ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Εαρινό εξάμηνο 2019-20

ΜΕΜ233-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑ ΖΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗ 1/07/2020

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

ΑΜ, Ονοματεπώνυμο:
Απαντήστε **μόνο** στα εξής 5:
Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά.**

1. Δείξτε ότι εάν ο $f \in E(2)$ ικανοποιεί τις

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},$$

τότε είναι η ανάκλαση ως προς τον x-άξονα.

2. Έστω ο $f \in A(2)$ με τύπο

$$f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Βρείτε: α) τον f^{-1} και β) την εικόνα $f(\ell)$ της ευθείας $\ell:\ x+y-2=0$.

3. Βρείτε τον $f \in A(2)$ που απεικονίζει τα $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$ στα $(-2,1)$, $(0,3)$ και $(5,0)$, αντίστοιχα.

4. Αποδείξτε ότι ο $f \in A(2)$ με

$$f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,$$

αφήνει αναλλοίωτη την ευθεία $y=x$.

5. Αποδείξτε ότι εάν ο $f \in A(2)$ αφήνει σταθερά τρία οποιαδήποτε διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}^2$, τότε ο f είναι ο ταυτοτικός.

6. Έστω τρία διαφορετικά σημεία της S^2. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός σφαιρικός κύκλος που τα περιέχει.

7. Προσδιορίστε την οικογένεια των μεγίστων κύκλων που διέρχονται από τα σημεία $(\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$ και $(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ της S^2.

8. Αποδείξτε ότι αν δύο σφαιρικά τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι και ίσα.

9. Αποδείξτε ότι ο μέγιστος κύκλος που περνά από δύο σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ της S^2 που απέχουν σφαιρική απόσταση $d_s(\mathbf{x},\mathbf{y})=\pi/2$, περιγράφεται από την εξίσωση

$$p(\theta)=\cos\theta\mathbf{x}+\sin\theta\mathbf{y},\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

10. Εξετάστε ποιές απο τις παρακάτω τριάδες σημείων του προβολικού επιπέδου είναι συνευθειακές: α) $[2:3:-1]$, $[2:2:1]$, $[1:0:-1]$ β) $[1:0:2]$, $[0:1:-1]$, $[1:2:0]$. Στην περίπτωση που τα σημεία είναι συνευθειακά, προσδιορίστε την εξίσωση της ευθείας που ανήκουν.

11. Αποδείξτε ότι κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει προβολικές ευθείες σε προβολικές ευθείες.

12. Να βρεθεί το στοιχείο της $P(2)$ που απεικονίζει τα $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$, $[1:1:1]$ στα $[2:1:0]$, $[1:2:0]$, $[1:0:2]$, $[1:1:-2]$, αντίστοιχα.

13. Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός

$$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 - x_1 + x_2 : x_0 + x_1 - x_2 : -x_0 + x_1 + x_2]$$

είναι στοιχείο της $P(2)$ και βρείτε τον αντίστροφό του.

14. Δείξτε ότι ο μιγαδικός διπλός λόγος σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ παραμένει αναλλοίωτος από τή δράση της $\mathrm{M}(2)$.

15. Έστω τα σημεία $[0:1:1]$, $[1:-2:0]$, $[1:0:2]$, $[1:1:3]$ του προβολικού επιπέδου. α) Δείξτε ότι είναι συνευθειακά και βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ανήκουν. β) Βρείτε τον διπλό τους λόγο, με τη σειρά που δίνονται. γ) Βρείτε την κορυφή της δέσμης που ορίζουν οι δυϊκές τους ευθείες.

16. Έστω η αντιστροφή ι στην μοναδιαία σφαίρα $S(0,1)$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$ και σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ αντίστροφα ως προς την ι. Προσδιορίστε το σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ και της $S(0,1)$.

17. Αποδείξτε ότι τρία οποαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\overline{\mathbb{R}^n}$ ανήκουν σε γενικευμένο κύκλο.

18. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι υπάρχει αφφινικός μετασχηματισμός που δεν είναι μετασχηματισμός Möbius.

19. Αποδείξτε ότι εάν μία απεικόνιση $f : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ διατηρεί τον μετρικό διπλό λόγο κάθε τετράδας σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, τότε είναι μετασχηματισμός Möbius.

20. Για $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και $k > 0$, έστω η εξίσωση

$$\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = k.$$

Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει εξίσωση γενικευμένου κύκλου στο $\overline{\mathbb{C}}$.

21. Αποδείξτε ότι το υπερβολικό μήκος λείας καμπύλης γ του $\mathcal{H}^2$ παραμένει αναλλοίωτο από τη δράση της $\mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$.

22. Έστω ο μετασχηματισμός της επεκτεταμένης ευθείας $f(x) = (x-2)/(x+1)$. Βρείτε τον προσαρτημένο πίνακα $A_f \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ του f. Τί είδους μετασχηματισμός είναι η επέκταση Poincaré του f;

23. Βρείτε τον $g_a \in \mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$ που απεικονίζει την υπερβολική ευθεία $L = (-2,2)$ και το σημείο της $z_0 = 2i$ στην υπερβολική ευθεία $L' = (0,\infty)$ και το σημείο της ai, $a > 0$, αντίστοιχα. Προσδιορίστε τα a εκείνα για τα οποία ο g_a έχει δύο σταθερά σημεία στην $\overline{\mathbb{R}}$.

24. Έστω η υπερβολική ευθεία $L = (-1,1)$ και η υπερβολική ευθεία $L_b = (b,0)$, $b < 0$. Για ποια b οι L, L_b είναι: α) τεμνόμενες β) παράλληλες; Στο α) προσδιορίστε το σημείο τομής ενώ στο β) προσδιορίστε το είδος παραλληλίας.

25. Έστω τα σημεία $-1+i$ και $1+i$ του $\mathcal{H}^2$. Βρείτε α) την υπερβολική ευθεία που περνά από τα σημεία αυτά και β) την υπερβολική τους απόσταση.