεωρήστε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

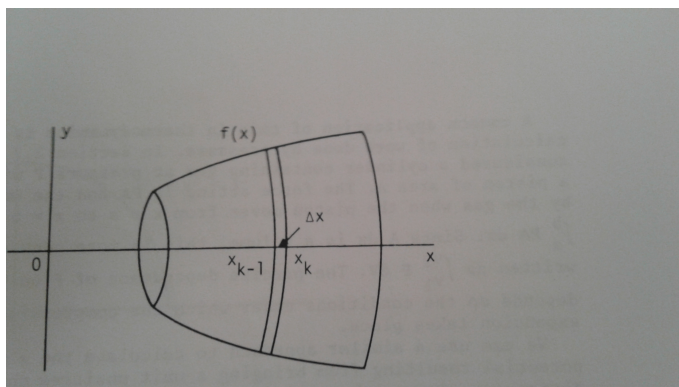
$$I = \int \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

και υπολογίστε το με αντικατάσταση

$$x = \frac{1}{2} \sinh y, \quad dx = \frac{1}{2} \cosh y dy.$$

### 3.4.4 Όγκοι στερεών από περιστροφή

Εάν περιστρέψουμε καμπύλη  $y = f(x)$  γύρω από τον άξονα των  $x$ , δημιουργείται ένα σχήμα  $S$  που ονομάζεται στερεό από περιστροφή.





Ο όγκος  $\text{Vol}(S)$  του  $S$  υπολογίζεται χωρίζοντάς το σε λεπτούς δίσκους πάχους  $\Delta x$  κάθετους στον άξονα των  $x$  (που είναι και ο άξονας περιστροφής). Για το υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$ , ο αντίστοιχος δίσκος έχει όγκο

$$\pi(f(\xi_k))^2 \cdot \Delta x,$$

όπου  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Για τον συνολικό όγκο λοιπόν θα έχουμε

$$\text{Vol}(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \pi(f(\xi_k))^2 \cdot \Delta x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Παράδειγμα 3.4.8.** Για να υπολογίσουμε τον όγκο σφαίρας  $\Sigma$  ακτίνας  $r$ , μπορούμε να θεωρήσουμε τη σφαίρα ως το στερεό από την περιστροφή της  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$ . Προκύπτει

$$\text{Vol}(\Sigma) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

**Παράδειγμα 3.4.9.** Για να υπολογίσουμε τον όγκο κυλίνδρου  $C$  ύψους  $h$  και ακτίνας  $r$ , θεωρούμε την σταθερή  $y = r$  στο  $[0, h]$ . Είναι τότε

$$\text{Vol}(C) = \pi r^2 \int_0^h dx = \pi r^2 h.$$

**Άσκηση.** Βρείτε τον όγκο του ορθού κώνου  $K$  ύψους  $h$  και ακτίνας  $r$ , θεωρώντας την  $y = (r/h)x$  στο  $[0, h]$ . Γιατί επιλέγουμε τη συγκεκριμένη  $y$ ;

### 3.4.5 Έργο παραγόμενο από δύναμη

Θυμόμαστε από το σχολείο ότι εάν μία δύναμη  $F$  είναι σταθερή, τότε το έργο  $W$  που παράγεται από την εφαρμογή της  $F$  πάνω σε ένα μήκος  $s$  είναι απλώς  $W = F \cdot s$ . Εάν η  $F$  είναι συνάρτηση  $F = F(s)$  της θέσης  $s$ , τότε διαιρούμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $a$  και  $b$  πάνω στην οποία δρα η  $F$  σε υποδιαστήματα μήκους  $\Delta s$ . Θεωρώντας το υποδιάστημα  $[s_{k-1}, s_k]$ , η δύναμη σε κάποιο σημείο  $\xi_k$  αυτού του υποδιαστήματος θα ισούται με  $F(\xi_k)$ . Υποθέτοντας ότι η δύναμη είναι ουσιαστικά σταθερή στο υποδιάστημα αυτό, παίρνουμε ότι το έργο είναι περίπου ίσο με  $F(\xi_k) \cdot \Delta s$  και έτσι, το συνολικό έργο που παράγει η  $F$  θα δίνεται από τη σχέση

$$W = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \cdot \Delta s = \int_a^b F(s) ds.$$

**Παράδειγμα 3.4.10.** Στη θερμοδυναμική μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το έργο που παράγεται υπό πίεση. Στο Παράδειγμα 2.6.7 θεωρήσαμε ένα κύλινδρο που περιείχε αέριο σε πίεση  $P$  και με ένα εσωτερικό πιστόνι εμβαδού  $A$ . Η δύναμη που δρα είναι  $PA$  και συνεπώς το έργο που παράγεται από το αέριο όταν το πιστόνι κινείται από το  $a$  στο  $b$  ισούται με

$$W = \int_a^b P A ds.$$

Εφ' όσον η ποσότητα  $Ads$  είναι στοιχείο όγκου, μπορούμε να γράψουμε επίσης

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$

Η ακριβής εξάρτηση της πίεσης  $P$  από τον όγκο  $V$  εξαρτάται από τις συνθήκες κάτω από τις οποίες λαμβάνει χώρα η συμπίεση ή η αποπίεση.

**Παράδειγμα 3.4.11.** Θα χρησιμοποιήσουμε μία παρεμφερή προσέγγιση με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος για να υπολογίσουμε το ηλεκτροστατικό δυναμικό που προκύπτει από τη μεταφορά μίας μονάδας θετικού φορτίου σε μία απόσταση  $r_1$  από ένα φορτίο  $Q_1$ . Από τον νόμο του *Coulomb*, η δύναμη  $F$  μεταξύ δύο φορτίων  $Q_1$  και  $Q_2$  που βρίσκονται σε απόσταση  $r$  ισούται με

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.5)$$

όπου  $\epsilon_0$  είναι η απόλυτη διηλεκτρική σταθερά του κενού. Συνεπώς, το έργο που παράγεται έναντι ενός πεδίου φορτίου  $Q_1$  κατά τη μεταφορά μονάδας φορτίου από το άπειρο στο  $r_1$  ισούται με

$$W = - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}.$$

Το έργο όμως αυτό είναι το δυναμικό  $U$  στο σημείο  $r_1$ , δηλαδή,

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (3.6)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.5) και (3.6) παίρνουμε τη σχέση μεταξύ της δύναμης και της δυναμικής ενέργειας:

$$F = - \frac{dU}{dr}.$$

### 3.4.6 Κέντρο μάζας

Έστω ένα σύστημα  $n$ -σωματιδίων μαζών  $m_i$ , με συντεταγμένες  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Το κέντρο μάζας του συστήματος είναι το σημείο  $(x_c, y_c)$  όπου:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Έστω χωρίο  $D$  του επιπέδου πυκνότητας  $\rho$ . Εν γένει, η  $\rho$  μπορεί να είναι σταθερή, οπότε τότε λέμε ότι το χωρίο είναι ομογενές, αλλά μπορεί και να μην είναι. Για γενικά χωρία  $D$  του επιπέδου, η πυκνότητα  $\rho$  είναι συνάρτηση των  $x$  και  $y$ . Υπάρχουν όμως δύο μεγάλες κατηγορίες χωρίων για τις οποίες η  $\rho$  είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Λέμε ότι ένα χωρίο  $D$  του επιπέδου είναι τύπου *I* εάν μπορεί να γραφεί ως

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

όπου  $\phi_1(x)$  και  $\phi_2(x)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $x$  στο  $[a, b]$ .

Λέμε επίσης ότι ένα χωρίο  $D$  του επιπέδου είναι τύπου *II* εάν μπορεί να γραφεί ως

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

όπου  $\psi_1(y)$  και  $\psi_2(y)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $y$  στο  $[c, d]$ .

Τέλος, ένα χωρίο  $D$  του επιπέδου λέγεται τύπου *III* αν είναι και τύπου *I* και τύπου *II*. Παράδειγμα τέτοιου χωρίου είναι λ.χ. ο δίσκος κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας  $r$ .

Θα δούμε την περίπτωση που το  $D$  είναι τύπου *I*. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται ως άσκηση. Έδώ, η πυκνότητα είναι συνάρτηση  $\rho = \rho(x)$  και βρίσκουμε το κέντρο μάζας του  $D$  ως εξής: κατ' αρχάς

υπολογίζουμε τη μάζα του  $m$ . Χωρίζουμε το  $[a, b]$  σε  $n$  υποδιαστήματα και στο υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$  η μάζα του στοιχειώδους ορθογωνίου είναι

$$\rho(\xi_k)(\phi_2(\xi_k) - \phi_1(\xi_k)) \cdot \Delta x,$$

όπου  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Άρα, η μάζα δίνεται από την

$$m = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k)(\phi_2(\xi_k) - \phi_1(\xi_k)) \cdot \Delta x = \int_a^b \rho(x)(\phi_2(x) - \phi_1(x)) dx.$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας τώρα είναι

$$x_c = \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x)x(\phi_2(x) - \phi_1(x)) dx, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x) \frac{\phi_2(x) + \phi_1(x)}{2} (\phi_2(x) - \phi_1(x)) dx$$

**Παράδειγμα 3.4.12.** Θα υπολογίσουμε το κέντρο μάζας ομογενούς ημικυκλικού ελάσματος  $D$  που φράσσεται από την  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  και τον άξονα των  $x$ . Γράφουμε το  $D$  ως χωρίο τύπου I:

$$D = \{(x, y) \mid -r \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

Η μάζα του είναι

$$m = \rho \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\rho \pi r^2}{2}.$$

Τώρα

$$\rho \int_{-r}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = 0, \quad (\text{περιττή συνάρτηση})$$

και

$$\frac{\rho}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2\rho r^3}{3}.$$

Συνεπώς το κέντρο μάζας είναι το

$$(x_c, y_c) = \left(0, \frac{2r}{3\pi}\right).$$

Παρατηρήστε ότι το κέντρο μάζας βρίσκεται επάνω στον άξονα των  $y$  που είναι και ο άξονας συμμετρίας του ελάσματος. Αυτό συμβαίνει για κάθε χωρίο με άξονα συμμετρίας. Αυτή παρατήρηση είναι χρήσιμη στον υπολογισμό του κέντρου μάζας στερεού εκ περιστροφής: μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν  $S$  είναι το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή ενός χωρίου τύπου I γύρω από τον άξονα των  $x$ , τότε η μάζα του είναι

$$m = \pi \int_a^b \rho(x)(\phi_2^2(x) - \phi_1^2(x)) dx$$

και το κέντρο μάζας του είναι το  $(x_c, 0)$  όπου

$$x_c = \frac{1}{m} \pi \int_a^b \rho(x)x(\phi_2^2(x) - \phi_1^2(x)) dx.$$

**Παράδειγμα 3.4.13.** (Συνέχεια του Παραδείγματος 3.4.12). Περιστρέφουμε το έλασμα γύρω από τον άξονα των  $x$ . Τότε, η μάζα του στερεού εκ περιστροφής του ημικυκλικού ελάσματος είναι

$$m = \pi \rho \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4\pi \rho r^3}{3}.$$

Επίσης

$$\pi\rho \int_{-r}^r x(r^2 - x^2)dx = 0, \quad (\text{περιττή συνάρτηση}).$$

Άρα, το κέντρο μάζας βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

**Άσκηση.** Βρείτε το κέντρο μάζας του στερεού εκ περιστροφής του ημικυκλικού ελάσματος του Παραδείγματος 3.4.12 γύρω από τον άξονα των  $y$ .

### 3.5 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα της  $f$  όταν:

α)  $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ .

β)  $f(x) = 1/(x + 3)$ .

γ)  $f(x) = 2x/(x^2 + 4)$ .

δ)  $f(x) = \sqrt{ax + b}$ .

ε)  $f(x) = e^{3x-1}$ .

στ)  $f(x) = x(x^2 + 1)^7$ .

ζ)  $f(x) = xe^{-x^2}$ .

η)  $f(x) = \sin^3(x)$ .

2. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα της  $f$  όταν:

α)  $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ .

β)  $f(x) = x^2 \cos(x^3)$ .

γ)  $f(x) = \sin x / (1 + 2 \cos x)$ .

δ)  $f(x) = \ln x / x$ .

3. Με τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα της  $f$  όταν:

α)  $f(x) = x \sin(x + 1)$ .

β)  $f(x) = (x - 1) \ln(x)$ .

γ)  $f(x) = \arctan x$ .

4. Με το να εμφανίσετε τον παρονομαστή στον αριθμητή υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x dx}{a + bx}, \quad \text{και} \quad \int \frac{2x - 1}{2x + 3} dx.$$

5. Με ανάλυση σε απλά κλάσματα υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α)

$$\int \frac{(2x+3) dx}{x(x-1)(x-2)};$$

β)

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4)(1-x)} dx, \quad \text{c) } \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx.$$

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\text{a) } \int \frac{x^2+1}{x^2-x-2} dx, \quad \text{b) } \int \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1} dx.$$

7. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο, να φέρετε τα παρακάτω ολοκληρώματα σε γνωστή μορφή και να τα υπολογίσετε:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x^2+6x+17}, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}} dx.$$

8. Η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

περιστρέφεται γύρω από τον  $x$ -άξονα. Αποδείξτε ότι ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής είναι  $4\pi ab^2/3$ . Μαντέψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής της έλλειψης γύρω από τον  $y$ -άξονα.

9. Βρείτε το κέντρο μάζας του ομογενούς χωρίου σταθερής πυκνότητας  $\rho \equiv 1$  που ορίζεται από τις  $y = 2 \sin(3x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi/3$ .10. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη συμπίεση αερίου από το  $V_1$  στο  $V_2$  κάτω από τις εξής συνθήκες:

$$1. \text{ ισοθερμικά: } P_1 V_1 = P_2 V_2 = RT,$$

$$2. \text{ αδιαβατικά: } P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = \text{σταθ.}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

11. Το τμήμα της  $y = \sin(x)$  για  $x \in [0, \pi]$  περιστρέφεται γύρω από τον  $x$ -άξονα. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής.12. Βρείτε το κέντρο μάζας του στερεού εκ περιστροφής της  $y = x^2$  γύρω από τον άξονα των  $x$ , όταν  $x \in [0, 3]$ .13. Βρείτε τις μέσες τιμές των  $y = \sin x$  και  $y = \sin^2 x$  στο  $[0, \pi]$ .14. Μία δύναμη  $F(t) = m \cos(\pi t)$  δρα σε σωματίδιο μάζας  $m$  στην θετική κατεύθυνση του  $x$ -άξονα σε χρόνο  $t$ . Το σωματίδιο αρχίζει την κίνησή του στο  $x_0 = 0$  στον χρόνο  $t_0 = 0$ . Ποιά είναι η ταχύτητά του  $v(t)$ ; Δείξτε ότι η κίνηση περιγράφεται από την

$$x(t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - \cos(\pi t)).$$

Έστω  $x(T) = a$ . Ποιά είναι το έργο  $W$  που έχει παραχθεί ως εκείνη τη στιγμή;

(Υπόδειξη: Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα:  $F(t) = ma(t)$ , όπου  $a(t)$  είναι η επιτάχυνση).

15. Υπολογίστε τη μέση μοριακή ταχύτητα  $\bar{c}$  μορίων αερίου σε θερμοκρασία  $T$  που δίνεται από την

$$\bar{c} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{mc^2}{2kT}} c^3 dc.$$



# Κεφάλαιο 4

## Σειρές

### 4.1 Σειρές Taylor

Αν μία  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in [a, b]$ , τότε έχουμε διει ότι η εφαπτομένη ευθεία

$$(y =) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

μας δίνει μία (αφηνική) προσέγγιση της  $f$  στο  $x_0$ , δηλαδή μία προσέγγιση από ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Αν η  $f$  είναι  $(n + 1)$  φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  τότε το πολυώνυμο Taylor της  $f$  με κέντρο το  $x_0 \in (a, b)$  ορίζεται ως το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Το σφάλμα της προσέγγισης της  $f$  από το  $P_n$  είναι το υπόλοιπο Taylor-Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x).$$

Όταν η συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και το σφάλμα της προσέγγισης τείνει στο 0, τότε έχουμε το ανάπτυγμα της  $f$  σε σειρά Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

η οποία έχει νόημα για όλα τα  $x$  με

$$|x - x_0| < r, \quad \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right)^{1/n}.$$

Αν  $x_0 = 0$  τότε η παραπάνω σειρά καλείται και σειρά *Maclaurin*. Ο αριθμός  $r$  λέγεται ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor, ενώ το ανοικτό διάστημα  $(x_0 - r, x_0 + r)$  λέγεται διάστημα σύγκλισης της σειράς Taylor.



### 4.1.1 Αναπτύγματα Taylor στοιχειωδών συναρτήσεων

#### Η εκθετική συνάρτηση

Έχουμε ήδη ορίσει την  $e^x$  ως

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επιβεβαιώστε ως άσκηση το αποτέλεσμα. Το ότι το διάστημα σύγκλισης είναι όλο το  $\mathbb{R}$  βασίζεται στο ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n!} \right)^{1/n} = 0.$$

#### Η λογαριθμική συνάρτηση

Η  $f(x) = \ln x$  είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ . Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι: Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3},$$

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4},$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \dots$$

Επιλέγοντας κέντρο το  $x_0 = 1$  παίρνουμε

$$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

Επειδή

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)^{1/n} = 1,$$

παίρνουμε ότι  $r = 1$  και άρα το παραπάνω ανάπτυγμα έχει νόημα όταν  $|x-1| < 1$ . Μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε τον παραπάνω τύπο ως

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| < 1.$$

#### Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου

Βρίσκουμε το ανάπτυγμα Maclaurin της  $f(x) = \sin x$ . Κατ' αρχάς έχουμε ότι

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2k, \\ (-1)^k & \text{αν } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Παίρνουμε έτσι

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Το διάστημα σύγκλισης είναι όλο το  $\mathbb{R}$ . Ομοίως, για την  $g(x) = \cos x$  έχουμε

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{αν } n = 2k, \\ 0 & \text{αν } n = 2k+1. \end{cases}$$

και συνεπώς

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Και πάλι, το διάστημα σύγκλισης είναι όλο το  $\mathbb{R}$ .

### Η γεωμετρική σειρά

Για να βρούμε το ανάπτυγμα Maclaurin της

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x > -1,$$

μπορούμε να ακολουθήσουμε την προηγούμενη τυπική διαδικασία. Εδώ όμως θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα της θεωρίας που λέει ότι μία σειρά Taylor μπορεί να παραγωγηστεί (άπειρες φορές) όρο προς όρο στο διάστημα σύγκλισής της. Επειδή λοιπόν

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \right)' \\ &= \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)' \\ &= (x)' - \left( \frac{x^2}{2} \right)' + \left( \frac{x^3}{3} \right)' - \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n. \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Παραδείγματα και εφαρμογές

Γνρίζοντας τα ανάπτυγματα Taylor στοιχειωδών συναρτήσεων, είναι δυνατόν να γράψουμε τα ανάπτυγματα πολυπλοκότερων συναρτήσεων, γράφοντας τις τελευταίες ως συνδυασμό ή σύνθεση των στοιχειωδών συναρτήσεων των οποίων τα ανάπτυγματα μας είναι γνωστά.

**Παράδειγμα 4.1.1.** Θυμηθείτε ότι για τις συναρτήσεις υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου, αντίστοιχα, είναι

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Από το ανάπτυγμα Taylor τώρα της  $e^x$  έχουμε

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2n!} \cdot x^n \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Παράδειγμα 4.1.2.** Για να βρούμε το ανάπτυγμα της

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

χρησιμοποιούμε αυτό της  $1/(1+x)$ . Γράφουμε για  $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \dots \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4.1.3.** Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμα της  $\arctan x$  χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της θεωρίας που λέει ότι κάθε σειρά Taylor μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο στο πεδίο σύγκλισης της. Για  $|x| < 1$  έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n s^{2n} \right) ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \int_0^x s^{2n} ds \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4.1.4.** Σύμφωνα με το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου, μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα υπό μορφή σειρών. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο, ιδίως για ολοκληρώματα που

είναι ιδιαίτερα δύσκολο έως αδύνατο να υπολογιστούν με τις συμβατικές μεθόδους. Λόγου χάρη, για να υπολογίσουμε το

$$I = \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

γράφουμε χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της  $\cos x$

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \dots$$

και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο στο  $[0, 1]$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n!} \left( \int_0^1 x^{2n+1} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n!)}. \end{aligned}$$

Για  $n = 1$  παίρνουμε την προσέγγιση

$$I_1 = \frac{1}{4}.$$

Για  $n = 2$  παίρνουμε την προσέγγιση

$$I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{96}, \quad \text{κλπ.}$$

**Άσκηση.** Με χρήση σειρών Taylor υπολογίστε το

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

και γράψτε την προσέγγιση  $I_4$ .

**Παράδειγμα 4.1.5.** Μπορούμε χρησιμοποιώντας σειρές Taylor να υπολογίσουμε προσεγγιστικά παραστάσεις που προκύπτουν από μη πολυωνυμικές συναρτήσεις. Λόγου χάρη, γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Οπότε, από το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης παίρνουμε

$$\frac{\pi}{4} \sim 1 - \frac{1}{3} \implies \pi \sim \frac{8}{3} \sim 2.66.$$

Από το πολυώνυμο Taylor τέταρτης τάξης παίρνουμε

$$\frac{\pi}{4} \sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \implies \pi \sim 3.46.$$

Από το πολυώνυμο Taylor έκτης τάξης παίρνουμε

$$\frac{\pi}{4} \sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \implies \pi \sim 2.89$$

Από το πολυώνυμο Taylor όγδοης τάξης παίρνουμε

$$\frac{\pi}{4} \sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \implies \pi \sim 3.33,$$

και συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική τιμή πλησιάζει ταλαντωμένα στην πραγματική τιμή του  $\pi$ .

**Άσκηση.** Προσεγγίστε το  $e$  χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor πέμπτου βαθμού.

**Παράδειγμα 4.1.6.** Τα αναπτύγματα Taylor μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση ορίων απροσδιόριστων μορφών<sup>1</sup>

$$\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{|c|} \hline \infty \\ \hline \infty \\ \hline \end{array}.$$

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin της  $\sin x$  έχουμε

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Παίρνοντας  $x \rightarrow 0$ , η σύγκλιση της σειράς σε όλο το  $\mathbb{R}$  μας εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της  $e^x$  έχουμε

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots} = 0.$$

## 4.2 Σειρές Fourier

Μέσω των σειρών Taylor-Maclaurin, είδαμε ότι οι συναρτήσεις μπορούν να προσεγγιστούν από πολυώνυμα. Ο τρόπος αυτός όμως δεν είναι ο βέλτιστος όταν θέλουμε να προσεγγίσουμε περιοδικές συναρτήσεις. Για να το κάνουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τις *σειρές Fourier* και προσεγγίζουμε τις συναρτήσεις που επιθυμούμε από τα *τριγωνομετρικά πολυώνυμα*:

$$\phi_k(x) = \sum_{n=0}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Εδώ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  και το  $k$  λέγεται *βαθμός* του  $\phi_k$ . Αν τώρα  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(t)$  είναι συνάρτηση, μπορούμε πάντοτε να υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το  $[0, 2\pi]$ , κάνοντας τον μετασχηματισμό

$$x = 2\pi \frac{t - a}{b - a}.$$

<sup>1</sup>Ο γνωστός κανόνας του de l'Hôpital προκύπτει από εδώ.

Ορίζοντας της συνάρτηση στο  $[0, 2\pi]$  μπορούμε πάντα να θεωρούμε την περιοδική της επέκταση σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Υποθέτουμε τώρα την  $f$  συνεχή στο  $[0, 2\pi]$  και θέτουμε:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Τότε, το ανάπτυγμα Fourier της  $f$  δίνεται από την

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

υποθέτοντας ότι το όριο υπάρχει. Σημειώνουμε ότι οι τύποι ισχύουν σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους  $2\pi$ , ας πούμε στο συμμετρικό  $[-\pi, \pi]$ . Τότε ισχύουν ακριβώς οι ίδιοι τύποι όπως παραπάνω, αλλά στο  $[-\pi, \pi]$  και απλοστεύονται σημαντικά όταν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή. Για την ακρίβεια,

- όταν η  $f$  είναι άρτια στο  $[-\pi, \pi]$  τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx),$$

- όταν η  $f$  είναι περιττή στο  $[-\pi, \pi]$  τότε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

**Παράδειγμα 4.2.1.** Για την  $f(x) = x$  ορισμένη και περιττή στο  $[-\pi, \pi]$  έχουμε για  $n \geq 1$ ,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = \begin{cases} \frac{2}{n} & n \text{ περιττός,} \\ -\frac{2}{n} & n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Άρα

$$x = 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x) - \dots$$

**Άσκηση.** Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την  $f(x) = x^2$  στο  $[0, 2\pi]$ . Προσέξτε ότι οι απλοποιημένοι τύποι δεν ισχύουν εφ' όσον η  $x^2$  δεν είναι περιοδική στο  $[0, 2\pi]$ .

**Παράδειγμα 4.2.2.** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & n x \in [-\pi, 0), \\ x & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{4}, \\ a_n &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\ b_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

(Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα).

Έχουμε λοιπόν,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Παρατηρήστε ότι για  $x = 0$ ,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

και προκύπτει ο τύπος

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

### 4.3 Ασκήσεις

1. Βρείτε το ανάπτυγμα Maclaurin των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = 1/(1-x^4)$ ,  $|x| < 1$ .

β)  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

γ)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

δ)  $f(x) = x/(x^2 + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (υπόδειξη: παραγωγίστε όρο προς όρο τη σειρά του γ).

ε)  $f(x) = \sin(x^2)/x^2$ ,  $x \neq 0$ .

2. Με χρήση των σειρών Taylor υπολογίστε τα όρια

α)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin x}.$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

3. Με χρήση των σειρών Taylor δώστε τύπο για το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx,$$

και βρείτε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις.

4. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την  $f(x) = x^3$  στο  $[-\pi, \pi]$ .

5. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\pi, 0), \\ -1 & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

6. Δείξτε μέσω αναπτύγματος Fourier ότι για κάθε  $x \in (0, 2\pi)$  είναι

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$





## Κεφάλαιο 5

# Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

### 5.1 Διανυσματική άλγεβρα

#### 5.1.1 Διανύσματα

Θα δώσουμε γενικούς ορισμούς για τα διανύσματα, που τελικά θα συμφωνούν με όσα έχουμε μάθει για τα διανύσματα του επιπέδου στο σχολείο. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ένα σύνολο  $X$  που είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις: την πρόσθεση  $+$  και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό  $\cdot$  ή βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Η πρόσθεση θέλουμε να έχει τις εξής ιδιότητες:

- *Μεταθετική:*  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ , για κάθε  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ .
- *Προσεταιριστική:*  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  για κάθε  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ .
- *Ουδέτερο στοιχείο:* Υπάρχει  $\mathbf{0} \in X$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ , για κάθε  $\mathbf{x} \in X$ .
- *Αντίθετο στοιχείο:* για κάθε  $\mathbf{x} \in X$ , υπάρχει  $-\mathbf{x} \in X$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

Ο πολλαπλασιασμός με αριθμό θέλουμε να έχει τις εξής ιδιότητες:

- $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ , για κάθε  $\mathbf{x} \in X$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$  για κάθε  $\mathbf{x} \in X$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ , για κάθε  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$  για κάθε  $\mathbf{x} \in X$ .

Ένα σύνολο  $X$  εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, λέγεται *διανυσματικός χώρος*. Ο ορισμός αυτός μας απαλλάσσει από το βάρος όλων των διαισθητικών παρατηρήσεων που χρησιμοποιήσαμε στο σχολείο. Γιατί τώρα, αν πάρουμε τον χώρο  $\mathbb{R}^n$ , **ταυτίζουμε κάθε σημείο του  $P(x_1, \dots, x_n)$  με τό διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το  $P$** . Έτσι, γράφουμε απλώς

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Μένει να απαντήσουμε στο ερώτημα του τί γίνεται με τα διανύσματα που έχουν αρχή κάποιο άλλο σημείο, διαφορετικό από την αρχή. Αυτά, πάντοτε μπορούν να μεταφερθούν παράλληλα ώστε η αρχή

τους να είναι η αρχή των αξόνων. Λόγου χάρη, ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^2$  με αρχή το  $(1, 0)$  και τέλος το  $(0, -2)$ , βρίσκεται επάνω στην ευθεία  $y = 2x - 2$ . Η παράλληλη της ευθείας αυτής που περνά από την αρχή είναι η  $y = 2x$ . Το διάνυσμα  $(-1, -2)$  είναι παράλληλο με το αρχικό μας. Δείτε τώρα ότι το αρχικό διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί ως το  $(-1, -2)$  με αρχή το  $(1, 0)$ . Αυτό το θεωρήσαμε ως δεδομένο όταν σχεδιάζαμε διανυσματικά πεδία. Παρατηρήστε επίσης ότι  $(-1, -2) = (0, -2) - (1, 0)$ , δείτε και αμέσως παρακάτω.

Οι πράξεις τώρα είναι:

- **Πρόσθεση:** Αν  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  και  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , τότε

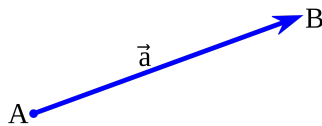
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

- **Πολλαπλασιασμός με αριθμό:** Αν  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

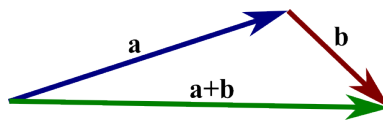
Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι με τους παραπάνω ορισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό, ο  $\mathbb{R}^n$  είναι διανυσματικός χώρος.

Μπορούμε βέβαια να έχουμε πάντοτε στο νου μας τη γεωμετρική περιγραφή των διανυσμάτων σαν προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, μόνο που τώρα η διάσταση του χώρου δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Ένα διάνυσμα  $\mathbf{a}$  όπως στο σχήμα



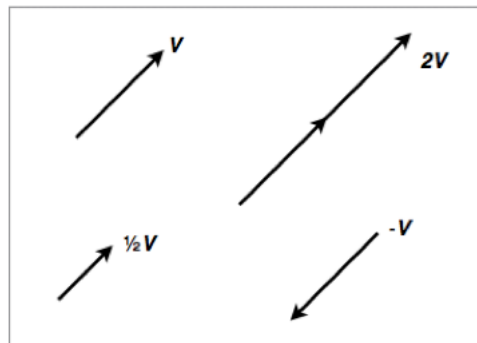
Διάνυσμα  $\mathbf{a}$  με αρχή το  $A$  και τέλος το  $B$ .

μπορεί να βρίσκεται σε οποιονδήποτε χώρο οποιασδήποτε διάστασης. Η γνωστή μας πρόσθεση



Πρόσθεση διανυσμάτων  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός



συμφωνούν απόλυτα με τους αλγεβρικούς ορισμούς που δώσαμε παραπάνω.

Διάνυσμα  $\mathbf{v}$  πολλαπλασιασμένο με διάφορους αριθμούς.

### 5.1.2 Εσωτερικό γινόμενο

Εστω  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  και  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ . Το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  ορίζεται από την

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Έχουμε τις παρακάτω προφανείς ιδιότητες:

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ .
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle = 0$ .
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ .

Ο αριθμός

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

καλείται μέτρο του  $\mathbf{a}$  και μετρά το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει το τέλος του  $\mathbf{a}$  με την αρχή των αξόνων. Κατ' αναλογία, η απόσταση δύο σημείων  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  είναι

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Το μέτρο έχει τις εξής ιδιότητες:

- $|\mathbf{a}| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .
- $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ .
- $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  (Τριγωνική ανισότητα).

Ορίζουμε τη γωνία  $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  από τη σχέση

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Επειδή ισχύει η ανισότητα<sup>1</sup>

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|,$$

η γωνία είναι καλώς ορισμένη:  $\theta \in [0, \pi]$ .

Λέμε ότι τα διανύσματα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  είναι παράλληλα και ομόρροπα  $\mathbf{a} \nearrow \mathbf{b}$ , όταν  $\theta = 0$ . Τα λέμε δε παράλληλα και αντίρροπα  $\mathbf{a} \nwarrow \mathbf{b}$ , όταν  $\theta = \pi$ . Όταν τα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  είναι απλώς παράλληλα ( $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ), τότε

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \begin{cases} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| & \text{όταν } \mathbf{a} \nearrow \mathbf{b}, \\ -|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| & \text{όταν } \mathbf{a} \nwarrow \mathbf{b}. \end{cases}$$

<sup>1</sup> Η ανισότητα αυτή λέγεται ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakovski και είναι από τις σπουδαιότερες στα Μαθηματικά. Αποδεικνύεται ότι η ισότητα ισχύει μόνον όταν τα διανύσματα έχουν γωνία 0 ή  $\pi$ .

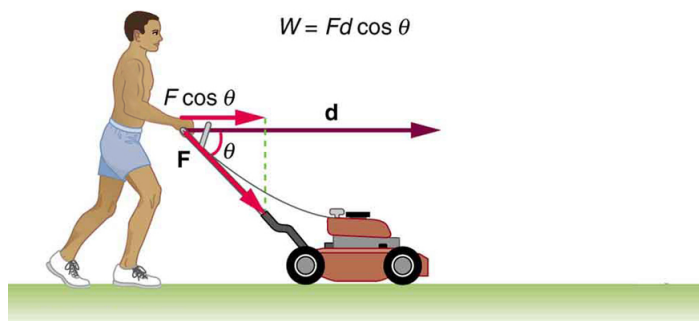
Δύο διανύσματα λέγονται *κάθετα*,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , όταν

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \text{ (ή, ισοδύναμα } \theta = \pi/2).$$

Το εσωτερικό γινόμενο έχει την παρακάτω ερμηνεία που μας έρχεται από την Φυσική: έστω ότι σε ένα υλικό σημείο που κινείται στην κατεύθυνση ενός διανύσματος  $\mathbf{d}$  ασκούμε δύναμη  $\mathbf{F}$ . Τότε το έργο  $W$  που παράγεται ισούται με

$$W = \langle \mathbf{F}, \mathbf{d} \rangle = |\mathbf{F}| |\mathbf{d}| \cos \theta,$$

δείτε το σχήμα.

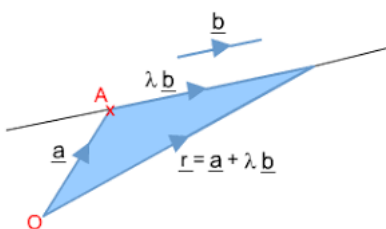


Το έργο είναι το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με το διάνυσμα της κατεύθυνσης

### 5.1.3 Ευθείες και επίπεδα

Στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ , μία ευθεία  $l$  που περνά από το  $\mathbf{a}$  στην κατεύθυνση του  $\mathbf{b}$  έχει *παραμετρική εξίσωση*

$$l(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Ευθεία που περνά από το  $\mathbf{a}$  στην κατεύθυνση του  $\mathbf{b}$ .

Η παραμετρική εξίσωση μιας ευθείας είναι ο οικονομικότερος τρόπος για να την περιγράψουμε.

**Παράδειγμα 5.1.1.** Έστω  $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$  και  $\mathbf{b} = (0, -3, 2)$ . Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που περνά από το  $\mathbf{a}$  στην κατεύθυνση του  $\mathbf{b}$  είναι:

$$\begin{aligned} l(t) &= (1, 0, 5) + t(0, -3, 2) \\ &= (1, 0, 5) + (0, -3t, 2t) \\ &= (1, -3t, 5 + 2t). \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$x = x(t) = 1, \quad y = y(t) = -3t, \quad z = z(t) = 5 + 2t,$$

και απαλείφοντας το  $t$  από τις δύο τελευταίες εξισώσεις

$$t = -\frac{y}{3} = \frac{z-5}{2},$$

παίρνουμε την καρτεσιανή αναπαράσταση της ευθείας:

$$x = 1, \quad 2y + 3z = 15.$$

Δείτε ότι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^3$  περιγράφεται από δύο καρτεσιανές εξισώσεις.

Μία ευθεία στον  $\mathbb{R}^n$  ορίζεται από δύο σημεία  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$ . Η παραμετρική της εξίσωση είναι τότε

$$\mathbf{l}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Δείτε ότι  $\mathbf{l}(0) = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{l}(1) = \mathbf{b}$ . Μία ευθεία στον  $\mathbb{R}^n$ , περιγράφεται από  $n-1$  καρτεσιανές εξισώσεις.

**Παράδειγμα 5.1.2.** Έστω τα σημεία  $\mathbf{a} = (1, 2)$  και  $\mathbf{b} = (-1, 3)$ . Η ευθεία που περνά από τα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  είναι η

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(t) &= (1-t)(1, 2) + t(-1, 3) \\ &= (1-t, 2-2t) + (-t, 3t) \\ &= (1-2t, 2+t). \end{aligned}$$

Για να βρούμε την καρτεσιανή της εξίσωση θέτουμε

$$x = 1 - 2t, \quad y = 2 + t,$$

οπότε

$$t = \frac{1-x}{2} = y-2,$$

από όπου παίρνουμε την

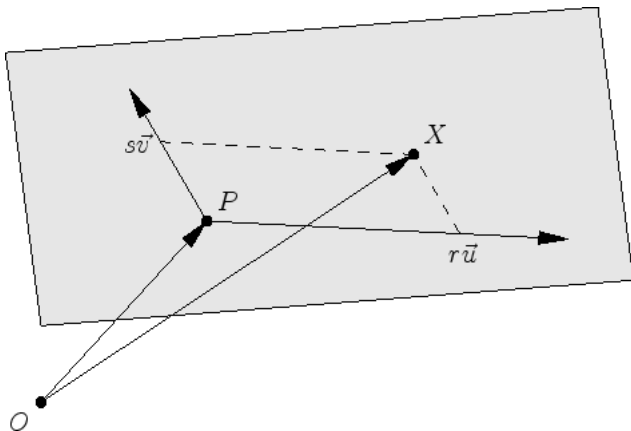
$$x + 2y = 5.$$

**Άσκηση.** Να βρεθεί

1. η ευθεία που περνά από τα σημεία  $\mathbf{a} = (-1, 4, 2)$   $\mathbf{b} = (2, 0, 3)$  και
2. η ευθεία που περνά από το  $(9, 1)$  στην κατεύθυνση του  $(-1, 9)$ .

Βρείτε και τις καρτεσιανές εξισώσεις των παραπάνω ευθειών.

Έστω τώρα διανύσματα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  του  $\mathbb{R}^n$ , τα οποία δεν είναι παράλληλα. Τότε σχηματίζουν ένα επίπεδο  $P$  όπως στο σχήμα.



## Παραμετρική εξίσωση επιπέδου

Για κάθε σημείο  $\mathbf{x}$  του επιπέδου, υπάρχουν  $r, s \in \mathbb{R}$  ώστε

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται *παραμετρική εξίσωση του επιπέδου που περνά από το  $\mathbf{p}$  παράγεται από τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$ .*

**Παράδειγμα 5.1.3.** Αν  $\mathbf{p} = (1, -1, 1)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$  και  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  τότε η παραμετρική εξίσωση του επιπέδου  $P$  που περνά από το  $\mathbf{p}$  παράγεται από τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (x, y, z) &= (1, -1, 1) + r(0, 1, 2) + s(1, 0, 0) \\ &= (1, -1, 1) + (0, r, 2r) + (s, 0, 0) \\ &= (1 + s, -1 + r, 1 + 2r). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω παραμετρική εξίσωση βρίσκουμε τις καρτεσιανές εξισώσεις ως εξής: είναι

$$x = 1 + s, \quad y = -1 + r, \quad z = 1 + 2r.$$

Απαλείφουμε το  $r$  από τις δύο τελευταίες εξισώσεις για να πάρουμε

$$y + 1 = \frac{z - 1}{2} \implies 2y - z + 3 = 0.$$

Ας προσέξουμε τώρα ότι η  $x = 1 + s$  απλώς μας λέει ότι το  $x$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, κατά συνέπεια η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου είναι η  $2y - z + 3 = 0$ .

Όπως θα δούμε παρακάτω, ισχύει ότι ένα οποιοδήποτε επίπεδο  $P$  του  $\mathbb{R}^3$  που περνά από το  $\mathbf{p}$  παράγεται από τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  έχει καρτεσιανή εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + Cz = D, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

**Άσκηση.** Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περνά από το  $(1, 0, 0)$  και παράγεται από τα  $(1, 2, -1)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

**Παράδειγμα 5.1.4.** Όταν μας δίνεται η καρτεσιανή εξίσωση ενός επιπέδου του  $\mathbb{R}^3$ , τότε μπορούμε να βρούμε (μία) παραμετρική του αναπαράσταση. Λόγου χάρι έστω το επίπεδο

$$P: x + y - 2z = 1.$$

Θέτουμε

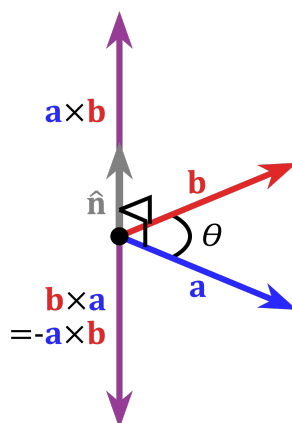
$$x = r, \quad y = s \implies z = \frac{r + s - 1}{2}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \left( r, s, \frac{r + s - 1}{2} \right) \\ &= \left( r, 0, \frac{r}{2} \right) + \left( 0, s, \frac{s}{2} \right) + \left( 0, 0, -\frac{1}{2} \right) \\ &= \left( 0, 0, -\frac{1}{2} \right) + r \left( 1, 0, \frac{1}{2} \right) + s \left( 0, 1, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

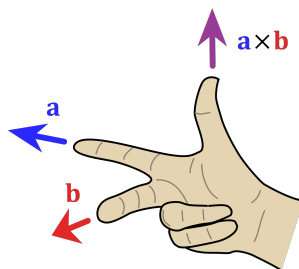
Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^3$ 

Θα ασχοληθούμε με το εξής πρόβλημα: Έστω  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$  που δεν είναι παράλληλα. Υπάρχει διάνυσμα κάθετο και στα δύο; Η απάντηση είναι θετική. Μπορούμε διαισθητικά να αντιληφθούμε ότι υπάρχουν δύο ειδών τέτοια διανύσματα: το πρώτο είδος διανυσμάτων βρίσκεται από το ένα μέρος του επιπέδου που ορίζουν τα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  ενώ το άλλο είδος βρίσκεται από το άλλο μέρος. Επιλέγοντας πρώτα το  $\mathbf{a}$  και κατόπιν το  $\mathbf{b}$ , ορίζουμε το *εξωτερικό γινόμενο*  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ως εξής. Κατ' αρχάς το θέλουμε να βρίσκεται πάνω στην κάθετη ευθεία του επιπέδου που ορίζουν τα  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  και προσέξτε ότι αν επιλέξουμε πρώτα το  $\mathbf{b}$ , προκύπτει διάνυσμα  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  αντίστροφο του  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , όπως στο σχήμα.

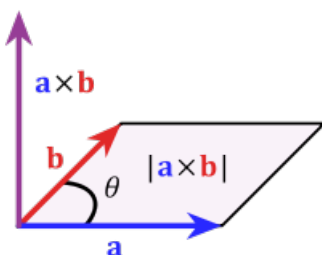


Εξωτερικό γινόμενο

Ο γενικός τρόπος που βρίσκουμε την φορά του  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  περιγράφεται οπτικά στο σχήμα:



Το μέτρο τώρα του  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ορίζεται να είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$ :



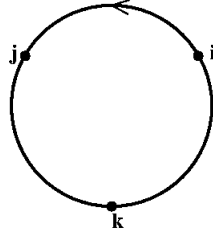


$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta.$$

Μπορούμε να τα δούμε όλα αυτά αλγεβρικά, ξεκινώντας από τα διανύσματα της βάσης<sup>2</sup>

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Τα εξωτερικά γινόμενα αυτών ακολουθούν τον κανόνα του αντίστροφου ωρολογίου



$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Με δεδομένους αυτούς τους κανόνες, αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ας υπογραμμίσουμε πάλι τις ιδιότητες

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Έχοντας το παραπάνω δεδομένα, έστω επίπεδο  $P$  του  $\mathbb{R}^3$  που περνά από το  $\mathbf{p}$  και παράγεται από τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$ . Θεωρούμε το

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

το οποίο είναι κάθετο και στο  $\mathbf{u}$  και στο  $\mathbf{v}$ . Τότε

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \implies \mathbf{x} - \mathbf{p} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με το  $\mathbf{n}$  και έχουμε την

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Αν  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$Ax + By + Cz = D.$$

<sup>2</sup>Κάθε  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  γράφεται ως  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Τα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  είναι μεταξύ τους κάθετα ανά δύο και το καθένα έχει μέτρο 1. Λέμε ότι τα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  αποτελούν την κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

**Παράδειγμα 5.1.5.** Θα βρούμε το επίπεδο που ορίζουν τα  $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$  και  $\mathbf{v} = (0, -1, 2)$  και που περνά από το  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . Κατ' αρχάς

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Οπότε η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$\langle (x, y, z), (1, -2, 1) \rangle = 0 \iff x - 2y - z = 0.$$

**Παράδειγμα 5.1.6.** Για να βρούμε το επίπεδο που έχει κάθετο διάνυσμα τό  $\mathbf{n} = (1, 2, -3)$  και περνά από το  $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ , γράφουμε

$$\langle (x, y, z) - (0, 1, 0), (1, 2, -3) \rangle = 0 \implies x + 2y - 3z = 2.$$

**Παράδειγμα 5.1.7.** Για να βρούμε το επίπεδο που περνά από τρία μη συγγραμμικά σημεία  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  του  $\mathbb{R}^3$ , θέτουμε

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3.$$

(Η επιλογή του  $\mathbf{p}$  είναι αυθαίρετη.)

**Άσκηση.** Βρείτε το επίπεδο που περνά από τα  $(1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 1, -1)$ . (Απάντηση:  $x + z = 1/2$ ).

### 5.1.4 Παραγωγίσιμες καμπύλες

Λέγοντας (παραμετρημένη) καμπύλη  $C$  του  $\mathbb{R}^n$  εννοούμε την εικόνα μιας απεικόνισης  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Μία καμπύλη  $C$  του  $\mathbb{R}^n$  επιδέχεται απείρων παραμετρήσεων. Αποδεικνύεται ότι τα μεγέθη που ορίζουμε παρακάτω είναι ανεξάρτητα από την εκάστοτε παραμέτρηση της καμπύλης.

Θα μιλήσουμε για παραγωγισιμότητα καμπύλης, θεωρώντας την περίπτωση  $n = 2$ .

**Άσκηση.** Γράψτε τα παρακάτω για τη γενική περίπτωση.

Η  $\mathbf{c}$  καλείται *παραγωγίσιμη* στο  $I$  αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι παραγωγίσιμες στο  $I$ . Η παράγωγος

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) := \mathbf{v}(t),$$

καλείται το *διάνυσμα ταχύτητας* στο  $t$ .<sup>3</sup> Η σημασία του διανύσματος της ταχύτητας είναι ότι *εφάπτεται* στην καμπύλη στο σημείο  $\mathbf{c}(t)$ .

**Παράδειγμα 5.1.8.** Μία ευθεία

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}$$

έχει διάνυσμα ταχύτητας  $\mathbf{v} = \mathbf{b}$  και μηδενική επιτάχυνση.

<sup>3</sup>Στην περίπτωση ύπαρξης δευτέρας παραγώγου, το

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{c}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)),$$

είναι το διάνυσμα *επιτάχυνσης* της  $c$ . Τα αριθμητικά μεγέθη

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)|, \quad a(t) = |\mathbf{a}(t)|$$

είναι η *ταχύτητα* και η *επιτάχυνση* της  $c$ , αντίστοιχα.

**Παράδειγμα 5.1.9.** Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = r^2$  παραμετρώνεται από την

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \mathbf{a}(t) = (-\cos t, -\sin t).$$

Παρατηρήσετε ότι

$$\langle \mathbf{c}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0 = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t) \rangle.$$

**Παράδειγμα 5.1.10.** Η παραπάνω σχέση δεν ισχύει γενικά· η ταχύτητα δεν είναι παντοτε κάθετη στην επιτάχυνση. Μία έλικα  $C_r$ ,  $r > 0$ , στον  $\mathbb{R}^3$  για παράδειγμα, έχει παραμέτρηση

$$\mathbf{c}_r(t) = (r \cos t, r \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι η έλικα ανήκει στον ορθό κύλινδρο

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Εδώ,

$$\mathbf{v}(t) = (-r \sin t, r \cos t, 1), \quad \mathbf{a}(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0),$$

και είναι πάλι  $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t) \rangle = 0$ . Όμως, για την *συστραμμένη κυβική*

$$\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι

$$\mathbf{v}(t) = (1, 2t, 3t^2), \quad \mathbf{a}(t) = (0, 2, 6t)$$

και  $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t) \rangle = 4t + 18t^3$ , το οποίο μηδενίζεται μόνον όταν  $t = 0$ , δηλαδή στο σημείο  $\mathbf{c}(0) = (0, 0, 0)$ .

**Παράδειγμα 5.1.11.** Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι η δύναμη  $\mathbf{F}$  που ασκείται σε υλικό σημείο μάζας  $m$  που κινείται σε καμπύλη  $\mathbf{c}(t)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t).$$

Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή,  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ , τότε  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$  και η δύναμη που ασκείται είναι  $\mathbf{0}$ . Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη,  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + (t^2/2)\mathbf{a}$ , όπου  $\mathbf{a}$  είναι σταθερό διάνυσμα, τότε

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a},$$

και η δύναμη έχει σταθερό μέτρο  $|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))| = m|\mathbf{a}|$ .<sup>4</sup> Στην περίπτωση τέλος της κυκλικής κίνησης με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ ,

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

είναι

$$\mathbf{v}(t) = \omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)), \quad \mathbf{a}(t) = \omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)).$$

Άρα,

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$$

και  $|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))| = m\omega^2$ .

<sup>4</sup> Αυτός είναι ο γνωστός σε μας τύπος του σχολείου  $F = m\gamma$ .

## 5.2 Παραγωγήσιμη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Στο εξής θα θεωρούμε συναρτήσεις  $z = f(x, y)$  δύο μεταβλητών· η πραγμάτευση είναι παρόμοια για συναρτήσεις τριών, τεσσάρων ή περισσότερων μεταβλητών. Θα υποθέτουμε επίσης ότι μία τέτοια  $f(x, y)$  ορίζεται σε ένα καλό χωρίο του επιπέδου. Λέγοντας καλό χωρίο, εννοούμε τέτοιο ώστε κάθε σημείο του μπορεί να πλησιάζεται οσοδήποτε κοντά από σημεία του χωρίου. Με άλλα λόγια, δεν θέλουμε το πεδίο ορισμού της  $f$  να έχει απομονωμένα σημεία.

Θεωρούμε τώρα τις εξής δύο συναρτήσεις:

$$\phi(x) = f_y(x), \quad \psi(y) = f_x(y).$$

Η συνάρτηση  $\phi$  παίρνεται από την  $f$  θεωρώντας ότι η μεταβλητή  $y$  είναι σταθερά, ενώ αντίστοιχα, η συνάρτηση  $\psi$  παίρνεται από την  $f$  θεωρώντας ότι η μεταβλητή  $x$  είναι σταθερά. Εάν τώρα η  $\phi$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του  $x$ , ορίζουμε τη μερική παράγωγο της  $f$  ως προς  $x$  από τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\phi}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Εάν η  $\phi$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του  $y$ , ορίζουμε τη μερική παράγωγο της  $f$  ως προς  $y$  από τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

**Παράδειγμα 5.2.1.** Αν  $z = f(x, y) = x^2y + y^2x$ , τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy.$$

**Παράδειγμα 5.2.2.** Αν  $w = f(x, y, z)$ , τότε έχουμε τρεις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Συνεπώς, αν λόγου χάρη θεωρήσουμε την καταστατική εξίσωση των αερίων

$$PV = nRT$$

ως συνάρτηση  $P = P(R, T, V) = nRT/V$ , έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$n \frac{\partial P}{\partial V} + \frac{\partial P}{\partial R} \cdot \frac{\partial P}{\partial T} = 0.$$

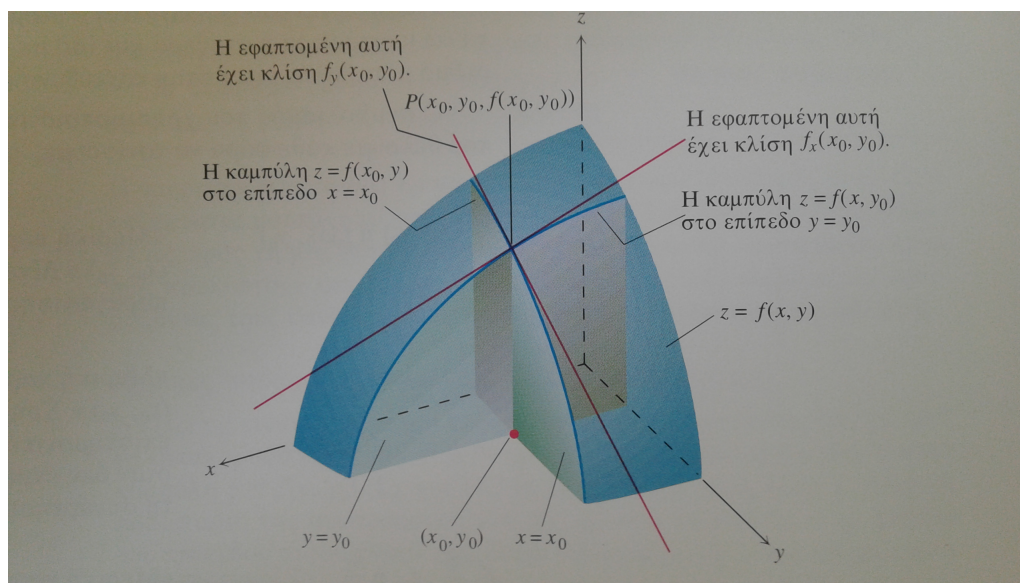
Η παραπάνω σχέση είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της οποίας μία λύση είναι η συνάρτηση  $P(R, T, V) = nRT/V$ .

**Σχόλιο 5.2.3.** Σημειώνουμε ότι οι κανόνες μερικής παραγωγίσιμης είναι ακριβώς οι ίδιοι με τους κανόνες της παραγωγίσιμης στη μία μεταβλητή.

Έστω τώρα συνάρτηση  $z = f(x, y)$  και σημείο  $(x_0, y_0)$  του πεδίου ορισμού της. Η γεωμετρική ερμηνεία των

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

προκύπτει από το παρακάτω σχήμα:



Γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων

Η μερική παράγωγος  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  είναι η παράγωγος της  $\phi$  (της καμπύλης που βρίσκεται στο επίπεδο  $y = y_0$ ) στο  $x_0$  και η μερική παράγωγος  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  είναι η παράγωγος της  $\psi$  (της καμπύλης που βρίσκεται στο επίπεδο  $x = x_0$ ) στο  $y_0$ .

### 5.2.1 Εφαπτόμενο επίπεδο

Εάν μία συνάρτηση  $z = f(x, y)$  έχει μερικές παραγώγους στο σημείο  $P_0 = (x_0, y_0)$ , τότε το *εφαπτόμενο επίπεδο της  $f$  στο  $P_0$*  δίνεται από τον τύπο:

$$z - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y - y_0).$$

Το διάνυσμα

$$\nabla f(P_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right)$$

λέγεται *ανάδελα* (ή, κλίση) της  $f$  στο  $P_0$ . Έτσι, ο τύπος του εφαπτομένου επιπέδου γράφεται και ως

$$z - f(P_0) = \langle \nabla f(P_0), P - P_0 \rangle,$$

όπου  $P = (x, y)$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το βαθμωτό γινόμενο για διανύσματα του επιπέδου:

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

**Παράδειγμα 5.2.4.** Έστω η  $z = x^2 + y^2$  και  $P_0 = (1, -1)$ . Είναι

$$z(P_0) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

και έτσι

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = -2.$$

Οπότε, το εφαπτόμενο επίπεδο στο  $P_0$  είναι

$$\begin{aligned} z - 2 &= \langle (2, -2), (x - 1, y + 1) \rangle \\ &= 2(x - 1) - 2(y + 1) = 2x - 2y - 4. \end{aligned}$$

Άρα,

$$2x - 2y - z = 2$$

είναι η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της  $z$  στο  $P_0$ .

**Παράδειγμα 5.2.5.** Έστω η  $w = x^3 + y^3 - 2z$  και  $P_0 = (1, 1, 1)$ . Είναι

$$w(P_0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2$$

και έτσι

$$\frac{\partial w}{\partial x}(P_0) = 3, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(P_0) = 3, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(P_0) = -2.$$

Οπότε, το εφαπτόμενο επίπεδο στο  $P_0$  είναι

$$\begin{aligned} w - 0 &= \langle (3, 3, -2), (x - 1, y - 1, z - 1) \rangle \\ &= 3(x - 1) + 3(y - 1) - 2(z - 1) = 3x + 3y - 2z - 4. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$3x + 3y - 2z - w = 4$$

είναι η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου<sup>5</sup> της  $w$  στο  $P_0$ .

## 5.2.2 Ορισμός της παραγώγου

Η έννοια του εφαπτομένου επιπέδου συνάρτησης πολλών μεταβλητών σε σημείο της, είναι ανάλογη της έννοιας της εφαπτομένης ευθείας συνάρτησης μίας μεταβλητής σε σημείο της. Θυμηθείτε ότι ενδέχεται μία συνάρτηση μίας μεταβλητής να έχει εφαπτομένη ευθεία σε σημείο της αλλά να *μη* είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση των πολλών μεταβλητών και υπό αυτήν την έννοια, δεν μπορούμε να ορίσουμε καλώς την *παραγωγή* μόνο με την ύπαρξη εφαπτομένου επιπέδου, δηλαδή, μερικών παραγώγων. Πολύ περισσότερο διότι, αποδεικνύεται ότι μία συνάρτηση μπορεί κάλλιστα να έχει μερικές παραγώγους σε σημείο της αλλά να *μη* είναι καν συνεχής στο σημείο αυτό! Για να έχει νόημα όμως ένας καλός ορισμός της παραγώγου, η απόρροια από αυτόν της συνέχειας της συνάρτησης είναι απαραίτητη προϋπόθεση.

<sup>5</sup>Τι σημαίνει εξίσωση της μορφής  $ax + by + cz + dw = 0$  στον 4-διάστατο χώρο; Η κανονική ονομασία είναι *υπερεπίπεδο* εφόσον έχει τρεις διαστάσεις.

Ποιός είναι λοιπόν ο σωστός ορισμός της παραγώγου; Ας θυμηθούμε τον ορισμό στη μία μεταβλητή. Η πρόταση η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  με παράγωγο  $f'(x_0)$  αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

διαβάζεται ισοδύναμα και ως εξής: η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , αν υπάρχει αριθμός  $f'(x_0)$  τέτοιος ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h|}{|h|} = 0.$$

Γράφουμε τώρα τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης οσωνδήποτε μεταβλητών διανυσματικά: λέμε ότι η  $f = f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  του πεδίου ορισμού της αν για το διάνυσμα

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right)$$

ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Εδώ,  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  και  $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ . Παρατηρήστε ότι ο ορισμός της μίας μεταβλητής προκύπτει τώρα από τον ορισμό για τις πολλές μεταβλητές και ότι βέβαια, η διανυσματική γραφή του ορισμού είναι και η πλέον οικονομική. Βεβαίως, είναι μάλλον δύσκολο να ελέγχουμε κάθε φορά την ύπαρξη του ορίου του ορισμού της παραγώγου. Όμως, γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει όταν όλες οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει, αλλά εμάς θα μας απασχολήσουν μόνο τέτοιες καλές συναρτήσεις.<sup>6</sup> Θα γράφουμε επίσης για την παράγωγο στο  $P_0 = \mathbf{x}_0$  ότι

$$f'(P_0) = \nabla f(P_0),$$

δηλαδή, η παράγωγος είναι ένα διανυσματικό μέγεθος.

### 5.2.3 Μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, μπορούμε να ορίσουμε μερικές παραγώγους δεύτερης, αλλά και ακόμη υψηλότερης τάξης. Στην περίπτωση συνάρτησης δύο μεταβλητών  $z = z(x, y)$  έχουμε ότι από τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

ορίζονται οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

και αναλόγως ορίζονται οι μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης κ.ο.κ.

<sup>6</sup>Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται κλάσης  $C^1(\mathbf{x}_0)$ : υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο  $\mathbf{x}_0$ .

**Παράδειγμα 5.2.6.** Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της

$$a = x \cos(xy).$$

Έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 \sin(xy),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy), & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy), & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -x^3 \cos(xy). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Αυτό δεν συμβαίνει καθόλου τυχαία, για την ακρίβεια, συμβαίνει σε όλες τις συναρτήσεις οσωνδήποτε μεταβλητών για μερικές παραγώγους κάθε τάξης, όταν οι συναρτήσεις αυτές είναι πολύ καλές από άποψη παραγωγισιμότητας. Το θεώρημα που μας το εξασφαλίζει αυτό λέγεται Λήμμα του Schwarz. Σύμφωνα με αυτό, εκτός από την παραπάνω σχέση, έχουμε λόγου χάρη,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$$

κ.ο.κ.

#### 5.2.4 Παράγωγος διανυσματικών συναρτήσεων

Θα δώσουμε τον γενικό ορισμό της παραγώγου για απεικονίσεις  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , τις οποίες και θα γράφουμε διανυσματικά

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Θεωρούμε τον **Ιακωβιανό πίνακα** της  $\mathbf{f}$ :

$$D\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι η  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  του πεδίου ορισμού της αν για τον Ιακωβιανό της πίνακα στο  $\mathbf{x}_0$ ,  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}^T|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Εδώ,  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ ,

$$\mathbf{h}^T = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$



η πράξη είναι πολλαπλασιασμός πινάκων και  $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ . Και πάλι, θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις  $\mathbf{f}$  που είναι πολύ καλές, αυτές δηλαδή που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Τέτοιες είναι πάντοτε παραγωγίσιμες. Η παράγωγος εδώ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Οι ιδιότητες της παραγώγου είναι οι αναμενόμενες:

- Αν  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι παραγωγίσιμες και  $k, l \in \mathbb{R}$ , τότε και η  $k\mathbf{f} + l\mathbf{g}$  είναι παραγωγίσιμη και

$$(k\mathbf{f} + l\mathbf{g})'(\mathbf{x}) = k\mathbf{f}'(\mathbf{x}) + l\mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

- Αν  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες, τότε και η  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη και

$$\nabla(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}).$$

- *Κανόνας της αλυσίδας* Ο κανόνας της αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών αλλά και για διανυσματικές συναρτήσεις, έχει μία ενιαία έκφραση. Αν  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι παραγωγίσιμη και η  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$  είναι παραγωγίσιμη, τότε και η  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  είναι παραγωγίσιμη και

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Θα ασχοληθούμε μόνο με ορισμένες περιπτώσεις του κανόνα της αλυσίδας που θα εξετάσουμε αμέσως παρακάτω, αφού ασχοληθούμε πρώτα με μία ειδική περίπτωση διανυσματικών συναρτήσεων.

### 5.2.5 Διανυσματικά πεδία

Ένα διανυσματικό πεδίου είναι μία απεικόνιση  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Αν συμβολίσουμε  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , τότε

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})).$$

Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}$  αντιστοιχίζει σημεία  $\mathbf{x}$  του χώρου των  $n$  διαστάσεων σε διανύσματα  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  των οποίων η αρχή είναι στα  $\mathbf{x}$ . Εάν το διανυσματικό πεδίο  $b\mathbf{F}$  βρίσκεται στον  $\mathbb{R}^2$ , γράφουμε παραδοσιακά

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

ενώ αν βρίσκεται στον  $\mathbb{R}^3$  γράφουμε

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Θα ασχοληθούμε βεβαίως με παραγωγίσιμα διανυσματικά πεδία, ακόμα καλύτερα με πεδία όπου όλες οι  $f_i$  είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς μερικές παραγώγους. Ο Ιακωβιανός πίνακας του  $\mathbf{F}$  είναι ο  $n \times n$  πίνακας

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

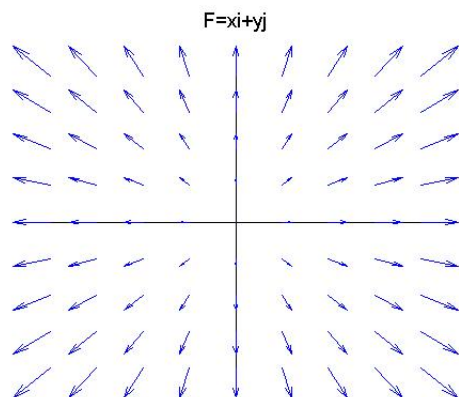
**Παράδειγμα 5.2.7.** Έστω το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ . Η παράγωγος του είναι

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

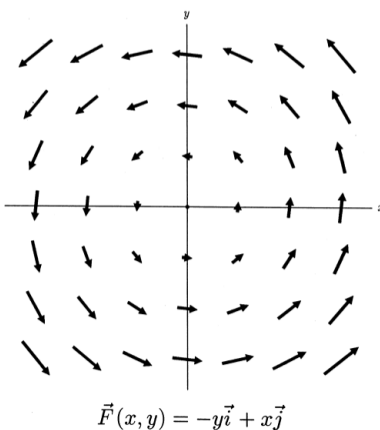
δηλαδή, ο μοναδιαίος  $2 \times 2$  πίνακας. Από την άλλη η παράγωγος του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$  είναι

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

τα διανυσματικά πεδία, όπως λέει και το όνομά τους, απεικονίζουν σημεία σε διανύσματα. Έτσι, η εικόνα του  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$  είναι η παρακάτω:



ενώ η εικόνα του  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$  είναι η



**Άσκηση.** Σχεδιάστε πρόχειρα το βαρυτικό διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

### 5.2.6 Περίπτώσεις του κανόνα της αλυσίδας

Θα αρχεστούμε σε δύο, ιδιαίτερα σημαντικές περιπτώσεις του κανόνα της αλυσίδας.

#### Περίπτωση 1: Σύνθεση συνάρτησης και καμπύλης

Πρόκειται για την περίπτωση όπου έχουμε τη σύνθεση μίας συνάρτησης  $f$  με  $n$  μεταβλητές και μία καμπύλης  $c$  στον  $\mathbb{R}^n$ . Θα αρχεστούμε στην περίπτωση όπου  $z = f(x, y)$  και  $c(t) = (x(t), y(t))$  και καλείστε να γράψετε το γενικό συμπέρασμα ακολουθώντας τα βήματα που θα κάνουμε παρακάτω.

Διατυπώνουμε τον κανόνα της αλυσίδας για την περίπτωση αυτή. Έστω  $\phi = f \circ c$ . Τότε

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \dot{y}(t),$$

ή αλλιώς,

$$\frac{d\phi}{dt} = \langle \nabla f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle.$$

**Παράδειγμα 5.2.8.** Η θερμοκρασία  $T$  κυκλικού δίσκου ακτίνας 1 δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = x^2 - y^2.$$

Θέλουμε να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς τον χρόνο  $t$  στον εξωτερικό κύκλο του δίσκου που παραμετράται από την

$$c(t) = (\cos t, \sin t).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας. Έχουμε

$$\nabla T = (2x, -2y), \quad \dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{d(T \circ c)}{dt} &= \langle \nabla f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \\ &= 2x \sin t - 2y \cos t \\ &= -2 \cos t \sin t - 2 \sin t \cos t \\ &= -4 \sin t \cos t = -2 \sin(2t). \end{aligned}$$

**Άσκηση.** Στο προηγούμενο παράδειγμα, υποθέστε ότι  $t \in [0, 2\pi]$ . Σε ποιά σημεία του εξωτερικού κύκλου ο ρυθμός μεταβολής είναι α) μέγιστος και β) ελάχιστος; Απαντήστε κάνοντας μόνο το σχήμα της  $-2 \sin(2t)$ .

#### Περίπτωση 2: Σύνθεση συνάρτησης και διανυσματικού πεδίου

Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας όπου  $z = f(x, y)$  και  $\mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  ώστε να ορίζεται η σύνθεση

$$z = (f \circ \mathbf{F})(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

η οποία είναι τώρα συνάρτηση των δύο μεταβλητών  $u, v$ . Ο κανόνας της αλυσίδας εδώ μας δίνει τους τύπους

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 5.2.9.** Έστω η  $z = f(x, y)$ ,  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ . Τότε

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1 = -\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Συνεπώς,

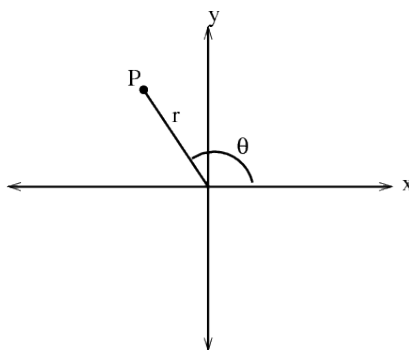
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}.\end{aligned}$$

### 5.2.7 Πολικές συντεταγμένες

Έστω ο μετασχηματισμός του επιπέδου

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta,$$

όπου  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Το ζεύγος  $(r, \theta)$  καλείται *πολικές συντεταγμένες* του σημείου  $(x, y)$ , δείτε το παρακάτω σχήμα.



Πολικές συντεταγμένες

Είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Έτσι, αν  $z = f(x, y)$  είναι παραγωγίσιμη, προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (r \cos \theta).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε τις δύο παραπάνω εξισώσεις: ουσιαστικά πρόκειται για ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Η ορίζουσα του συστήματος είναι<sup>7</sup>

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Οπότε, αν  $r \neq 0$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & r \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial r} \\ -r \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{r}.\end{aligned}$$

Γράψαμε δηλαδή τον κανόνα της αλυσίδας από την ανάποδη. Αυτό δεν είναι δυνατόν σε όλες τις περιπτώσεις. Δοθέντος μετασχηματισμού  $\mathbf{F}$  που ορίζεται από τις

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

μπορούμε να λύσουμε

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

μόνον όταν ο μετασχηματισμός μας είναι 1-1. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων, μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό όταν  $r \neq 0$  και  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Τις περισσότερες φορές όμως δεν μας ενδιαφέρει η εύρεση αυτού καθεαυτού του αντίστροφου μετασχηματισμού αλλά η εύρεση των μερικών παραγώγων του, πράγμα που μόλις κάναμε παραπάνω για την περίπτωση των πολικών συντεταγμένων! Πράγματι, διαβάζοντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{r} = \frac{x}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει τοπικά σύμφωνα με το *Θεώρημα της αντιστροφής* σε όλους τους μετασχηματισμούς του επιπέδου (αλλά και του χώρου) για τους οποίους ισχύει

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

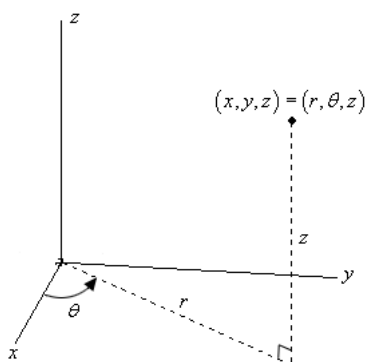
<sup>7</sup>Η ορίζουσα αυτή λέγεται και *Ιακωβιανή ορίζουσα* του μετασχηματισμού.

### 5.2.8 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Έστω ο μετασχηματισμός του χώρου

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta, \quad z = z,$$

όπου  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Η τριάδα  $(r, \theta, z)$  καλείται *κυλινδρικές συντεταγμένες* του σημείου  $(x, y, z)$ , δείτε και το παρακάτω σχήμα.



Κυλινδρικές συντεταγμένες

Εδώ είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta, & \frac{\partial y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial z} &= 1. \end{aligned}$$

**Άσκηση.** Δείξτε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού των κυλινδρικών συντεταγμένων ισούται με  $r$ . Επίσης, εάν  $w = f(x, y, z)$  είναι παραγωγίσιμη, βρείτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας εκφράσεις για τις

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

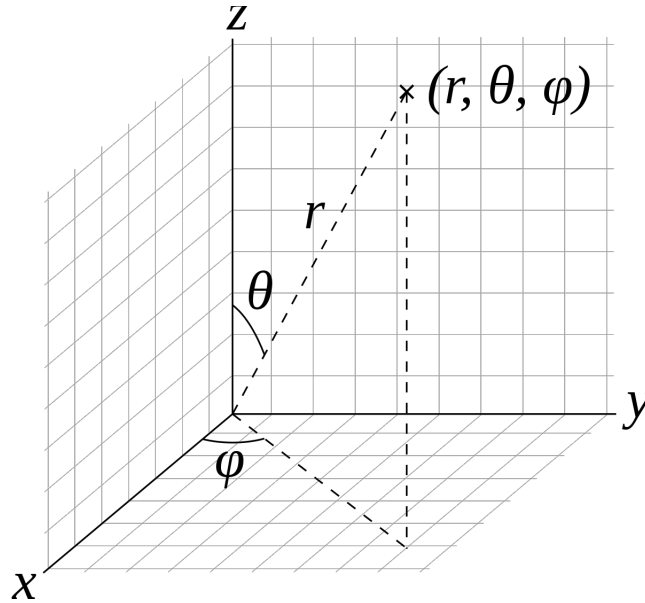
Τι συμβαίνει με την  $\partial w / \partial z$ ; Εφαρμόστε και εδώ τον κανόνα της αλυσίδας και εξηγήστε.

### 5.2.9 Σφαιρικές συντεταγμένες.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι μία παραλλαγή των γνωστών γεωγραφικών συντεταγμένων. Αν  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , έστω  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  η απόστασή του από το  $(0, 0, 0)$ . Η προβολή του στο  $(x, y)$ -επίπεδο έχει απόσταση  $\rho$  από την αρχή, η οποία, λόγω του Πυθαγορείου Θεωρήματος ικανοποιεί τη σχέση

$$r^2 = \rho^2 + z^2.$$

Έστω τώρα  $\phi, \theta$  όπως στο σχήμα.



Σφαιρικές συντεταγμένες

Είναι

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi,$$

ενώ,

$$\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta) = \frac{\rho}{r} \implies \rho = r \sin \theta.$$

Καταλήγουμε ότι ο μετασχηματισμός των σφαιρικών συντεταγμένων δίνεται από τις

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

με  $r \geq 0$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Οι μερικές παράγωγοι είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial x}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial y}{\partial \phi} &= r \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \phi, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial z}{\partial \phi} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta. \end{aligned}$$

**Άσκηση.** Δείξτε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού των κυλινδρικών συντεταγμένων ισούται με  $-r^2 \sin \theta$ . Επίσης, εάν  $w = f(x, y, z)$  είναι παραγωγίσιμη, βρείτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας εκφράσεις για τις

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

### 5.2.10 Διαφορικό συνάρτησης

Αν  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x_1, \dots, x_n)$ , είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, ορίζουμε το διαφορικό της  $df$  από τη σχέση

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Ειδικότερα, αν  $f = f(x, y)$ ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

ενά αν  $f = f(x, y, z)$ ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

**Παράδειγμα 5.2.10.** Για την  $f(x, y) = x^2 - y^2$  είναι

$$df = 2x dx - 2y dy,$$

ενώ για την  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$  είναι

$$df = (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz.$$

Μία έκφραση της μορφής

$$\omega = \sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n) dx_i,$$

λέγεται *διαφορική μορφή* του  $\mathbb{R}^n$ . Θα υποθέτουμε στο εξής ότι όλες οι συναρτήσεις  $P_i$  έχουν μεγάλο βαθμό παραγωγισιμότητας. Ειδικότερα, έχουμε τις μορφές

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

του  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$ , αντίστοιχα.

Ένα πρόβλημα που πηγάζει από τη θεωρία δυναμικού στη Φυσική είναι το ακόλουθο.

*Δεδομένης μορφής  $\omega$  του  $\mathbb{R}^n$ , υπάρχει συνάρτηση  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $d\phi = \omega$ ;*

Περιοριζόμενοι στη διδιάστατη περίπτωση, δοθείσης  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , αναζητούμε  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \quad \text{και} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q.$$

Θα δούμε παρακάτω και ισοδύναμες εκφράσεις του προβλήματος αυτού. Εδώ απλώς παρατηρούμε ότι αν κάτι τέτοιο συμβαίνει για τη διαφορική μορφή  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , τότε αναγκαστικά,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Η συνθήκη  $P_y = Q_x$  αποδεικνύεται ικανή και αναγκαία: Μία μορφή  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  είναι διαφορικό συνάρτησης αν και μόνο αν  $P_y = Q_x$ , αλλά αυτό όμως σε χωρία του επιπέδου που δεν έχουν τρύπες.<sup>8</sup> Τέτοιου είδους μορφές θα καλούνται ακριβείς, ή, ολικά διαφορικά.

**Παράδειγμα 5.2.11.** Έστω η

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy = (x^2 - y^2) dx - 2xy dy.$$

Είναι

$$P_y = -2x = Q_x,$$

<sup>8</sup>Τέτοια χωρία καλούνται απλά συνεκτικά.



άρα η  $\omega$  είναι ακριβής, δηλαδή υπάρχει  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\phi_x = P$  και  $\phi_y = Q$ . Θα δούμε τώρα έναν τρόπο για να εντοπίζουμε τις  $\phi$  των οποίων το διαφορικό ισούται με την  $\omega$ . Προς τούτο, έστω οι σχέσεις

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q. \quad (5.2)$$

Ολοκληρώνουμε την 5.1 ως προς  $x$ :

$$\phi(x, y) = \int (x^2 - y^2) dx = \frac{x^3}{3} - y^2 x + c(y). \quad (5.3)$$

Παραγωγίζουμε την 5.3 ως προς  $y$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2yx + c'(y) = -2xy,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω της 5.2. Άρα,  $c'(y) = 0$  και συνεπώς  $c = \text{σταθ}$ . Καταλήγουμε ότι

$$\phi(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x + c.$$

Παρατηρήστε ότι μπορέσαμε και κάναμε διαγραφή στην 5.3 ακριβώς επειδή ισχύει  $P_y = Q_x$ . Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση κάτι τέτοιο δεν γίνεται.

**Άσκηση.** Επαναλάβετε τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, ολοκληρώνοντας πρώτα την 5.2 ως προς  $y$ .

**Σχόλιο 5.2.12.** Αναφορικά με το Παράδειγμα 5.2.11, είναι ότι με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να βρούμε τη συνάρτηση  $\phi$ , ουσιαστικά λύσαμε και τη διαφορική εξίσωση

$$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0. \quad (5.4)$$

Πράγματι, έχουμε βρει ότι

$$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = d\left(\frac{x^3}{3} - y^2 x\right).$$

Τέτοιες δ.ε. λέγονται *πλήρεις*. Εξισώνοντας με το 0, παίρνουμε

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x = c,$$

που είναι όλες οι λύσεις της 5.4.

Όταν η διαφορική μορφή είναι στον  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

τότε η συνθήκη για να είναι ακριβής είναι

$$P_y = Q_x, \quad Q_z = R_y, \quad R_x = P_z.$$

(Γιατί;) Η διαδικασία για να βρούμε τη  $\phi$  της οποίας η  $\omega$  είναι το διαφορικό, είναι παραπλήσια με αυτή που ακολουθήσαμε για την περίπτωση του  $\mathbb{R}^2$ .

**Παράδειγμα 5.2.13.** Η μορφή

$$\omega = xdx + ydy + zdz$$

είναι ακριβής. Εδώ είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\omega = d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right),$$

παρ' όλα αυτά θα επαναλάβουμε τη διαδικασία για εξάσκηση. Έστω λοιπόν  $\phi$  με

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = z. \quad (5.7)$$

Ολοκληρώνουμε την 5.5 ως προς  $x$ :

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + c_1(y, z). \quad (5.8)$$

Παραγωγίζουμε την 5.8 ως προς  $y$  και εξισώνουμε με την 5.6:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial c_1}{\partial y} = y.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση ως προς  $y$  παίρνουμε

$$c_1(y, z) = \frac{y^2}{2} + c_2(z).$$

Άρα, έχουμε

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_2(z).$$

Παραγωγίζουμε ως προς  $z$  και εξισώνουμε με την 5.7 για να προκύψει

$$c_2'(z) = z \implies c_2(z) = \frac{z^2}{2} + c.$$

### 5.2.11 Διαφορικά και πεπλεγμένες συναρτήσεις

Όταν έχουμε μία έκφραση της μορφής  $f(x, y) = 0$ ,  $f(x, y, z) = 0$  (ή, γενικότερα,  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ), θέλουμε μερικές φορές να γνωρίζουμε αν αυτές οι εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς κάποια συγκεκριμένη μεταβλητή, και αν ναι, ποιές είναι οι εκφράσεις των παραγώγων ως προς τις μερικές παραγώγους της  $f$ .

Ας πάρουμε λόγου χάρη την καταστατική εξίσωση των αερίων  $PV = nRT$  και ας την γράψουμε ως

$$f(P, V, T) = PV - nRT = 0.$$

Παίρνουμε το διαφορικό:

$$df = VdP + PdV - nRdT = 0.$$

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι  $V \neq 0$ , τότε μπορούμε να γράψουμε

$$dP = -\frac{P}{V}dV + \frac{nR}{V}dT. \quad (5.9)$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι  $P = P(V, T)$ , τότε

$$dP = \frac{\partial P}{\partial V}dV + \frac{\partial P}{\partial T}dT. \quad (5.10)$$

Συνεπώς, από τις 5.2.11 και 5.10 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial V} &= -\frac{P}{V}, \\ \frac{\partial P}{\partial T} &= \frac{nR}{V}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι  $P \neq 0$ , τότε

$$dV = -\frac{V}{P}dP + \frac{nR}{P}dT.$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι  $V = V(P, T)$ , τότε με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial P} &= -\frac{V}{P}, \\ \frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{nR}{P}. \end{aligned}$$

Τέλος, για  $R \neq 0$ , έχουμε

$$dT = \frac{V}{nR}dP + \frac{P}{nR}dV.$$

Οπότε, υποθέτοντας  $T = T(P, V)$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial P} &= \frac{V}{nR}, \\ \frac{\partial T}{\partial V} &= \frac{P}{nR}. \end{aligned}$$

Βέβαια, στη συγκεκριμένη περίπτωση, όλα τα παραπάνω θα μπορούσαν να προκύψουν λύνοντας απλώς την  $PV = nRT$  ως προς την μεταβλητή που επιθυμούμε. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι σχεδόν ποτέ δυνατόν στις εργαστηριακές περιπτώσεις. Στην τελείως γενική περίπτωση, έστω  $f = f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Παίρνουμε το διαφορικό

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Εάν κάποια  $\partial f / \partial x_j \neq 0$ , τότε λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς  $dx_j$ :

$$dx_j = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_1 + \dots + \frac{\frac{\partial f}{\partial x_{j-1}}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_{j-1} + \frac{\frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_{j+1} + \dots + \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_n.$$

Το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων μας **εξασφαλίζει** ότι μπορούμε να γράψουμε τοπικά

$$x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

όπου η  $g$  είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και έτσι

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \quad k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n.$$

### 5.2.12 Ολοκληρωτικές καμπύλες, πεδία κλίσεων

Ήδη θα έχετε υποψιαστεί ότι ένα διανυσματικό πεδίο είναι σε άμεση σύνδεση με μία διαφορική μορφή. Πράγματι, αν  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$  είναι διανυσματικό πεδίο, τότε καθορίζει πλήρως τη διαφορική μορφή

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) dx_i,$$

και αντιστρόφως. Τώρα, ένα διανυσματικό πεδίο καθορίζει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Για να το δούμε αυτό, ας πάρουμε τη διδιάστατη περίπτωση όπου

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (5.11)$$

Η σχέση 5.11 καθορίζει επακριβώς το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία του συστήματος αυτού; Εδώ, ο άγνωστος είναι καμπύλη  $c(t) = (x(t), y(t))$  και το σύστημα 5.12 μας ζητά να εντοπίσουμε τις καμπύλες αυτές για τις οποίες

$$\frac{dc}{dt} = (\mathbf{F} \circ c)(t) = \mathbf{F}(x(t), y(t)),$$

με άλλα λόγια τις καμπύλες για τις οποίες ισχύει ότι το εφαπτόμενό τους διάνυσμα ανήκει στο διανυσματικό πεδίο! Αποδεικνύεται ότι υπό κάποιες προϋποθέσεις για το  $\mathbf{F}$ , το σύστημα 5.12 έχει πάντοτε λύση. Οι λύσεις του συστήματος καλούνται **ολοκληρωτικές καμπύλες** του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$ .

**Παράδειγμα 5.2.14.** Για το  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ , το σύστημα δ.ε. είναι το

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y.$$

Απαλείφοντας το  $dt$ , προκύπτει η διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \implies y = cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες λοιπόν είναι οι ευθείες που περνούν από την αρχή.<sup>9</sup>

Τώρα για το  $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ , το σύστημα δ.ε. είναι το

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Απαλείφοντας το  $dt$ , προκύπτει η διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$x dx + y dy = 0 \implies x^2 + y^2 = c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Εδώ οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι οι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή μαζί με το σημείο της αρχής. Δείτε τώρα ξανά τα σχήματα στο Παράδειγμα 5.2.7 για αυτά τα δύο πεδία!

**Σχόλιο 5.2.15.** Για τυχαίο διανυσματικό πεδίο, το σύστημα 5.12 δεν λύνεται τόσο απλά. Εδώ, λίγο πολύ ακολουθήσαμε μία γρήγορη μέθοδο, όπου το  $dt$  απαλείφεται.

Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  λέγεται πεδίο κλίσεων ή συντηρητικό πεδίο αν υπάρχει  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\nabla \phi = \mathbf{F}$ . Η συνάρτηση  $\phi$  καλείται παραδοσιακά συνάρτηση δυναμικού.

Δείτε ότι αν το  $\mathbf{F} = (P, Q)$  είναι πεδίο κλίσεων, τότε η μορφή  $\omega = P dx + Q dy$  είναι ακριβής (ολικό διαφορικό), οπότε αναγκαστικά  $P_y = Q_x$ . Έχουμε πει ότι ισχύει και το αντίστροφο, αρκεί το χωρίο που ορίζεται να μην έχει τρύπες.

**Παράδειγμα 5.2.16.** Έστω  $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + \sin x, x^2)$ . Το  $\mathbf{F}$  είναι πεδίο κλίσεων: αν  $P(x, y) = 2xy + \sin x$  και  $Q(x, y) = x^2$ , τότε  $P_y = Q_x = 2x$ . Θέτουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + \sin x, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2. \quad (5.14)$$

Ολοκληρώνουμε την 5.14 ως προς  $y$ :

$$\phi(x, y) = x^2 y + c(x). \quad (5.15)$$

Παραγωγίζουμε την 5.15 ως προς  $x$  και εξισώνουμε με την 5.13:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + c'(x) = 2xy + \sin x,$$

άρα,

$$c'(x) = \sin x \implies c(x) = -\cos x + c.$$

Η συνάρτηση δυναμικού είναι λοιπόν η

$$\phi(x, y) = x^2 y - \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από την άλλη, προκύπτει ότι η διαφορική εξίσωση

$$(2xy + \sin x) dx + x^2 dy = 0,$$

έχει λύσεις τις καμπύλες

$$x^2 y - \cos x = c.$$

<sup>9</sup> Δείτε ότι και η  $x = 0$  που δεν προκύπτει από τις λύσεις είναι ολοκληρωτική καμπύλη. Πράγματι, παραμετρούμε την ημιευθεία  $x = 0, y \geq 0$  σαν  $c(t) = (0, e^t)$ . Τότε οι  $x(t) = 0, y(t) = e^t$ , ικανοποιούν το σύστημα. Για την ημιευθεία  $x = 0, y \leq 0$  σαν  $c(t) = (0, -e^t)$ .

### 5.3 Ασκήσεις

1.

(1) Γράψτε το διάνυσμα με αρχή  $P$  και τέλος  $Q$  στη μορφή  $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ , όπου:

α)  $P = (1, 2, -7)$ ,  $Q = (9, -7, -8)$ .

β)  $P = (-4, 0, -\sqrt{2})$ ,  $Q = (\sqrt{2} - 1, -\sqrt{3}, 0)$ .

(2) Βρείτε τα  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $c\mathbf{a}$ , όταν

α)  $\mathbf{a} = (1, 1, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (-9, -2, -1)$ .

β)  $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 4, 1)$ .

(3) Βρείτε τα μήκη (μέτρα) των  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  όπως στις περιπτώσεις του (2).

(3) Βρείτε το  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  όπου  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  είναι όπως στις περιπτώσεις του (2).

2. Έστω  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Αποδείξτε τα παρακάτω:

α)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2$ .

β)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  (Νόμος συνημιτόνων).

γ) Συμπεράνατε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$  αν και μόνο αν  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

δ) Αποδείξτε τον νόμο του παραλληλογράμμου:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2).$$

3. Βρείτε τις παραμετρικές καθώς και τις καρτεσιανές εξισώσεις των ευθειών που:

(1) περνούν από το  $\mathbf{p}$  στην κατεύθυνση του  $\mathbf{v}$  όταν:

α)  $\mathbf{p} = (0, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ .

β)  $\mathbf{p} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 2)$ .

(2) περνούν από τα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  όταν:

α)  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1, 4)$ .

β)  $\mathbf{a} = (-7, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$ .

4. Βρείτε τις παραμετρικές καθώς και τις καρτεσιανές εξισώσεις των επιπέδων που:

(1) περνούν από το  $\mathbf{p}$  και παράγονται από τα  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  όταν:

α)  $\mathbf{p} = (-1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{u} = (9, -7, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ .

β)  $\mathbf{p} = (-5, 2, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 2, 4)$ .

(2) περνούν από τα μη συνευθεία  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  όταν:

α)  $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 4)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$ .

$$\beta) \mathbf{a}_1 = (0, -2, 0), \mathbf{a}_2 = (1, 0, 4), \mathbf{a}_3 = (0, 0, -1).$$

5. Βρείτε τα  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  και τα  $\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$  όταν:

$$\alpha) \mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (-1, 0, 2), \mathbf{c} = (0, 2, -3).$$

$$\beta) \mathbf{a} = (2, -1, 0), \mathbf{b} = (0, 0, 2), \mathbf{c} = (1, 0, -3).$$

6. Το μεικτό γινόμενο  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  τριών διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^3$  ορίζεται από τη σχέση

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle.$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς δείξτε ότι η ποσότητα  $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$  παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

7. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων  $z = f(x, y)$  όταν:

$$1. f(x, y) = \cos(x^2 + y^2),$$

$$2. f(x, y) = xy/(x^2 + y^2),$$

$$3. f(x, y) = ax/y^2, a \text{ σταθερά.}$$

8. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων  $z = f(x, y, z)$  όταν:

$$1. f(x, y, z) = x^2y^5 + xz^2,$$

$$2. f(x, y, z) = (x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$3. f(x, y, z) = x \cos y/e^z.$$

9. Βρείτε τις  $f_{xy}$  και  $f_{yx}$  όταν

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

και επιβεβαιώστε το Λήμμα του Schwarz.

10. Έστω

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin(x - y).$$

Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης.

11. Η θερμοκρασία  $T$  ενός ομογενούς σώματος, δίνεται στο σημείο  $(x, y)$  στον χρόνο  $t$  από την

$$T(x, y, t) = \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}.$$

Δείξτε ότι η  $T$  ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση διάχυσης της θερμότητας στο επίπεδο. Η άσκηση αυτή έχει πολλές πράξεις. Μην το βάλετε κάτω!

12. Έστω

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \cdot \log \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

Βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της  $f$ .

13. Έστω  $z = f(x, y)$  και  $c(t) = (x(t), y(t))$  όπου  $x(t) = e^t$ ,  $y(t) = \cos t$ . Βρείτε την έκφραση της

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}$$

με τον κανόνα της αλυσίδας. Υποθέτοντας ότι ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(0)) = 1,$$

δείξτε ότι

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = 1.$$

14.\* Η άσκηση αυτή<sup>10</sup> μας δείχνει τί συμβαίνει όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας σε υψηλότερης τάξης παραγώγους. Έστω  $\psi = \psi(r)$  και  $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . (Μια τέτοια  $\psi$  λέγεται ακτινική συνάρτηση και συναντάται πολλές φορές). Δείξτε με τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\psi}{dr}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{d\psi}{dr}.$$

Θέσατε (για ευκολία)

$$\Psi(r) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr}, \tag{5.16}$$

οπότε οι πιο πάνω σχέσεις γράφονται

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = x\Psi(r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = y\Psi(r).$$

Παραγωγίστμε την αριστερή σχέση ως προς  $x$  και την δεξιά σχέση ως προς  $y$  για να πάρετε:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \Psi(r) + \frac{x^2}{r} \frac{d\Psi}{dr}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Psi(r) + \frac{y^2}{r} \frac{d\Psi}{dr}.$$

(Εξηγήστε!). Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2\Psi(r) + r \frac{d\Psi}{dr}.$$

Αντικαθιστώντας από την (5.16) δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2 \psi}{dr^2}.$$

<sup>10</sup>Στην άσκηση αυτή περιέχονται πολλές έννοιες που δεν έχουν διδαχθεί, αλλά περιγράφονται εν συντομία.



Η παραπάνω έκφραση είναι σημαντική. Η έκφραση

$$\Delta(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

λέγεται *Λαπλασιανή* της  $\psi$  και απαντάται σε πολλές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους· αναφέρουμε ενδεικτικά:

1. εξίσωση του Laplace:

$$\Delta(\psi) = 0,$$

2. εξίσωση της θερμότητας:

$$\Delta(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

3. κυματική εξίσωση:

$$\Delta(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Η άσκηση μας λέει ότι εάν είμαστε τυχεροί και  $x^2 + y^2 = r^2$ , οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται σημαντικά. Θα το διαπιστώσουμε αυτό εντοπίζοντας όλες τις ακτινικές λύσεις της εξίσωσης του Laplace, δηλαδή θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\Delta(\psi) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2} = 0.$$

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε λέγεται *υποβιβασμός της τάξης της διαφορικής εξίσωσης*. Θέτουμε

$$u(r) = \frac{d\psi}{dr}. \quad (5.17)$$

Η εξίσωση του Laplace γίνεται τότε

$$\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} = 0.$$

Αυτή είναι μία δ.ε. όπου οι μεταβλητές χωρίζονται:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}.$$

Παίρνοντας ολοκληρώματα και στα δύο μέλη, προκύπτει

$$\ln |u| = -\ln r + \ln c, \quad c > 0,$$

άρα

$$u(r) = \frac{c}{r}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από την (5.17) τώρα έχουμε

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{c}{r} \implies d\psi = \frac{cdr}{r}.$$

Ολοκληρώνοντας, καταλήγουμε στην

$$\psi(r) = c \ln r + d,$$

όπου  $c, d$  είναι σταθερές. Καλείστε τώρα να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα. Πάρτε

$$\psi(r) = \psi(x, y) = c \ln \sqrt{x^2 + y^2} + d$$

και δείξτε ότι  $\Delta(\psi) = 0$ .

**18.** Βρείτε τα ολικά διαφορικά των συναρτήσεων

α)  $z = x/y,$

β)  $z = x^2y + xy^3,$

γ)  $w = e^{xyz}.$

**19.** Ποιές από τις παρακάτω μορφές είναι ακριβείς; (ολικά διαφορικά). Για αυτές που είναι, βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού.

α)  $(e^y + 1) \cos x dx + e^y \sin x dy,$

β)  $y(x^2 + \ln y) dx + x dy,$

γ)  $2xy dx + (y^2 - x^2) dy,$

δ)  $(x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 7y^3) dx + (y^4 + 2y^2 - x^3 + 5x^2y - 21xy^2) dy.$

**20.** Ο συντελεστής θερμικής επέκτασης ενός αερίου ορίζεται ως

$$\sigma = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}.$$

Βρείτε την  $\sigma$  όταν ικανοποιείται ή εξίσωση van der Waals:

$$(P + (a/V^2))(V - b) = RT.$$

(Υπόδειξη: Θέστε

$$F(P, V, T) = (P + (a/V^2))(V - b) - RT = 0,$$

και πάρτε το ολικό διαφορικό της  $F$ ).

**21.** Χρησιμοποιώντας αυτά που μάθαμε για τις παραγώγους πεπλεγμένων συναρτήσεων, βρείτε την  $dy/dx$  όταν

α)  $3x^2 + 7xy + 9y^2 = 6,$

β)  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2 = 0,$

γ)  $x^3 + y^3 = 3xy,$

δ)  $\sin x \cos y = 1,$

ε)  $x^m y^n = e^{x+y}, m, n \in \mathbb{R}.$

**22.** Έστω  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο  $\mathbb{R}^2$ . Ορίζουμε την απόκλιση του  $F$  με τη σχέση

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Έστω  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη συνάρτηση. Βρείτε έκφραση για το

$$\operatorname{div}(\nabla\phi).$$

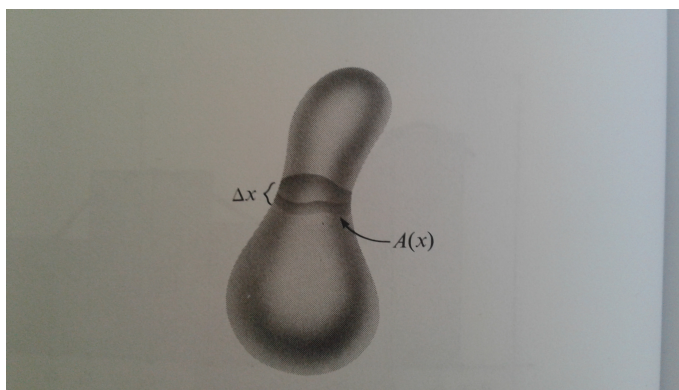


## Κεφάλαιο 6

# Ολοκληρωτικός λογισμός πολλών μεταβλητών

### 6.1 Πολλαπλή ολοκλήρωση

Η ιδέα πίσω από τα πολλαπλά ολοκληρώματα βρίσκεται στην *Αρχή του Cavallieri*, την οποία και περιγράφουμε αμέσως τώρα.<sup>1</sup> Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού  $S$  του παρακάτω σχήματος:



Αρχή του Cavallieri

Η Αρχή του Cavallieri μας λέει ότι εάν σε ύψος  $x$  το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης διατομής είναι  $A(x)$ , τότε ο όγκος  $\text{Vol}(S)$  δίνεται από τον τύπο

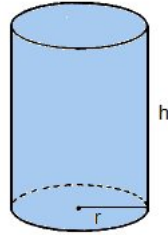
$$\text{Vol}S = \int_0^h A(x) dx.$$

Ο τύπος προκύπτει χωρίζοντας το  $[0, h]$  σε υποδιαστήματα: στο υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$  μήκους  $\Delta x$ , ο όγκος είναι περίπου ίσος με  $A(\xi_k) \cdot \Delta x$ , όπου  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Παίρνοντας το άθροισμα για όλα τα υποδιαστήματα και αφήνοντας το  $\Delta x \rightarrow 0$  έχουμε

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(\xi_k) \cdot \Delta x = \int_0^h A(x) dx.$$

<sup>1</sup>Στην πράξη, ο τρόπος του υπολογισμού όγκου στερεού εκ περιστροφής που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι μία απλή εφαρμογή της Αρχής του Cavallieri.

Επειδή τώρα το εμβαδόν  $A(x)$  είναι ολοκλήρωμα αυτό καθαυτό όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, συμπεραίνουμε ότι ο όγκος είναι ένα ολοκλήρωμα ολοκληρώματος, δηλαδή, ένα διπλό ολοκλήρωμα. Προτού προχωρήσουμε στον ορισμό, ας δούμε ότι η Αρχή του Cavallieri μας βοηθά να υπολογίζουμε όγκους απλών στερεών. Λόγου χάρη, για τον ορθό κύλινδρο  $C$  ύψους  $h$  και ακτίνας  $r$  είναι  $A(x) = \pi r^2$  για κάθε  $x$ .

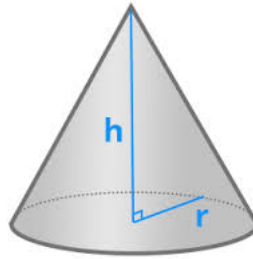


Όγκος κυλίνδρου

Έτσι,

$$\text{Vol}(C) = \int_0^h \pi r^2 dx = \pi r^2 h.$$

Για τον κυκλικό κώνο  $K$  ακτίνας  $r$  και ύψους  $h$ , σε ύψος  $x$  η διατομή του είναι δίσκος ακτίνας  $r_x$  και συνεπώς έχουμε  $A(x) = \pi r_x^2$ .



Όγκος κώνου

Με όμοια τρίγωνα βλέπουμε ότι

$$\frac{h-x}{h} = \frac{r_x}{r},$$

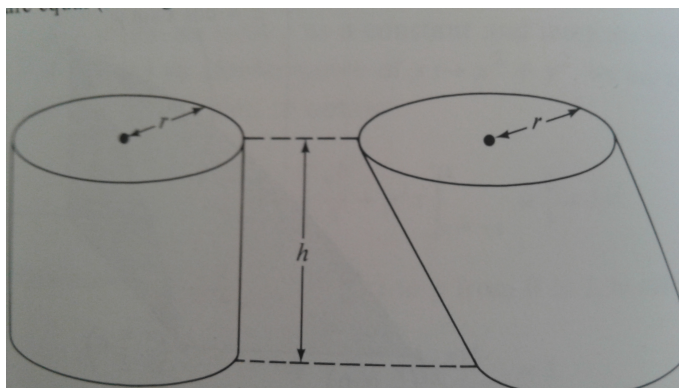
άρα,

$$r_x = r \left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Οπότε,

$$\text{Vol}(K) = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Υπάρχει και μία άλλη σημαντική απόρροια της Αρχής του Cavallieri: Τα παρακάτω σχήματα έχουν τον ίδιο όγκο!



Οι δύο κύλινδροι έχουν τον ίδιο όγκο!

Μπορείτε να δικαιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

## 6.2 Το Θεώρημα Fubini

### 6.2.1 Το Θεώρημα Fubini για ορθογώνια

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών,  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$ , όπου

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

είναι ένα κλειστό ορθογώνιο του επιπέδου με πλευρές παράλληλες με τους άξονες. Θα υποθέτουμε τη συνάρτηση  $f$  συνεχή στο  $R$ . Δεν θα δώσουμε ακριβή ορισμό της συνεχούς συνάρτησης δύο μεταβλητών. Θυμηθείτε όμως τι σημαίνει συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής: η γραφική της παράσταση, που είναι μία καμπύλη στο επίπεδο, δεν έχει κοψίματα ή άλματα. Στην περίπτωση συνάρτησης δύο μεταβλητών, η γραφική της παράσταση είναι μία επιφάνεια στον χώρο· αν αυτή η επιφάνεια δεν έχει οπές, σχισίματα ή κοψίματα, τότε η  $f$  είναι συνεχής! Πριν προχωρήσουμε, τονίζουμε ότι συνεχείς συναρτήσεις δύο ή και περισσότερων μεταβλητών έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις αδελφές τους της μιας μεταβλητής.

Για τέτοιες λοιπόν καλές συναρτήσεις  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  έχουμε το παρακάτω Θεώρημα του Fubini που θα μας χρησιμεύσει σαν ορισμός του διπλού ολοκληρώματος<sup>2</sup> συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Μπορούμε λοιπόν, είτε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς  $x$  (θεωρώντας την  $y$  σταθερά) και κατόπιν ως προς  $y$ , είτε αντιστρόφως. Σημειώνουμε ότι ο ορισμός γενικεύεται για ολοκληρώματα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, συνεχών σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

του  $n$ -χώρου. Λόγου χάρη, για μία συνεχή συνάρτηση  $f(x, y, z)$  συνεχή στο

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

<sup>2</sup>Το διπλό, τριπλό, κ.λπ. ολοκλήρωμα επάνω από ορθογώνια, ορίζεται ως άθροιση, με πανομοιότυπο τρόπο όπως και στη μία μεταβλητή. Εδώ, δε θα υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες του ορισμού αυτού.

ο Fubini μας δίνει

$$\begin{aligned}
 \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx \\
 &= \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy \\
 &= \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy \\
 &= \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\
 &= \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.
 \end{aligned}$$

### Ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων

Παραθέτουμε παρακάτω τις σπουδαιότερες ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων συνεχών συναρτήσεων ορισμένων επάνω από ορθογώνια. Τονίζουμε ότι παρόμοιες ιδιότητες ισχύουν για όλων των ειδών τα πολλαπλά ολοκληρώματα. Έστω  $f, g$  συνεχείς επάνω από το ορθογώνιο  $R$  και  $k, l \in \mathbb{R}$ .

- *Γραμμικότητα.*

$$\iint_R (kf(x, y) + lg(x, y)) dx dy = k \iint_R f(x, y) dx dy + l \iint_R g(x, y) dx dy.$$

- *Θετικότητα.* Αν  $f \geq 0$  στο  $R$ , τότε

$$\iint_R f(x, y) dx dy \geq 0,$$

και όπως θα δούμε παριστάνει τότε (και μόνον τότε) τον όγκο του στερεού ανάμεσα στο γράφημα της  $f$  και το επίπεδο  $xy$ .

- *Ποριματικά από το προηγούμενο προκύπτει ότι αν  $f \geq g$  στο  $R$ , τότε*

$$\iint_R f(x, y) dx dy \geq \iint_R g(x, y) dx dy.$$

- *Αθροιστικότητα.* Αν  $R$  είναι η ένωση δύο μη αλληλοεπικαλυπτομένων ορθογωνίων  $R_1$  και  $R_2$ , τότε

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy.$$

- Σύμφωνα με το Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου, υπάρχουν  $m, M : m = \min_R f$  και  $M = \max_R f$ . Τότε

$$m \iint_R dx dy \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq M \iint_R dx dy.$$

- Μέση τιμή. Υπάρχει  $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε

$$\bar{f} = f(\xi_0, \eta_0) = \frac{\iint_R f(x, y) dx dy}{\iint_R dx dy}.$$

Η  $\bar{f}$  λέγεται ολοκληρωτική μέση τιμή της  $f$ .

**Παράδειγμα 6.2.1.** Έστω η  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ορισμένη στο  $R = [-1, 1]^2$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( 2x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Δείτε ότι λόγω συμμετρίας της συνάρτησης ( $f(x, y) = f(y, x)$ ) δεν έχει απολύτως καμμία σημασία ως προς ποιά μεταβλητή ολοκληρώνουμε πρώτα. Να σημειώσουμε επίσης ότι η  $f$  είναι άρτια και ως προς τις δύο μεταβλητές:  $f(x, y) = f(-x, -y)$ , και είναι επίσης ορισμένη σε συμμετρικό ορθογώνιο, δηλαδή ορθογώνιο της μορφής  $[-a, a] \times [-b, b]$ . Και εδώ, όπως και στη μία μεταβλητή, ισχύει ότι

$$\iint_R f(x, y) dx dy = 2 \iint_{R'} f(x, y) dx dy, \quad R' = [0, a] \times [0, b].$$

**Παράδειγμα 6.2.2.** Έστω η  $f(x, y) = x^7 + y^7$  ορισμένη στο  $R = [-a, a]^2$ ,  $a \neq 0$ . Έχουμε

$$\iint_R f(x, y) dx dy = 0,$$

διότι η  $f$  είναι περιττή και ως προς τις δύο μεταβλητές ( $f(x, y) = -f(-x, -y)$ ) σε συμμετρικό ορθογώνιο. Κάνετε τις πράξεις για να το επιβεβαιώσετε.

**Παράδειγμα 6.2.3.** Έστω η  $f(x, y) = xy$  ορισμένη στο  $R = [0, 1] \times [0, 3]$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^2 xy dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left( \int_0^3 y dy \right) dx \\ &= \left( \int_0^3 y dy \right) \cdot \left( \int_0^1 x dx \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα ολοκληρώματος σε ορθογώνια συνάρτησης της μορφής  $f(x, y) = \phi(x) \cdot \psi(y)$ . Ισχύει τότε (και μόνο τότε) ότι

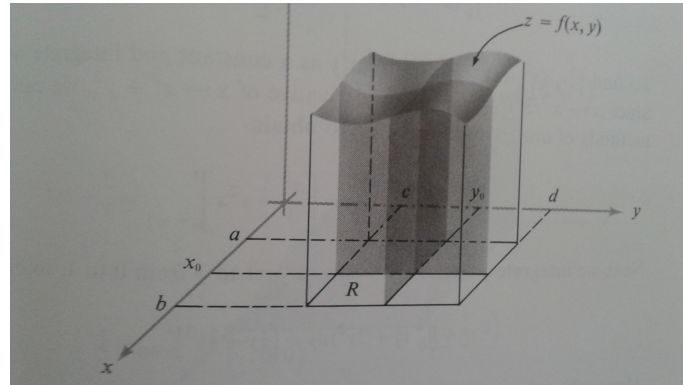
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \left( \int_{a_1}^{b_1} \phi(x) dx \right) \cdot \left( \int_{a_2}^{b_2} \psi(y) dy \right).$$

**Παράδειγμα 6.2.4.** Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για ολοκληρώματα περισσοτέρων μεταβλητών. Λόγου χάρη, για την  $F(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$  ορισμένη στο  $R = [-1, 1]^3$  έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \left( \int_{-1}^1 x^2 dx \right) \cdot \left( \int_{-1}^1 y^2 dy \right) \cdot \left( \int_{-1}^1 z^2 dz \right) \\ &= \left( \int_{-1}^1 x^2 dx \right)^3 \\ &= 8 \left( \int_0^1 x^2 dx \right)^3 = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$



Αν επιθυμούσαμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά το Θεώρημα του Fubini (στην περίπτωση των δύο μεταβλητών), αρκεί να κοιτάξουμε το παρακάτω σχήμα (για απλότητα, θεωρούμε  $f(x, y) \geq 0$ ):



Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Fubini

Το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy.$$

Άρα, από την Αρχή του Cavallieri προκύπτει ότι ο όγκος του στερεού κάτω από το γράφημα είναι

$$\text{Vol} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

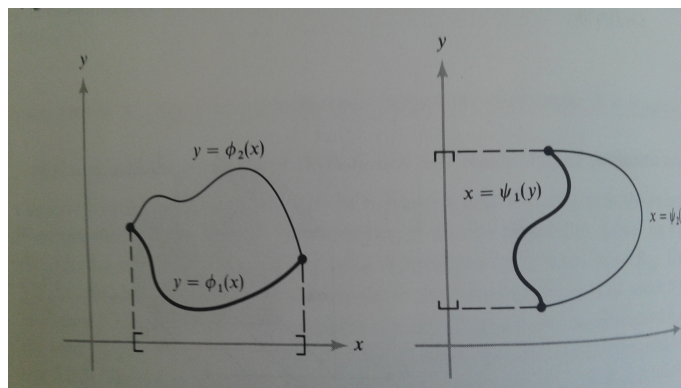
Παίρνοντας τώρα διατομή παράλληλη με τον άξονα των  $x$ , έχουμε επίσης ότι

$$\text{Vol} = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Σχόλιο 6.2.5. Προσοχή!** Τονίζουμε ξανά ότι πήραμε  $f(x, y) \geq 0$  καθαρά για διδακτικούς λόγους: εδώ, το διπλό ολοκλήρωμα είναι θετικό και παριστάνει τον όγκο κάτω από το γράφημα της  $f$ . Όπως και στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, το διπλό ολοκλήρωμα δεν παριστάνει όγκο στη γενική περίπτωση. Οι ιδιότητες που έχει είναι ταυτόσημες με εκείνες του ορισμένου ολοκληρώματος της μίας μεταβλητής. Τονίζουμε επίσης, ότι στις περισσότερες των δύο μεταβλητών μπορούμε μόνο να φανταστούμε το πώς λειτουργεί ο Fubini, εφόσον τα σχήματα βρίσκονται σε χώρους διάστασης  $> 3$ .

## 6.2.2 Το Θεώρημα Fubini για γενικότερα χωρία

Βεβαίως, διπλά ολοκληρώματα επάνω από ορθογώνια είναι ειδικές περιπτώσεις ολοκληρωμάτων. Το ερώτημα που προκύπτει είναι σε τί είδους χωρία μπορούμε να ολοκληρώσουμε μία συνεχή συνάρτηση δύο μεταβλητών; Θυμηθείτε τα χωρία τύπου I, II και III από την Παράγραφο 3.4.6.



Χωρία τύπου I και II

Έστω  $D$  ένα χωρίο τύπου I:

$$D = \{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq b_1, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

όπου  $\phi_1(x)$  και  $\phi_2(x)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $x$  στο  $[a_1, b_1]$ . Τα χωρία τύπου I έχουν την εξής ιδιότητα: κάθε ευθεία κατακόρυφη στον άξονα των  $x$  τέμνει το σύνορο το πολύ σε δύο σημεία. Το Θεώρημα του Fubini μας λέει τότε ότι ισχύει:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

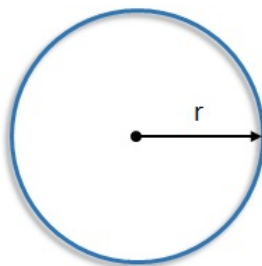
Έστω τώρα  $D$  ένα χωρίο τύπου II:

$$D = \{(x, y) \mid a_2 \leq y \leq b_2, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

όπου εδώ  $\psi_1(y)$  και  $\psi_2(y)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $y$  στο  $[a_2, b_2]$ . Τα χωρία τύπου II έχουν την εξής ιδιότητα: κάθε ευθεία κατακόρυφη στον άξονα των  $y$  τέμνει το σύνορο το πολύ σε δύο σημεία. Το Θεώρημα του Fubini μας λέει τότε ότι ισχύει:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Τέλος, έχουμε τα χωρία τύπου III που είναι τέτοια ώστε να μπορούν να γραφούν και ως τύπου I και ως τύπου II. Το κλασικότερο παράδειγμα είναι ο δίσκος  $\mathbb{D}_r$  κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας  $r$ :



αυτός γράφεται ως

$$\mathbb{D}_r = \{(x, y) \mid -r \leq x \leq r, \quad -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

ως χωρίο τύπου I, αλλά και ως

$$\mathbb{D}_r = \{(x, y) \mid -r \leq y \leq r, \quad -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}\}$$

ως χωρίο τύπου II.

Ανάλογες καταστάσεις υπάρχουν και στην περίπτωση της τριπλής ολοκλήρωσης. Εδώ όμως οι τύποι των χωρίων στους οποίους εφαρμόζεται το Θεώρημα του Fubini είναι περισσότεροι. Λόγου χάρη, ένα χωρίο  $V$  του χώρου είναι τύπου I αν γράφεται ως

$$V = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

αλλά και ως

$$V = \{(x, y, z) \mid a_2 \leq y \leq b_2, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

όπου  $\phi_i, \psi_i, f_i$ ,  $i = 1, 2$  είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών από τις οποίες εξαρτώνται. Στα χωρία τύπου I ο Fubini μας λέει ότι

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

αλλά και ότι

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy.$$

Μία σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι όπως το απλό ολοκλήρωμα εμπλέκεται στον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος, έτσι και το διπλό ολοκλήρωμα εμπλέκεται στον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος. Για να το δείτε αυτό γράψτε

$$\begin{aligned} D = pr_{xy}(V) &= \{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq b_1, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \mid a_2 \leq y \leq b_2, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Από τους παραπάνω τύπους είναι φανερό ότι

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Ο μάλλον απλούστερος τρόπος για να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα είναι να το γράψουμε στην παραπάνω μορφή, όπως θα εξηγήσουμε σε παραδείγματα παρακάτω. Τώρα, χωρία τύπου II και III προκύπτουν αν εναλλάξουμε τα  $x$  και  $z$  στην πρώτη περίπτωση και τα  $y$  και  $z$  στη δεύτερη περίπτωση. Ένα χωρίο τύπου IV είναι αυτό που είναι ταυτόχρονα τύπου I, II και III, με το κλασικό παράδειγμα να είναι της μπάλλας  $\mathbb{B}_r$  κέντρου  $(0, 0, 0)$  και ακτίνας  $r$ :

$$\mathbb{B}_r = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

**Άσκηση.** Γράψτε την  $\mathbb{B}_r$  ως χωρίο τύπου I, II και III (συνολικά θα γράψετε 6 εκφράσεις).

Δίνουμε παρακάτω ορισμένα παραδείγματα: τονίζουμε ότι σε κάθε περίπτωση, το να κάνετε ένα σχήμα (το οποίο παραλείφθηκε σκοπίμως από τα παραδείγματα) είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με το να βρείτε τη μισή λύση!

**Παράδειγμα 6.2.6.** Θα βρούμε το ολοκλήρωμα της  $f(x, y) = x$  στο χωρίο  $D$  που ορίζουν οι  $y = x-1$ , ο άξονας των  $x$  και ο άξονας των  $y$ . Προς τούτο, γράφουμε

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 0\}.$$

Κατά συνέπεια, έχουμε από το Θεώρημα του Fubini:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x-1}^0 x dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left( \int_{x-1}^0 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**Άσκηση.** Γράψτε το χωρίο του προηγούμενου παραδείγματος σαν χωρίο τύπου II και επανυπολογίστε το ολοκλήρωμα της  $f$ .

**Παράδειγμα 6.2.7.** Θα βρούμε το ολοκλήρωμα της  $f(x, y) = x^2 - y$  στο τρίγωνο  $T$  με κορυφές  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  και  $(1, 0)$ . Γράφουμε το τρίγωνο σαν χωρίο τύπου II:

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \quad y - 1 \leq x \leq 1 - y\}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{1-y} (x^2 - y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} - yx \right]_{x=y-1}^{x=1-y} dy \\ &= \dots \end{aligned}$$

συμπληρώστε τις πράξεις. Παρατηρήστε ότι εδώ *συμφέρει* να γράψουμε το  $T$  σαν χωρίο τύπου II. Διότι ειδάλτως, θα έπρεπε να πούμε  $T = T_1 \cup T_2$ , όπου

$$T_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq x + 1\},$$

$$T_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

και

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_{T_1} f(x, y) dx dy + \iint_{T_2} f(x, y) dx dy = \dots$$

**Παράδειγμα 6.2.8.** Θα βρούμε το ολοκλήρωμα της  $f(x, y) = xy$  στο χωρίο  $D$  που ορίζουν οι  $y = x^2$  και  $y = x^3$ . Δείτε ότι η τομή αυτών των δύο καμπυλών είναι τα σημεία  $(0, 0)$  και  $(1, 1)$ . Όταν  $x \in [0, 1]$  έχουμε  $x^2 \geq x^3$ . Συνεπώς

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq x^2\}$$

και

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} xy dy \right) dx = \int_0^1 x \left( \int_{x^3}^{x^2} y dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 6.2.9.** Θα βρούμε το τριπλό ολοκλήρωμα της  $f(x, y, z) = x$  στο χωρίο  $V$  που ορίζουν τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2$  και η  $z = x^2 + y^2$ . Στο πρώτο βήμα, βρίσκουμε την προβολή  $D$  του  $V$  στο επίπεδο  $xy$  εξισώνοντας τις  $z = 2$  και  $z = x^2 + y^2$ : παίρνουμε έτσι ότι το  $D$  είναι ο δίσκος κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας  $\sqrt{2}$  και

$$\begin{aligned}\iint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{x^2+y^2}^2 x dz \right) dx dy \\ &= \iint_D x(2 - x^2 - y^2) dx dy.\end{aligned}$$

καταλήγουμε έτσι σε ένα διπλό ολοκλήρωμα το οποίο καλείστε να υπολογίσετε ως άσκηση. Προσέξτε ότι τα όρια του  $z$  δεν μπήκαν τυχαία: όταν  $(x, y) \in [0, 1]^2$  είναι  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

### 6.3 Εφαρμογές των πολλαπλών ολοκληρωμάτων

#### 6.3.1 Εμβαδά και όγκοι

Το εμβαδόν χωρίου  $D$  του επιπέδου υπολογίζεται και με διπλό ολοκλήρωμα. Για την ακρίβεια,

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy.$$

**Παράδειγμα 6.3.1.** Το εμβαδόν του δίσκου  $\mathbb{D}_r$  είναι

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} dx dy = \int_{-r}^r \left( \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2,\end{aligned}$$

όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ο όγκος χωρίου  $V$  του χώρου υπολογίζεται και με τριπλό ολοκλήρωμα. Για την ακρίβεια,

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V dx dy dz.$$

**Παράδειγμα 6.3.2.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο της μπάλλας  $\mathbb{B}_r$ : έχουμε ότι η προβολή της  $\mathbb{B}_r$  στο  $xy$  επίπεδο είναι ο δίσκος  $\mathbb{D}_r$ , συνεπώς

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\mathbb{B}_r) &= \iint_{\mathbb{D}_r} \left( \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz \right) dx dy \\ &= 2 \iint_{\mathbb{D}_r} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy.\end{aligned}$$

Γράφουμε τώρα το  $\mathbb{D}_r$  ως

$$\mathbb{D}_r = \{(x, y) \mid -r \leq x \leq r, \quad -a = -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} = a\}$$

και έτσι

$$\text{Vol}(\mathbb{B}_r) = 2 \int_{-r}^r \left( \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy \right) dx.$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα όμως παριστάνει απλώς το εμβαδόν δίσκου ακτίνας  $a$  που είναι ίσο με  $\pi a^2 = \pi(r^2 - x^2)$ . Έτσι, καταλήγουμε τελικά στο

$$\text{Vol}(\mathbb{B}_r) = 2\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε πώς τέτοια κάπως πολύπλοκα ολοκληρώματα, είτε διπλά είτε τριπλά, μετασχηματίζονται σε απλούστερα με τους μετασχηματισμούς των πολικών, κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων (οι δύο τελευταίοι αφορούν στα τριπλά ολοκληρώματα).

### Κέντρο μάζας

Στην επίπεδη περίπτωση θα θεωρούμε ένα λεπτό στρώμα  $D$  με συνεχή κατανομή πυκνότητας  $\rho(x, y)$ . Η μάζα  $M$  του  $D$  είναι

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Οι πρώτες ροπές του  $D$  ως προς τους άξονες των  $x$  και των  $y$ , αντίστοιχα, είναι

$$M_x = \iint_D x\rho(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D y\rho(x, y) dx dy$$

και τέλος το κέντρο μάζας  $(x_c, y_c)$  του  $D$  δίνεται από τις

$$x_c = \frac{M_x}{M}, \quad y_c = \frac{M_y}{M}.$$

Σε ένα μηχανικό σύστημα οι πρώτες ροπές αδράνειας μας πληροφορούν για την ισορροπία και την τάση για περιστροφή του σώματος ως προς τους άξονες εντός ενός πεδίου δυνάμεων, ως πούμε ενός βαρυτικού πεδίου. Η φυσική σημασία του κέντρου μάζας έγκειται στο ότι πολλές φορές το σύστημα συμπεριφέρεται ωςάν η μάζα του να είναι όλη συγκεντρωμένη σε ένα σημείο-το κέντρο μάζας.

**Παράδειγμα 6.3.3.** Λεπτό στρώμα που καλύπτει την τετραγωνική περιοχή  $D = [0, 1]^2$  έχει πυκνότητα  $\rho(x, y) = e^{x+y}$ . Η μάζα του είναι

$$M = \iint_D e^{x+y} dx dy = \left( \int_0^1 e^x dx \right)^2 = (e - 1)^2.$$

Η πρώτη ροπή του  $D$  ως προς τον άξονα των  $x$  είναι

$$M_x = \iint_D x e^{x+y} dx dy = \left( \int_0^1 x e^x dx \right) \cdot \left( \int_0^1 e^y dy \right) = e - 1,$$

και λόγω συμμετρίας είναι επίσης  $M_y = e - 1$ . Άρα, το κέντρο μάζας είναι

$$(x_c, y_c) = \left( \frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1} \right).$$

**Άσκηση.** Βρείτε το κέντρο μάζας λεπτού τριγωνικού σώματος με κορυφές στα  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  και  $(0, b)$  που έχει σταθερή πυκνότητα  $\rho$ . Εδώ,  $a, b > 0$ .

**Παράδειγμα 6.3.4.** Πολλά λεπτά στρώματα θεωρούνται με σταθερή πυκνότητα  $\rho$ . Τότε αυτό απαλείφεται από τους τύπους του κέντρου μάζας, το οποίο τότε ονομάζεται και *κεντροειδές*. Θα βρούμε το κεντροειδές λεπτού στρώματος που φράσσεται από τις  $y = x^4$  και  $y = x^3$ . Είναι

$$\int_0^1 \left( \int_{x^4}^{x^3} dy \right) dx = \frac{1}{20}, \quad \int_0^1 \left( \int_{x^4}^{x^3} x dy \right) dx = \int_0^1 (x^4 - x^5) dx = \frac{1}{30},$$

$$\int_0^1 \left( \int_{x^4}^{x^3} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^6 - x^8) dx = \frac{2}{63}.$$

Άρα,

$$(x_c, y_c) = \left( \frac{3}{2}, \frac{63}{20} \right).$$

**Άσκηση.** Διατυπώστε τους τύπους για τη μάζα  $M$  στερεού σώματος  $V$ , για τις πρώτες ροπές αδράνειας του  $M_x, M_y, M_z$  ως προς τους άξονες των  $x, y, z$ , αντίστοιχα, και τέλος τον τύπο του κέντρου μάζας του  $(x_c, y_c, z_c)$ .

### Ροπές αδράνειας

Οι *δεύτερες ροπές αδράνειας* ή, απλώς, *ροπές αδράνειας* εμφανίζονται όταν το μηχανικό μας σύστημα είναι περιστρεφόμενο. Έχουμε τις εξής ροπές:

- Ροπή ως προς τον άξονα των  $x$ :

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy,$$

- Ροπή ως προς τον άξονα των  $y$ :

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

- Πολική ροπή:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy (= I_x + I_y).$$

Οι *δε ακτίνες αδράνειας*,

$$R_x = \sqrt{I_x/M}, \quad R_y = \sqrt{I_y/M}, \quad R_0 = \sqrt{I_0/M},$$

απλώς μας λένε σε πόση απόσταση από τους άξονες (ή την αρχή) θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε συγκεντρωμένη όλη τη μάζα ώστε να πάρουμε τις ίδιες αντίστοιχες ροπές.

**Παράδειγμα 6.3.5.** (Συνέχεια του Παραδείγματος 6.3.3). Η ροπή ως προς τον άξονα των  $x$ :

$$I_x = \iint_D y^2 e^{x+y} dx dy = \left( \int_0^1 y^2 e^y dy \right) \cdot \left( \int_0^1 e^x dx \right) = (e-2)(e-1),$$

και λόγω συμμετρίας

$$I_y = \iint_D x^2 e^{x+y} dx dy = (e-2)(e-1).$$

Από την άλλη,

$$I_0 = I_x + I_y = 2(e-2)(e-1)$$

και τέλος

$$R_x = \sqrt{\frac{e-2}{e-1}} = R_y, \quad R_0 = \sqrt{2 \frac{e-2}{e-1}}.$$

## 6.4 Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής

### 6.4.1 Πολικές συντεταγμένες και διπλά ολοκληρώματα

Επανερχόμαστε για λίγο στα διπλά ολοκληρώματα, για να δούμε πώς ο μετασχηματισμός των πολικών συντεταγμένων που είδαμε προηγουμένως μας βοηθά να υπολογίσουμε κάποια συγκεκριμένα διπλά ολοκληρώματα. Ο μετασχηματισμός αυτός,

$$(r, \theta) \mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta)),$$

με

$$x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y(r, \theta) = r \sin \theta,$$

πάρνει οποιοδήποτε χωρίο της λωρίδας  $[0, +\infty) \times [0, 2\pi)$  του  $(r, \theta)$ -επιπέδου, και το απεικονίζει σε κάποιο χωρίο του  $(x, y)$ -επιπέδου. Το καλό με τον μετασχηματισμό αυτόν, είναι ότι παραλληλόγραμμα του  $(r, \theta)$ -επιπέδου απεικονίζονται σε δίσκους. Ισχύει το εξής:

**Θεώρημα 6.4.1. Αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες.** Έστω  $D^*$  χωρίο του  $(r, \theta)$ -επιπέδου και έστω  $D$  η εικόνα του  $D^*$  στο  $(x, y)$ -επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού των πολικών συντεταγμένων. Τότε, αν μία  $f$  είναι συνεχής στο  $D$ , ισχύει ότι

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot r dr d\theta.$$

**Σχόλιο 6.4.2. Προσοχή!** Ο πολλαπλασιαστικός όρος  $r$  στο αριστερό ολοκλήρωμα είναι απολύτως απαραίτητος· θυμηθείτε ότι είναι ίσος με την Ιακωβιανή ορίζουσα  $J$  των πολικών συντεταγμένων:

$$J = r \geq 0,$$

με την ιδιότητα να ισχύει μόνο στο  $(0, 0)$ .

### Παράδειγμα 6.4.3.

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2)^3 dx dy &= \iint_{[0,2] \times [0,2\pi]} (r^2)^3 \cdot r dr d\theta \\ &= \left( \int_0^2 r^7 dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= \frac{2^9}{8} \cdot \pi. \end{aligned}$$

### Παράδειγμα 6.4.4. Έστω

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_{[0,1] \times [0,\pi/2]} (r \cos \theta)(r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \\ &= \left( \int_0^1 r^3 dr \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

ολοκληρώστε τη λύση.



**Παράδειγμα 6.4.5.** Έστω

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \iint_{[0, \sqrt{2}] \times [-\pi/2, \pi/2]} (r \cos \theta + r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \\ &= \left( \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \right) \cdot \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

ολοκληρώστε τη λύση. Παρατηρήστε εδώ ότι πήραμε το διάστημα ολοκλήρωσης του  $\theta$  να είναι το  $[-\pi/2, \pi/2]$ , ενώ κανονικά θα έπρεπε να πάρουμε το  $[0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$ . Έχουμε όμως αυτήν την ευκολία, λόγω περιοδικότητας! Κάτι παρόμοιο θα κάνουμε και στο επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 6.4.6.** Έστω

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{[0, 3] \times [-\pi/2, 0]} (r \cos \theta)^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \left( \int_0^3 r^3 dr \right) \cdot \left( \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

ολοκληρώστε τη λύση.

### 6.4.2 Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής για διπλά ολοκληρώματα

Στη γενική του μορφή, το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής για διπλά ολοκληρώματα, είναι το εξής:

**Θεώρημα 6.4.7. Αλλαγής μεταβλητής για διπλά ολοκληρώματα.** Έστω  $D^*$  χωρίο του  $(u, v)$ -επιπέδου και έστω  $D$  η εικόνα στου του  $D^*$  στο  $(x, y)$ -επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)).$$

Τότε, αν μία  $f$  είναι συνεχής στο  $D$ , ισχύει ότι

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv,$$

όπου

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού, την οποία και απαιτούμε  $\neq 0$ .

**Παράδειγμα 6.4.8.** Θα υπολογίσουμε το

$$\iint_Q (x+y)(x-y) dx dy$$

στο παραλληλόγραμμο  $Q$  με κορυφές  $(0,0)$ ,  $(1/2, 1/2)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1/2, -1/2)$ . Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$u = x + y, \quad v = x - y,$$

ή αλλιώς

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Ο μετασχηματισμός αυτός είναι γραμμικός και η Ιακωβιανή του ορίζουσα είναι  $J = -1/2$ . Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός έχει την ιδιότητα να απεικονίζει πολύγωνα σε πολύγωνα, άρα αρκεί να βρούμε τις προεικόνες των κορυφών του  $Q$ . Είναι

$$\begin{aligned} (0,0) &\rightarrow (0,0), \\ (1/2, 1/2) &\rightarrow (1,0), \\ (1,0) &\rightarrow (1,1), \\ (1/2, -1/2) &\rightarrow (0,1). \end{aligned}$$

Συνεπώς, η προεικόνα του  $Q$  στο  $(u,v)$ -επίπεδο είναι το τετράγωνο  $[0,1] \times [0,1]$ . Από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής έχουμε τότε

$$\iint_Q (x+y)(x-y) dx dy = \iint_{[0,1]^2} uv \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{8}.$$

Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής γενικεύεται και για τα τριπλά αλλά και για τα γενικότερα πολλαπλά ολοκληρώματα και δεν είναι τίποτε άλλο παρά η μέθοδος αντικατάστασης που μάθαμε στα ολοκληρώματα μιας μεταβλητής.

### 6.4.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες και τριπλά ολοκληρώματα

Ο μετασχηματισμός των κυλινδρικών συντεταγμένων που είδαμε είναι χρήσιμος στον υπολογισμό κάποιων συγκεκριμένων τριπλών ολοκληρωμάτων. Ο μετασχηματισμός αυτός,

$$(r, \theta, z) \mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta), z),$$

με

$$x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y(r, \theta) = r \sin \theta, \quad z = z,$$

παίρνει οποιοδήποτε χωρίο του απείρου παραλληλεπίπεδου  $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  του  $(r, \theta)$  χώρου, και το απεικονίζει σε κάποιο χωρίο του  $(x, y, z)$ -χώρου. Η βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού αυτού, είναι ότι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα του  $(r, \theta, z)$ -χώρου απεικονίζονται σε στερεούς κυλίνδρους του  $(x, y, z)$ -χώρου. Έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 6.4.9. Αλλαγής μεταβλητής σε κυλινδρικές συντεταγμένες.** Έστω  $V^*$  χωρίο του  $(r, \theta, z)$ -χώρου και έστω  $V$  η εικόνα του  $V^*$  στον  $(x, y, z)$ -χώρο μέσω του μετασχηματισμού των κυλινδρικών συντεταγμένων. Τότε, αν μία  $f$  είναι συνεχής στο  $V$ , ισχύει ότι

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(r, \theta), y(r, \theta), z) \cdot r dr d\theta dz.$$

**Παράδειγμα 6.4.10.** Έστω ο κύλινδρος  $C$  που ορίζεται από τις

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad 2 \leq z \leq 3.$$

Μέσω του μετασχηματισμού των κυλινδρικών συντεταγμένων, ο  $C$  είναι η εικόνα του χωρίου  $C^*$  που ορίζεται από τις

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 2 \leq z \leq 3.$$

Εάν  $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$ , τότε με κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\begin{aligned} \iiint_C f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{C^*} ze^{r^2} \cdot r dr d\theta dz \\ &= \left( \int_0^2 re^{r^2} dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left( \int_2^3 z dz \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

συμπληρώστε τη λύση.

**Άσκηση.** Ολοκληρώστε την  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  στον κύλινδρο  $C$  του προηγούμενου παραδείγματος.

#### 6.4.4 Σφαιρικές συντεταγμένες και τριπλά ολοκληρώματα

Ο μετασχηματισμός των σφαιρικών συντεταγμένων είναι ίσως αυτός που απαντάται περισσότερο στον υπολογισμό μιας ευρείας κατηγορίας τριπλών ολοκληρωμάτων. Ο μετασχηματισμός αυτός,

$$(r, \phi, \theta) \mapsto (x(r, \phi, \theta), y(r, \phi, \theta), z(r, \theta)),$$

με

$$\begin{aligned} x(r, \phi, \theta) &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y(r, \phi, \theta) &= r \sin \theta \sin \phi \\ z(r, \theta) &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

παίρνει οποιοδήποτε χωρίο του απείρου παραλληλεπίπεδου  $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$  του  $(r, \phi, \theta)$  χώρου, και το απεικονίζει σε κάποιο χωρίο του  $(x, y, z)$ -χώρου. Εδώ, η βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού των σφαιρικών συντεταγμένων είναι ότι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα του  $(r, \phi, \theta)$ -χώρου απεικονίζονται σε μπάλλες του  $(x, y, z)$ -χώρου. Έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 6.4.11. Αλλαγής μεταβλητής σε σφαιρικές συντεταγμένες.** Έστω  $V^*$  χωρίο του  $(r, \phi, \theta)$ -χώρου και έστω  $V$  η εικόνα στου του  $V^*$  στον  $(x, y, z)$ -χώρο μέσω του μετασχηματισμού των σφαιρικών συντεταγμένων. Τότε, αν μία  $f$  είναι συνεχής στο  $V$ , ισχύει ότι

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(r, \phi, \theta), y(r, \phi, \theta), z(r, \theta)) \cdot r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta.$$

**Παράδειγμα 6.4.12.** Έστω  $A$  ο σφαιρικός δακτύλιος

$$a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, \quad 0 < a < b.$$

Μέσω του μετασχηματισμού των σφαιρικών συντεταγμένων, ο  $A$  είναι η εικόνα του  $A^*$  που ορίζεται από τις σχέσεις

$$a < r < b, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Έστω η συνάρτηση  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ . Τότε

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{A^*} r^{-3} \cdot r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= \left( \int_a^b \frac{dr}{r} \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \cdot \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \\ &= 4\pi \ln(b/a). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 6.4.13.** Έστω  $\mathbb{B}$  η μοναδιαία μπάλα και  $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ . Τότε,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{B}} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} e^{r^3} \cdot r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= \left( \int_0^1 r^2 e^{r^3} dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \cdot \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} (e - 1). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 6.4.14.** Ο όγκος της μπάλας  $\mathbb{B}_r$  με κέντρο την αρχή και ακτίνα  $r$  είναι

$$\text{Vol}(\mathbb{B}_r) = \iiint_{\mathbb{B}_r} dx dy dz = \iiint_{[0,r] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

**Άσκηση.** Ολοκληρώστε την

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} e^{-x^2+y^2+z^2},$$

στο χωρίο του Παραδείγματος 6.4.12.

**Άσκηση.** Διατυπώστε το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής για τριπλά ολοκληρώματα.

## 6.5 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

όταν

- α)  $f(x, y) = x - 2y$  και  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $y = -1$ .
- β)  $f(x, y) = x^2 y$  και  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τον  $x$ -άξονα και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1$ .
- γ)  $f(x, y) = 2xy$  και  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τον  $y$ -άξονα, την  $x = 1$  και τις  $y = x$ ,  $y = x^2 + 1$ .
- δ)  $f(x, y) = xy$  και  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τις  $x = 1 + x^2$ ,  $y = 9 - x^2$ .

(Υπόδειξη: Οποσδήποτε σχεδιάστε το  $D$  σε όλες τις περιπτώσεις!)

2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου  $D$  όταν

α)  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τις  $x = y^2$ ,  $y^2 = 8 - x$ , και

β)  $D$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τις  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 9 - x^2$ .

(Υπόδειξη: Δείτε την πρώτη υπόδειξη!)

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

στο τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ .

(Υπόδειξη: Αφού σχεδιάσετε, παρατηρήστε ότι μόνο ένας τρόπος γραφής του  $D$  μας οδηγεί στη λύση).

4. Να βρεθεί η συνολική κάθετη δύναμη

$$F_D = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} p(r) r dr d\theta$$

που δέχεται ένας επίπεδος δίσκος  $D$  ακτίνας  $R$ , αν η πίεση  $p(r)$  δίνεται από την

$$p(r) = P_0(R - r).$$

Εδώ,  $P_0$  είναι σταθερά.

5. Να υπολογιστεί το

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

όταν

α)  $f(x, y, z) = 3xy^2$  και  $V$  είναι το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = -2$  και  $z = 2$ .

β)  $f(x, y, z) = x^2 y^2$  και  $V$  είναι το χωρίο που περιβάλλεται από τις  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$ .

6. Να υπολογιστεί ο όγκος του χωρίου  $V$  που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$x^2 + z^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1.$$

(Υπόδειξη: Γράψτε το  $V$  ως

$$V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1 - z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - z^2}, (y, z) \in D\}$$

όπου  $D$  είναι η προβολή του  $V$  στο  $(y, z)$ -επίπεδο, και δεν είναι άλλο από τον δίσκο  $y^2 + z^2 \leq 1$  επάνω στο επίπεδο αυτό.)

7. Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας ενός υλικού κυκλικού δίσκου με κέντρο το  $(0, 0)$ , ακτίνα  $r$  και πυκνότητα  $\rho(x, y) = ae^{-\frac{x^2 + y^2}{b}}$ ,  $a, b$  σταθερές.

8. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας α) ως προς τον άξονα των  $x$ , β) ως προς τον άξονα των  $y$  και γ) ως προς την αρχή των αξόνων, του χωρίου

$$D = \{(x, y) \mid (x + 2)^2 + y^2 \leq 4\}$$

του οποίου η πυκνότητα είναι  $\rho(x, y) = k|y|$ ,  $k > 0$ . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες.)

9. Βρείτε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα με τη βοήθεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες:

α) της  $f(x, y) = x^2$  στον δίσκο  $x^2 + y^2 \leq 16$ ,

β) της  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$  στο τμήμα του δίσκου  $x^2 + y^2 \leq 1$  όπου  $y \geq 0$ ,

γ) της  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  στο τμήμα του δίσκου  $x^2 + y^2 \leq R^2$  όπου  $x \leq 0$  και  $y \leq 0$ .

10. Βρείτε τα παρακάτω τριπλά ολοκληρώματα με τη βοήθεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

α) της  $f(x, y, z) = xze^{x^2+y^2}$  όταν  $x^2 + y^2 = 1$  και  $z \in [0, 1]$ ,

β) της  $f(x, y, z) = xy^2$  όταν  $x^2 + y^2 \leq 1$  και  $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ .

11. Βρείτε τα παρακάτω τριπλά ολοκληρώματα με τη βοήθεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες:

α) της  $f(x, y, z) = xy$  όταν  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,

β) της  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$  όταν  $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ ,  $r > 0$ .



## Κεφάλαιο 7

# Επικαμπύλια ολοκληρώματα και το Θεώρημα Green

### 7.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι δύο ειδών. Το πρώτο είδος είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συνάρτησης. Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  συνεχής και  $C$  καμπύλη του  $\mathbb{R}^n$  παραμετροποιημένη από την παραγωγίσιμη  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Τότε

$$\oint_{\mathbf{c}} f ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) |\dot{\mathbf{c}}(t)| dt = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \left( \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2 \right)^{1/2} dt.$$

Αποδεικνύεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συνάρτησης πάνω σε καμπύλη  $S$  είναι ανεξάρτητο της παραμέτρησης  $\mathbf{c}$  της  $S$ . Έτσι θα γράφουμε

$$\oint_S f ds \quad \text{αντί} \quad \oint_{\mathbf{c}} f ds.$$

**Παράδειγμα 7.1.1.** Έστω  $f(x, y) = x^2 - y^2$  και  $C$  ο κύκλος  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Είναι

$$|\dot{\mathbf{c}}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1.$$

Άρα,

$$\oint_C f ds = \int_0^{2\pi} [(\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot 1] dt = \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = 0.$$

**Παράδειγμα 7.1.2.** Έστω  $f(x, y) = x - \ln y$  και  $C$  η ευθεία  $\mathbf{c}(t) = (t - 1, t)$ ,  $t \in [1, 2]$ . Είναι

$$|\dot{\mathbf{c}}(t)| = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Άρα,

$$\oint_C f ds = \int_1^2 [(t - 1 - \ln t) \cdot \sqrt{2}] dt = \dots$$

ολοκληρώστε τον υπολογισμό.



Το δεύτερο είδος επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου. Έστω  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , συνεχές και  $C$  η καμπύλη με παραμέτρηση  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $t \in [a, b]$  παραγωγίσιμη καμπύλη του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε

$$\oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle := \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{c}(t)) \dot{x}_i(t) \right) dt.$$

**Σχόλιο 7.1.3.** Μερικές φορές, τα επικαμπύλια δευτέρου είδους γράφονται και ως ολοκληρώματα μορφών. Ας πάρουμε την περίπτωση ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F} = (P, Q)$  του  $\mathbb{R}^2$  του οποίου θέλουμε να βρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε καμπύλη  $C$  με παραμέτρηση  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_a^b (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)) dt.$$

Αν νοητά απαλείψουμε το  $dt$  από το δεύτερο ολοκλήρωμα, μπορούμε να γράψουμε και

$$\oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_C Pdx + Qdy.$$

**Παράδειγμα 7.1.4.** Έστω  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$  και  $C$  η παραβολή με  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [1, 2]$ . Είναι

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = (1, 2t)$$

και

$$\oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_1^2 (t \cdot 1 + t^2 \cdot (2t)) dt = \int_1^2 (2t^3 + t) dt = \dots$$

ολοκληρώστε τον υπολογισμό.

**Παράδειγμα 7.1.5.** Έστω το

$$I = \oint_{\mathbf{c}} xdx + ydy + zdz, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Είναι

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1),$$

και

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t + t \cdot 1) dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.$$

Υπάρχει ένα θέμα στο οποίο πρέπει να δώσουμε προσοχή. Τί γίνεται όταν δεν μας δοθεί η παραμέτρηση της καμπύλης; Με άλλα λόγια, εξαρτάται το ολοκλήρωμα από την παραμέτρηση; Λόγου χάρη, ας υποθέσουμε ότι μας ζητείται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$  επάνω στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ . Έχουμε άπειρες δυνατότητες να παραμετρήσουμε τον κύκλο· ας εξετάσουμε δύο συγχεκριμένες:

A.  $\mathbf{c}_1(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Είναι

$$\dot{\mathbf{c}}_1(t) = (-\sin t, \cos t)$$

και

$$\oint_{\mathbf{c}_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) dt = 2\pi.$$

B.  $\mathbf{c}_2(t) = (\cos t, -\sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Είναι

$$\dot{\mathbf{c}}_2(t) = (-\sin t, -\cos t)$$

και

$$\oint_{\mathbf{c}_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_0^{2\pi} (\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot (-\cos t)) dt = -2\pi.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά προσήμου στις τιμές των δύο ολοκληρωμάτων. Ισχύει κάτι ακόμα περισσότερο· όποια παραμέτρηση και αν θεωρήσετε για τόν συγκεκριμένο κύκλο, οι τιμές που θα βρίσκουμε για το ολοκλήρωμα θα είναι πάντοτε  $\pm 2\pi$ .

Εξηγούμε αμέσως τώρα γιατί συμβαίνει αυτό, εξηγώντας την έννοια της *προσανατολισμένης* καμπύλης. Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

1. Η καμπύλη μας έχει διαφορετικά άκρα  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ . Υπάρχουν δύο τρόποι να περπατήσουμε πάνω στην καμπύλη: α) από το  $\mathbf{p}_1$  στο  $\mathbf{p}_2$  και β) από το  $P_2$  στο  $P_1$ . Και οι δύο τρόποι μας δίνουν την ίδια απόλυτη τιμή για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου, αλλά διαφέρουν στο πρόσημο. Την πρώτη φορά λέμε ότι η καμπύλη είναι *προσανατολισμένη από το  $\mathbf{p}_1$  στο  $\mathbf{p}_2$*  ενώ τη δεύτερη φορά λέμε ότι η καμπύλη είναι *προσανατολισμένη από το  $\mathbf{p}_2$  στο  $\mathbf{p}_1$* .

**Παράδειγμα 7.1.6.** Για να βρούμε το (προσανατολισμένο) επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C x dx + y dy$$

όπου  $C$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το  $(0, 1)$  και τελειώνει στο  $(1, 1)$ , παίρνουμε παραμέτρηση

$$\mathbf{c}(t) = (1-t)(0, 1) + t(1, 1) = (t, 1), \quad t \in [0, 1].$$

Δείτε ότι  $\mathbf{c}(0) = (0, 1)$ , και  $\mathbf{c}(1) = (1, 1)$ . Είναι

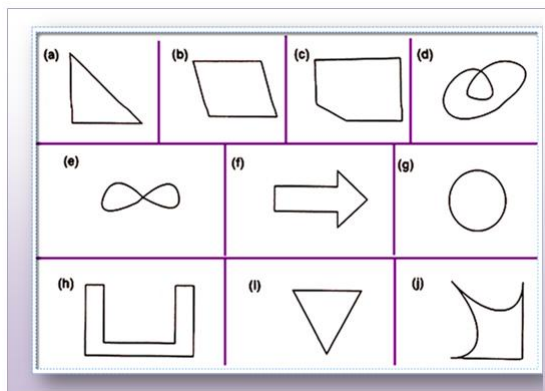
$$\dot{\mathbf{c}}(t) = (1, 0)$$

και άρα

$$I = \int_0^1 (t \cdot 1 + 1 \cdot 0) dt = \frac{1}{2}.$$

Πάρτε τώρα την παραμέτρηση  $\mathbf{c}(t) = (1-t)(1, 1) + t(1, 0)$  και θα διαπιστώσετε ότι η τιμή που θα βρείτε είναι  $-1/2$ .

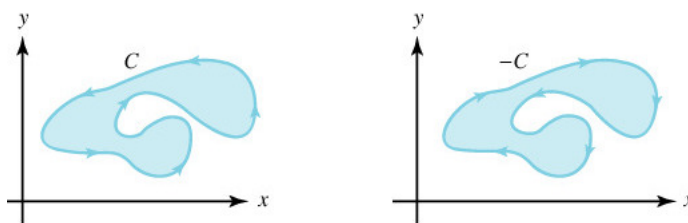
2. Η καμπύλη είναι *κλειστή*. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε παραμέτρησή της,  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , ισχύει ότι  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ . Οι καμπύλες γενικά διακρίνονται σε *απλές* και *μη απλές*. Οι δεύτερες έχουν αυτοτομές (βρόχους) ενώ οι πρώτες όχι. Δείτε το παρακάτω σχήμα με ορισμένες κλειστές καμπύλες του επιπέδου:

Απλές και μη απλές κλειστές καμπύλες του  $\mathbb{R}^2$ 

Όλες είναι απλές, εκτός από τις d), e), που έχουν αυτοτομές. Θα περιοριστούμε στις απλές κλειστές καμπύλες του  $\mathbb{R}^2$ . Σύμφωνα με ένα σπουδαίο θεώρημα του Jordan, αν  $C$  είναι μία απλή κλειστή καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$ , τότε εκτός από την ίδια τη  $C$  υπάρχουν δύο ξένα μεταξύ τους χωρία του επιπέδου: το εξωτερικό  $\text{ext}(C)$  και το εσωτερικό  $\text{int}(C)$  της  $C$  για τα οποία ισχύει<sup>1</sup>

$$\text{ext}(C) \cup \text{int}(C) \cup C = \mathbb{R}^2.$$

Ορίζουμε τώρα προσανατολισμό σε απλές κλειστές καμπύλες του επιπέδου ως εξής: Θα λέμε ότι η  $C$  είναι προσανατολισμένη με τη θετική φορά, αν περπατώντας επάνω στη  $C$  έχουμε πάντα στα αριστερά μας το εσωτερικό της  $\text{int}(C)$ . Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι η  $C$  είναι προσανατολισμένη με την αρνητική φορά.

Θετικά (αριστερά) και αρνητικά (δεξιά) προσανατολισμένη απλή κλειστές καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$ 

### 7.1.1 Θεμελιώδες θεώρημα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων

Το θεμελιώδες θεώρημα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων μας λέει πως αν  $C$  είναι μια προσανατολισμένη καμπύλη του  $\mathbb{R}^n$  με αρχή  $\mathbf{p}_1$  και τέλος  $\mathbf{p}_2$  και αν  $f(x_1, \dots, x_n)$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάθε σημείο της  $C$  με την κλίση  $\nabla f$  να είναι συνεχής στην  $C$ , τότε

$$\oint_C (\nabla f, ds) = f(\mathbf{p}_2) - f(\mathbf{p}_1).$$

<sup>1</sup>Ίσως αυτο να φαίνεται προφανές, αλλά δεν είναι. Πέραν αυτού, η απόδειξη μόνο τετριμμένη δεν μπορεί να θεωρηθεί.

Το θεώρημα αυτό έχει άμεσες συνέπειες για τα συντηρητικά διανυσματικά πεδία. Αν λόγου χάρη  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ , τότε

$$\oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \oint_C \langle \nabla\phi, d\mathbf{s} \rangle = \phi(\mathbf{p}_2) - \phi(\mathbf{p}_1),$$

με άλλα λόγια, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού πεδίου είναι ανεξάρτητο του δρόμου. Πορισματικά, προκύπτει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού πεδίου επάνω σε μία κλειστή καμπύλη είναι 0.

**Παράδειγμα 7.1.7.** Το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (\pi y \cos(\pi x), \sin(\pi x)),$$

είναι συντηρητικό. Η συνάρτηση δυναμικού του είναι η

$$\phi(x, y) = y \sin(\pi x).$$

(Γιατί;) Αν  $C$  είναι οποιαδήποτε καμπύλη που ενώνει τα  $(1/2, 1)$  και  $(1, 1)$ , τότε

$$\oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \phi((1, 1)) - \phi((1/2, 1)) = -1/2.$$

**Παράδειγμα 7.1.8.** Σύμφωνα με τον Νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα, η βαρυτική δύναμη που ασκείται από μία δοθείσα σημειακή μάζα  $m$  στην αρχή, επάνω σε μία μοναδιαία σημειακή μάζα ποψ βρίσκετα στο  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  ισούται με

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

όπου  $G$  είναι η παγκόσμια βαρυτική σταθερά. Διαπιστώστε ότι

$$\mathbf{F} = \nabla f, \quad f(\mathbf{r}) = Gm|\mathbf{r}|^{-1}.$$

Αν τώρα έχουμε μια καμπύλη  $C$  που ενώνει τα  $(1, -2, 3)$  και  $(1, 0, 0)$ , το έργο που παράγεται από την  $\mathbf{F}$  πάνω σε μία μοναδιαία σημειακή μάζα που διασχίζει την  $C$  είναι

$$W = \int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = f(1, 0, 0) - f(1, -2, 3) = Gm \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{14}} \right).$$

### 7.1.2 Διατήρηση της ενέργειας

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα καταλήγουμε στον Νόμο Διατήρησης της Ενέργειας. Έστω λοιπόν δύναμη  $\mathbf{F}$  που ασκείται σε αντικείμενο μάζας  $m$  που κινείται επάνω σε καμπύλη με παραμέτρηση

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα,

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t),$$

οπου  $\mathbf{a}$  είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης της  $\mathbf{c}$ . Το έργο που παράγεται από την άσκηση της  $\mathbf{F}$  επάνω στο αντικείμενο είναι

$$W = \oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt,$$

όπου  $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{v}$  είναι το διάνυσμα ταχύτητας της  $\mathbf{c}$ . Χρησιμοποιώντας τώρα τον Δεύτερο νόμο του Νεύτωνα γράφουμε

$$\begin{aligned} W &= m \int_a^b \langle \ddot{\mathbf{c}}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{c}}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{c}}(t)|^2 dt = \frac{m}{2} [\mathbf{v}(t)]_a^b, \end{aligned}$$

με την τελευταία σχέση να προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Συνεπώς,

$$W = \frac{m}{2} |\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{m}{2} |\mathbf{v}(a)|^2.$$

Η ποσότητα

$$E_{kin}(t) = \frac{m}{2} |\mathbf{v}(t)|^2,$$

καλείται *κινητική ενέργεια του αντικειμένου*.<sup>2</sup> Το έργο λοιπόν που παράγεται ισούται με τη διαφορά της κινητικής ενέργειας μεταξύ των δύο άκρων της καμπύλης που κινείται το αντικείμενο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό:

$$\mathbf{F} = -\nabla f.$$

Θυμόμαστε ότι από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{d(f \circ \mathbf{c})(t)}{dt} = \langle \nabla(f(\mathbf{c}(t))), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle.$$

Λόγω της ταυτότητας

$$\frac{d}{dt} (|\dot{\mathbf{c}}(t)|^2) = 2\langle \dot{\mathbf{c}}(t), \ddot{\mathbf{c}}(t) \rangle,$$

και του Νόμου του Νεύτωνα, είναι

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}(t)|^2 + f(\mathbf{c}(t)) \right) = 0.$$

με ολοκλήρωση προκύπτει

$$\frac{m}{2} |\mathbf{v}(t)|^2 + f(\mathbf{c}(t)) = \text{σταθ.}$$

που είναι ο *Νόμος Διατήρησης της Ενέργειας*: Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας αντικειμένου λόγω συντηρητικής δύναμης είναι σταθερό.

<sup>2</sup>Για σταθερή κίνηση παίρνουμε τον τύπο  $E_{kin} = (1/2)mv^2$  που γνωρίζουμε από τη Φυσική του σχολείου.

## 7.2 Το Θεώρημα του Green

Υπάρχει μία ευθεία σύνδεση των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων διανυσματικών πεδίων (ή, αν θέλετε, διαφορικών μορφών) με τα διπλά ολοκληρώματα. Αυτή φαίνεται από το παρακάτω:

**Θεώρημα 7.2.1. (Green)** Έστω το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = (P, Q)$  του  $\mathbb{R}^2$ . Έστω επίσης  $C$  απλή κλειστή καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$ , προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Τότε,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \oint_C P dx + Q dy = \iint_{\text{Int}(C)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Παράδειγμα 7.2.2.** Έστω η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη  $C$  που αποτελείται από το άνω ημικύκλιο  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$  και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα  $(-1, 0)$  και  $(1, 0)$  (σχεδιάστε!) Αν

$$D = \text{int}(C) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\},$$

τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C xy dx - x^2 dy$$

είναι ίσο με

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (-2x - x) dx dy = -3 \iint_D x dx dy \\ (\text{πολικές συντεταγμένες}) &= -3 \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} (r \cos \theta) \cdot r dr d\theta \\ &= -3 \left( \int_0^1 r^2 dr \right) \cdot \left( \int_0^\pi \cos \theta d\theta \right) = 2. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 7.2.3.** Έστω η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη  $C$  που αποτελεί το τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$ . (Σχεδιάστε!) Αν

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

είναι το εσωτερικό του τριγώνου, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C xy^2 dx - y dy$$

είναι ίσο με

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (0 - 2y) dx dy = -2 \iint_D y dx dy \\ &= -2 \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} y dy \right) dx = \dots \end{aligned}$$

ολοκληρώστε τον υπολογισμό.

**Παράδειγμα 7.2.4.** Έστω  $\mathbf{F} = (P, Q)$  συντηρητικό διανυσματικό πεδίο (ή,  $\omega = Pdx + Qdy$  ακριβής μορφή) και  $C$  οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Green,

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\text{int}(C)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Επειδή το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό, υπάρχει συνάρτηση δυναμικού  $\phi$  για το  $\mathbf{F}$ :  $\nabla\phi = \mathbf{F}$ . Άρα μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι για συναρτήσεις δυναμικού ισχύει:

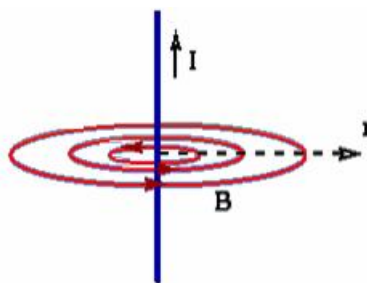
$$\oint_C \langle \nabla\phi, ds \rangle = 0,$$

πάνω σε οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη  $C$ .

**Παράδειγμα 7.2.5.** Ο νόμος του Ampère: αν  $\mathbf{B}$  είναι ένα μαγνητικό πεδίο και  $C$  είναι μία απλή κλειστή προσανατολισμένη καμπύλη, τότε

$$\oint_C \langle \mathbf{B}, ds \rangle = I,$$

όπου  $I$  είναι η ροή του ρεύματος που περνά από επιφάνεια που έχει σύνορο την  $C$ . Στο παρακάτω σχήμα, οι διάφορες  $C$  είναι κύκλοι.



Νόμος του Ampère

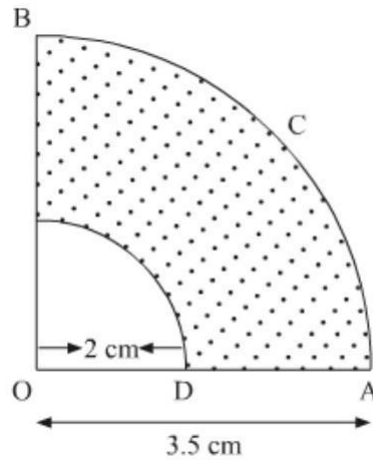
**Άσκηση.** Βρείτε το έργο

$$W = \oint_C \langle \mathbf{F}, ds \rangle$$

που παράγεται από τη δύναμη

$$\mathbf{F}(x, y) = (xy, y^2)$$

όταν εφαρμόζεται σε σωματίδιο που κινείται στην καμπύλη  $C$  που αποτελεί το σύνορο του κουκκιδισμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος. (Δεν δίνεται εδώ προσανατολισμός. Οπότε, η απάντησή σας θα είναι δύο αριθμοί.)



### 7.2.1 Το Θεώρημα απόκλισης στο επίπεδο

Μία επαναδιατύπωση του Θεωρήματος του Green είναι το θεώρημα της απόκλισης που οφείλεται στον Gauss. Θυμίζουμε ότι αν  $\mathbf{F} = (P, Q)$  είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο, τότε η απόκλιση του ορίζεται ως

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Έστω καμπύλη  $C$ , προσανατολισμένη με τη θετική φορά, με παραμέτρηση  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Η μοναδιαία κάθετος στην  $C$  ορίζεται ως

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|}.$$

Τότε το θεώρημα απόκλισης μας λέει ότι

$$\oint_C \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds := \oint_C P dy - Q dx = \iint_{\operatorname{int}(C)} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy.$$

**Παράδειγμα 7.2.6.** Έστω  $\mathbf{F}(x, y) = (y^3, x^5)$ . Εάν  $T = [0, 1]^2$ , τότε

$$\oint_{\partial T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ds = \iint_T \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy = 0,$$

εφ' όσον  $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ .

## 7.3 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

α) της  $f(x, y, z) = x + y^2 - 2z$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα  $(0, 0, 0)$  και  $(1, -3, 2)$ .



β) της  $f(x, y, z) = 8x + 36z$  επάνω στην συστραμμένη κυβική καμπύλη με παραμέτρηση

$$\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in [0, 1/2].$$

γ) της  $f(x, y) = 1 + xy$  επάνω στην καμπύλη  $C$  που αποτελείται από το αριστερό ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα  $(0, 1)$  και  $(0, -1)$ .

δ) του  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-zy, zx, xy)$  επάνω στην έλικα

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

ε)

$$\oint_C xydx + 3zxdy - 5x^2ydz$$

επάνω στη συστραμμένη κυβική όπως παραπάνω, αλλά με  $t \in [0, 1]$ .

στ)

$$\oint_C (y + z)dx, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, 0, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

2. Δείξτε ότι τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα της καμπύλης και υπολογίστε τα:

α) το ολοκλήρωμα

$$\oint_C (e^x + y)dx + (x + 2y)dy$$

όπου  $C$  προσανατολισμένη καμπύλη που ενώνει τα  $(1, 1)$  και  $(2, 3)$ .

β) το ολοκλήρωμα

$$\oint_C (2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy$$

όπου  $C$  προσανατολισμένη καμπύλη που ενώνει τα  $(-1, 2)$  και  $(2, 3)$ .

γ) το ολοκλήρωμα

$$\oint_C (y + 2xe^y)dx + (x + x^2e^y)ydy$$

όπου  $C$  προσανατολισμένη καμπύλη που παραμετρώνεται από την

$$\mathbf{c}(t) = (t^{1/2}, \ln t, t), \quad t \in [1, 4].$$

3. Η δύναμη που ασκείται σε σημείο  $(x, y)$  επίπεδου εκκρεμούς είναι

$$\mathbf{F}(x, y) = (-ax, -ay), \quad a > 0.$$

Να βρεθεί το έργο  $W$  που παράγεται από τη δύναμη που ασκείται σε αντικείμενο που κινείται από το  $(3, -6)$  στο  $(1, -2)$ . (Υπόδειξη: το πεδίο είναι συντηρητικό.)

4. Έστω η καμπύλη  $C$  που αποτελείται από τις πλευρές του τριγώνου με κορυφές  $(0,0)$ ,  $(0,2)$  και  $(2,0)$  προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy.$$

5. Έστω  $C$  απλή κλειστή καμπύλη προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C (x^2 + y) dx + (x - y^2) dy.$$

6. Εφαρμόστε το θεώρημα του Green για να εκφράσετε το

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx,$$

ως διπλό ολοκλήρωμα στο εσωτερικό  $\text{int}(C)$  της απλής κλειστής καμπύλης  $C$ . Τι παρατηρείτε; Αποδείξτε κατόπιν σε μία γραμμή ότι αν  $C$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος προσανατολισμένος με τη θετική φορά, τότε

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \pi.$$

7. Έστω  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $q$  σημειακό φορτίο και

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

η δύναμη που δέχεται το  $q$  που βρίσκεται στο σημείο  $\mathbf{r}$  του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{r}$$

ενός άλλου σημειακού φορτίου  $Q$ . Εδώ,  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

α) Βρείτε την απόκλιση της  $\mathbf{F}$ . (Απάντηση:  $\text{div}(\mathbf{F}) = -kQ/|\mathbf{r}|^3$ .)

β) Με χρήση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το

$$\iint_A \text{div}(\mathbf{F}) dx dy$$

όπου  $A$  ο δακτύλιος ανάμεσα στους ομόκεντρους κύκλους  $x^2 + y^2 = R_1$  και  $x^2 + y^2 = R_2$ ,  $0 < R_1 < R_2$ . (Υπόδειξη: Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής σας δίνει

$$\iint_A \text{div}(\mathbf{F}) dx dy = -kQ \iint_{[R_1, R_2] \times [0, 2\pi]} \frac{r}{r^3} dr d\theta.$$



## Κεφάλαιο 8

# Επιφανειακά ολοκληρώματα και τα Θεωρήματα Stokes και Gauss

### 8.1 Επιφάνειες

Ως παραμετρημένη επιφάνεια  $S$  θα ορίζουμε την εικόνα κάθε παραγωγίσιμης απεικόνισης  $\sigma : \mathbb{R}^2 \subset D \rightarrow \mathbb{R}^3$  (της παραμέτρησης της επιφάνειας),

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

που έχει την εξής ιδιότητα: αν

$$\sigma_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \sigma_v = (x_v, y_v, z_v),$$

τότε

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη εφαπτομένου επιπέδου σε κάθε σημείο της  $S$ : τα διανύσματα  $\sigma_u$  και  $\sigma_v$  δεν είναι παράλληλα και αν  $\mathbf{p}_0 = \sigma(u_0, v_0)$  είναι τυχόν σημείο της  $S$ , τότε το εφαπτόμενο επίπεδο στο  $\mathbf{p}_0$  είναι

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0, (\sigma_u \times \sigma_v)(u_0, v_0) \rangle = 0.$$

Το διάνυσμα

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{(\sigma_u \times \sigma_v)(u_0, v_0)}{|(\sigma_u \times \sigma_v)(u_0, v_0)|},$$

λέγεται *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $S$  στο  $\mathbf{p}_0$* . Σημειώνουμε ότι όπως και στις καμπύλες, έτσι για τις επιφάνειες μπορούν να υπάρξουν άπειρες παραμετρήσεις  $\sigma$  μιας επιφάνειας  $S$ . Το εφαπτόμενο όμως επίπεδο της  $S$  δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση  $\sigma$  της  $S$ : από την άλλη, κάτι τέτοιο δεν ισχύει για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμά της στο τυχόν της σημείο όπως θα δούμε παρακάτω.

**Παράδειγμα 8.1.1.** Ο ορθός κύλινδρος  $C$  που περιγράφεται από την καρτεσιανή εξίσωση  $x^2 + y^2 = r^2$  στο  $\mathbb{R}^3$  δέχεται παραμέτρηση

$$\sigma(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Είναι

$$\boldsymbol{\sigma}_u = (-r \sin u, r \cos u, 0), \quad \boldsymbol{\sigma}_v = (0, 0, 1).$$

Συνεπώς

$$\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin u & r \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (r \cos u, r \sin u, 0).$$

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{N} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Παρατηρήστε ότι  $|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v| = r = |J|$ , όπου  $J$  είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα των κυλινδρικών συντεταγμένων και επίσης ότι αν  $\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (x, y, z)$ , τότε

$$\mathbf{N} = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Παράδειγμα 8.1.2.** Για την σφαίρα με κέντρο την αρχή του  $\mathbb{R}^3$  και ακτίνας  $r$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , χρησιμοποιούμε την παραμέτρηση των σφαιρικών συντεταγμένων

$$\boldsymbol{\sigma}(\theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta),$$

όπου  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Είναι:

$$\boldsymbol{\sigma}_\theta = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta),$$

και

$$\boldsymbol{\sigma}_\phi = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0).$$

Άρα,

$$\boldsymbol{\sigma}_\theta \times \boldsymbol{\sigma}_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Συνεπώς το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη σφαίρα είναι το

$$\mathbf{N} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Παρατηρήστε ότι  $|\boldsymbol{\sigma}_\theta \times \boldsymbol{\sigma}_\phi| = r^2 \sin \theta = |J|$  όπου  $J$  είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού των σφαιρικών συντεταγμένων και επίσης ότι αν  $\boldsymbol{\sigma}(\theta, \phi) = (x, y, z)$ , τότε

$$\mathbf{N} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

πράγμα που έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τη διαίσθησή μας.

**Παράδειγμα 8.1.3.** Αν  $z = f(x, y)$  παραγωγίσιμη συνάρτηση,  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , τότε μπορούμε να παραμετρήσουμε το γράφημά της από την

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Είναι

$$\boldsymbol{\sigma}_x = (1, 0, f_x), \quad \boldsymbol{\sigma}_y = (0, 1, f_y)$$

και

$$\boldsymbol{\sigma}_x \times \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

Τό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι το

$$\mathbf{N} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

Παρατηρήστε ότι αν  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  είναι σημείο της επιφάνειας που ορίζει η γραφική παράσταση της  $f$ , τότε το εφαπτόμενο επίπεδό της είναι το

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)), (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \rangle = 0,$$

τύπος που συμφωνεί με αυτόν που δώσαμε για το εφαπτόμενο επίπεδο παραγωγίσιμης  $f$ .

**Άσκηση.** Βρείτε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{N}$  και τον τύπο του εφαπτόμενου επιπέδου στο τυχόν σημείο του ελικοειδούς

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}.$$

Ισχύει ο εξής τύπος για το εμβαδόν επιφάνειας: Αν  $\boldsymbol{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι παραμέτρηση επιφάνειας  $S$  και  $R \subset D$ , τότε το εμβαδόν του επιφανειακού τμήματος  $\boldsymbol{\sigma}(R)$  ισούται με

$$\text{Area}(\boldsymbol{\sigma}(R)) = \int_R |\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v| \, dudv.$$

**Παράδειγμα 8.1.4.** Το εμβαδόν της σφαίρας  $S$  ακτίνας  $r$  είναι

$$\text{Area}(S) = r^2 \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \sin \theta \, d\theta d\phi = 4\pi r^2.$$

## 8.2 Επιφανειακά ολοκληρώματα

Όπως τα επικαμπύλια, έτσι και τα επιφανειακά ολοκληρώματα είναι δύο ειδών. Το πρώτο είδος και εδώ είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα συνάρτησης. Έστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y, z)$  συνεχής, και  $S$  επιφάνεια με παραμέτρηση

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

και έστω  $\mathbf{n}(u, v) = \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v$ . Τότε,

$$\iint_{\boldsymbol{\sigma}} f dS := \iint_D f(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) |\mathbf{n}(u, v)| \, dudv,$$

Ορισμένο με τον τρόπο αυτόν, το επιφανειακό ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση  $\boldsymbol{\sigma}$  και μπορούμε να γράψουμε

$$\iint_S f dS \quad \text{αντί} \quad \iint_{\boldsymbol{\sigma}} f dS.$$

**Παράδειγμα 8.2.1.** Έστω η επιφάνεια  $S$  που ορίζεται από το γράφημα της  $z = x^2 + y$ , επάνω από το ορθογώνιο  $R = [0, 1] \times [-1, 1]$  και έστω  $f(x, y, z) = x$ . Παίρνουμε την παραμέτρηση

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = (x, y, x^2 + y), \quad (x, y) \in R.$$

Είναι  $\mathbf{n}(x, y) = (-2x, -1, 1)$  και  $|\mathbf{n}(x, y)| = \sqrt{4x^2 + 2}$ . Οπότε,

$$\iint_S f dS = \iint_R x\sqrt{4x^2 + 2} dx dy = \left( \int_{-1}^1 dy \right) \cdot \left( \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 2} dx \right) = \dots$$

ολοκληρώστε τον υπολογισμό.

**Σχόλιο 8.2.2.** Στα γραφήματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , είναι τις περισσότερες φορές βολικό να παίρνουμε την παραμέτρηση

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$

Τότε,  $\mathbf{n} = (-g_x, -g_y, 1)$  και

$$\iint_S f dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dx dy.$$

**Παράδειγμα 8.2.3.** Μία μεταλλική σφαίρα  $S$  έχει πυκνότητα  $\rho(x, y, z) = z^2$ . Παίρνοντας σφαιρικές συντεταγμένες  $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ , παίρνουμε ότι η μάζα της δίνεται από το

$$\iint_S \rho dS = \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \cos^2 \theta \sin \theta d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες του υπολογισμού).

**Παράδειγμα 8.2.4.** Η επιφάνεια  $S$  του τριγώνου με κορυφές τα  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  και  $(0, 0, 1)$  είναι τμήμα του επιπέδου

$$x + y + z = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$

Η παραμέτρηση είναι

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

και  $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ . Άρα, αν  $f(x, y, z) = x$ ,

$$\iint_S x dS = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \sqrt{3} dy \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**Άσκηση.** Υπολογίστε το

$$\iint_S xyz dS,$$

όπου  $S$  είναι η επιφάνεια του τριγώνου με κορυφές τα  $\mathbf{i}$ ,  $2\mathbf{j}$  και  $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

Το δεύτερο είδος επιφανειακών ολοκληρωμάτων είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου. Έστω  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

συνεχές διανυσματικό πεδίο και  $S$  η επιφάνεια με παραμέτρηση

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

με κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v$ . Τότε

$$\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle := \iint_D \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(u, v)), \mathbf{n}(u, v) \rangle dudv.$$

Όπως και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους έτσι και το επιφανειακό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους είναι ουσιαστικά ένα προσανατολισμένο ολοκλήρωμα. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 8.2.5.** Έστω η επιφάνεια  $S$  που είναι το γράφημα της παραγωγίσιμης

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Παίρνοντας την παραμέτρηση

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

μας δίνει  $\mathbf{n} = (-2u, -2v, 1)$  και για το επιφανειακό ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$  θα έχουμε

$$\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{[0,1]^2} (u^2 + v^2) dudv = \frac{2}{3}.$$

Παίρνοντας τώρα την παραμέτρηση

$$\boldsymbol{\sigma}^*(u, v) = (v, u, u^2 + v^2)$$

μας δίνει  $\mathbf{n}^* = (2v, 2u, -1)$  και τότε θα έχουμε

$$\iint_{\boldsymbol{\sigma}^*} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{[0,1]^2} (-u^2 - v^2) dx dy = -\frac{2}{3}.$$

Το παραπάνω παράδειγμα έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τη διαίσθησή μας: όταν η  $S$  είναι γράφημα παραγωγίσιμης συνάρτησης  $z = g(x, y)$ , σε κάθε σημείο της τα

$$\mathbf{N} = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}, \quad -\mathbf{N} = \frac{(g_x, g_y, -1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}},$$

είναι δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια. Εφ' όσον η  $S$  έχει δύο πλευρές, ορίζουμε προσανατολισμό στην  $S$  λέγοντας ότι:

- είναι θετικά προσανατολισμένη όταν ως μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα θεωρούμε το  $\mathbf{N}$  και
- είναι αρνητικά προσανατολισμένη όταν ως μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα θεωρούμε το  $-\mathbf{N}$ .

Μ' αυτόν τον τρόπο, αν στο προηγούμενο παράδειγμα απαιτούσαμε την  $z = x^2 + y^2$  θετικά προσανατολισμένη, θα είχαμε

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \frac{2}{3}.$$

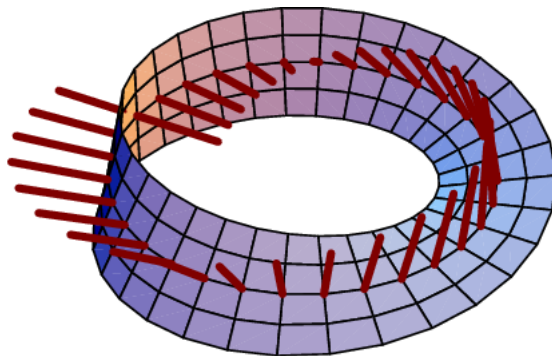
Το ολοκλήρωμα με αρνητικό πρόσημο προέκυψε διότι οι δύο παραμετρήσεις  $\boldsymbol{\sigma}$  και  $\boldsymbol{\sigma}^*$  αντιστρέφουν τον προσανατολισμό: παρατηρήστε πώς αν  $\Phi: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  είναι ο μετασχηματισμός που δίνεται από την  $\Phi(u, v) = (v, u)$ , τότε  $\boldsymbol{\sigma}^*(u, v) = \boldsymbol{\sigma}(\Phi(u, v))$  και η Ιακωβιανή ορίζουσα του  $\Phi$  είναι

$$J_{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$



Εάν ισχύει  $J_{\mathbf{F}} > 0$  θα λέγαμε πως οι παραμετρήσεις διατηρούν τον προσανατολισμό.

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε σε όλες τις επιφάνειες; εδώ η διαίσθησή μας πώς όλες οι επιφάνειες έχουν δύο πλευρές μπορεί να μας παρασύρει. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει και χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η λωρίδα του Möbius, όπως στο σχήμα.



Η λωρίδα του Möbius δεν είναι προσανατολισμένη

Η λωρίδα του Möbius είναι το κλασικό παράδειγμα μη προσανατολισμένης επιφάνειας (μονόπλευρης). Ποτέ δεν μπορούμε να καθορίσουμε το πότε το κάθετο διάνυσμα είναι συνεχώς μέσα ή έξω από την επιφάνεια.

Είναι αναγκαίο λοιπόν να ασχοληθούμε με προσανατολισμένες (δίπλευρες επιφάνειες) όπου πάντοτε έχουμε την επιλογή δύο μοναδιαίων διανυσμάτων  $\mathbf{N}$  και  $-\mathbf{N}$ .

**Παράδειγμα 8.2.6.** Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα  $S$  προσανατολισμένη ώστε το μοναδιαίο κάθετο να βρίσκεται στο εξωτερικό της σφαίρας. Θυμηθείτε ότι η παραμέτρηση σφαιρικών συντεταγμένων  $\sigma(\theta, \phi)$  δίνει κάθετο

$$\mathbf{N} = \sin \theta \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi \cos \theta) = \sin \theta \boldsymbol{\sigma}(\theta, \phi),$$

το οποίο είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του ακτινικού διανύσματος  $\boldsymbol{\sigma}(\theta, \phi)$  διότι  $\theta \in [0, \pi]$ . Άρα μας δίνει τον θετικό προσανατολισμό. Εάν τώρα  $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$  τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην προσανατολισμένη όπως παραπάνω σφαίρα είναι

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

**Σχόλιο 8.2.7.** Αν  $S$  είναι προσανατολισμένη επιφάνεια, τότε

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, dS.$$

Εδώ  $\mathbf{N}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο της  $S$ .

Εάν το  $\mathbf{F}$  είναι ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο, το επιφανειακό του ολοκλήρωμα επάνω σε μία  $S$  είναι η ροή του πεδίου. Επίσης, αν  $T(x, y, z)$  είναι η θερμοκρασία κάποιου χωρίου του  $\mathbb{R}^3$ , τότε η ροή της θερμότητας είναι

$$\mathbf{F} = -k\nabla T, \quad k > 0$$

και το επιφανειακό ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  επάνω σε μία  $S$  μας δίνει το συνολικό ροής της θερμότητας στην  $S$ .

**Άσκηση.** Στην άσκηση αυτή φαίνεται το πώς ο τύπος του Σχολίου 8.2.7 μας γλιτώνει από πολύ χρονοβόρους υπολογισμούς. Όπως παραπάνω, πάρτε  $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\mathbf{F} = -\nabla T$  και  $S$  τη μοναδιαία σφαίρα προσανατολισμένη θετικά (το κάθετο είναι προς το εξωτερικό της σφαίρας). Παρατηρήσετεμ ότι

$$\mathbf{F} = -2(x, y, z),$$

το μοναδιαίο διάνυσμα της  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  που κοιτά προς τα έξω είναι το  $\mathbf{N} = (x, y, z)$  και άρα

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS = -2 \iint_S dS = -8\pi.$$

**Παράδειγμα 8.2.8.** Ο Νόμος του Gauss για τα ηλεκτρικά πεδία μας λέει ότι η ροή ενός ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας  $S$  ισούται με το καθαρό φορτίο  $Q$  που περικλείεται από την επιφάνεια:

$$\iint_S \langle \mathbf{E}, d\mathbf{S} \rangle = Q.$$

Δείτε πως αν  $\mathbf{E} = E\mathbf{N}$ , ένα σταθερό πολλαπλάσιο του  $\mathbf{N}$ , τότε

$$\iint_S \langle \mathbf{E}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle E\mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle dS = E \cdot \text{Area}(S) \implies E = \frac{Q}{\text{Area}(S)}.$$

Στην περίπτωση σφαίρας, προκύπτει ο τύπος

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

### 8.3 Το Θεώρημα του Stokes

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα του Stokes μας χρειάζεται η έννοια του *στροβιλισμού* διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  του  $\mathbb{R}^3$ . Ο στροβιλισμός  $\text{curl}(\mathbf{F})$  είναι το διανυσματικό πεδίο που ορίζει η σχηματική ορίζουσα

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}.$$

Δείτε ότι μπορούμε να ορίσουμε και στροβιλισμό διδιάστατου διανυσματικού πεδίου, αρκεί να το γράψουμε ως  $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ . Τότε

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = (Q_x - P_y)\mathbf{k}.$$

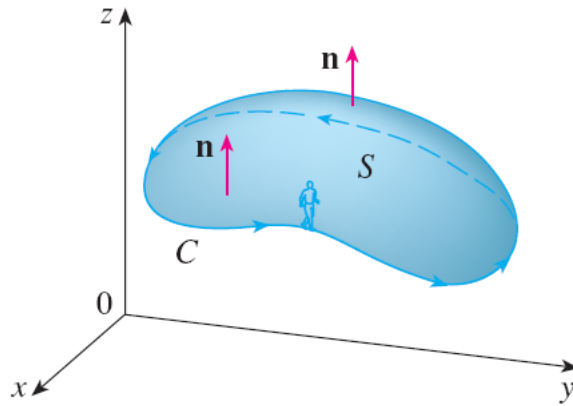
Θυμηθείτε πως ένα πεδίο  $\mathbf{F} = (P, Q)$  του  $\mathbb{R}^2$  είναι συντηρητικό αν και μόνο αν  $P_y = Q_x$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι το  $\mathbf{F}$  είναι *αστρόβιλο* και αποδεικνύεται ότι το ίδιο συμβαίνει για τα διανυσματικά πεδία του  $\mathbb{R}^3$ .

Μπορούμε να καταλάβουμε τη φυσική σημασία του στροβιλισμού ενός πεδίου  $\mathbf{F}$  αν το θεωρήσουμε ως πεδίο ταχυτήτων, λ.χ. ως τη ροή ενός υγρού. Αστρόβιλο  $F$  είναι το υγρό που κατά τη ροή του δεν παρουσιάζει δίνες.

Το Θεώρημα του Stokes που διατυπώνουμε αμέσως παρακάτω είναι η τρισδιάστατη έκδοση του Θεωρήματος του Green:

**Θεώρημα 8.3.1. (Stokes)** Έστω  $S$  προσανατολισμένη επιφάνεια με κάθετο  $\mathbf{n}$  και πεπερασμένο επιφανειακό εμβαδόν. Υποθέτουμε ότι η  $S$  φράσσεται από κλειστή παραγωγίσιμη καμπύλη  $C$  προσανατολισμένη με τον επαγόμενο προσανατολισμό της  $S$  (δείτε το σχήμα). Εάν  $\mathbf{F}$  είναι παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους που ορίζεται στην  $S$ , τότε

$$\oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \iint_S \langle \text{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle dS.$$



Προσανατολισμός στο Θεώρημα του Stokes

Σημειώστε πως αν  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  έχουμε την ισοδύναμη γραφή του τύπου του θεωρήματος

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \langle \text{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle dS.$$

**Παράδειγμα 8.3.2.** Έστω  $\partial T$  το τρίγωνο με κορυφές  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  και  $\mathbf{k}$  προσανατολισμένο με τη θετική φορά ( $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{i}$ ). Έστω επίσης

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, z, x)$$

και θέλουμε το

$$\oint_{\partial T} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle.$$

Απευθείας υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού θα απαιτούσε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε κάθε μία από τις πλευρές του τριγώνου και να προσθέσουμε τα αποτελέσματα. Θα εκμεταλλευτούμε όμως το Θεώρημα του Stokes. Το τρίγωνο  $\partial T$  είναι το σύνορο της επιφάνειας  $T$  που δίνεται από την  $z = 1 - x - y$  όταν  $x \in [0, 1]$  και  $0 \leq y \leq 1 - x$ . Βλέπουμε τώρα ότι

$$\mathbf{n} = (z_x, z_y, 1) = (-1, -1, 1)$$

είναι το κάθετο που κοιτάει προς τα πάνω, συνεπώς προσανατολίζει την  $S$  με τρόπον ώστε να συμφωνεί με τον προσανατολισμό της  $C$ . Από την άλλη,

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, 2y).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle &= \iint_T \langle (-1, -1, 2y), (-1, -1, 1) \rangle dS \\ &= 2 \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1+y) dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left( 1-x + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Αν δύο επιφάνειες  $S_1$  και  $S_2$  φράσσονται από την ίδια καμπύλη  $S$ , αλλά επάγουν αντίθετους προσανατολισμούς στην  $C$ , τότε το Θεώρημα του Stokes δίνει

$$\iint_{S_1} \langle \operatorname{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle dS = - \iint_{S_2} \langle \operatorname{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle dS.$$

**Παράδειγμα 8.3.3.** Έστω  $S$  η μοναδιαία σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  προσανατολισμένη με τον θετικό προσανατολισμό. Τότε για κάθε παραγωγίσιμο με συνεχείς μερικές παραγώγους πεδίο  $\mathbf{F}$  πάνω στη σφαίρα, είναι

$$\iint_S \langle \operatorname{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle dS = 0.$$

Πράγματι, τα δύο ημισφαίρια που αποτελούν τη σφαίρα φράσσονται από την καμπύλη του ισημερινού, που κληρονομεί διαφορετικό προσανατολισμό από το  $\mathbf{n}$  του άνω και του κάτω ημισφαιρίου, αντίστοιχα.

## 8.4 Το Θεώρημα απόκλισης του Gauss

. Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα απόκλισης του Gauss μας χρειάζεται να θυμηθούμε τα χωρία τύπου IV στον χώρο. Τούτα είναι στερεά που φράσσονται από τα γραφήματα δύο το πολύ συναρτήσεων δύο (οποιαδήποτε) μεταβλητών. Το Θεώρημα απόκλισης τώρα, είναι η γενίκευση των δύο προηγούμενων θεωρημάτων, καθώς συνδέει ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα κλειστό στερεό, με το διπλό ολοκλήρωμα του συνόρου του.

**Θεώρημα 8.4.1. (Απόκλισης του Gauss)** Έστω  $\Omega$  στερεό τύπου IV και υποθέτουμε ότι το σύνορό του  $\partial\Omega$  είναι προσανατολισμένη επιφάνεια από το μοναδιαίο της κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{N}$ , που φράσσει το  $\Omega$ . Αν  $\mathbf{F}$  είναι λείο διανυσματικό πεδίο στο  $\Omega$  τότε

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz.$$

**Παράδειγμα 8.4.2.** Έστω  $S$  η σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  και  $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, 4y, 5z)$ . Για να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  πάνω στην  $S$  χρησιμοποιούμε το Θεώρημα απόκλισης: εφ' όσον

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3 + 4 + 5 = 12,$$

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS &= 12 \iiint_{\mathbb{B}(2)} dx dy dz \\ &= 12 \cdot \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 128\pi. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 8.4.3.** Θεωρούμε το στερεό  $\Omega$  που προκύπτει εάν κόψουμε στη μέση την  $\mathbb{B}(2)$ : το σύνορό της  $S$  αποτελείται από το άνω ημισφαίριο και τον δίσκο ακτίνας 2. Αν  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ , υπολογίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του  $\mathbf{F}$  πάνω στην  $S$  χρησιμοποιώντας το Θεώρημα απόκλισης: εφ' όσον

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ (\text{σφαιρικές συντεταγμένες}) &= 3 \iiint_{[0,2] \times [0,\pi/2] \times [0,2\pi]} r^4 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= 3 \left( \int_0^2 r^4 dr \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \\ &= \frac{192\pi}{5}. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 8.4.4.** Έστω ο κύβος  $\Omega = [0, 1]^3$  και  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Πάλι με το Θεώρημα απόκλισης έχουμε

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3.$$

**Παράδειγμα 8.4.5.** Σύμφωνα με την μία από τις τέσσερις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις του Maxwell, εάν  $\mathbf{E}$  είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ηλεκτρικές φορτίσεις σε στερεό χωρίο, τότε

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho,$$

όπου  $\varepsilon_0$  είναι σταθερά και  $\rho$  είναι η πυκνότητα φορτίου στο στερεό. Αν  $Q$  είναι το ολικό φορτίο του  $\Omega$ , τότε

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{E}, \mathbf{N} \rangle dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{E}) dx dy dz \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

και προκύπτει ο Νόμος του Gauss του Παραδείγματος 8.2.8.

## 8.5 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το

$$\iint_S g(x, y, z) dS$$

όταν:

α)  $g(x, y, z) = x$  και  $S$  είναι τμήμα του επιπέδου  $2x + 3y + z = 6$  στο πρώτο ογδομήριο.

β)  $g(x, y, z) = 2x^2 + 1$  και  $S$  είναι τμήμα του επιπέδου  $3x - z = 2$  εντός του κυλίνδρου  $x^2 + y^2 = 4$

γ)  $g(x, y, z) = x^2 z$  και  $S$  είναι τμήμα του κυλίνδρου  $x^2 + z^2 = 1$  ανάμεσα στα επίπεδα  $y = -1$  και  $y = 2$  με  $z \geq 0$ .

δ)  $g(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$  και  $S$  είναι το άνω ημισφαίριο  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$ .

2. Υπολογίστε το

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS$$

όταν:

α)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 8)$  και  $S$  είναι τμήμα του παραβολοειδούς  $z = 9 - x^2 - y^2$  πάνω από το  $xy$ -επίπεδο. Το  $\mathbf{N}$  έχει προσανατολισμό προς τα άνω.

β)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$  και  $S$  είναι τμήμα του κώνου  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  πάνω από το τετράγωνο με κορυφές  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  και  $(0, 1, 0)$ . Το  $\mathbf{N}$  έχει προσανατολισμό προς τα κάτω.

γ)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 1, 2)$  και  $S$  είναι το κάτω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας. Το  $\mathbf{N}$  έχει προσανατολισμό προς τα άνω.

δ)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$  και  $S$  είναι η σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Το  $\mathbf{N}$  είναι προσανατολισμένο προς το εξωτερικό της σφαίρας.

3. Έστω το ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Με τον Νόμο του Gauss βρείτε το ολικό φορτίο  $Q$  εντός του κύβου  $[-2, 2]^3$ .

4. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να υπολογίσετε το

$$\oint_C \langle \mathbf{F}, ds \rangle$$

υποθέτοντας ότι η  $C$  είναι η καμπύλη που φράσσει την  $\Sigma$  με τον επαγόμενο προσανατολισμό, όταν:

α)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y, 3z, -2x)$  και  $S$  είναι το κάτω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας. Το  $\mathbf{N}$  είναι προσανατολισμένο προς το εξωτερικό της σφαίρας.

β)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (3y, 2z, -x)$  και  $S$  είναι το τμήμα της μοναδιαίας σφαίρας στο πρώτο ογδοημόριο. Το  $\mathbf{N}$  είναι προσανατολισμένο προς το εξωτερικό της σφαίρας.

5. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να υπολογίσετε το

$$\iint_S \langle \text{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{N} \rangle dS$$

όταν

α)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, y^2 + 2x, x)$  και  $S$  είναι το τμήμα του παραβολοειδούς  $z = 9 - x^2 - y^2$  επάνω από το  $xy$ -επίπεδο. Το  $\mathbf{N}$  είναι προσανατολισμένο προς το εξωτερικό του παραβολοειδούς.

β)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 y, -x, z \sin(x^2 y^2 z))$  και  $S$  είναι το τμήμα του κυλίνδρου  $x^2 + y^2 = 15$  ανάμεσα στα επίπεδα  $z = -1$  και  $z = 5$ . Το  $\mathbf{N}$  είναι προσανατολισμένο προς το εξωτερικό του κυλίνδρου.

6. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Gauss για να υπολογίσετε το

$$\iint_S \langle \operatorname{curl}(\mathbf{F}), \mathbf{N} \rangle dS$$

με το  $\mathbf{N}$  πάντοτε προσανατολισμένο προς το εξωτερικό της  $S$  όταν

α)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, xy, xz)$  και  $S$  είναι η μοναδιαία σφαίρα.

β)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$  και  $S$  είναι σύνορο του στερεού εντός του κυλίνδρου  $x^2 + y^2 = 4$  ανάμεσα στα επίπεδα  $z = 0$  και  $z = 2$ .

7. Έστω

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 y^2 z^2, -x^4 y z^2, 0).$$

Υπολογίστε το

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) dx dy dz$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Απόκλισης, όπου  $\Omega$  είναι η μοναδιαία μπάλα.

8. Έστω

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

και έστω  $\Omega$  στερεό τύπου IV με σύνορο  $S$  και μοναδιαίο κάθετο  $\mathbf{N}$  προσανατολισμένο προς το εξωτερικό του στερεού. Δείξτε τη σχέση

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle dS.$$

Ας εφαρμογή, βρείτε τον όγκο του κυκλικού κώνου ύψους  $h$  και ακτίνας  $r$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] R. Ellis & D. Gulick. *Calculus, one and several variables*. HBJ Publ., New York, 1991.
- [2] R.L. Finney & M.D. Weir & F.R. Giordano. *Thomas, Απειροστικός λογισμός*. ΠΕΚ, Ηράκλειο Κρήτης, 2012.
- [3] D.M. Hirst. *Mathematics for Chemists*. MacMillan Press LTD., London, 1976.
- [4] J. Marsden & A. Tromba. *Διανυσματικός λογισμός*. ΠΕΚ, Ηράκλειο Κρήτης, 1992.