

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ



ΜΕΜ-233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ ΙΙ



Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εκδοχή 1.2 25 Μαΐου 2021

Πρόλογος

Οί σημειώσεις αυτές αποτελοῦν τὸ δεύτερο μέρος τῶν Σημειώσεων γιὰ τὸ μάθημα MEM233-Γεωμετρία τοῦ κανονικοῦ Προγράμματος Σπουδῶν τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν καὶ Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Κρήτης. Τὸ παρὸν κείμενο ἀφορᾷ στὴν Προβολικὴ Γεωμετρία, τὴ Γεωμετρία τῆς Ἀντιστροφῆς καὶ τὴν Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία καὶ εἶναι ἐπιναστυγραφὴ σημειώσεων ποὺ γράφτηκαν κατὰ τὸ Ἑαρινὸ Ἐξάμηνο τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ Ἔτους 2019-20. Ἡ παροῦσα ἐκδοχὴ ἔχει ἀρκετὲς ἀλλαγές σὲ σχέση μετὰ τὴν προηγούμενη, ποὺ ὅμως ὅλες ἔγιναν ὥστε τὸ ὅλο κείμενο νὰ ἔχει ἐνιαῖα μορφή.

Γαλαξείδι Φωκίδας-Ηράκλειο Κρήτης
Ἀπρίλιος 2021



Μὴ μοῦ τοὺς κύκλους τάραττε.
-Ἀρχιμήδης ὁ Συρακόσιος, 288–212 π.Χ.

Περιεχόμενα

7	Προβολική Γεωμετρία	1
7.1	Ο Προβολικός Χώρος $\mathbb{R}P^n$	3
7.1.1	Προβολικοί μετασχηματισμοί και η προβολική ομάδα $P(n)$	6
7.1.2	Ασκήσεις	9
7.2	Η Προβολική Ευθεία και η Γεωμετρία της	11
7.2.1	Διπλός λόγος	14
7.2.2	Ασκήσεις	17
7.3	Το Προβολικό Επίπεδο και η Γεωμετρία του	18
7.3.1	Γενικά για το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$	18
7.3.2	Ευθείες στο $\mathbb{R}P^2$	19
7.3.3	Ασκήσεις	21
7.3.4	Η Γεωμετρία του Προβολικού Επιπέδου	21
7.3.5	Ιδιότητες των προβολικών μετασχηματισμών του επιπέδου	23
7.3.6	Ασκήσεις	26
7.4	Δυϊσμός	27
7.4.1	Αρχή Δυϊσμού	27
7.4.2	Διπλοί λόγοι και δυϊσμός	28
7.4.3	Θέση προοπτικής	30
7.4.4	Προβολική και προοπτική θέση	31
7.4.5	Ασκήσεις	34
7.5	Κλασικά θεωρήματα της Προβολικής Γεωμετρίας	34
7.5.1	Θεώρημα Πάππου	35
7.5.2	Θεώρημα Desargues	36
7.5.3	Ασκήσεις	38
8	Γεωμετρία της Αντιστροφής	41
8.1	Στερεογραφική προβολή και το $\overline{\mathbb{R}^n}$	42
8.1.1	Στερεογραφική προβολή	42
8.1.2	Μετρική τοπολογία του $\overline{\mathbb{R}^n}$	43
8.2	Αντιστροφές στον $\overline{\mathbb{R}^n}$	45
8.2.1	Αντιστροφή σε σφαίρα του $\overline{\mathbb{R}^n}$	45
8.2.2	Αντιστροφή σε υπερεπίπεδο του $\overline{\mathbb{R}^n}$	49
8.2.3	Δράση των αντιστροφών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$	50
8.2.4	Ασκήσεις	52

8.3	Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^n}$	53
8.3.1	Η μορφή των μετασχηματισμών Möbius	54
8.3.2	Συμμορφία των μετασχηματισμών Möbius	56
8.3.3	Μετρικός διπλός λόγος	58
8.3.4	Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας της Αντιστροφής	60
8.3.5	Ασκήσεις	60
8.4	Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}}$	63
8.4.1	Η ομάδα $GM(1)$	63
8.4.2	Η προβολική ομάδα $P(1)$ και η $GM(1)$	64
8.4.3	Διπλοί λόγοι	65
8.4.4	Ασκήσεις	67
8.5	Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{C}}$	68
8.5.1	Η ομάδα $GM(2)$	68
8.5.2	Η προβολική ομάδα $PGL(2, \mathbb{C})$	70
8.5.3	Διπλοί Λόγοι	71
8.5.4	Ασκήσεις	73
9	Υπερβολική Γεωμετρία	75
9.1	Η ομάδα των υπερβολικών μετασχηματισμών	76
9.1.1	Επέκταση Poincaré της $GM(n)$	76
9.1.2	Επέκταση Poincaré της $GM(1)$	77
9.1.3	Η $PSL(2, \mathbb{R})$ ως η $GM(\mathcal{H}^2)$	80
9.1.4	Κατάταξη των στοιχείων της $M(\mathcal{H}^2)$	81
9.1.5	Ασκήσεις	86
9.2	Υπερβολική Γεωμετρία	88
9.2.1	Υπερβολικές ευθείες	88
9.2.2	Παραλληλία	91
9.2.3	Ασκήσεις	92
9.3	Υπερβολική μετρική	93
9.3.1	Υπερβολικό μήκος καμπύλης	93
9.3.2	Υπερβολική απόσταση	94
9.3.3	Ισομετρίες	96
9.3.4	Υπερβολικοί δίσκοι	97
9.3.5	Υπερβολικό εμβαδόν	97
9.3.6	Ασκήσεις	98
9.4	Υπερβολική Τριγωνομετρία	101
9.4.1	Γωνίες και τρίγωνα	101
9.4.2	Γωνία Παραλληλισμού	102
9.4.3	Τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο	103
9.4.4	Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα	104
9.4.5	Νόμοι Ημιτόνων και Συνημιτόνων	105
9.4.6	Εμβαδόν υπερβολικού τριγώνου	107
9.4.7	Ασκήσεις	108
9.5	Διάφορα μοντέλα Υπερβολικής Γεωμετρίας	110
9.5.1	Μοντέλο του δίσκου Poincaré	111

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

v

9.5.2	Μοντέλο Beltrami-Klein	114
9.5.3	Ασκήσεις	120

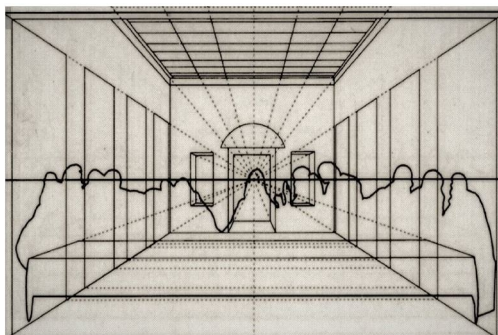
Κεφάλαιο 7

Προβολική Γεωμετρία



G. Desargues (1591–1661).

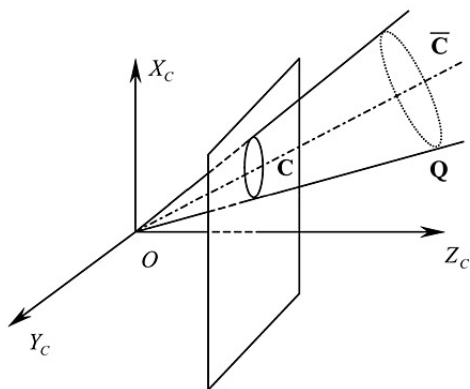
Ήδη από τον 15ο αι. μ.Χ. έγινε κατανοητό ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν επαρκούσε για να μοντελοποιήσει τους μετασχηματισμούς που είχαν σχέση με την *προοπτική* ενός σχήματος. Η προοπτική εμφανιζόταν κατά κόρον στη ζωγραφική και στην αρχιτεκτονική, με τους ζωγράφους και αρχιτέκτονες της πρώιμης Αναγέννησης, στην Ιταλία αλλά και αλλού, να προσπαθούν με διάφορους τρόπους να τη χειριστούν.



Προοπτικές ευθείες στον Μυστικό Δείπνο του Leonardo daVinci.

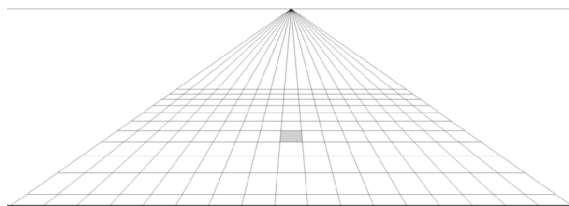
Η μέθοδος της προοπτικής ζωγραφικής αναπτύσσεται τότε, αρχικά στην Ιταλία από τους Brunelleschi και Alberti, ενώ χρησιμοποιήθηκε ευρέως και από τον daVinci. Ένα ανοικτό ερώτημα της εποχής ήταν *ποιές είναι οι κοινές ιδιότητες δύο προοπτικών θέσεων του ιδίου*

σχήματος; Κατά τον 17ο αι. ο (αρχιτέκτονας και μηχανικός) Desargues περιέγραψε τις κωνικές ως προοπτικές παραμορφώσεις του κύκλου. Ο Desargues ήταν αυτός που πρώτος συνέλαβε την ιδέα του σημείου στο άπειρο ως την τομή δύο παραλλήλων ευθειών.



Η έλλειψη ως προοπτική παραμόρφωση κύκλου.

Κατά τον 18ο αι. έχουμε την επαναστατική ιδέα των Descartes, Fermat, να περιγράψουν τη Γεωμετρία με αναλυτικό τρόπο, σε αντίθεση με τον συνθετικό των Ελλήνων.



Μήκη και γωνίες δεν διατηρούνται εν γένει από τις προβολές.

Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα μία πρωτοφανή έκρηξη νέων γεωμετρικών μεθόδων. Ανάμεσα σε πολλά άλλα, ο Desargues βασιζόμενος σε ιδέες του Pascal, επικεντρώθηκε στις απειροστές προσεγγίσεις μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων. Ο Monge εισήγαγε την Περιγραφική Γεωμετρία και μελέτησε ειδικότερα τη διατήρηση των γωνιών και των μηκών από τις προβολές.

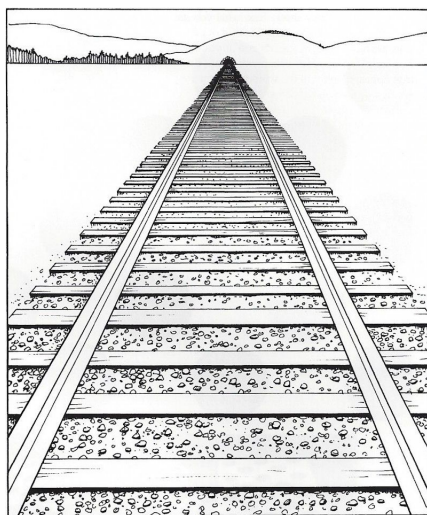


Jean-Victor Poncelet, 1788–1867.

Το 1822, ο Poncelet που ήταν αξιωματικός της στρατιάς του Ναπολέοντα, έγραψε-όντας κλεισμένος σε Ρωσικές φυλακές-διατριβή για τις προβολικές ιδιότητες των σχημάτων και για το αναλλοίωτο των προβολών. Αυτή η διατριβή θεωρείται και ως η πρώτη σε αυτό που σήμερα καλούμε Προβολική Γεωμετρία: μία προβολική ιδιότητα είναι μία ιδιότητα που παραμένει αναλλοίωτη από τις προβολές. Οι Chasles, Möbius μελέτησαν τους πιο γενικούς προβολικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν σημεία σε σημεία και ευθείες σε ευθείες και διατηρούν τον διπλό λόγο.

Είδαμε ότι η Αφφινική Γεωμετρία είναι και αυτή μία γεωμετρία (παράλληλων) προβολών. Η ουσιαστική διαφορά της με την Προβολική Γεωμετρία είναι ότι οι παράλληλες αφφινικές προβολές δεν έχουν σημείο εστίασης, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο αυτό είναι πολύ απομακρυσμένο, δηλαδή, το άπειρο. Με άλλα λόγια οι αφφινικές παράλληλες προβολές που αποτελούν τις στοιχειώδεις αφφινικές απεικονίσεις, μπορούν να ειπωθούν σαν ειδικές προβολικές απεικονίσεις. Με τον τρόπον αυτόν μπορούμε να δούμε τη σύνδεση των γεωμετριών αυτών. Κατά το μοντέλο του Klein, έχουμε την εξής ιεράρχηση: η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μέρος της Αφφινικής Γεωμετρίας η οποία με τη σειρά της περιέχεται στην Προβολική Γεωμετρία.

Σε γενικές γραμμές μπορούμε επίσης να πούμε ότι η Προβολική Γεωμετρία στέκεται ενδιάμεσα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία που ενδιαφέρεται για μήκη, γωνίες και αποστάσεις, και στην Τοπολογία στην οποία το σχήμα δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η Προβολική Γεωμετρία όπως είπαμε ενδιαφέρεται για ιδιότητες αναλλοίωτες από τις προβολές· έτσι, η ευθεία παραμένει ευθεία, αλλά αποστάσεις, μήκη και γωνίες αλλάζουν. Η παραλληλία επίσης αποκτά διαφορετικό νόημα: δύο ευθείες τέμνονται πάντοτε (φανταστείτε τις γραμμές ενός τραίνου-αυτές φαίνεται να τέμνονται στον ορίζοντα). Τελικά καταλήγουμε με μόνο μία προβολική αναλλοίωτη, τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων.



7.1 Ο Προβολικός Χώρος $\mathbb{R}P^n$

Η Προβολική Γεωμετρία κατά Klein είναι το ζεύγος $(\mathbb{R}P^n, P(n))$, όπου $\mathbb{R}P^n$ είναι ο n -διάστατος προβολικός χώρος και είναι η n -προβολική ομάδα. Δίνουμε αμέσως τον αυστηρό ορισμό του

προβολικού n -χώρου $\mathbb{R}P^n$ που είναι και ο υποκείμενος χώρος της Προβολικής Γεωμετρίας-για την προβολική ομάδα $P(n)$ θα μιλήσουμε στην επόμενη ενότητα: στο \mathbb{R}_*^{n+1} , $n \geq 1$, θεωρούμε τη σχέση \sim ως εξής:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}_*.$$

Η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, είναι:

- Ανακλαστική διότι $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ εφόσον $\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$.
- Συμμετρική διότι αν $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τότε $\mathbf{x} = (1/\lambda)\mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}$.
- Μεταβατική διότι αν $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_*$ και $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}'' \iff \mathbf{x}'' = \lambda' \mathbf{x}'$, $\lambda' \in \mathbb{R}_*$, τότε $\mathbf{x}'' = \lambda \lambda' \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \sim \mathbf{x}''$.

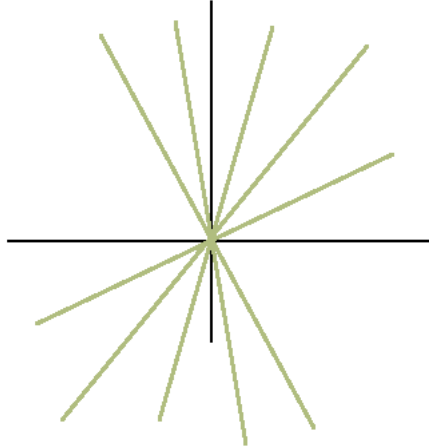
Ο (πραγματικός) προβολικός n -χώρος ορίζεται τώρα ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}_*^{n+1} / \sim = \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1}\}.$$

Στην πράξη, ο $\mathbb{R}P^n$ είναι το σύνολο των ευθειών που περνούν από την αρχή. Πράγματι, μία κλάση ισοδυναμίας ενός \mathbf{x} είναι το σύνολο

$$[\mathbf{x}] = \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\},$$

που είναι η ευθεία που περνά από την αρχή, στην κατεύθυνση του \mathbf{x} .



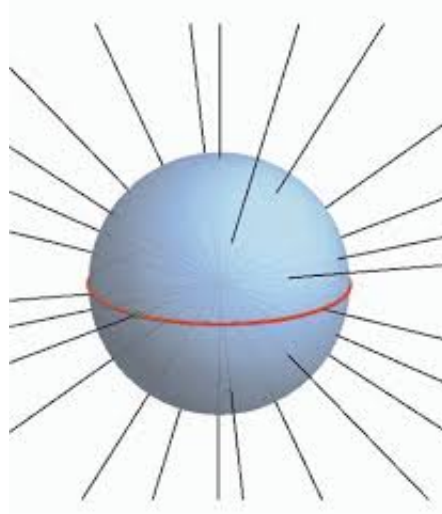
Ο προβολικός χώρος είναι το σύνολο των ευθειών από την αρχή.

Ένας άλλος τρόπος για να θεωρήσουμε τον προβολικό n -χώρο, είναι μέσω της ταυτοποίησης αντιποδικών σημείων της σφαίρας S^n . Πράγματι, κάθε ευθεία του \mathbb{R}_*^{n+1} που περνά από την αρχή, καθορίζεται πλήρως από δύο αντιποδικά σημεία της S^n και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, εάν στην S^n ορίσουμε τη σχέση

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \pm \mathbf{y},$$

τότε εύκολα βλέπουμε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim.$$



Προβολικός χώρος και σφαίρα.

Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1}$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$, θα γράφουμε $[\mathbf{x}] = [x_0 : \dots : x_n]$ και θα καλούμε την τελευταία αγκύλη *ομογενείς συντεταγμένες* του $[\mathbf{x}]$. Λόγου χάρη, το σημείο $[1 : 0 : 2]$ του $\mathbb{R}P^2$ αποτελείται από τα σημεία

$$x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = 2\lambda,$$

που δεν είναι παρά η ευθεία με καρτεσιανές εξισώσεις $y = 0, z = 2x$ του \mathbb{R}^3 .

Για $i = 0, \dots, n$ θεωρούμε τα σύνολα

$$H_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}. \quad (7.1)$$

Τότε επειδή κάθε σημείο $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n$ έχει τουλάχιστον μία συντεταγμένη $x_i \neq 0$, προκύπτει ότι

$$\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=0}^n H_i.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι για $i \neq j$ είναι $H_i \cap H_j \neq \emptyset$. Κάθε ένα όμως από αυτά τα σύνολα είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το \mathbb{R}^n . Λόγου χάρη, το H_n αποτελείται από σημεία της μορφής

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n] = [x_0/x_n : x_1/x_n : \dots : x_{n-1}/x_n : 1] = [y_1 : \dots : y_n : 1].$$

Ορίζεται λοιπόν η απεικόνιση κανονικής προβολής $\mathbb{P} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: στο σύνολο H_n δίνεται από την

$$H_n \ni [y_1 : \dots : y_n : 1] \rightarrow (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Αντίστροφα, αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, η *τυπική ανύψωσή* του στον $\mathbb{R}P^n$ είναι το σημείο $[x_1 : \dots : x_n : 1]$. Τώρα, το σύνολο

$$\mathbb{R}P^n \setminus H_n = \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_n = 0\}$$

είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^{n-1}$:

$$\mathbb{R}P^{n-1} \ni [x_0 : \cdots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \cdots : x_{n-1} : 0] \in \mathbb{R}P^n \setminus H_n.$$

Η αντιστοιχία αυτή παριστάνει την εμφύτευση του $\mathbb{R}P^{n-1}$ στον $\mathbb{R}P^n$ και έχει υποκείμενη την εμφύτευση του \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^{n+1} ως το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n και του προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^{n-1}$.

7.1.1 Προβολικοί μετασχηματισμοί και η προβολική ομάδα $P(n)$

Έστω $m : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του \mathbb{R}^{n+1} ,

$$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \mapsto (y_0, \dots, y_n) = m(\mathbf{x}),$$

και έστω

$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & \cdots & m_{0n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n0} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}^{n+1})$$

ο πίνακας του m ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^{n+1} ώστε

$$y_i = \sum_{j=0}^n m_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Τότε, από τον μετασχηματισμό m , παίρνουμε έναν μετασχηματισμό $[m]$ του $\mathbb{R}P^n$ από τη σχέση

$$[m]([\mathbf{x}]) = [m(\mathbf{x})].$$

Η απεικόνιση $[m]$ είναι ένας καλώς ορισμένος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}P^n$:

1. Αν $[\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2] \in \mathbb{R}P^n$, τότε είναι

$$[\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_2] \iff \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2 \implies m(\mathbf{x}_1) = m(\lambda \mathbf{x}_2) = \lambda m(\mathbf{x}_2) \iff [m(\mathbf{x}_1)] = [m(\mathbf{x}_2)].$$

Άρα, η $[m]$ είναι καλώς ορισμένη.

2. Η $[m]$ είναι 1-1:

$$[m(\mathbf{x}_1)] = [m(\mathbf{x}_2)] \iff m(\mathbf{x}_1) = \lambda m(\mathbf{x}_2) = m(\lambda \mathbf{x}_2) \implies \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2 \iff [\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_2].$$

3. Η $[m]$ είναι επί: αν $[\mathbf{y}] \in \mathbb{R}P^n$, τότε υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $m(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, άρα

$$[m(\mathbf{x})] = [m]([\mathbf{x}]) = [\mathbf{y}].$$

Υπάρχουν κάποιοι συγκεκριμένοι πίνακες της $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ που αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς που δεν έχουν απολύτως καμμία επίδραση στον προβολικό χώρο. Πράγματι, έστω ο πίνακας $M = \lambda I_{n+1}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_*$ που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $m(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ του \mathbb{R}^{n+1} . Τότε, ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός είναι ο ταυτοτικός:

$$[m]([\mathbf{x}]) = [\lambda \mathbf{x}] = [\mathbf{x}].$$

Η ομάδα των μετασχηματισμών της μορφής $m(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα (\mathbb{R}_*, \cdot) που είναι κανονική υποομάδα της $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$. Έτσι λοιπόν στην πραγματικότητα δεν είναι όλη η $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ που δρά στον προβολικό χώρο, αλλά η ομάδα πηλίκο

$$P(n) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) / (\mathbb{R}_*, \cdot).$$

Η ομάδα $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ αποτελείται από κλάσεις $[M]$, $M \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$,

$$[M] = \{\lambda M, \lambda \in \mathbb{R}_*\}.$$

Η πράξη στην $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ δίνεται από τη σχέση

$$[M] * [N] = [MN].$$

Ο παραπάνω ισομορφισμός $P(n) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ δίνεται από τη σχέση $[m] \mapsto [M]$ όπου

$$[M] = \{\lambda M \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν μας δοθεί

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & \dots \vdots & \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

τότε ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός είναι ο

$$[m]([x_0 : \dots : x_n]) = \left[\sum_{i=0}^n m_{0i} x_i : \dots : \sum_{i=0}^n m_{ni} x_i \right].$$

Παράδειγμα 7.1.1. Έστω ο πίνακας

$$[M] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$

έχουμε ότι $[M] \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός είναι ο

$$[m]([x_0 : x_1]) = [4x_0 - x_1 : 2x_0 + 3x_1].$$

Από την άλλη, για τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

οπότε δεν αντιστοιχεί σε κανένα προβολικό μετασχηματισμό.

Παράδειγμα 7.1.2. Η απεικόνιση

$$[m]([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + 2x_1 - x_2 : 2x_0 - x_1 + x_2 : -x_0 + x_1 + 2x_2]$$

παριστάνει προβολικό μετασχηματισμό. Πράγματι, ο πίνακας του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού έχει ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

άρα

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \text{PGL}(3, \mathbb{R}).$$

Από την άλλη, ο μετασχηματισμός

$$[m]([x_0 : x_1 : x_2]) = [2x_0 : 2x_1 + x_2 : x_0]$$

δεν είναι προβολικός. Η ορίζουσα του πίνακα του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Η αριστερή δράση της $P(n)$ στον $\mathbb{R}P^n$ με προβολικούς μετασχηματισμούς $[m]$ δίνεται από την

$$P(n) \times \mathbb{R}P^n \ni ([m], [\mathbf{x}]) \mapsto [m]([\mathbf{x}]) = [m(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}P^n.$$

Πρόταση 7.1.3. Η δράση της $P(n)$ είναι διπλά μεταβατική και ελεύθερη. Άρα, ο χώρος των τροχιών αποτελείται από μοναδικό σημείο και ο προβολικός χώρος είναι πρωταρχικά ομογενής.

Απόδειξη. Εάν $[\mathbf{x}], [\mathbf{x}']$ και $[\mathbf{y}], [\mathbf{y}']$ είναι ζεύγη διαφορετικών σημείων του προβολικού χώρου, τότε επειδή τα \mathbf{x}, \mathbf{x}' και \mathbf{y}, \mathbf{y}' είναι ζεύγη γραμμικά ανεξάρτητων σημείων του \mathbb{R}^{n+1} , υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός m του \mathbb{R}^{n+1} που απεικονίζει τον υπόχωρο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$ στον υπόχωρο $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}' \rangle$ με $m(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ και $m(\mathbf{x}') = \mathbf{y}'$. Τότε όμως ο προβολικός μετασχηματισμός $[m]$ απεικονίζει το $[\mathbf{x}]$ στο $[\mathbf{y}]$ και το $[\mathbf{x}']$ στο $[\mathbf{y}']$.

Από την άλλη, αν $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n$, ο σταθεροποιητής του

$$\text{Stab}(\mathbf{x}) = \{[m] \in P(n) \mid [m]([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}]\}$$

είναι ισόμορφος με το σύνολο (R_*, \cdot) , δηλαδή, το ουδέτερο στοιχείο της $\text{PGL}(n+1, \mathbb{R})$. \square

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην αναλυτική περιγραφή του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ και της γεωμετρίας του. Είναι όμως σωστό να μιλήσουμε πρώτα για την προβολική ευθεία.

7.1.2 Ασκήσεις

1. Θεωρήστε την απεικόνιση

$$p : \mathbb{R}_*^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad \mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}].$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

- (α') Η p είναι επί.
- (β') Η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}([\mathbf{x}])$ ενός σημείου $[\mathbf{x}]$ του προβολικού χώρου, είναι η ευθεία από την αρχή στην κατεύθυνση του \mathbf{x} , της αρχής μη συμπεριλαμβανομένης.
- (γ') Καλούμε ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}P^n$ ανοικτό, εάν η αντίστροφη εικόνα του

$$p^{-1}(U) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1} \mid p(\mathbf{x}) \in U\}$$

είναι ανοικτό σύνολο του \mathbb{R}_*^{n+1} . Δείξτε ότι η p είναι συνεχής. (Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον εξής ορισμό της συνέχειας: η $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής αν για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ η προεικόνα του $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό του X .)

2. Έστω V διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^{n+1} και p όπως στην προηγούμενη άσκηση. Το σύνολο $p(V)$ ονομάζεται προβολικός υπόχωρος του $\mathbb{R}P^n$ προβολικής διάστασης

$$\dim_p(V) = \dim(V) - 1.$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

- (α') Αν V είναι ευθεία από την αρχή, τότε $\dim_p(V) = 0$. (Προβολικό σημείο).
- (β') Αν V είναι 2-επίπεδο από την αρχή, τότε $\dim_p(V) = 1$. (Προβολική ευθεία).

(Υπόδειξη. Πάρτε πρώτα το επίπεδο $P_0 : x_2 = \dots = x_n = 0$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $(x_0, x_1, 0, \dots, 0)$. Τότε,

$$p(P_0) = \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n \mid [\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : 0 : \dots : 0]\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τον $\mathbb{R}P^1$. Για την γενική περίπτωση, αν P είναι ένα οποιοδήποτε 2-επίπεδο του \mathbb{R}^{n+1} , υπάρχει μετασχηματισμός της $GL(n+1, \mathbb{R})$ που το απεικονίζει στο P_0 . Επειδή τα P και P_0 είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία, το ίδιο θα συμβαίνει και με τις εικόνες τους $p(P)$ και $p(P_0)$.

3. Ένα προβολικό πλαίσιο στον $\mathbb{R}P^n$ είναι μία μία συλλογή $(n+2)$ -σημείων

$$F = \{[\mathbf{v}_0], \dots, [\mathbf{v}_n], [\mathbf{v}_{n+1}]\},$$

τέτοια ώστε τα $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ να αποτελούν βάση του \mathbb{R}^{n+1} και

$$\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i.$$

Οι προβολικές συντεταγμένες ενός $[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \mathbf{v}_i$, ως προς το πλαίσιο F είναι

$$[\mathbf{x}]_F = [a_0 : \dots : a_n].$$

(α') Δείξτε ότι το

$$F_N = \{[\mathbf{e}_0], \dots, [\mathbf{e}_n], [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]\}$$

είναι προβολικό πλαίσιο του $\mathbb{R}P^n$ μα αντίστοιχες προβολικές συντεταγμένες τις συνήθεις ομογενείς συντεταγμένες.

(β') Δείξτε ότι αν

$$\mathbf{v}_0 = (2, -1), \quad \mathbf{v}_1 = (-1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0),$$

τότε το

$$F = \{p(\mathbf{v}_0), p(\mathbf{v}_1), p(\mathbf{v}_2)\}$$

είναι προβολικό πλαίσιο για το $\mathbb{R}P^1$. Βρείτε κατόπιν τις προβολικές συντεταγμένες του τυχαίου σημείου $[\mathbf{x}]_F$ ως προς το πλαίσιο αυτό.

4. Δείξτε απευθείας ότι η $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ είναι ομάδα με πράξη

$$[M] * [N] = [MN], \quad [M], [N] \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R}).$$

5. Εξετάστε εάν οι παρακάτω πίνακες ανήκουν στην αντίστοιχη προβολική ομάδα και για αυτούς που ανήκουν βρείτε τον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό και τον αντίστροφό του.

(α')

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(β')

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(γ')

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(δ') Εξετάστε εάν οι παρακάτω μετασχηματισμοί είναι προβολικοί και στην περίπτωση που είναι βρείτε τον πίνακά τους:

i.

$$[m]([x_0 : x_1]) = [x_0 - x_1 : x_1 + x_0].$$

ii.

$$[m]([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1 + x_2 : x_1 + x_2 - x_0].$$

iii.

$$[m]([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) = [x_n : x_{n-1} : \dots : x_1 : x_0].$$

7.2 Η Προβολική Ευθεία και η Γεωμετρία της

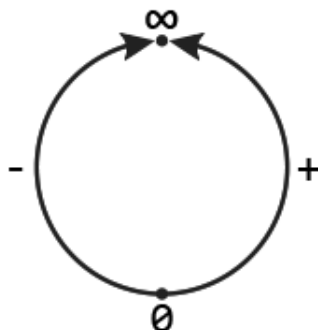
Όταν $n = 1$, το σύνολο $\mathbb{R}P^1$ είναι η *προβολική ευθεία* που όπως είδαμε παραπάνω μπορεί να θεωρείται και ως το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου \mathbb{R}^2 που περνούν από την αρχή $(0, 0)$. Η προβολική ευθεία είναι η ένωση των υποσυνόλων

$$H_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_0 \neq 0\} \quad \text{και} \quad H_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_1 \neq 0\}.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{R}P^1 = H_0 \cup \{[0 : 1]\}, \quad \text{είτε} \quad \mathbb{R}P^1 = H_1 \cup \{[1 : 0]\},$$

δηλαδή, η προβολική ευθεία μπορεί να γραφεί ως η (ξένη) ένωση της Ευκλείδειας ευθείας (εν προκειμένω, της H_0 ή της H_1 , αντίστοιχα) και ενός σημείου στο άπειρο (του $[0 : 1]$, ή του $[1 : 0]$, αντίστοιχα). Η προβολική ευθεία $\mathbb{R}P^1$ λοιπόν βρίσκεται σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τον ίδιο τον κύκλο S^1 και όχι απλώς με τον S^1 / \sim . Κι αυτό διότι ο S^1 μέσω της στερεογραφικής προβολής (δείτε την Ενότητα 8.1.1), μπορεί να ταυτιστεί με την πραγματική ευθεία στην οποία έχουμε προσθέσει ένα σημείο στο άπειρο. Προκύπτει λοιπόν με απλό τρόπο ότι η προβολική ευθεία είναι συμπαγές σύνολο και το ίδιο ισχύει για τον προβολικό χώρο κάθε διάστασης. Η απόδειξη όμως για $n > 1$ απαιτεί τεχνικές που είναι πέρα από τον σκοπό των σημειώσεων αυτών. Στην Ενότητα 7.3 μπορείτε να δείτε σχηματοποιήσεις του προβολικού επιπέδου σαν μία συμπαγή επιφάνεια.



Προβολική ευθεία και κύκλος.

Μπορούμε να πηγαίνουμε από την προβολική στην Ευκλείδεια ευθεία με την απεικόνιση προβολής $\mathbb{P} : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δίνεται στο σύνολο H_0 από την $\mathbb{P}([x_0 : x_1]) = x_1/x_0$, ενώ στο σύνολο H_1 δίνεται από την $\mathbb{P}([x_0 : x_1]) = x_0/x_1$. Αντιστρόφως, μπορούμε να πηγαίνουμε από την Ευκλείδεια ευθεία στην προβολική μέσω της απεικόνισης τυπικής ανύψωσης $x \mapsto [x : 1]$.

Η προβολική ομάδα $P(1)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς $[m] : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, όπου $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Ένας μετασχηματισμός $[m]$ αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο σε ένα στοιχείο της ομάδας

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \right\}, \quad (7.2)$$

με την αντιστοιχία να ορίζεται από την $[m] \mapsto [M]$. Ο M εδώ είναι ο πίνακας του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού.

Έχουμε την εξής θεμελιώδη πρόταση για τη Γεωμετρία της Προβολικής Ευθείας:

Πρόταση 7.2.1. Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ και $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$ τριάδες διαφορετικών ανά δύο σημείων της $\mathbb{R}P^1$. Τότε υπάρχει μοναδικός $[m] \in P(1)$ τέτοιος ώστε

$$[m]([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad [m]([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad [m]([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'].$$

Απόδειξη. Έστω τα σημεία $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ και $[1 : 1]$. Έστω επίσης ότι

$$[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1], \quad [\mathbf{B}] = [b_0 : b_1], \quad [\mathbf{C}] = [c_0 : c_1].$$

Για $\lambda, \mu \neq 0$, θεωρούμε τον $m_{\lambda, \mu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$m_{\lambda, \mu}(x_0, x_1) = (\lambda a_0 x_0 + \mu b_0 x_1, \lambda a_1 x_0 + \mu b_1 x_1).$$

ο πίνακας N του μετασχηματισμού αυτού είναι ο

$$N = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \mu b_0 \\ \lambda a_1 & \mu b_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

εφόσον η ορίζουσά του είναι ίση με $\lambda\mu(a_0 b_1 - b_0 a_1) \neq 0$ διότι $[\mathbf{A}] \neq [\mathbf{B}]$. Επιπλέον, έχουμε τις σχέσεις

$$[m_{\lambda, \mu}]([1 : 0]) = [\mathbf{A}], \quad [m_{\lambda, \mu}]([0 : 1]) = [\mathbf{B}], \quad [m_{\lambda, \mu}]([1 : 1]) = [\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}].$$

Τα \mathbf{A} , \mathbf{B} σχηματίζουν μία βάση του \mathbb{R}^2 . Έτσι, υπάρχουν μοναδικά λ_0, μ_0 ώστε $\mathbf{C} = \lambda_0 \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{B}$ και τότε ο μετασχηματισμός $[m] = [m_{\lambda_0, \mu_0}]$ ικανοποιεί την $[m]([1 : 1]) = [\mathbf{C}]$. Με την ίδια διαδικασία, βρίσκουμε $m' \in P(1)$ με

$$[m']([1 : 0]) = [\mathbf{A}'], \quad [m']([0 : 1]) = [\mathbf{B}'], \quad [m']([1 : 1]) = [\mathbf{C}'].$$

Ο μετασχηματισμός $[m'] \circ [m^{-1}]$ είναι ο ζητούμενος. Είναι δε μοναδικός, διότι εάν υπήρχε $[m'']$ με

$$[m'']([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad [m'']([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad [m'']([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'],$$

τότε ο $[n] = [m] \circ [m'] \circ [(m')^{-1}]$ θα σταθεροποιούσε τα τρία σημεία $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ και $[1 : 1]$.
Αν

$$[n]([x_0 : x_1]) = [n_{00}x_0 + n_{01}x_1, n_{10}x_0 + n_{11}x_1],$$

τότε

$$\begin{aligned} [n]([1 : 0]) &= [n_{00} : n_{10}] = [1 : 0] \implies n_{10} = 0, \\ [n]([0 : 1]) &= [n_{01} : n_{11}] = [0 : 1] \implies n_{01} = 0, \\ [n]([1, 1]) &= [n_{00} : n_{11}] = [1 : 1] \implies n_{00} = n_{11}. \end{aligned}$$

Άρα ο $[n]$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της $P(1)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Σχόλιο 7.2.2. Υπό το πρίσμα της Άσκησης 7.1.2.3 η Πρόταση 7.2.1 μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής: Αν

$$F_1 = \{[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}]\}, \quad F_2 = \{[\mathbf{A}'], [\mathbf{B}'], [\mathbf{C}']\}$$

είναι προβολικά πλαίσια της $\mathbb{R}P^1$, τότε υπάρχει στοιχείο $[m] \in P(1)$ με

$$[m]([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad [m]([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad [m]([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'].$$

Παράδειγμα 7.2.3. Θα βρούμε τον $[m] \in P(1)$ που απεικονίζει τα $[1 : 0]$, $[0 : 1]$, $[1 : 1]$ στα $[1 : 2]$, $[-1 : 1]$ και $[2 : 1]$, αντίστοιχα. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.2.1 έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*$ και έστω $m_{\lambda, \mu}$ ο μετασχηματισμός του \mathbb{R}^2 με πίνακα

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ 2\lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$[m_{\lambda, \mu}(1, 1)] = [\lambda - \mu : 2\lambda + \mu].$$

Το σύστημα

$$\lambda - \mu = 2, \quad 2\lambda + \mu = 1$$

έχει λύσεις $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Άρα, ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $[m] = [m_{1, -1}]$ με πίνακα

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή,

$$[m]([x_0 : x_1]) = [x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1].$$

Παράδειγμα 7.2.4. Θα βρούμε τον μετασχηματισμό της $P(1)$ που απεικονίζει τα $[1 : 2]$, $[-1 : 1]$ και $[2 : 1]$ στα $[2 : 1]$, $[-1 : 1]$ και $[1 : 2]$, αντίστοιχα. Λόγω του προηγούμενου παραδείγματος, ο $[m]$ με

$$[m]([x_0 : x_1]) = [x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1].$$

απεικονίζει τα $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ και $[1 : 1]$ στα $[1 : 2]$, $[-1 : 1]$ και $[2 : 1]$, αντίστοιχα. Βρίσκουμε λοιπόν μόνο τον μετασχηματισμό $[m']$ που απεικονίζει τα $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ και $[1 : 1]$ στα

$[2 : 1]$, $[-1 : 1]$ και $[1 : 2]$, αντίστοιχα. Όπως προηγουμένως, θεωρούμε $m'_{\lambda,\mu}$ και τον πίνακα του

$$N' = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Είναι $[m'_{\lambda,\mu}(1, 1)] = [2\lambda - \mu : \lambda + \mu]$ και από τις σχέσεις

$$2\lambda - \mu = 1, \quad \lambda + \mu = 2,$$

παίρνουμε $\lambda = \mu = 1$. Συνεπώς, ο $[m']$ έχει πίνακα

$$[M'] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή,

$$[m']([x_0 : x_1]) = [2x_0 - x_1 : x_0 + x_1].$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $[n] = [m'] \circ [m^{-1}]$. Ο πίνακάς του είναι ο

$$[M'M^{-1}] = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα,

$$[n]([x_0 : x_1]) = [x_1 : x_0].$$

7.2.1 Διπλός λόγος

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων. Ο διπλός λόγος ήταν γνωστός στον Ευκλείδη και η θεμελιώδης του ιδιότητα (Πρόταση 7.2.5 παρακάτω) αποδείχθηκε από τον Πάππο. Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ τέσσερα σημεία της $\mathbb{R}P^1$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μὴν είναι ίσα. Έστω χωρίς βλάβη ότι $[\mathbf{A}] \neq [\mathbf{B}]$. Τότε,

$$\mathbf{C} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = r\mathbf{A} + s\mathbf{B}. \quad (7.3)$$

Ο διπλός λόγος ορίζεται ως

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \frac{qr}{ps}.$$

Παρατηρήστε ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων δεν μπορεί να είναι 0: αν $q = 0$ τότε $[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}]$ ενώ αν $r = 0$ τότε $[\mathbf{D}] = [\mathbf{B}]$. Αν πάλι ο διπλός λόγος είναι ίσος με 1, καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. Κι αυτό διότι από την $qr = ps$ έχουμε

$$\mathbf{C} = (qr/s)\mathbf{A} + q\mathbf{B} = (sq)\mathbf{D} \implies [\mathbf{C}] = [\mathbf{D}]$$

Ο ορισμός του διπλού λόγου είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των αντιπροσώπων: πράγματι, αν $\mathbf{A}' = a\mathbf{A}$, $\mathbf{B}' = b\mathbf{B}$, $\mathbf{C}' = c\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}' = d\mathbf{D}$, τότε υπάρχουν a, b, c, d όλα διαφορετικά του μηδενός τέτοια ώστε $\mathbf{A}' = a\mathbf{A}$, $\mathbf{B}' = b\mathbf{B}$, $\mathbf{C}' = c\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}' = d\mathbf{D}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= c\mathbf{C} = cp\mathbf{A} + cq\mathbf{B} = (cp/a)\mathbf{A}' + (cq/b)\mathbf{B}', \\ \mathbf{D}' &= d\mathbf{D} = dr\mathbf{A} + ds\mathbf{B} = (dr/a)\mathbf{A}' + (ds/b)\mathbf{B}', \end{aligned}$$

συνεπώς

$$[\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}'] = \frac{(cq/b)(dr/a)}{(cp/a)(ds/b)} = \frac{qr}{ps} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}].$$

Πρόταση 7.2.5. *Ο διπλός λόγος είναι προβολική αναλλοίωτος: παραμένει αναλλοίωτος από τη δράση της $P(1)$.*

Απόδειξη. Έστω όπως παραπάνω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ τέσσερα σημεία της $\mathbb{R}P^1$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα και έστω χωρίς βλάβη ότι $[\mathbf{A}] \neq [\mathbf{B}]$, ώστε να ισχύει η (7.3). Αν $[m] \in P(1)$ με αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό m , τότε

$$m(\mathbf{C}) = p \cdot m(\mathbf{A}) + q \cdot m(\mathbf{B}), \quad m(\mathbf{D}) = r \cdot m(\mathbf{A}) + s \cdot m(\mathbf{B}).$$

Είναι τώρα $[m(\mathbf{A})] \neq [m(\mathbf{B})]$. Κι αυτό διότι, στην περίπτωση που ίσχυε το αντίθετο θα υπήρχε $\lambda \in \mathbb{R}_*$ με $m(\mathbf{B}) = \lambda \cdot m(\mathbf{A})$. Επειδή όμως ο m είναι αντιστρέψιμος, τούτο θα συνεπαγόταν ότι $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$ και άρα $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]$, πράγμα που αντικρούει την υπόθεση. Άρα,

$$[m(\mathbf{A}), m(\mathbf{B}); m(\mathbf{C}), m(\mathbf{D})] = \frac{qr}{ps} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}].$$

□

Πρόταση 7.2.6. *Υπάρχει $[m] \in P(1)$ που απεικονίζει τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ σε τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$, $[\mathbf{D}']$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν*

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = [\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}'].$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει $[m] \in P(1)$ με

$$[m(\mathbf{A})] = [\mathbf{A}'], \quad [m(\mathbf{B})] = [\mathbf{B}'], \quad [m(\mathbf{C})] = [\mathbf{C}'], \quad [m(\mathbf{D})] = [\mathbf{D}'],$$

τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από την Πρόταση 7.2.5. Έστω τώρα ότι

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = [\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}'].$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}'] = [1 : 0], \quad [\mathbf{B}] = [\mathbf{B}'] = [0 : 1], \quad [\mathbf{C}] = [\mathbf{C}'] = [1 : 1].$$

Τότε, αν $[\mathbf{D}] = [d_1 : d_2]$ και $[\mathbf{D}'] = [d'_1 : d'_2]$, είναι

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = d_1/d_2, \quad [\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}'] = d'_1/d'_2.$$

Προκύπτει ότι $[\mathbf{D}] = [\mathbf{D}']$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σχόλιο 7.2.7. Στο σημείο αυτό κάνουμε μία χρήσιμη παρατήρηση πάνω στην απόδειξη της Πρότασης 7.2.6. Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ και $[\mathbf{D}]$ τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία της $\mathbb{R}P^1$ και έστω

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$[(1, 0), (0, 1); (1/\lambda, 1), (1, 1)] = \lambda = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}].$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.6, υπάρχει $[m] \in P(1)$ με

$$[m(1, 0)] = [\mathbf{A}], \quad [m(0, 1)] = [\mathbf{B}], \quad [m(1/\lambda, 1)] = [\mathbf{C}], \quad [m(1, 1)] = [\mathbf{D}].$$

Άρα, όταν μας δίνονται τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία της $\mathbb{R}P^1$ μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι αυτά είναι τα

$$[1 : 0], \quad [0 : 1], \quad [1/\lambda : 1], \quad [1 : 1],$$

όπου λ είναι ο διπλός λόγος των δοθέντων σημείων.

Ας παρατηρήσουμε ότι μέσω της ταύτισης της $\mathbb{R}P^1$ με τον $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, ο διπλός λόγος μπορεί να οριστεί και για σημεία του $\overline{\mathbb{R}}$ ως εξής: έστω $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$, τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα. Αν κανένα από αυτά δεν είναι το ∞ , θεωρούμε τις ανυψώσεις τους

$$[\mathbf{A}] = [a : 1], \quad [\mathbf{B}] = [b : 1], \quad [\mathbf{C}] = [c : 1], \quad [\mathbf{D}] = [d : 1].$$

Αν $a \neq b$, τότε επειδή

$$c = \frac{(c-b)a + (a-c)b}{a-b},$$

$$d = \frac{(d-b)a + (a-d)b}{a-b},$$

έχουμε

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)},$$

το οποίο και ορίζουμε ως τον *διπλό λόγο* $[a, b; c, d]$ των a, b, c, d . Χρειάζεται βεβαίως να κάνουμε ορισμένες παραδοχές στην περίπτωση όπου δύο από τα σημεία είναι ίσα: λόγου χάρη, αν $b = c$, τότε λέμε ότι $[a, b; c, d] = \infty$. Έτσι, ο διπλός λόγος παίρνει τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.¹ Παρατηρήστε τώρα ότι με την επιπλέον παραδοχή ότι $\infty : \infty = 1$, ο διπλός λόγος

$$[a, b; c, d] = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)},$$

ορίζεται και στην περίπτωση που κάποιο από τα a, b, c, d είναι το σημείο στο άπειρο. Θα επανέλθουμε στην πραγμάτευση αυτή του διπλού λόγου στην Ενότητα 8.4.3.

Παράδειγμα 7.2.8. Θα βρούμε με δύο τρόπους τον διπλό λόγο των

$$[\mathbf{A}] = [1 : 2], \quad [\mathbf{B}] = [2 : 1], \quad [\mathbf{C}] = [1 : 0], \quad [\mathbf{D}] = [1 : 1].$$

¹Και πάλι έχουμε ότι αν τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, τότε ο διπλός λόγος παίρνει τιμές στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Κατ' αρχάς είναι

$$\mathbf{C} = (1, 0) = (-1/3)\mathbf{A} + (2/3)\mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = (1, 1) = (1/3)\mathbf{A} + (1/3)\mathbf{B},$$

οπότε,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \frac{(2/3) \cdot (1/3)}{(-1/3) \cdot (1/3)} = -2.$$

Από την άλλη, επειδή τα $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{D}]$ ανήκουν στο σύνολο H_0 , θεωρούμε τις προβολές

$$a = 1/2, \quad b = 2, \quad d = 1,$$

των $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{D}]$, αντίστοιχα, επάνω στην πραγματική ευθεία, ενώ παίρνουμε $c = \infty$. Τότε,

$$[a, b; c, d] = \frac{(1-2)(\infty-1/2)}{(1-1/2)(\infty-2)} = \frac{-1}{1/2} \cdot \frac{\infty}{\infty} = (-2) \cdot 1 = -2.$$

Πρόταση 7.2.9. Θεώρημα Τεσσάρων Σημείων. Έστω $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}], [\mathbf{X}], [\mathbf{Y}]$ σημεία της προβολικής ευθείας. Τότε,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{Y}] \implies [\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}].$$

Απόδειξη. Έστω

$$\mathbf{C} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = r\mathbf{A} + s\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y} = r'\mathbf{A} + s'\mathbf{B}.$$

Τότε,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{Y}] \implies \frac{qr}{ps} = \frac{qr'}{ps'} \implies \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}.$$

Οπότε,

$$\mathbf{Y} = r'\mathbf{A} + s'\mathbf{B} = (r'/r)r\mathbf{A} + (s'/s)s\mathbf{B} = (r'/r)(r\mathbf{A} + s\mathbf{B}) = (r'/r)\mathbf{X} \implies [\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}].$$

□

Ένα φυσιολογικό και ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: τί συμβαίνει στον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων όταν μετατάξουμε τα σημεία με μία μετάταξη της ομάδας μετατάξεων S_4 ; Υπάρχουν ως γνωστόν 24 μετατάξεις στην S_4 αλλά ο διπλός λόγος που προκύπτει από οποιαδήποτε από αυτές είναι συνάρτηση ενός προκαθορισμένου διπλού λόγου. Δείτε την Άσκηση 7.2.2.5.

7.2.2 Ασκήσεις

1. Βασιζόμενοι στην απόδειξη της Πρότασης 7.2.1 αλλά και στο Παράδειγμα 7.2.3, βρείτε το $[m]$ που απεικονίζει

(α') τα $[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1]$ στα $[-1, 2], [2, 3], [4 : 1]$, αντίστοιχα,

(β') τα $[-1 : 1], [0 : 1], [1 : 2]$ στα $[0, 1], [3, -1], [2 : 5]$, αντίστοιχα, και

(γ') τα $[3 : 1], [2 : 1], [1 : 1]$ στα $[1, 1], [1, 2], [1 : 3]$, αντίστοιχα.

2. Για ποια $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $[m]$ που απεικονίζει τα $[1 : 0]$, $[0 : 1]$, $[1 : 1]$ στα $[2 : 3]$, $[-1 : a]$, $[a : 1]$, αντίστοιχα; Για αυτά τα a , βρείτε τον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό.
3. Εξετάστε εάν υπάρχει στοιχείο της $P(1)$ που να απεικονίζει τα $[1 : 0]$, $[0 : 1]$, $[1 : 1]$ και $[1 : -1]$ στα $[0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[2 : 1]$ και $[1 : 2]$, αντίστοιχα. Εάν υπάρχει, βρείτε το στοιχείο αυτό.
4. Βρείτε το $a \neq 0, \pm 1$ για το οποίο υπάρχει στοιχείο της $P(1)$ που να απεικονίζει τα $[-a : 1]$, $[0 : 1]$, $[a : 1]$ και $[1 : 1]$ στα $[a : 1]$, $[1 : 0]$, $-a : 1]$ και $[2 : 1]$, αντίστοιχα. Εάν υπάρχει, βρείτε το στοιχείο αυτό.
5. Δείξτε ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων της προβολικής ευθείας ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = [\mathbf{B}, \mathbf{A}; \mathbf{D}, \mathbf{C}] = [\mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{D}, \mathbf{C}; \mathbf{B}, \mathbf{A}] \quad (7.4)$$

και

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] &= \lambda, & [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{D}, \mathbf{C}] &= 1/\lambda, \\ [\mathbf{A}, \mathbf{C}; \mathbf{B}, \mathbf{D}] &= 1 - \lambda, & [\mathbf{A}, \mathbf{C}; \mathbf{D}, \mathbf{B}] &= 1/(1 - \lambda), \\ [\mathbf{A}, \mathbf{D}; \mathbf{B}, \mathbf{C}] &= 1 - 1/\lambda, & [\mathbf{A}, \mathbf{D}; \mathbf{C}, \mathbf{B}] &= \lambda/(\lambda - 1). \end{aligned}$$

7.3 Το Προβολικό Επίπεδο και η Γεωμετρία του

7.3.1 Γενικά για το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι η ένωση των εξής τριών μη ξένων μεταξύ τους συνόλων:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_0 \neq 0\}, \\ H_1 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_1 \neq 0\}, \\ H_2 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_2 \neq 0\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Το καθένα από τα σύνολα αυτά όμως είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το \mathbb{R}^2 : λόγω χάρη, τα σημεία του H_2 είναι ισοδύναμα με σημεία της μορφής $[x : y : 1]$. Η απεικόνιση προβολής $\mathbb{P} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ δίνεται στο H_2 από την $[x : y : 1] \mapsto (x, y)$. Είναι τώρα

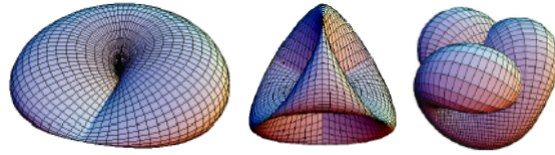
$$L_\infty^3 = \mathbb{R}P^2 \setminus H_2 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_2 = 0\}.$$

Το σύνολο L_∞^3 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αντίγραφο της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ εμφυτευμένης εντός του $\mathbb{R}P^2$:

$$\mathbb{R}P^1 \ni [x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : x_1 : 0] \in \mathbb{R}P^2,$$

και ονομάζεται *ευθεία στο άπειρο ως προς H_2* . Η εμφύτευση αυτή έχει υποκείμενη την εμφύτευση του Ευκλειδείου επιπέδου \mathbb{R}^2 εντός του \mathbb{R}^3 ως το επίπεδο $x_2 = 0$.

Σχόλιο 7.3.1. Σημειώνουμε και πάλι χωρίς απόδειξη ότι το προβολικό επίπεδο είναι ένα συμπαγές σύνολο. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε διάφορες αναπαραστάσεις του προβολικού επιπέδου σαν συμπαγή επιφάνεια του \mathbb{R}^3 .



Αναπαραστάσεις του προβολικού επιπέδου.

7.3.2 Ευθείες στο $\mathbb{R}P^2$

Το Ευκλείδειο επίπεδο \mathbb{R}^2 μπορεί να εμφυτευτεί εντός του \mathbb{R}^3 και ως οποιοδήποτε επίπεδο

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0, \quad |a| + |b| + |c| \neq 0, \quad (7.6)$$

που περνά από την αρχή. Γνωρίζουμε ήδη ότι τέτοιου είδους επίπεδα προκύπτουν από τη δράση ενός στοιχείου της ορθογώνιας ομάδας $O(3)$ στο \mathbb{R}^3 . Η Εξίσωση (7.6) παριστάνει την εξίσωση της τυχούσας προβολικής ευθείας του $\mathbb{R}P^2$ και μας λέει επίσης ότι κάθε τέτοια προβολική ευθεία μπορεί να θεωρηθεί σαν ευθεία στο άπειρο.

Πρόταση 7.3.2. Από κάθε δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ περνά μοναδική προβολική ευθεία.

Απόδειξη. Έστω $[\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : x_2]$ και $[\mathbf{x}'] = [x'_0 : x'_1 : x'_2]$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία στο $\mathbb{R}P^2$. Τούτο σημειώνει ότι τουλάχιστον μία από τις ελάχιστονες ορίζουσες

$$D_0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x'_0 & x'_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x'_0 & x'_1 \end{vmatrix},$$

είναι διαφορετική του μηδενός. Τότε, η ευθεία με εξίσωση

$$D_0 X_0 - D_1 X_1 + D_2 X_2 = 0,$$

περιέχει τα $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}']$. (Επιβεβαιώστε τον ισχυρισμό στην Άσκηση 7.3.3.2: παρατηρήστε ότι ουσιαστικά αποδείξαμε ότι δύο επίπεδα του \mathbb{R}^3 που περνούν από την αρχή τέμνονται σε μία ευθεία!) \square

Πόρισμα 7.3.3. Η ευθεία που περνά από τα $[\mathbf{x}]$ και $[\mathbf{x}']$ όπως παραπάνω, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.7)$$

Παράδειγμα 7.3.4. Έστω τα σημεία $[1 : 0 : 2]$ και $[0 : 1 : 2]$ του $\mathbb{R}P^2$. Αν $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ είναι η ευθεία που τα περιέχει, τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 2 = a + 2c = 0 \quad \text{και} \quad a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 2 = b + 2c = 0.$$

Προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η $L : 2X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (7.7) έχουμε πάλι

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2X_0 - 2X_1 + X_2 = 0.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή και σαν ιδιότητα *πρόσπτωσης*. Μας εξασφαλίζει την *μή ύπαρξη παραλληλίας ευθειών στο προβολικό επίπεδο*:

Πρόταση 7.3.5. (Πρόσπτωση). Δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται πάντοτε σε ένα μοναδικό σημείο.

Απόδειξη. Έστω οι ευθείες

$$\begin{aligned} L_1 &: ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0, \\ L_2 &: a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0. \end{aligned}$$

Τα κοινά τους σημεία είναι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος, το οποίο, επειδή τουλάχιστον μία από τις ελάχιστες ορίζουσες

$$D_0 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

είναι διαφορετική του μηδενός, έχει άπειρες λύσεις: αν λόγου χάρη $D_2 \neq 0$, τότε

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{D_2} \cdot x_2, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{D_2} \cdot x_2.$$

Προκύπτει το μοναδικό προβολικό σημείο

$$\left[\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right],$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Σχόλιο 7.3.6. Μπορούμε να γράφουμε την εξίσωση μίας ευθείας $L : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ ως $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ · κι αυτό διότι το $\mathbf{A} = (a, b, c)$ είναι το κάθετο διάνυσμα του αντίστοιχου Ευκλείδειου επιπέδου και συνεπώς είναι μη μηδενικό. Δείτε τώρα ότι από την Πρόταση 7.3.5 προκύπτει αμέσως ότι το σημείο τομής των ευθειών $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ είναι ακριβώς το $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Αυτό αντανακλά στο γεγονός ότι η τομή δύο επιπέδων που περνούν από την αρχή είναι ευθεία από την αρχή, με διάνυσμα διεύθυνσης το κάθετο προς τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα των επιπέδων.

Πρόταση 7.3.7. Τρία σημεία $[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1 : a_2]$, $[\mathbf{B}] = [b_0 : b_1 : b_2]$ και $[\mathbf{C}] = [c_0 : c_1 : c_2]$ του προβολικού επιπέδου είναι συνευθειακά αν και μόνο αν το μεικτό γινόμενο

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Απόδειξη. Η ευθεία που ορίζουν τα $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ δίνεται από την

$$[\mathbf{B} \times \mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Σχόλιο 7.3.8. Σημειώνουμε εδώ ότι τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ σχηματίζουν *τρικόρυφο*. Ο όρος *τρίγωνο* που χρησιμοποιείται παρακάτω είναι καταχρηστικός. Και τούτο διότι, ενώ μπορεί να οριστεί η γωνία μεταξύ δύο προβολικών ευθειών ως η διέδρη γωνία των αντίστοιχων Ευκλείδειων επιπέδων, ο ορισμός αυτός δεν είναι προβολικά αναλλοίωτος, δηλαδή, δεν διατηρείται από τους προβολικούς μετασχηματισμούς. Το ίδιο ισχύει και για τον όρο τετράπλευρο, κ.λπ.

7.3.3 Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε τις ευθείες στο άπειρο των συνόλων H_0 και H_1 στην (7.5).
2. Επιβεβαιώστε τον ισχυρισμό της απόδειξης της Πρότασης 7.3.2.
3. Βρείτε τις ευθείες L_i , $i = 1, 2, 3$, που περνούν από τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{B}]$ όταν αυτά είναι αντίστοιχα τα

$$(\alpha') [1 : 0 : 5], [0 : -1 : 9].$$

$$(\beta') [2 : 3 : 2], [-1 : 4 : 1].$$

$$(\gamma') [0 : 1 : -1], [-2 : 6 : 1].$$

4. Βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών L_i της προηγούμενης άσκησης.
5. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω τριάδες σημείων είναι συνευθειακές και εάν είναι προσδιορίστε την ευξεία που ανήκουν:

$$(\alpha') [-2 : 8 : 1], [3 : 4 : 0], [-2 : 5 : 2].$$

$$(\beta') [1 : -1/2 : 2], [-2 : 1 : 3], [0 : 0 : 1].$$

$$(\gamma') [0 : 1 : -1/4], [2 : 2 : -1], [1 : -1 : 0].$$

7.3.4 Η Γεωμετρία του Προβολικού Επιπέδου

Η Γεωμετρία (κατά Klein) του Προβολικού Επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ είναι το ζεύγος $(\mathbb{R}P^2, P(2))$, όπου η ομάδα $P(2)$ είναι η $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$. Η παρακάτω πρόταση είναι ανάλογη της Πρότασης 7.2.1 και συνιστά το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου:

Πρόταση 7.3.9. Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ και $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$, $[\mathbf{D}']$ τετράδες μη συνευθειακών ανά τριών σημείων του $\mathbb{R}P^2$. Τότε υπάρχει μοναδικός $[m] \in P(2)$ με

$$[m(\mathbf{A})] = [\mathbf{A}'], \quad [m(\mathbf{B})] = [\mathbf{B}'], \quad [m(\mathbf{C})] = [\mathbf{C}'], \quad [m(\mathbf{D})] = [\mathbf{D}'].$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παραπλήσια της απόδειξης της Πρότασης 7.2.1. Έστω τα σημεία $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ και $[1 : 1 : 1]$. Έστω επίσης ότι

$$[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1 : a_2], \quad [\mathbf{B}] = [b_0 : b_1 : b_2], \quad [\mathbf{C}] = [c_0 : c_1 : c_2], \quad \mathbf{D} = [d_0 : d_1 : d_2].$$

Για $\lambda, \mu, \nu \neq 0$, ο πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \mu b_0 & \nu c_0 \\ \lambda a_1 & \mu b_1 & \nu c_1 \\ \lambda a_2 & \mu b_2 & \nu c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}),$$

εφ' όσον τα $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ και $[\mathbf{C}]$ δεν είναι συνευθειακά. Αν n είναι ο αντίστοιχος γραμμικός μετασχηματισμός τότε

$$\begin{aligned} [n(1, 0, 0)] &= [\mathbf{A}], & [n(0, 1, 0)] &= [\mathbf{B}], \\ [n(0, 0, 1)] &= [\mathbf{C}], & [n(1, 1, 1)] &= [\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} + \nu\mathbf{C}]. \end{aligned}$$

Επειδή τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ σχηματίζουν μία βάση του \mathbb{R}^3 , υπάρχουν λ_0, μ_0 και ν_0 , όλα διαφορετικά του μηδενός, ώστε

$$\mathbf{D} = \lambda_0\mathbf{A} + \mu_0\mathbf{B} + \nu_0\mathbf{C}.$$

(Το ότι τα σημεία υποτέθηκαν ανά τρία μη συνευθειακά, χρειάζεται ακριβώς εδώ). Τότε αν $[m]$ είναι ο προβολικός μετασχηματισμός με πίνακα

$$[M] = \begin{bmatrix} \lambda_0 a_0 & \mu_0 b_0 & \nu_0 c_0 \\ \lambda_0 a_1 & \mu_0 b_1 & \nu_0 c_1 \\ \lambda_0 a_2 & \mu_0 b_2 & \nu_0 c_2 \end{bmatrix},$$

έχουμε

$$[m(1, 1, 1)] = [\mathbf{D}].$$

Αναλόγως, βρίσκουμε $[m'] \in P(2)$ με

$$[m'(1, 0, 0)'] = [\mathbf{A}'], \quad [m'(0, 1, 0)] = [\mathbf{B}'], \quad [m'(0, 0, 1)] = [\mathbf{C}'], \quad [m'(1, 1, 1)] = [\mathbf{D}'].$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι τότε ο $[m'] \circ [m^{-1}]$. Συμπληρώστε από το σημείο αυτό την απόδειξη δείχνοντας ότι κάθε στοιχείο της $P(2)$ που σταθεροποιεί τα $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ και $[1 : 1 : 1]$ είναι ο ταυτοτικός. \square

Παράδειγμα 7.3.10. Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό $[m]$ κατά τον οποίον

$$\begin{aligned} [1 : 0 : 0] &\mapsto [0 : 0 : 1], \\ [0 : 1 : 0] &\mapsto [0 : 1 : 1], \\ [0 : 0 : 1] &\mapsto [1 : 1 : 1], \\ [1 : 1 : 1] &\mapsto [3 : 2 : 4], \end{aligned}$$

έστω $\lambda, \mu, \nu \neq 0$ και

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 0 & \mu & \nu \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό n . Τότε από τη σχέση

$$[n(1, 1, 1)] = [\nu : \mu + \nu : \lambda + \mu + \nu] = [3 : 2 : 4]$$

έχουμε $\lambda = 2$, $\mu = -1$, $\nu = 3$. Συνεπώς

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

. και

$$[m]([x_0 : x_1 : x_2]) = [3x_2 : -x_1 + 3x_2 : 2x_0 - x_1 + 3x_2].$$

7.3.5 Ιδιότητες των προβολικών μετασχηματισμών του επιπέδου

Οι επόμενες προτάσεις περιγράφουν ορισμένες από τις ιδιότητες της $P(2)$.

Πρόταση 7.3.11. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

Απόδειξη. Η απόδειξη ουσιαστικά θα μπορούσε να αναχθεί στην απόδειξη της πρότασης: κάθε στοιχείο της $GL(3, \mathbb{R})$ απεικονίζει επίπεδα του \mathbb{R}^3 από την αρχή σε επίπεδα του \mathbb{R}^3 από την αρχή. Αναλυτικά, έστω ευθεία L με εξίσωση $[A] \cdot X = 0$ και έστω μετασχηματισμός $[m] \in P(2)$ με πίνακα $[M]$. Θέτουμε για $[X] \in L$, $X' = m(X)$ και τότε

$$X' = m(X) \implies m^{-1}(X') = X.$$

Έτσι,

$$0 = [A] \cdot X = [A] \cdot (m^{-1}(X')) = [AM^{-1}] \cdot X'.$$

Με άλλα λόγια, η εικόνα της $L : [A] \cdot X = 0$ είναι η $L' : [AM^{-1}] \cdot X = 0$. □

Παράδειγμα 7.3.12. Έστω η ευθεία L με εξίσωση

$$[A] \cdot X = 2x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$$

και ο μετασχηματισμός $[M]$ με αντιπρόσωπο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}).$$

Ο αντίστροφος M είναι ο

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -7/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}).$$

Οπότε, για την $L' = M(L)$ έχουμε

$$[AM^{-1}] = [11 : -1 : 7]$$

και έτσι η L' έχει εξίσωση $11x_0 - x_1 + 7x_2 = 0$.

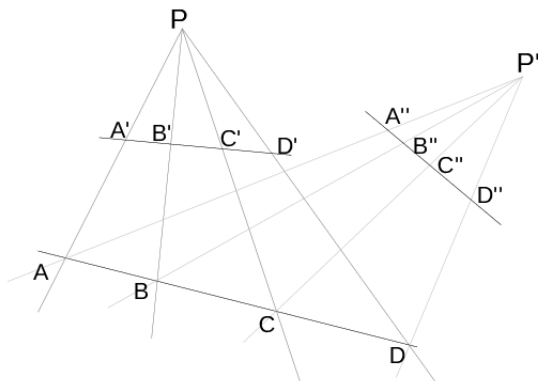
Πρόταση 7.3.13. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει συνευθειακά σημεία σε συνευθειακά σημεία.

Απόδειξη. Κάθε δύο σημεία ανήκουν σε μία ευθεία, η οποία μέσω στοιχείου της $P(2)$ απεικονίζεται σε ευθεία λόγω της Πρότασης 7.3.11. \square

Πρόταση 7.3.14. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ διατηρεί την πρόσπτωση: απεικονίζει το σημείο τομής ευθειών στην τομή των εικόνων τους.

Απόδειξη. Έστω οι ευθείες L με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και L' με εξίσωση $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ που τέμνονται στο $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Αν $[m] \in P(2)$ τότε το σημείο $[m(\mathbf{A} \times \mathbf{A}')]$ θα ανήκει στην τομή $m(L) \cap m(L')$ η οποία συνίσταται από μοναδικό σημείο. \square

Ο διπλός λόγος $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ τεσσάρων συνευθειακών σημείων τέτοιων ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά δεν είναι ίσα, ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της $\mathbb{R}P^1$. Οι δύο επόμενες προτάσεις είναι οι ανάλογες των Προτάσεων 7.2.5 και 7.2.6, αντίστοιχα, και αποδεικνύονται επίσης με τον ίδιο τρόπο, μετά τις κατάλληλες τροποποιήσεις.



Ο διπλός λόγος είναι προβολική αναλλοίωτος.

Πρόταση 7.3.15. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ διατηρεί τον διπλό λόγο τεσσάρων συνευθειακών και διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\mathbb{R}P^2$.

Για την απόδειξη, χρησιμοποιήστε το τετράπλευρο αναφοράς με κορυφές

$$[1 : 0 : 0], \quad [0 : 1 : 0], \quad [0 : 0 : 1], \quad [1 : 1 : 1].$$

Πρόταση 7.3.16. Υπάρχει $[m] \in P(2)$ που απεικονίζει τέσσερα συνευθειακά, διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}], [\mathbf{D}]$ σε τέσσερα συνευθειακά, διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[\mathbf{A}'], [\mathbf{B}'], [\mathbf{C}'], [\mathbf{D}']$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = [\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}'].$$

Εφαρμογή. Τέσσερα οποιαδήποτε ανά τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ ορίζουν ένα τετράπλευρο (ή, πιό σωστά, τετρακόρυφο). Σύμφωνα με την Πρόταση 7.3.9 μπορούμε πάντοτε να υποθέσουμε ότι οι κορυφές είναι οι

$$[\mathbf{A}_1] = [1 : 0 : 0], \quad [\mathbf{A}_2] = [0 : 1 : 0], \quad [\mathbf{A}_3] = [0 : 0 : 1], \quad [\mathbf{A}_4] = [1 : 1 : 1].$$

Ορίζονται έξι ευθείες:

- η ευθεία L_{12} από τα $[\mathbf{A}_1]$ και $[\mathbf{A}_2]$ με τύπο

$$[\mathbf{A}_3] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{13} από τα $[\mathbf{A}_1]$ και $[\mathbf{A}_3]$ με τύπο

$$[\mathbf{A}_2] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{14} από τα $[\mathbf{A}_1]$ και $[\mathbf{A}_4]$ με τύπο

$$[0 : -1 : 1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{23} από τα $[\mathbf{A}_2]$ και $[\mathbf{A}_3]$ με τύπο

$$[\mathbf{A}_1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{24} από τα $[\mathbf{A}_2]$ και $[\mathbf{A}_4]$ με τύπο

$$[1 : 0 : -1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{34} από τα $[\mathbf{A}_3]$ και $[\mathbf{A}_4]$ με τύπο

$$[-1 : 1 : 0] \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Τα διαγώνια σημεία του τετραπλεύρου είναι τα

- $L_{13} \cap L_{24} = \{[\mathbf{D}_1] = [1 : 0 : 1]\},$

- $L_{12} \cap L_{34} = \{[\mathbf{D}_2] = [1 : 1 : 0]\},$

- $L_{23} \cap L_{14} = \{[\mathbf{D}_3] = [0 : 1 : 1]\}.$

Η ευθεία από τα $[\mathbf{D}_1]$ και $[\mathbf{D}_3]$ είναι η

$$[-1 : -1 : 1] \mathbf{X} = 0$$

και τέμνει την L_{12} στο

$$[\mathbf{A}'_1] = [-1 : 1 : 0].$$

Υπολογίζουμε τον διπλό λόγο $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_1, \mathbf{D}_2]$: είναι

$$\mathbf{A}'_1 = (-1) \cdot \mathbf{A}_1 + 1 \cdot \mathbf{A}_2 = 1 \cdot \mathbf{A}_1 + 1 \cdot \mathbf{A}_2$$

και συνεπώς $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_1, \mathbf{D}_2] = -1$. Όταν ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων είναι ίσος με -1 , λέμε ότι τα σημεία βρίσκονται σε αρμονική θέση.

Πρόταση 7.3.17. Η δράση κάθε στοιχείου της $P(2)$ αφήνει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο του $\mathbb{R}P^2$.

Απόδειξη. Αν $[m] \in P(2)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_m είναι τρίτου βαθμού, άρα έχει είτε μία είτε τρεις πραγματικές ιδιοτιμές. Αν λ είναι μία τέτοια ιδιοτιμή και \mathbf{A} είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, τότε $[m(\mathbf{A})] = [\lambda\mathbf{A}]$. \square

Παράδειγμα 7.3.18. Θεωρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό

$$[m]([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_1 : x_1 + x_2 : x_2 + x_0].$$

Ο πίνακας του είναι ο

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{PGL}(3, \mathbb{R}).$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του M :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 + 1 = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Οπότε, η $\lambda = 2$ είναι η μόνη πραγματική ιδιοτιμή του, με ιδιοδιάνυσμα $(1, 1, 1)$. Έπεται ότι ο $[m]$ σταθεροποιεί το σημείο $[1 : 1 : 1]$.

7.3.6 Ασκήσεις

1. Βρείτε όλους τους προβολικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν τα $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ στα $[2 : 0 : 1]$, $[0 : -1 : 2]$, $[0 : 0 : 1]$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι από όλους αυτούς, μόνο ένας απεικονίζει το $[1 : 1 : 1]$ στο $[3 : -1 : 0]$.
2. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.3.9, βρείτε το στοιχείο της $P(2)$ που απεικονίζει τα $[-1 : 2 : 0]$, $[2 : -1 : 0]$, $[0 : 1 : 2]$, $[0 : 1 : -2]$ στα $[0 : 2 : 1]$, $[0 : 2 : -1]$, $[1 : 2 : 0]$, $[2 : 1 : 0]$, αντίστοιχα.
3. Έστω ευθείες $L_1 : [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $L_2 : [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} = 0$.

(α') Βρείτε το σημείο τομής τους $[\mathbf{P}]$.

(β') Έστω $[m] \in P(2)$ με αντιπρόσωπο (πίνακα του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τις εικόνες των L_1 και L_2 μέσω του $[m]$ καθώς και την εικόνα του σημείου τομής τους.

4. Δώστε λεπτομερή απόδειξη της Πρότασης 7.3.15.

5. Δώστε λεπτομερή απόδειξη της Πρότασης 7.3.16.
6. Έστω

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (α') Δείξτε ότι $[M] \in \text{PGL}(3, \mathbb{R})$ βρίσκοντας τον M^{-1} .
- (β') Βρείτε τα σταθερά του σημεία του αντίστοιχου προβολικού μετασχηματισμού $[m]$.

7.4 Δυϊσμός

Ο δυϊσμός είναι μία σημαντική ιδιότητα της προβολικής γεωμετρίας. Περιγράψουμε αμέσως την αρχή που την διέπει.

7.4.1 Αρχή Δυϊσμού

Έστω η ευθεία L του $\mathbb{R}P^2$ με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$. Το προβολικό σημείο $[\mathbf{A}] = [a : b : c]$ λέγεται *δυϊκό σημείο της προβολικής ευθείας L* . Αντιστρόφως τώρα, αν $[\mathbf{A}] = [a : b : c] \in \mathbb{R}P^2$, τότε η ευθεία L με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ καλείται *δυϊκή ευθεία του $[\mathbf{A}]$* . Συμπεραίνουμε ότι στο προβολικό επίπεδο υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία σημείων και ευθειών, κάτι που προέρχεται από την 1-2 αντιστοιχία επιπέδων του \mathbb{R}^3 από την αρχή και κατευθύνσεων: σε κάθε επίπεδο από την αρχή αντιστοιχούν τα δύο μοναδιαία κάθετά του διανύσματα. Δεν υπάρχει έννοια αντίστοιχη του δυϊσμού στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία.

Θυμηθείτε τώρα ότι από την Πρόταση 7.3.5 προκύπτει αμέσως ότι το σημείο τομής των ευθειών $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ είναι ακριβώς το $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Λέμε τότε ότι η ευθεία από τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{A}']$ έχει *δυϊκές συντεταγμένες $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$* . Δυϊκά, οι ευθείες $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ τέμνονται στο $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$.

Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη

Αρχή δυϊσμού: *Η ισχύς μιας πρότασης της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου που αναφέρεται σε σημεία και ευθείες παραμένει αναλλοίωτη αν εναλλάξουμε τα σημεία με ευθείες και τις ευθείες με σημεία.*

Λόγου χάρη, είδαμε ότι δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται (συντρέχουν) σε ένα μοναδικό σημείο. Η δυϊκή πρόταση είναι:

Πρόταση 7.4.1. *Δύο οποιαδήποτε προβολικά σημεία συντρέχουν σε μοναδική ευθεία.*

Παράδειγμα 7.4.2. Οι κορυφές του τριγώνου που ορίζουν οι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο ευθείες

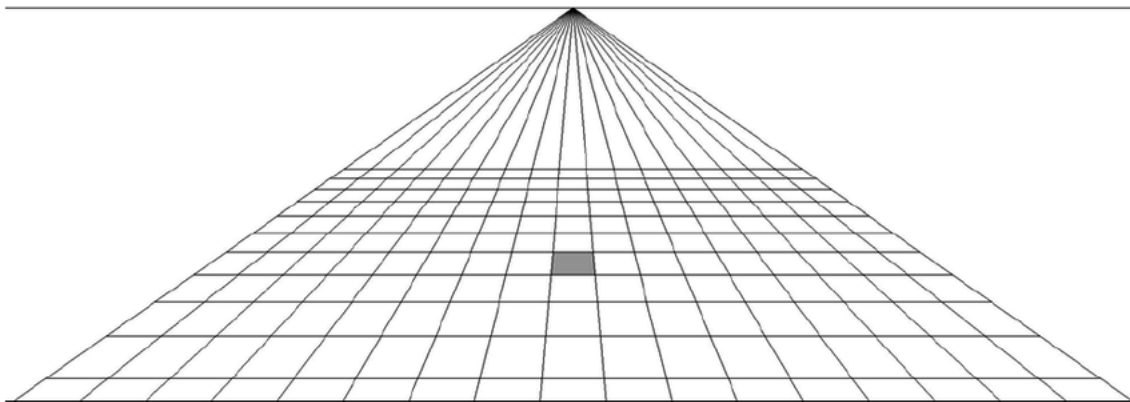
$$[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0, \quad [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} = 0, \quad [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

είναι τα σημεία

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \quad [\mathbf{B} \times \mathbf{C}], \quad [\mathbf{C} \times \mathbf{A}].$$

7.4.2 Διπλοί λόγοι και δυϊσμός

Αρχίζουμε με κάποια ορολογία. Μία συλλογή σημείων Σ του $\mathbb{R}P^2$ θα καλείται *σημειοσειρά*. Αν η Σ βρίσκεται επάνω σε μία ευθεία L , τότε η L θα καλείται *άξονας* της σημειοσειράς Σ . Το δυϊκό σύνολο P της σημειοσειράς Σ θα καλείται *δέσμη ευθειών ομόλογη με την Σ* . Αν η Σ έχει άξονα $L : [\mathbf{O}] \cdot \mathbf{X} = 0$, τότε όλες οι ευθείες της δέσμης P περνούν από το $[\mathbf{O}]$, η P καλείται *κεντρική δέσμη* και το $[\mathbf{O}]$ καλείται *κορυφή* της P .



Κεντρική δέσμη ευθειών με εγκάρσιες σε αυτήν ευθείες.

Σε μία κεντρική δέσμη μπορεί να οριστεί ο διπλός λόγος κάθε τεσσάρων ευθειών της δέσμης· κι αυτό, διότι τα αντίστοιχα δυϊκά σημεία κάθε μίας από αυτές ανήκουν στον άξονα L . (Με άλλα λόγια, τέσσερις ευθείες ανήκουν σε κεντρική δέσμη, δηλαδή συντρέχουν, αν και μόνο αν τα αντίστοιχα δυϊκά τους σημεία είναι συνευθειακά.)

Παράδειγμα 7.4.3. Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι οι ευθείες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} &= [1 : 1 : 2] \cdot \mathbf{X} = 0, & [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} &= [3 : -1 : 4] \cdot \mathbf{X} = 0, \\ [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} &= [5 : 1 : 8] \cdot \mathbf{X} = 0, & [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{X} &= [2 : 0 : 3] \cdot \mathbf{X} = 0, \end{aligned}$$

συντρέχουν. Παίρνουμε δύο οποιαδήποτε δυϊκά σημεία, έστω τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{B}]$. Η ευθεία που περνά από αυτά είναι η

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 4x_2,$$

δηλαδή η $L : [3 : 1 : -2] \cdot \mathbf{X} = 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$[3 : 1 : -2] \cdot (5, 1, 8) = [3 : 1 : -2] \cdot (2, 0, 3) = 0$$

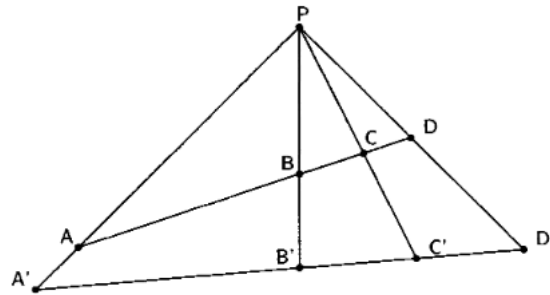
και άρα όλα τα σημεία ανήκουν στην L . Συμπεραίνουμε ότι οι δοθείσες ευθείες συντρέχουν. Το κοινό τους σημείο είναι το $[\mathbf{O}] = [3 : 1 : -2]$ που είναι και η κορυφή της δέσμης. Υπολογίζουμε τώρα τον διπλό τους λόγο. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{C} = 2 \cdot \mathbf{A} + 1 \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = (1/2) \cdot \mathbf{A} + (1/2) \cdot \mathbf{B},$$

άρα

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = 1/2.$$

Κάθε ευθεία που δεν περνά από την κορυφή κεντρικής δέσμης P με άξονα L καλείται *εγκάρσια ευθεία στην P* . Εάν η P είναι δέσμη τεσσάρων ευθειών, τότε κάθε εγκάρσια ευθεία συναντά την P σε τέσσερα συνευθειακά σημεία. Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή και ως *Θεμελιώδες Θεώρημα των Διπλών Λόγων*.



Θεμελιώδες Θεώρημα των Διπλών Λόγων.

Πρόταση 7.4.4. Τα τέσσερα συνευθειακά σημεία που προσδιορίζονται από ευθεία εγκάρσια σε κεντρική δέσμη τεσσάρων ευθειών έχουν διπλό λόγο ίσο με τον διπλό λόγο της δέσμης.

Απόδειξη. Έστω ότι οι ευθείες της δέσμης έχουν δυϊκά σημεία $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ και έστω επίσης $C = pA + qB$, $D = rA + sB$. Έστω επίσης $L : [T] \cdot X = 0$ η ευθεία εγκάρσια στη δέσμη. Τα σημεία τομής της L με τις ευθείες της δέσμης είναι τα

$$[T \times A], \quad [T \times B], \quad [T \times C], \quad [T \times D].$$

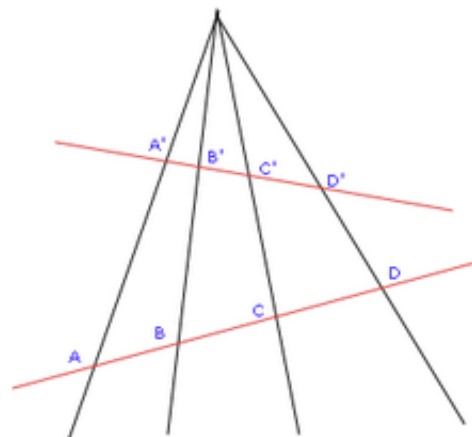
Τώρα

$$\mathbf{T} \times \mathbf{C} = p(\mathbf{T} \times \mathbf{A}) + q(\mathbf{T} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{T} \times \mathbf{D} = r(\mathbf{T} \times \mathbf{A}) + s(\mathbf{T} \times \mathbf{B})$$

και συνεπώς

$$[T \times A, T \times B; T \times C, T \times D] = [A, B; C, D].$$

□



Πόρισμα 7.4.5. Έστω ευθείες L και L' εγκάρσιες σε κεντρική δέσμη τεσσάρων ευθειών που τέμνουν τις ευθείες της δέσμης στα $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ και $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[D']$, αντίστοιχα. Τότε

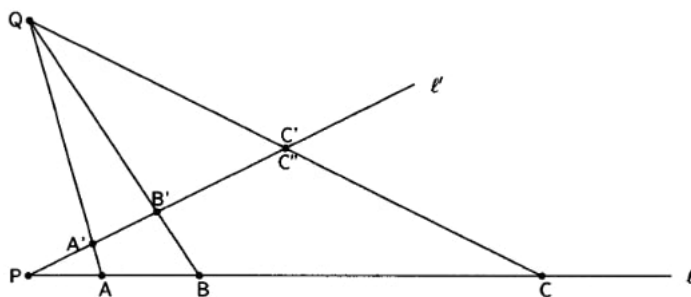
$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Σημεία σε θέση προοπτικής.

7.4.3 Θέση προοπτικής

Όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, λέμε ότι τα σημεία $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ και $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[D']$, βρίσκονται σε θέση προοπτικής από την κορυφή $[O]$ της δέσμης.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί μερικό αντίστροφο του Πορίσματος 7.4.5.



Πρόταση 7.4.6.

Πρόταση 7.4.6. Έστω L και L' ευθείες που τέμνονται στο $[P]$. Αν $[A]$, $[B]$, $[C]$, και $[A']$, $[B']$, $[C']$, είναι τριάδες σημείων στην L και στην L' , αντίστοιχα, με

$$[P, A; B, C] = [P, A'; B', C'],$$

τότε τα $[A]$, $[B]$, $[C]$ και $[A']$, $[B']$, $[C']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από κάποιο σημείο $[O]$.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι οι ευθείες από τα $[A]$ και $[A']$, $[B]$ και $[B']$, $[C]$ και $[C']$, συντρέχουν. Οι ευθείες από τα $[A]$ και $[A']$, $[B]$ και $[B']$ τέμνονται σε κάποιο σημείο $[O]$. Η ευθεία από τα $[O]$, $[C]$ τέμνει την L' σε κάποιο $[C'']$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $[C'] = [C'']$. Αφού τα $[P]$, $[A]$, $[B]$, $[C]$, και $[P]$, $[A']$, $[B']$, $[C'']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[O]$, έχουμε ότι $[P, A; B, C] = [P, A'; B', C'']$. Όμως τότε από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

$$[P, A'; B', C'] = [P, A'; B', C''] \implies [C'] = [C''],$$

όπως προκύπτει από το Θεώρημα των Τεσσάρων Σημείων (Πρόταση 7.2.9). \square

Εφαρμογή. Έστω $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[X]$ σημεία ευθείας L και $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[X']$ σημεία ευθείας L' τέτοια ώστε τα σημεία τομής

1. $[P']$ των ευθειών από τα $[A]$, $[B']$ και από τα $[B]$, $[A']$,
2. $[P'']$ των ευθειών από τα $[A]$, $[C']$ και από τα $[C]$, $[A']$,
3. $[P''']$ των ευθειών από τα $[A]$, $[X']$ και από τα $[X]$, $[A']$,

να είναι συνευθειακά. Τότε θα δείξουμε ότι

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}] = [\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{X}'].$$

Πράγματι, έχουμε κατ'αρχάς ότι τα $[\mathbf{P}']$, $[\mathbf{P}'']$ και $[\mathbf{P}''']$ είναι συνευθειακά και έστω L'' η ευθεία που τα περιέχει. Έστω $[\mathbf{A}'']$ το σημείο τομής της L'' και της ευθείας από τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{A}']$. Τότε τα $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{X}]$ και $[\mathbf{A}'']$, $[\mathbf{P}']$, $[\mathbf{P}'']$ και $[\mathbf{P}''']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[\mathbf{A}']$. Συνεπώς,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}] = [\mathbf{A}'', \mathbf{P}'; \mathbf{P}'', \mathbf{P}'''].$$

Από την άλλη, τα $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$, $[\mathbf{X}']$ και $[\mathbf{A}'']$, $[\mathbf{P}']$, $[\mathbf{P}'']$ και $[\mathbf{P}''']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[\mathbf{A}]$. Άρα,

$$[\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{X}'] = [\mathbf{A}'', \mathbf{P}'; \mathbf{P}'', \mathbf{P}''']$$

και έπεται το ζητούμενο.

7.4.4 Προβολική και προοπτική θέση

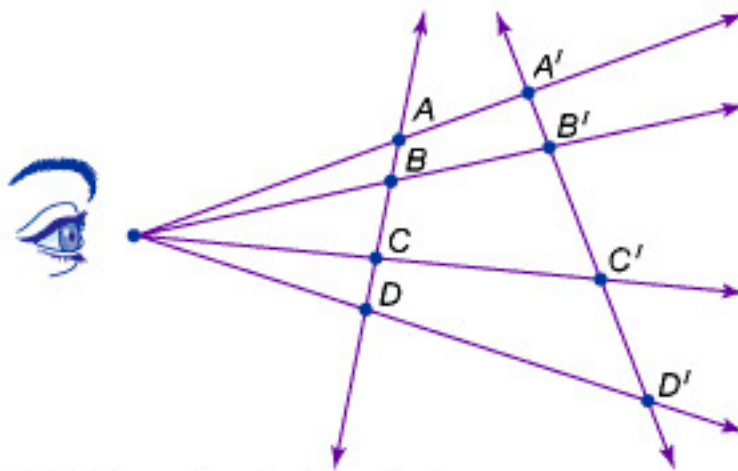
Έστω οι σημειοσειρές

$$\Sigma = ([\mathbf{A}_1], \dots, [\mathbf{A}_m]) \quad \text{και} \quad \Sigma' = ([\mathbf{B}_1], \dots, [\mathbf{B}_m]).$$

Θα λέμε ότι οι Σ , Σ' είναι σε θέση προβολής και θα γράφουμε

$$\Sigma \wedge \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([\mathbf{A}_1], \dots, [\mathbf{A}_m]) \wedge ([\mathbf{B}_1], \dots, [\mathbf{B}_m]),$$

αν υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός (προβολική απεικόνιση) διά του οποίου $[\mathbf{A}_i] \leftrightarrow [\mathbf{B}_i]$, $i = 1, \dots, m$.



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.

Σημεία σε θέση προοπτικής.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $m = 4$. Έστω τετράδες *συννευθιακών* σημείων (διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο)

$$\Sigma = ([\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], [\mathbf{A}_3], [\mathbf{A}_4]), \quad \Sigma' = ([\mathbf{B}_1], [\mathbf{B}_2], [\mathbf{B}_3], [\mathbf{B}_4]).$$

Θα λέμε ότι οι Σ, Σ' είναι σε *θέση προβολής*,

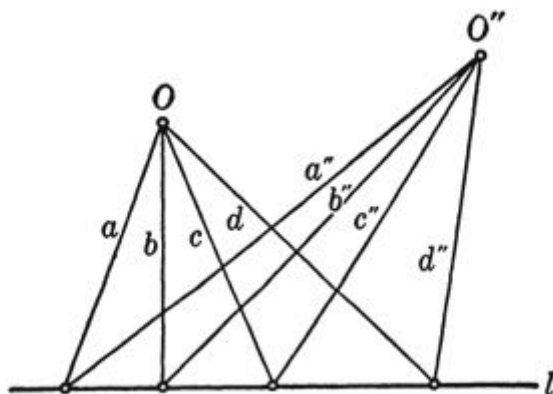
$$\Sigma \wedge \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], [\mathbf{A}_3], [\mathbf{A}_4]) \wedge ([\mathbf{B}_1], [\mathbf{B}_2], [\mathbf{B}_3], [\mathbf{B}_4]),$$

αν $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2; \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4]$. Αυτό έπεται από την Πρόταση 7.3.16. Μία ειδική περίπτωση τέτοιας προβολικής απεικόνισης είναι η *προοπτική απεικόνιση* από κάποιο σημείο $[O]$. Δηλαδή, όταν οι τετράδες σημείων βρίσκονται επάνω σε ευθείες εγκάρσιες σε κεντρική δέσμη με κορυφή το $[O]$. Γράφουμε τότε

$$\Sigma \wedge^{[O]} \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], [\mathbf{A}_3], [\mathbf{A}_4]) \wedge^{[O]} ([\mathbf{B}_1], [\mathbf{B}_2], [\mathbf{B}_3], [\mathbf{B}_4]).$$

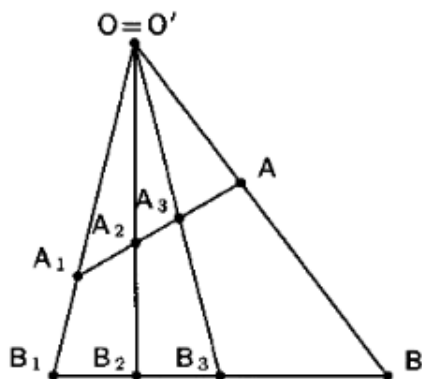
και λέμε επίσης ότι οι Σ, Σ' βρίσκονται σε *θέση προοπτικής*.

Μία θέση προοπτικής (ανάμεσα σε δύο τετράδες σημείων) είναι πάντοτε θέση προβολής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε (γιατί; δείτε το σχήμα!)



Θα δούμε όμως αμέσως παρακάτω ότι υπάρχει άμεση σχέση των θέσεων προβολής και προοπτικής. Έστω τριάδες σημείων $[\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], [\mathbf{A}_3]$ και $[\mathbf{B}_1], [\mathbf{B}_2], [\mathbf{B}_3]$ που κείνται σε ευθείες L και L' , αντίστοιχα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Οι τριάδες βρίσκονται σε θέση προοπτικής από σημείο $[O]$.

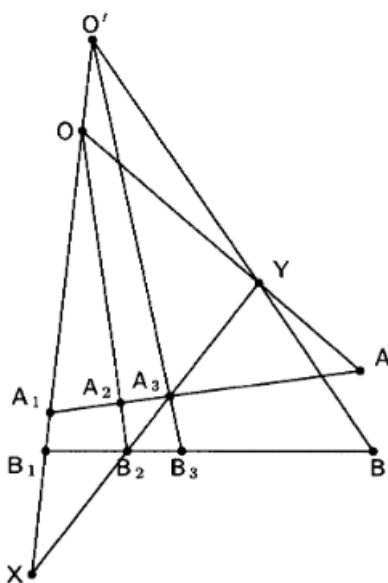


Τριάδες σε θέση προοπτικής από σημείο $[O]$.

Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες από τα $[A_1], [B_1]$, από τα $[A_2], [B_2]$ και από τα $[A_3], [B_3]$, συντρέχουν στο $[O]$. Υποθέτουμε ότι μας δίνεται σημείο $[A]$ στην ευθεία L . Τότε η ευθεία από τα $[O]$ και $[A]$ καθορίζει σημείο $[B]$ επάνω στην L' και επίσης

$$([A_1], [A_2], [A_3], [A]) \wedge^{[O]} ([B_1], [B_2], [B_3], [B]).$$

Παρατηρήστε ότι και αντιστρόφως, εάν μας δινόταν σημείο $[B]$ της L' τότε καθορίζεται με μοναδικό τρόπο σημείο $[A]$ επάνω στην L .



Τριάδες σε θέση προβολής αλλά όχι σε θέση προοπτικής.

2. Οι τριάδες δεν βρίσκονται σε θέση προοπτικής. Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες από τα $[A_1], [B_1]$ και από τα $[A_2], [B_2]$ συντρέχουν στο $[O]$ αλλά οι ευθείες από τα $[A_1], [B_1]$ και από τα $[A_3], [B_3]$ συντρέχουν σε σημείο $[O'] \neq [O]$. Υποθέτουμε και πάλι ότι μας δίνεται σημείο $[A]$ στην ευθεία L . Τότε,

- η ευθεία από τα $[O], [O']$, τέμνει την ευθεία από τα $[A_3], [B_2]$ σε σημείο $[X]$,
- η ευθεία από τα $[O], [A]$, τέμνει την ευθεία από τα $[A_3], [B_2]$ σε σημείο $[Y]$,
- η ευθεία από τα $[O'], [Y]$, τέμνει την ευθεία L' σε σημείο $[B]$.

Τότε

$$([A_1], [A_2], [A_3], [A]) \wedge^{[O]} ([X], [B_2], [A_3], [Y]) \wedge^{[O']} ([B_1], [B_2], [B_3], [B]).$$

Αποδείξαμε λοιπόν την

Πρόταση 7.4.7. Κάθε απεικόνιση προβολής μεταξύ δύο ευθειών είναι είτε απεικόνιση προοπτικής είτε σύνθεση δύο απεικονίσεων προοπτικής.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο ελέγχου του πότε μία απεικόνιση προβολής είναι απεικόνιση προοπτικής.

Πρόταση 7.4.8. Έστω ευθείες L και L' που τέμνονται στο $[P]$. Τότε μια απεικόνιση προβολής μεταξύ δύο σημειοσειρών των L και L' , αντίστοιχα, είναι απεικόνιση προοπτικής αν και μόνο αν το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του υπό μία απεικόνιση προοπτικής. Για το αντίστροφο, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό και το σχήμα της προηγούμενης πρότασης στην κατασκευή των δύο απεικονίσεων προοπτικής. Έστω ότι η ευθεία από τα $[O]$, $[P]$ τέμνει την ευθεία από τα $[A_3]$, $[B_2]$ σε σημείο $[X']$. Εφόσον το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του, το $[O']$ πρέπει να κείται στην ευθεία από τα $[O]$, $[X']$. Αλλά τα $[O]$, $[O']$ κείνται επίσης στην (διαφορετική) ευθεία από τα $[A_1]$, $[B_1]$. Συνεπώς τα $[O]$ και $[O']$ ταυτίζονται και η θέση προβολής είναι θέση προοπτικής από το $[O]$. \square

Εφαρμογή. Θεωρώντας ότι το δυϊκό σύνολο μίας σημειοσειράς επάνω σε μία ευθεία είναι η κεντρική δέσμη που ορίζει και ότι μία απεικόνιση προβολής ανάμεσα σε δύο δέσμες ευθειών είναι μία αντιστοιχία που διατηρεί τους διπλούς λόγους, διατυπώνουμε τις δυϊκές των προτάσεων της ενότητας αυτής.

- Δύο δέσμες Σ και Σ' είναι σε θέση προοπτικής από μία ευθεία L αν κάθε ευθεία ℓ της Σ τέμνει την αντίστοιχη ευθεία ℓ' της Σ' επάνω στην L .
- Μία προβολική απεικόνιση μεταξύ δύο δεσμών είναι είτε μία προοπτική απεικόνιση είτε σύνθεση δύο προοπτικών απεικονίσεων.
- Μία προβολική απεικόνιση είναι προοπτική απεικόνιση αν και μόνο αν η ευθεία που ενώνει τις κορυφές των δύο δεσμών απεικονίζεται στον εαυτό της.

7.4.5 Ασκήσεις

1. Διατυπώστε το δυϊκό Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου.

2. Βρείτε τις κορυφές του τριγώνου που ορίζουν οι ευθείες

$$[1 : 1 : 1] \cdot \mathbf{X} = 0, \quad [-1 : 3 : 0] \cdot \mathbf{X} = 0 \quad \text{και} \quad [0 : 2 : 7] \cdot \mathbf{X} = 0.$$

3. Έστω τα σημεία $[0 : 1 : -2]$, $[1 : 0 : -3]$, $[-2 : 3 : 0]$, $[1 : 1 : -5]$.

(α') Δείξτε ότι είναι συνευθειακά.

(β') Υπολογίστε τον διπλό τους λόγο, με τη σειρά που δίνονται παραπάνω.

(γ') Υπολογίστε την κορυφή της δέσμης που ορίζουν οι δυϊκές τους ευθείες.

7.5 Κλασικά θεωρήματα της Προβολικής Γεωμετρίας

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε δύο κλασικά θεωρήματα της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου. Το πρώτο, που οφείλεται στον Πάππο, είναι ουσιαστικά θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το δεύτερο, που οφείλεται στον Desargues δεν έχει ανάλογο στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία.

7.5.1 Θεώρημα Πάππου

Έστω ότι η σημειοσειρά συνευθειακών σημείων $\Sigma = ([A_i])$ σχετίζεται προβολικά με τη σημειοσειρά συνευθειακών σημείων $\Sigma' = ([B_i])$, $i = 1, \dots, n$, ώστε $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$. Σταθεροποιούμε ένα i . Τότε η δέσμη ευθειών από το $[A_i]$ προς όλα τα $[B_j]$ και η δέσμη ευθειών από το $[B_i]$ προς όλα τα $[A_j]$ είναι σε θέση προβολής:

$$([A_i], [B_j]) \wedge^{[B_i]} ([A_j], [B_j]) \wedge^{[A_i]} ([B_i], [A_j]).$$

Η ευθεία $L_{i,i}$ από τα $[A_i]$, $[B_i]$ απεικονίζεται στον εαυτό της και άρα η απεικόνιση αυτή είναι μία απεικόνιση προοπτικής από μία ευθεία C_i . Εναλλάσσοντας τα i, j βλέπουμε ότι η ευθεία αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του i . Η $C = C_i$ καλείται ευθεία του Πάππου της απεικόνισης προβολής και έχει την εξής ιδιότητα:

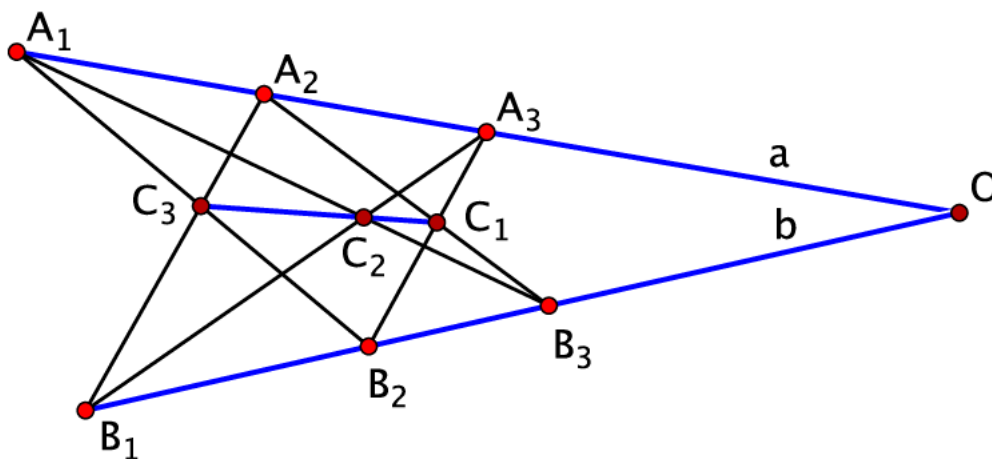
- Για κάθε $i \neq j$, η τομή των ευθειών $L_{i,j}$ και $L_{j,i}$ ανήκει στην C .

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της ευθείας του Πάππου είναι η εξής: έστω ότι μας δίνονται τριάδες σημείων $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$, που κείνται σε ευθείες L και L' , αντίστοιχα. Εάν μας δίνεται $[A] \in L$ και η ευθεία του Πάππου, τότε το σημείο $[B] \in L'$ για το οποίο ισχύει $[A_1, A_2; A_3, A] = [B_1, B_2; B_3, B]$ καθορίζεται πλήρως.

Θεώρημα 7.5.1. Πάππου. Έστω $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$, τριάδες συνευθειακών σημείων που κείνται σε διαφορετικές ευθείες. Για $i, j = 1, 2, 3$ έστω $L_{i,j}$ η ευθεία από τα $[A_i]$, $[B_j]$ και έστω ότι:

- $[C_1] = L_{2,3} \cap L_{3,2}$,
- $[C_2] = L_{1,3} \cap L_{3,1}$,
- $[C_3] = L_{1,2} \cap L_{2,1}$.

Τότε τα $[C_1], [C_2], [C_3]$, είναι συνευθειακά.

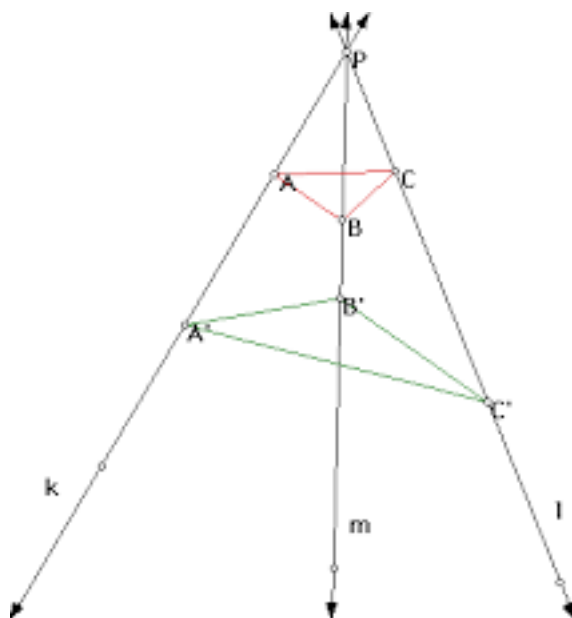


Το Θεώρημα του Πάππου.

Απόδειξη. Μία προβολική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τρία ζεύγη αντίστοιχων σημείων · στην περίπτωσή μας η αντιστοιχία είναι $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$, $i = 1, 2, 3$. Τα σημεία $[C_1], [C_2], [C_3]$ κείνται στην ευθεία του Πάππου C της απεικόνισης προβολής. \square

7.5.2 Θεώρημα Desargues

Το Θεώρημα Desargues αφορά σε τρίγωνα του $\mathbb{R}P^2$ τα οποία βρίσκονται σε θέση προοπτικής: οι ευθείες που ορίζουν οι αντίστοιχες κορυφές τους συντρέχουν. Σημειώνουμε ότι το θεώρημα αυτό έχει τρισδιάστατη φύση, δείτε και την Άσκηση 7.5.3.2.



Τρίγωνα σε προοπτική θέση.

Θεώρημα 7.5.2. *Εάν δύο τρίγωνα είναι σε θέση προοπτικής, τότε τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών τους είναι συνευθειακά.*

Απόδειξη. Αναφερόμαστε στο σχήμα παρακάτω. Τα τρίγωνα με κορυφές $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής. Τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών είναι τα $[C_1], [C_2], [C_3]$ τα οποία και θα δείξουμε ότι είναι συνευθειακά. Αν $[P]$ είναι το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες που ορίζουν οι αντίστοιχες κορυφές, τότε εφόσον τα $[P], [A_1]$ και $[B_1]$ είναι συνευθειακά, υπάρχουν $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_*$ με

$$P = \lambda A_1 + \lambda' B_1.$$

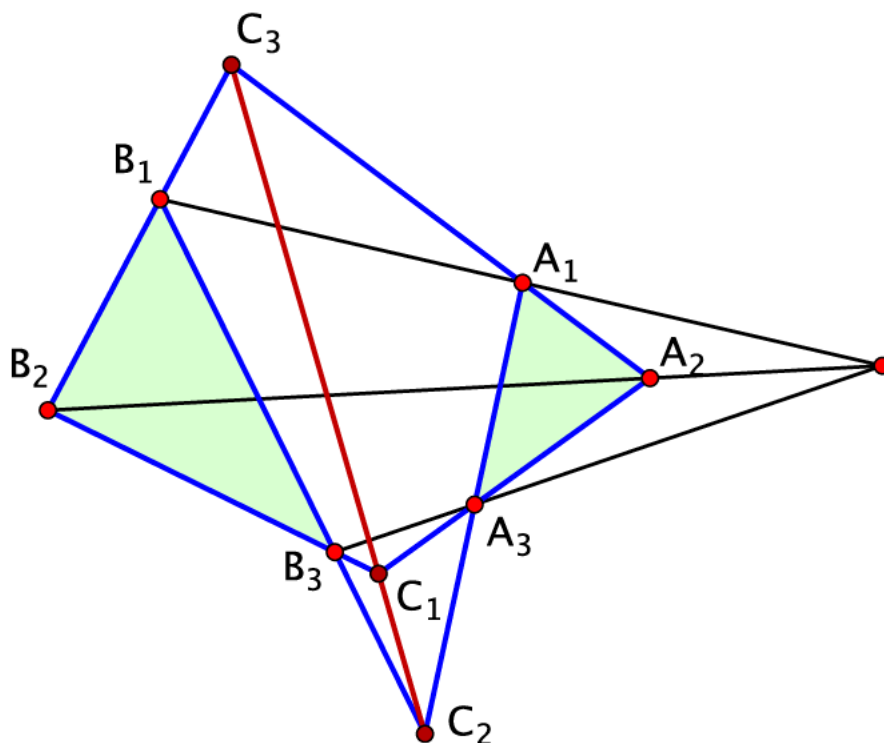
Επιλέγοντας αντιπροσώπους για τα $[A_1], [B_1]$ τα λA_1 και $\lambda' B_1$, αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε

$$P = A_1 + B_1$$

και ομοίως θα έχουμε

$$P = A_2 + B_2,$$

$$P = A_3 + B_3.$$



Το Θεώρημα Desargues: τα τρίγωνα πράσινου χρώματος βρίσκονται σε θέση προοπτικής.

Η ευθεία από τα $[A_1]$ και $[A_2]$ είναι η $[A_1 \times A_2] \cdot X = 0$ και η ευθεία από τα $[B_1]$ και $[B_2]$ είναι η $[B_1 \times B_2] \cdot X = 0$. Συνεπώς, το σημείο τομής τους είναι το

$$[(A_1 \times A_2) \times (B_1 \times B_2)].$$

Θέτουμε $C = B_1 \times B_2$ και έχουμε

$$(A_1 \times A_2) \times C = (A_1 \cdot C)A_2 - (A_2 \cdot C)A_1.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} A_1 \cdot C &= A_1 \cdot (B_1 \times B_2) \\ &= (A_1, B_1, B_2) \text{ (μεικτό γινόμενο)} \\ &= (A_1, P - A_1, P - A_2) \\ &= (A_1, P, P - A_2) \\ &= (A_1, P, -A_2) \\ &= (A_1, A_2, P), \end{aligned}$$

δηλαδή το μεικτό γινόμενο των A_1 , A_2 και P . Ομοίως βρίσκουμε

$$A_2 \cdot C = (A_1, A_2, P)$$

και έτσι

$$[(A_1 \times A_2) \times (B_1 \times B_2)] = [A_1 - A_2].$$

Παρόμοια, παίρνουμε ότι

- το σημείο τομής της ευθείας από τα $[A_1], [A_3]$ και της ευθείας από τα $[B_1], [B_3]$ είναι το $[A_1 - A_3]$ και
- το σημείο τομής της ευθείας από τα $[A_2], [A_3]$ και της ευθείας από τα $[B_2], [B_3]$ είναι το $[A_2 - A_3]$.

Επειδή όμως

$$(A_1 - A_2) + (A_3 - A_1) + (A_2 - A_3) = \mathbf{0},$$

τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. □

7.5.3 Ασκήσεις

1. Δίνονται τα σημεία

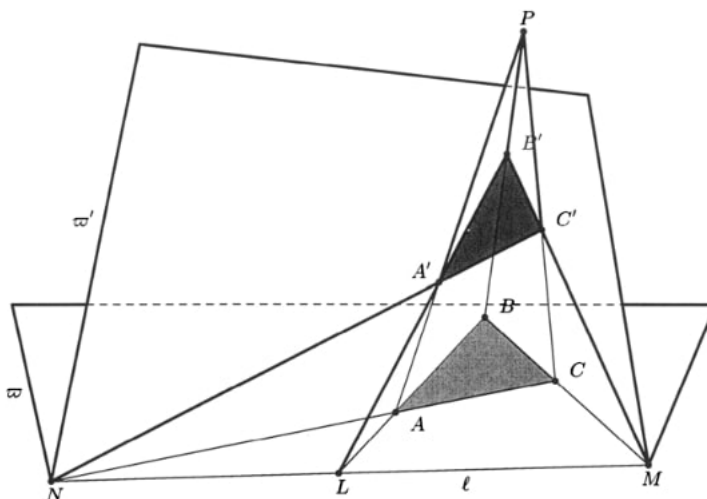
$$[A_1] = [1 : 0 : -1], \quad [A_2] = [0 : 1 : 0], \quad [A_3] = [-1 : 1 : 1],$$

και τα σημεία

$$[B_1] = [0 : 2 : 1], \quad [B_2] = [1 : 0 : 0], \quad [B_3] = [3 : 4 : 2]$$

- (α') Δείξτε ότι τα $[A_i]$ καθώς και τα $[B_i], i = 1, 2, 3$, είναι συνευθειακά και διαπιστώστε ότι κείνται σε διαφορετικές ευθείες.
- (β') Βρείτε την ευθεία του Πάππου των $[A_i], [B_i]$.

2. Στην άσκηση αυτή περιγράφουμε έναν κάπως ευκολότερο τρόπο απόδειξης του Θεωρήματος του Desargues ο οποίος οφείλεται στην *ανύψωση* του θεωρήματος στον τρισδιάστατο χώρο, δείτε το σχήμα.



Τρισδιάστατη απόδειξη του Θεωρήματος Desargues.

Εδώ τα τρίγωνα που βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το \mathbf{P} υποτίθενται ότι κείνται σε επίπεδα ϖ και ϖ' , αντίστοιχα. Έστω πρώτα ότι τα επίπεδα είναι διαφορετικά και τέμνονται σε ευθεία ℓ . Τα επίπεδα από τα $\mathbf{P}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ και από τα $\mathbf{P}, \mathbf{A}', \mathbf{B}'$ συμπίπτουν από υπόθεση. Αυτό το κοινό επίπεδο τέμνει το ϖ στην ευθεία από τα \mathbf{A} και \mathbf{B} . Επίσης, τέμνει το ϖ' στην ευθεία από τα \mathbf{A}' και \mathbf{B}' . Άρα οι ευθείες αυτές που τέμνονται στο \mathbf{L} πρέπει να τέμνονται επίσης και σε σημείο της ℓ . Ομοίως, το ίδιο συμβαίνει και με τα άλλα σημεία \mathbf{M}, \mathbf{N} .

Εάν τώρα $\varpi = \varpi'$ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο επιχείρημα, καθώς η ℓ δεν μπορεί να οριστεί. Αντ' αυτού, παίρνουμε μία ευθεία ℓ από το σημείο προοπτικής \mathbf{P} , υποθέτουμε την ℓ να μην ανήκει στο ϖ και έστω σημεία $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \ell$ διαφορετικά του \mathbf{P} . Τότε, οι ευθείες από τα \mathbf{P}_1, \mathbf{A} και από τα $\mathbf{P}_2, \mathbf{A}'$ κείνται στο επίπεδο που περιέχει τις ευθείες από τα $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}, \mathbf{P}_2$ και από τα $\mathbf{P}, \mathbf{A}', \mathbf{A}$. Άρα, τέμνονται σε σημείο, έστω το \mathbf{A}'' . Ομοίως, οι ευθείες από τα \mathbf{P}_1, \mathbf{B} και από τα $\mathbf{P}_2, \mathbf{B}'$ τέμνονται σε κάποιο \mathbf{B}'' και οι ευθείες από τα \mathbf{P}_1, \mathbf{C} και από τα $\mathbf{P}_2, \mathbf{C}'$ τέμνονται σε κάποιο \mathbf{C}'' . Τότε, το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ είναι σε θέση προοπτικής με το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{A}'', \mathbf{B}'', \mathbf{C}''$, με κορυφή προοπτικής το \mathbf{P}_2 .

Έστω ϖ' το επίπεδο των $\mathbf{A}'', \mathbf{B}'', \mathbf{C}''$. Τότε $\varpi \neq \varpi'$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Desargues στην περίπτωση αυτή· η διαφορά έγκειται στο ότι η ευθεία προοπτικής των πλευρών είναι εδώ η κοινή ευθεία των ϖ και ϖ' που περιέχει τα \mathbf{L}, \mathbf{M} και \mathbf{N} .

Κεφάλαιο 8

Γεωμετρία της Αντιστροφής

Η Γεωμετρία της Αντιστροφής μπορεί να θεωρηθεί σαν μία επέκταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στον επεκτεταμένο n -διάστατο πραγματικό χώρο \mathbb{R}^n του οποίου η Γεωμετρία κατά Klein καθορίζεται από μετασχηματισμούς που αποτελούν συνθέσεις *αντιστροφών*. Τέτοιοι μετασχηματισμοί έχει επικρατήσει να καλούνται μετασχηματισμοί Möbius προς τιμήν του μεγάλου Γερμανού Μαθηματικού A.F. Möbius.



A.F. Möbius (1790–1868).

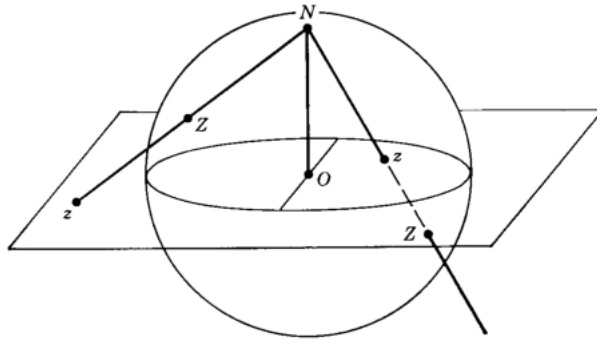
Το επεκτεταμένο \mathbb{R}^n είναι ο συμπαγής χώρος που προκύπτει φυσιολογικά από την απεικόνιση της *στερεογραφικής προβολής* που ήταν γνωστή στον Κλαύδιο Πτολεμαίο. Η δε απεικόνιση της αντιστροφής σε σφαίρα, παρότι στηρίζεται εξ ολοκλήρου στη Γεωμετρική Αντιστροφή που ήταν γνωστή στους Αρχαίους Έλληνες, ορίστηκε μόλις περί τις αρχές του 19ου αι. από τον Γερμανοεβραίο Μαθηματικό Magnus. Στη Γεωμετρία της Αντιστροφής ορίζεται φυσιολογικά ένας (μετρικός) διπλός λόγος ο οποίος είναι και η μοναδική αναλλοίωτος των μετασχηματισμών Möbius. Διαμέσου της Γεωμετρίας της Αντιστροφής μπορούμε να οδηγηθούμε φυσιολογικά στην Υπερβολική Γεωμετρία και αυτός είναι ο δρόμος που θα ακολουθήσουμε εδώ.

Τέλος, αξίζει να τονιστεί πως αφηρημένες Γεωμετρίες Αντιστροφής μπορούν να οριστούν σε διάφορους μετρικούς (και ημι-μετρικούς) χώρους που συμπαγοποιούνται κατά σημείο και των οποίων η ομάδα των ομοιοθεσιών περιέχει αντιστροφές σε μετρικές σφαίρες. Αυτό αποτελεί και τη βάση της σύγχρονης *Möbius Γεωμετρίας*.

8.1 Στερεογραφική προβολή και το $\overline{\mathbb{R}^n}$

Στην Ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη στερεογραφική προβολή, την κατασκευή του επεκτεταμένου \mathbb{R}^n μέσω αυτής και τις μετρικές του ιδιότητες. Η βασική ιδιότητα είναι ότι ο επεκτεταμένος πραγματικός χώρος εφοδιασμένος με τη μετρική τοπολογία που έρχεται από τη στερεογραφική προβολή και ο συνήθης Ευκλείδειος χώρος με την τυπική μετρική τοπολογία είναι συμβατοί: περιορισμένες στο \mathbb{R}^n οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

8.1.1 Στερεογραφική προβολή



Στερεογραφική προβολή.

Έστω η σφαίρα

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Εμφυτεύουμε το \mathbb{R}^n στο \mathbb{R}^{n+1} ως το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\mathbf{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ που απεικονίζει κάθε σημείο $(\mathbf{x}, 0) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ του \mathbb{R}^n στο σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $(\mathbf{x}, 0)$ και $N = (\mathbf{0}, 1)$ και της S^n . Αναλυτικά, το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι το σύνολο των σημείων

$$(1-t)(\mathbf{x}, 0) + t(\mathbf{0}, 1) = ((1-t)\mathbf{x}, t), \quad t \in [0, 1]$$

και στο σημείο που τέμνει την S^n είναι

$$1 = \|((1-t)\mathbf{x}, t)\|^2 = (1-t)^2\|\mathbf{x}\|^2 + t^2 \implies t = 1, \quad \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}.$$

Η τιμή $t = 1$ απορρίπτεται, καθώς το N είναι σταθεροποιημένο. Παίρνουμε λοιπόν για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \cdot (2\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|^2 - 1).$$

Εκ κατασκευής, η \mathbf{S} είναι 1-1 και επί απεικόνιση του \mathbb{R}^n στην $S^n \setminus \{N\}$. Θεωρώντας ένα επί πλέον σημείο στο άπειρο το οποίο θα συμβολίζουμε με ∞ , θεωρούμε το σύνολο $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

το οποίο καλούμε *επεκτεταμένο* \mathbb{R}^n . Τότε, ορίζοντας $\mathbf{S}(\infty) = N$ επεκτείνουμε τη στερεογραφική προβολή σε μία 1-1 και επί απεικόνιση $\overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow S^n$. Η απεικόνιση \mathbf{S} καλείται *στερεογραφική προβολή* του επεκτεταμένου \mathbb{R}^n στη σφαίρα S^n του \mathbb{R}^{n+1} .

Για να πάρουμε την αντίστροφη της \mathbf{S} , έστω σημείο $\mathbf{y} \in S^n$ και θεωρούμε την ευθεία από το N που περνά από το \mathbf{y} . Αυτό είναι το σύνολο των σημείων της μορφής

$$(1-t)(\mathbf{0}, 1) + t(\mathbf{y}_n, y_{n+1}) = (t\mathbf{y}_n, 1 + t(y_{n+1} - 1)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Η ευθεία αυτή συναντά το \mathbb{R}^n όταν

$$t = \frac{1}{1 - y_{n+1}}.$$

Άρα,

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{y}_n}{1 - y_{n+1}} & \mathbf{y} \in S^n \setminus \{N\}, \\ \infty & \mathbf{y} = N. \end{cases}$$

8.1.2 Μετρική τοπολογία του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Μέσω της στερεογραφικής προβολής μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\overline{\mathbb{R}^n}$ με την (επαγόμενη από την Ευκλείδεια μετρική τοπολογία του \mathbb{R}^{n+1}) μετρική τοπολογία της S^n και να καταστήσουμε το $\overline{\mathbb{R}^n}$ *συμπαγή* μετρικό χώρο. Η μετρική με την οποία εφοδιάζουμε το $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι πρακτικά η χορδική μετρική της S^n , την οποία εδώ για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε με d . Ορίζεται δε από τη σχέση

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\|, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{\mathbb{R}^n}.$$

Η d είναι μετρική: κατ' αρχάς

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \iff \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\| = 0 \iff \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = 0 \iff \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2,$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία ισχύει διότι η \mathbf{S} είναι 1-1 και επί. Επίσης,

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_1)\| = d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

και τέλος, για $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \overline{\mathbb{R}^n}$,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_3)\| \\ &\leq \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\| + \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_3)\| \\ &= d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \end{aligned}$$

με την ανισότητα να ισχύει λόγω της ισχύος της Τριγωνικής Ανισότητας στην Ευκλείδεια απόσταση.

Πρόταση 8.1.1. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}^n}$, τότε

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)^{1/2}}.$$

Αν $\mathbf{y} = \infty$, τότε

$$d(\mathbf{x}, \infty) = \frac{2}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}}.$$

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{y})\|^2 \\ &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{S}(\mathbf{y})\|^2 - 2(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}(\mathbf{x})\|^2 &= \|\mathbf{S}(\mathbf{y})\|^2 = 1, \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{y}) &= \frac{(2\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|^2 - 1) \cdot (2\mathbf{y}, \|\mathbf{y}\|^2 - 1)}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)} = \frac{4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1)}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 2 \left(1 - \frac{4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1)}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{4\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \infty) &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\infty)\|^2 \\ &= 1 + 1 - 2 \frac{((2\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|^2 - 1) \cdot (\mathbf{0}, 1))}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \\ &= \frac{4}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}. \end{aligned}$$

□

Η τελευταία πρόταση της ενότητας αυτής μας δείχνει τη σχέση των τοπολογιών της χορδικής και της Ευκλείδειας μετρικής σε φραγμένα σύνολα του \mathbb{R}^n .

Πρόταση 8.1.2. Η χορδική και η Ευκλείδεια μετρική είναι ισοδύναμες μετρικές σε φραγμένα σύνολα του \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. Έστω Ω φραγμένο σύνολο του \mathbb{R}^n : υπάρχει $M = M(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}\| \leq M$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$. τότε

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)^{1/2}} \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή ισχύει και σε μη φραγμένα σύνολα του \mathbb{R}^n .) Από την άλλη,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = (1/2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)^{1/2} < (1/2)(1 + M^2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Οι ανισότητες

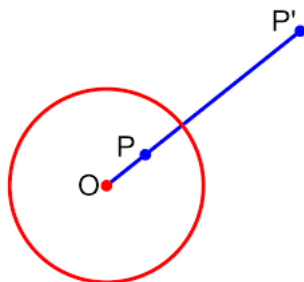
$$(1/2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq (1/2)(1 + M^2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

αποδεικνύουν το ζητούμενο.

□

8.2 Αντιστροφές στον $\overline{\mathbb{R}^n}$

Η έννοια της αντιστροφής σε σφαίρα είναι η φυσιολογική γενίκευση της αντιστροφής σε κύκλο που ήταν γνωστή από την αρχαιότητα.



Αντιστροφή σε κύκλο.

Στο παραπάνω σχήμα $\|\mathbf{P} - \mathbf{O}\| \cdot \|\mathbf{P}' - \mathbf{O}\| = r^2$ όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου. Τα σημεία \mathbf{P}, \mathbf{P}' είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο. Στην Ενότητα 8.2.1 θα μελετήσουμε την αντιστροφή σε σφαίρα του \mathbb{R}^n , στην Ενότητα 8.2.2 θα δούμε τις αντιστροφές σε υπερεπίπεδα που δεν είναι τίποτε άλλο από τις ήδη γνωστές μας ανακλάσεις σε υπερεπίπεδα (δείτε την Ενότητα 3.1.6), ενώ τέλος, στην Ενότητα 8.2.3 θα εξετάσουμε τη δράση των αντιστροφών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$.

8.2.1 Αντιστροφή σε σφαίρα του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Έστω $S(\mathbf{a}, r)$ σφαίρα του \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας $r > 0$:

$$S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}.$$

Ορίζουμε την *αντιστροφή ως προς τη σφαίρα* $S(\mathbf{a}, r)$ να είναι η απεικόνιση $\iota_{\mathbf{a}, r} : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ που αντιστοιχεί σε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$ το \mathbf{y} εκείνο επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ για το οποίο ισχύει

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = r^2, \quad (8.1)$$

ενώ στο \mathbf{a} αντιστοιχεί το ∞ και στο ∞ αντιστοιχεί το \mathbf{a} . Το \mathbf{a} καλείται *κέντρο* της αντιστροφής, το r *δύναμη* της αντιστροφής και η $S(\mathbf{a}, r)$ *σφαίρα* της αντιστροφής. Τα σημεία \mathbf{x} και $\mathbf{x}' = \iota_{\mathbf{a}, r}(\mathbf{x})$ λέγονται *αντίστροφα*.

Υπολογίζουμε τώρα τον ακριβή τύπο της $\iota_{\mathbf{a}, r}$. Το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{y} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{x}, \quad t \in [0, 1].$$

Οπότε,

$$\mathbf{y} - \mathbf{a} = t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \implies \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = t\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|.$$

Από την (8.1) παίρνουμε τότε

$$r^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = t\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \implies t = \frac{r^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}. \quad (8.2)$$

Έστω $S = S^{n-1} = S(\mathbf{0}, 1)$ και $\iota = \iota_{\mathbf{0},1}$ με

$$\iota(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^n \quad (8.3)$$

να ορίζει την αντιστροφή στη μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^n .

Για $\delta > 0$, $\delta \neq 1$, θεωρούμε τη συστολή/διαστολή $D_\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, με

$$D_\delta(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.4)$$

Κάθε D_δ επεκτείνεται σε συνάρτηση του $\overline{\mathbb{R}^n}$ θέτοντας $D_\delta(\infty) = \infty$. Το ίδιο συμβαίνει και με κάθε μεταφορά $T_{\mathbf{c}}$ του \mathbb{R}^n .

Στο εξής, εκτός και αν σημειώνεται διαφορετικά, οι αντιστροφές σε σφαίρες, οι συστολές/διαστολές και οι μεταφορές θα θεωρούνται απεικονίσεις του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Πρόταση 8.2.1. Η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ ως προς σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ γράφεται ως

$$\iota_{\mathbf{a},r} = T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r} \circ T_{-\mathbf{a}}, \quad (8.5)$$

όπου $T_{\mathbf{a}}, T_{-\mathbf{a}}$ είναι οι μεταφορές του \mathbb{R}^n κατά \mathbf{a} και $-\mathbf{a}$, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ έχουμε

$$\begin{aligned} (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r} \circ T_{-\mathbf{a}})(\mathbf{x}) &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r})(T_{-\mathbf{a}}(\mathbf{x})) \\ &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{r} \right) \\ &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r) \left(r \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right) \\ &= T_{\mathbf{a}} \left(r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right) \\ &= \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Σχόλιο 8.2.2. Έστω $Q_{\mathbf{a},r} = T_{\mathbf{a}} \circ D_r$. Τότε μπορούμε να γράφουμε

$$\iota_{\mathbf{a},r} = Q_{\mathbf{a},r} \circ \iota \circ Q_{\mathbf{a},r}^{-1}.$$

Θα επανέλθουμε στον τύπο αυτόν αργότερα.

Ιδιότητες της αντιστροφής σε σφαίρα

Ένα άμεσο πόρισμα του ορισμού της αντιστροφής σε σφαίρα (καθώς και της Εξίσωσης (8.5)) είναι η εξής:

Πρόταση 8.2.3. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είναι 1-1 και επί μετασχηματισμός του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Πρόταση 8.2.4. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είναι ενελεικτική:

$$\iota_{\mathbf{a},r}^2 = id.$$

Απόδειξη. Λόγω της εξίσωσης (8.5) αρκεί να δείξουμε ότι η ι είναι ενελεικτική. Πράγματι, αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^n$, τότε

$$(\iota \circ \iota)(\mathbf{x}) = \iota \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) = \mathbf{x}.$$

□

Παρατηρούμε ότι λόγω της ενελεικτικότητας έχουμε

$$\iota_{\mathbf{a},r}^{-1} = \iota_{\mathbf{a},r}.$$

Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n}$

$$\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{y}).$$

Πρόταση 8.2.5. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είναι ομοιομορφισμός του $(\overline{\mathbb{R}^n}, d)$, όπου d είναι η χορδική μετρική.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 8.2.3 και της Πρότασης 8.2.4 αρκεί να δείξουμε ότι η $\iota_{\mathbf{a},r}$ είναι συνεχής ως προς τη χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{R}^n}$. Τούτο ισχύει διότι η $\iota_{\mathbf{a},r}$ είναι συνεχής ως προς την Ευκλείδεια μετρική και άρα ως προς τη χορδική μετρική σε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$. Επιπλέον έχουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} d(\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}), \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{a})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} d(\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}), \infty) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left(\frac{2}{(1 + \|\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})\|^2)^{1/2}} \right) = 0,$$

αφού

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \|\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})\|^2 = +\infty.$$

Επίσης, για την αντιστροφή ι έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} d(\iota(\mathbf{x}), \iota(\infty)) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} d(\iota(\mathbf{x}), \mathbf{0}) \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \left(\frac{2\|\iota(\mathbf{x})\|}{(1 + \|\iota(\mathbf{x})\|^2)^{1/2}} \right) \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{1/2}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Λόγω της Εξίσωσης (8.5) έχουμε τότε και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} d(\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}), \iota_{\mathbf{a},r}(\infty)) = 0.$$

□

Πρόταση 8.2.6. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ διατηρεί κατά σημείο τη σφαίρα αντιστροφής.

Απόδειξη. Έστω η $\iota_{\mathbf{a},r}$ στη σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ και έστω $\mathbf{x} \in S(\mathbf{a}, r)$, δηλαδή $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$. Τότε

$$\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{r^2} = \mathbf{x}.$$

□

Σχόλιο 8.2.7. Παρατηρήστε ότι σιχύνει και το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης: τα σταθερά σημεία της $\iota_{\mathbf{a},r}$ είναι ακριβώς τα σημεία της $S(\mathbf{a}, r)$.

Πρόταση 8.2.8. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ απεικονίζει το εσωτερικό της $S(\mathbf{a}, r)$ στο εξωτερικό της και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Έστω η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ στη σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ και έστω $\mathbf{x} \in \text{Int}(S(\mathbf{a}, r))$, δηλαδή $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$. Τότε,

$$\|\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}\| = \frac{r^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} > r \implies \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) \in \text{Ext}(S(\mathbf{a}, r)).$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

□

Πρόταση 8.2.9. Έστω αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$. Για κάθε δύο αντίστροφα σημεία \mathbf{x}, \mathbf{x}' , με $\mathbf{x} \in \text{Ext}(S(\mathbf{a}, r))$, θεωρούμε το σημείο \mathbf{s} της σφαίρας

$$\mathbf{s} = S(\mathbf{a}, r) \cap [\mathbf{x}, \mathbf{x}'].$$

Τότε

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{s}\| = \frac{r\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{r + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| &= r + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|, \\ \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{s}\| &= r. \end{aligned}$$

Τότε από το αριστερό και το δεξιό σκέλος της ισότητας

$$r^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\| = (r + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|)(r - \|\mathbf{x}' - \mathbf{s}\|),$$

παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 8.2.10. Έστω αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$. Για κάθε δύο σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$ και τα αντίστοιχα αντίστροφά τους \mathbf{x}', \mathbf{y}' , είναι:

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\| = \frac{r^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|}.$$

Αν $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, τότε

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\| = \frac{r^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\mathbf{x}' - \mathbf{y}' = r^2 \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right).$$

Παίρνοντας νόρμες στο τετράγωνο έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|^2 &= r^4 \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right\|^2 \\ &= r^4 \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} - 2 \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right) \right) \\ &= \frac{r^4}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} (\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 - 2(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a})) \\ &= \frac{r^4 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2}. \end{aligned}$$

Το δεύτερο σκέλος της πρότασης προκύπτει από τον ορισμό. □

8.2.2 Αντιστροφή σε υπερεπίπεδο του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα (εν γένει αφηρικό) υπερεπίπεδο $W(\mathbf{A}, b)$ του \mathbb{R}^n ορίζεται από την εξίσωση

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{A}\| = 1$ και $b \in \mathbb{R}$. Ένα τέτοιο υπερεπίπεδο επεκτείνεται σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$ προσθέτοντάς του το σημείο στο ∞ : $\overline{W(\mathbf{A}, b)} = W(\mathbf{A}, b) \cup \{\infty\}$. Ορίζουμε την αντιστροφή στο υπερεπίπεδο $W(\mathbf{A}, b)$ να είναι η ανάκλαση r_W :

$$r_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2(b - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}))\mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.6)$$

Αυτή επεκτείνεται σε μία απεικόνιση $\overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ θέτοντας $R_{\mathbf{A},b}(\infty) = \infty$.

Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει ορισμένες από τις ήδη γνωστές βασικές ιδιότητες των αντιστροφών σε υπερεπίπεδα:

Πρόταση 8.2.11. Έστω $r_W : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ αντιστροφή σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Τότε

- η r_W είναι 1-1 και επί,

- η r_W είναι ενελεικτική: $r_W \circ r_W = id.$,
- η r_W είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{R}^n}$,
- $r_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} \in \overline{W(\mathbf{A}, b)}$.

8.2.3 Δράση των αντιστροφών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$

Έστω η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a}, r}$ στη σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$. Ένα υπερεπίπεδο \overline{W} του $\overline{\mathbb{R}^n}$ που περνά από το κέντρο \mathbf{a} της σφαίρας έχει εξίσωση

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{A}\| = 1$. Αν $\mathbf{x} \in W$ έστω $\mathbf{y} = \iota_{\mathbf{a}, r}(\mathbf{x})$. Τότε

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2}$$

και συνεπώς

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{A},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}.$$

Ένα υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ που δεν περνά από το κέντρο \mathbf{a} της αντιστροφής έχει εξίσωση

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b, \quad b \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{A},$$

όπου $\|\mathbf{A}\| = 1$. Για $\mathbf{x} \in W(\mathbf{A}, b)$ και \mathbf{y} όπως προηγουμένως, είναι τότε

$$b = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{A}.$$

Γράφουμε ισοδύναμα

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + \frac{r^2}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} - b} (\mathbf{y} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο προκύπτει

$$\left\| \mathbf{y} - \left(\mathbf{a} + \frac{r\mathbf{A}}{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} - b)} \right) \right\|^2 = \frac{r^4}{4|\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} - b|^2},$$

η οποία παριστάνει σφαίρα που περνά από το \mathbf{a} . Αποδείξαμε την εξής:

Πρόταση 8.2.12. Η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a}, r}$ απεικονίζει κάθε υπερεπίπεδο που περνά από το κέντρο αντιστροφής στον εαυτό του και κάθε υπερεπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής σε σφαίρα του \mathbb{R}^n που περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Πόρισμα 8.2.13. Η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ απεικονίζει κάθε σφαίρα του \mathbb{R}^n που περνά από το κέντρο αντιστροφής σε υπερπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Έστω τώρα σφαίρα $S(\mathbf{a}, r')$ ομόκεντρη της σφαίρας αντιστροφής. Αν $\mathbf{x} \in S(\mathbf{a}, r')$ τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r'$. Θέτουμε $\mathbf{y} = \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})$. Τότε,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = r^2/r',$$

δηλαδή το $\mathbf{y} \in S(\mathbf{a}, r^2/r')$. Αν τώρα $S(\mathbf{a}', r')$ είναι τυχαία σφαίρα, τότε $\|\mathbf{x}' - \mathbf{a}'\| = r'$ για κάθε $\mathbf{x}' \in S(\mathbf{a}', r')$. Θέτουμε πάλι $\mathbf{y} = \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})$ και τότε από τη σχέση

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \iff \mathbf{x} = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2},$$

συνεπάγεται

$$r' = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}'\| = \left\| \mathbf{a} - \mathbf{a}' + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right\|.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, έπεται μετά τις πράξεις η σχέση

$$(\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|^2 - (r')^2) \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + 2r^2(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + r^4 = 0.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $B = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|^2 - (r')^2 = 0$: η σφαίρα $S(\mathbf{a}', r')$ περνά από το κέντρο αντιστροφής. Τότε παίρνουμε

$$2r^2(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + r^4 = 0.$$

το οποίο παριστάνει υπερπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

2. $B \neq 0$: η σφαίρα $S(\mathbf{a}', r')$ δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής. Γράφουμε

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + 2(r^2/B)(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + r^4/B = 0$$

και συμπληρώνοντας το τετράγωνο προκύπτει

$$\|\mathbf{y} - (\mathbf{a} + (r^2/B)(\mathbf{a}' - \mathbf{a}))\|^2 = r^4(r')^2/B^2,$$

που είναι εξίσωση σφαίρας που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στην εξής:

Πρόταση 8.2.14. Η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ απεικονίζει:

- κάθε σφαίρα ομόκεντρη με τη σφαίρα αντιστροφής σε σφαίρα ομόκεντρη με τη σφαίρα αντιστροφής,
- κάθε σφαίρα που περνά από το κέντρο αντιστροφής σε υπερπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής,
- κάθε σφαίρα που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής σε σφαίρα που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Έστω τώρα $R_{A,b}$ αντιστροφή σε υπερεπίπεδο $\overline{W}(A, b)$. Η απόδειξη της επόμενης πρότασης αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 8.2.15. *Η αντιστροφή $R_{A,b}$ απεικονίζει σφαίρες του \mathbb{R}^n σε σφαίρες του \mathbb{R}^n και υπερεπίπεδα του $\overline{\mathbb{R}^n}$ σε υπερεπίπεδα του $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Στο εξής, λέγοντας απλώς *αντιστροφή* του $\overline{\mathbb{R}^n}$ θα εννοούμε είτε αντιστροφή σε σφαίρα είτε αντιστροφή σε υπερεπίπεδο του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Επίσης, θα ονομάζουμε *γενικευμένη σφαίρα* είτε μία (Ευκλείδεια) σφαίρα του \mathbb{R}^n είτε ένα υπερεπίπεδο του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Από τη συζήτηση αυτής της Ενότητας προκύπτει το εξής:

Θεώρημα 8.2.16. *Κάθε αντιστροφή του $\overline{\mathbb{R}^n}$ απεικονίζει γενικευμένες σφαίρες σε γενικευμένες σφαίρες του $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

8.2.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι η στερεογραφική προβολή $\mathbf{S} : (\overline{\mathbb{R}^n}, d) \rightarrow (S^n, c_{n+1})$ είναι ομοιομορφισμός. Εδώ c_{n+1} είναι η χορδική μετρική στην S^n . Αποδείξτε κατόπιν ότι η ομάδα ισομετριών του $(\overline{\mathbb{R}^n}, d)$ είναι ισόμορφη με την ορθογώνια ομάδα $O(n+1)$.
2. Έστω καμπύλες $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ και έστω $t_0 \in [a, b]$ με $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = \mathbf{x}_0$, δηλαδή, οι καμπύλες τέμνονται στο \mathbf{x}_0 . Η γωνία θ των γ_1 και γ_2 στο \mathbf{x}_0 ορίζεται από τη σχέση

$$\cos \theta = \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\| \cdot \|\dot{\gamma}_2(t_0)\|}.$$

Οι καμπύλες $\gamma'_i = \mathbf{S}(\gamma_i)$, $i = 1, 2$ τέμνονται στο $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$. Αν θ' είναι η γωνία των γ'_1, γ'_2 στο $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$, τότε αποδείξτε ότι $\theta = \theta'$. Η άσκηση αυτή μας λέει ότι η στερεογραφική προβολή είναι *σύμμορφη* απεικόνιση. Θα δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια τις σύμμορφες απεικονίσεις στην Ενότητα 8.3.2.

3. Ταυτίζοντας το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} με το \mathbb{R}^2 , θεωρήστε το σύνολο $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Το επεκτεταμένο σύνολο των μιγαδικών αριθμών λέγεται *σφαίρα του Riemann*. Με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της Ενότητας 8.1:

- (α') Ορίστε τη στερεογραφική προβολή $\mathbf{S} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ και βρείτε την αντίστροφή της. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την περιγραφή της S^2 ως το σύνολο

$$\{(\zeta, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |\zeta|^2 + t^2 = 1\}.$$

Αυτό θα δώσει $\mathbf{S}^{-1}(\zeta, t) = \zeta/(1-t)$.)

- (β') Ορίστε τη χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{C}}$.

- (γ') Δείξτε ότι η \mathbf{S} απεικονίζει γενικευμένους κύκλους του $\overline{\mathbb{C}}$ σε σφαιρικούς κύκλους. (Μπορεί να σας χρειαστούν τα εξής: κάθε Ευκλείδεια ευθεία του \mathbb{C} έχει εξίσωση της μορφής $\Re(Az) = b$, όπου $A \in \mathbb{C}_*$, $|A| = 1$, και $b \in \mathbb{R}$ ενώ κάθε κύκλος $S(a, r)$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής $z = a + re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.)

4. Συνέχεια της προηγούμενης άσκησης: ορίστε την αντιστροφή σε κύκλο και την αντιστροφή σε ευθεία του \mathbb{C} και διατυπώστε προτάσεις ανάλογες με αυτές της Ενότητας 8.2 για την περίπτωση αυτή.
5. Έστω η αντιστροφή ι και $\mathbf{x} \in \text{Int}(S(\mathbf{0}, 1))$. Εκφράστε το σημείο \mathbf{s} της Πρότασης 8.2.9 συναρτήσει του \mathbf{x} λύνοντας ως προς t την εξίσωση

$$\|(1-t)\mathbf{x} + t\iota(\mathbf{x})\| = 1, \quad t \in (0, 1).$$

6. Έστω η αντιστροφή r_W στο υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$. Αν \mathbf{x} και \mathbf{x}' είναι αντίστροφα σημεία, βρείτε το σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος $[\mathbf{x}, \mathbf{x}']$ και του $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$.
7. Έστω τρία οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$ του $\overline{\mathbb{R}^2}$ (ή του $\overline{\mathbb{C}}$). Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός γενικευμένος κύκλος που τα περιέχει. (Υπόδειξη: Αν κάποιο από τα \mathbf{x}_i είναι το ∞ , τότε τα $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$ περιέχονται σε Ευκλείδεια ευθεία. Αν όλα τα $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$ είναι διάφορα από το ∞ , τότε είτε περιέχονται σε Ευκλείδεια ευθεία ή σε κύκλο τον οποίο και να κατασκευάσετε.)
8. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης ισχύει και για κάθε $\overline{\mathbb{R}^n}, n \geq 1$. Κάθε τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\overline{\mathbb{R}^n}$ περιέχονται σε μοναδικό γενικευμένο κύκλο του $\overline{\mathbb{R}^n}$.
9. Δείξτε ότι κάθε συστολή/διαστολή D_δ του $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι σύνθεση αντιστροφών σε σφαίρες.
10. Αποδείξτε τον τρίτο ισχυρισμό της Πρότασης 8.2.11.
11. Δείξτε ότι οποιαδήποτε τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $z_i, i = 1, \dots, 4$ μπορούν να απεικονιστούν μέσω μιας σύνθεσης αντιστροφών στα σημεία

$$\infty, \quad 0, \quad 1, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{C}.$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\mathbf{X} = [z_1, z_2; z_3, z_4]$ είναι ο μιγαδικός διπλός λόγος των z_1, z_2, z_3, z_4 (δείτε και την Ενότητα 8.5.3).

8.3 Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^n}$

Ορισμός 8.3.1. Ένας μετασχηματισμός Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι μία σύνθεση πεπερασμένου πλήθους αντιστροφών του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Συμβολίζουμε με $\text{GM}(n) = \text{GM}(\overline{\mathbb{R}^n})$ (απαντάται και ο συμβολισμός $\text{In}(\overline{\mathbb{R}^n})$) το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Το σύνολο $\text{GM}(n)$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση (Άσκηση 8.3.5.1). Από το Θεώρημα 8.2.16 έχουμε αμέσως το

Θεώρημα 8.3.2. Κάθε μετασχηματισμός Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$ απεικονίζει γενικευμένες σφαίρες σε γενικευμένες σφαίρες του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Ορισμός 8.3.3. Η Γεωμετρία της Αντιστροφής (κατά Klein) είναι το ζεύγος $(\overline{\mathbb{R}^n}, \text{GM}(n))$.

8.3.1 Η μορφή των μετασχηματισμών Möbius

Κάθε στοιχείο A της Ευκλείδειας ομάδας ισομετριών $E(n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$ επεκτείνεται στο $\overline{\mathbb{R}^n}$ θέτοντας $A(\infty) = \infty$. Τα στοιχεία αυτά είναι όλα μετασχηματισμοί Möbius:

- Οποιαδήποτε μεταφορά $T_{\mathbf{a}}$ γράφεται ως η σύνθεση της ανάκλασης στο υπερεπίπεδο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$ ακολουθουμένης από την ανάκλαση στο υπερεπίπεδο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2/2$.
- Λόγω του Θεωρήματος των Ανακλάσεων, κάθε στοιχείο της $O(n)$ είναι σύνθεση ανακλάσεων, δηλαδή, αντιστροφών σε υπερεπίπεδα.

Από την άλλη, και οι συστολές/διαστολές D_δ είναι μετασχηματισμοί Möbius: $D_\delta = \iota \circ \iota_{\mathbf{0}, 1/\sqrt{\delta}}$. Λόγω της Πρότασης 8.2.1 προκύπτει τώρα η εξής:

Πρόταση 8.3.4. Δύο οποιεσδήποτε αντιστροφές σε σφαίρες του \mathbb{R}^n είναι συζυγείς στην ομάδα $\text{GM}(n)$.

Απόδειξη. Έστω αντιστροφές ι_1, ι_2 σε σφαίρες S_1, S_2 , αντίστοιχα. Υπάρχουν στοιχεία $Q_1, Q_2 \in \text{GM}(n)$ τέτοια ώστε

$$\iota_i = Q_i \circ \iota \circ Q_i^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

όπου ι είναι η αντιστροφή στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$. Τότε

$$\iota = Q_1^{-1} \circ \iota_1 \circ Q_1 = Q_2^{-1} \circ \iota_2 \circ Q_2 \implies \iota_2 = Q \circ \iota_1 \circ Q^{-1}, \quad Q = Q_2 Q_1^{-1}.$$

□

Το παρακάτω θεώρημα δίνει μία πλήρη περιγραφή των στοιχείων της $\text{GM}(n)$.

Θεώρημα 8.3.5. Κάθε $g \in \text{GM}(n)$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση των παρακάτω μετασχηματισμών του $\overline{\mathbb{R}^n}$:

- μεταφορών $T_{\mathbf{a}}$,
- στοιχείων $A \in O(n)$,
- αντιστροφής ι στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$,
- συστολών/διαστολών D_δ .

(Οι μεταφορές, περιστροφές και συστολές/διαστολές εννοούνται εδώ επεκτεταμένες στο $\overline{\mathbb{R}^n}$.)

Μας χρειάζεται το παρακάτω:

Λήμμα 8.3.6. Έστω h μετασχηματισμός Möbius που έχει μία από τις μορφές του Θεωρήματος 8.3.5 και έστω j αντιστροφή του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Τότε η σύνθεση $h \circ j$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μετασχηματισμών των μορφών του Θεωρήματος 8.3.5.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 8.2.1 εάν ο j είναι αντιστροφή σε σφαίρα, ενώ αν είναι αντιστροφή $R_{\mathbf{A}, b}$ σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$, τότε μπορεί να γραφεί ως $R_{\mathbf{A}, b} = T_{2b\mathbf{A}} \circ R_{\mathbf{A}, 0}$, δηλαδή, ως σύνθεση μιας μεταφοράς και ενός στοιχείου της $O(n)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.5. Έστω $g \in \text{GM}(n)$, $g = j_1 \circ \dots \circ j_n$, όπου j_i είναι αντιστροφές του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n .

Εάν $n = 1$ τότε ο g είναι είτε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είτε ανάκλαση $R_{\mathbf{A},b}$ σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε το αποτέλεσμα από την Πρόταση 8.2.1. Στη δεύτερη περίπτωση, έχουμε από την απόδειξη του Λήμματος 8.3.6 ότι κάθε αντιστροφή σε υπερεπίπεδο μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μίας μεταφοράς και ενός στοιχείου της $O(n)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το αποτέλεσμα ισχύει για όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του n και γράφουμε $g = h \circ j_{n+1}$, όπου ο h είναι σύνθεση μετασχηματισμών όπως στην υπόθεση του θεωρήματος. Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 8.3.6. \square

Σύγκριση της Γεωμετρίας της Αντιστροφής με άλλες Γεωμετρίες

Θεωρώντας τη δράση των στοιχείων της ομάδας $E(n)$ των Ευκλείδειων ισομετριών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$, προκύπτει από το Θεώρημα 8.3.5 ότι η $E(n)$ είναι γνήσια υποομάδα της ομάδας $\text{GM}(n)$ των μετασχηματισμών Möbius. Συμπεραίνουμε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία (του επεκτεταμένου πραγματικού n -χώρου, δηλαδή, το ζεύγος $(\overline{\mathbb{R}^n}, \overline{E(n)})$) περιέχεται στη Γεωμετρία της Αντιστροφής. Εδώ, η ομάδα $\overline{E(n)}$ είναι η ομάδα ισομετριών της επεκτεταμένης Ευκλείδειας μετρικής \bar{d} που ορίζεται ως εξής: $\bar{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\bar{d}(\mathbf{x}, \infty) = \bar{d}(\infty, \mathbf{x}) = +\infty$, $\bar{d}(\infty, \infty) = 0$. Η $\overline{E(n)}$ είναι η $E(n)$ θεωρούμενη με τα στοιχεία της επεκτεταμένα ώστε να αφήνουν αναλλοίωτο το σημείο στο άπειρο.

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση της Γεωμετρίας της Αντιστροφής με την Αφφινική Γεωμετρία και για ευκολία θα περιοριστούμε στην περίπτωση $n = 2$. Ταυτίζοντας το \mathbb{R}^2 με το \mathbb{C} , έχουμε δει ότι κάθε στοιχείο της $A(2)$ είναι της μορφής

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C, \quad A, B, C \in \mathbb{C}, \quad |A| + |B| \neq 0.$$

Τέτοιοι μετασχηματισμοί επεκτείνονται στο $\overline{\mathbb{C}}$ θέτοντας $f(\infty) = \infty$. Όμως, οι αντιστροφές σε κύκλους του \mathbb{C} δεν μπορούν να γραφούν στην παραπάνω μορφή (δικαιολογήστε!). Προκύπτει συνεπώς ότι εν γένει, ο περιορισμός ενός Möbius μετασχηματισμού στο \mathbb{C} δεν ανήκει στην $A(2)$. Από την άλλη, η επέκταση ενός αφφινικού μετασχηματισμού στο $\overline{\mathbb{C}}$ δεν είναι κατ' ανάγκη Möbius μετασχηματισμός. Λόγου χάρη, έστω η

$$f(z) = ((1 + K)/2)z + ((1 - K)/2)\bar{z}, \quad 0 < K < 1,$$

και ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$. Τότε, επειδή

$$w = f(z) \iff z = \Re(w) + i \frac{\Im(w)}{K},$$

έπεται η εξίσωση

$$1 = |z| = \left| \Re(w) + i \frac{\Im(w)}{K} \right|,$$

η οποία παριστάνει έλλειψη. Όμως αυτό δεν μπορεί να είναι δυνατόν, εφ' όσον οι μετασχηματισμοί Möbius απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

8.3.2 Συμμορφία των μετασχηματισμών Möbius

Μία απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται *σύμμορφη* στο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν διατηρεί τις γωνίες στο \mathbf{x}_0 . Αν η f είναι διαφορίσιμη στο \mathbf{x}_0 τότε αυτό σημαίνει ότι ο Ιακωβιανός πίνακας $Df(\mathbf{x}_0)$ της f στο \mathbf{x}_0 ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$(Df(\mathbf{x}_0))(Df(\mathbf{x}_0))^T = \lambda(\mathbf{x}_0)I_n,$$

όπου $\lambda(\mathbf{x}_0) \neq 0$ και I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. (Δείτε την Άσκηση 8.3.5.2 για την απόδειξη.)

Θεώρημα 8.3.7. Κάθε $g \in \text{GM}(n)$ είναι σύμμορφη απεικόνιση του \mathbb{R}^n . Αν ο g περιέχει άρτιο αριθμό αντιστροφών, τότε διατηρεί τον προσανατολισμό. Στην αντίθετη περίπτωση, αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.3.5 αρκεί να αποδείξουμε το παρόν θεώρημα για τις εξής περιπτώσεις:

1. Ο g είναι μεταφορά. Αν $g = T_{\mathbf{a}}$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a} \implies DT_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = I_n,$$

ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Είναι $\det(DT_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = 1 > 0$ και συνεπώς οι μεταφορές διατηρούν τον προσανατολισμό.

2. Ο g είναι στοιχείο της $O(n)$. Αν g α ορθογώνιος μετασχηματισμός με πίνακα $A \in O(n)$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \implies Dg(\mathbf{x}) = A.$$

Είναι $\det(Dg(\mathbf{x})) = 1$ αν $A \in \text{SO}(n)$ ενώ $\det(Dg(\mathbf{x})) = -1$ όταν ο α αναλύεται σε περιττού πλήθους ανακλάσεων σε υπερεπίπεδα από την αρχή.

3. Ο g είναι συστολή/διαστολή. Αν $g = D_{\delta}$, $\delta > 0$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$D_{\delta}(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{x} \implies D_{\delta}(\mathbf{x}) = \delta I_n.$$

Είναι $\det(D_{\delta}(\mathbf{x})) = \delta^n > 0$.

4. Ο g είναι η αντιστροφή ι . Αν $g = \iota$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\iota(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \implies D\iota(\mathbf{x}) = D\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \cdot \mathbf{x}\right).$$

Υπενθυμίζουμε πως αν $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμες, όπου U ανοικτό του \mathbb{R}^n , τότε για κάθε $\mathbf{x} \in U$,

$$D(f \cdot g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})^T (Df(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})Dg(\mathbf{x}).$$

Στην περίπτωσή μας, $f(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|^2$ και $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Άρα, $Dg(\mathbf{x}) = I_n$ και

$$Df(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4} D(\|\mathbf{x}\|^2) = -\frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4}.$$

Συνεπώς,

$$D\iota(\mathbf{x}) = -\frac{2\mathbf{x}^T\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4} + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}I_n = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}(I_n - 2Q(\mathbf{x})), \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Παρατηρούμε ότι ο $Q(x)$ είναι συμμετρικός και

$$Q^2(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{x}^T\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^4} = \frac{\mathbf{x}^T(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2(\mathbf{x}^T\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^4} = Q(\mathbf{x}).$$

Άρα,

$$(D\iota(\mathbf{x}))(D\iota(\mathbf{x}))^T = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4}(I_n - 2Q(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4}I_n$$

και η ι είναι σύμμορφη. Παίρνοντας τώρα ορίζουσες έχουμε ότι

$$(\det(D\iota(\mathbf{x})))^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{4n}} \implies \det(D\iota(\mathbf{x})) = \pm \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n}}.$$

Λόγω της συνεκτικότητας του \mathbb{R}_*^n η ορίζουσα μπορεί να είναι είτε μόνο θετική είτε μόνο αρνητική. Για να διαπιστώσουμε το πρόσημο, εξετάζουμε την τιμή της ορίζουσας το σημείο $\mathbf{1} = (1, 0, \dots, 0)$:

$$D\iota(\mathbf{1}) = I_n - 2Q(\mathbf{1}) = J,$$

όπου ο J είναι διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με $j_{11} = -1$ και $j_{ii} = 1$ για κάθε $i > 1$. Συνεπώς η ορίζουσά του είναι -1 και συμπεραίνουμε ότι

$$D\iota(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n}},$$

και άρα η ι αντιστρέφει τον προσανατολισμό. □

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφερθεί ότι ισχύει και το εξής καταπληκτικό (και βαθύ) αποτέλεσμα του Liouville: Σε διαστάσεις $n > 2$, όλες οι σύμμορφες απεικονίσεις του \mathbb{R}^n είναι μετασχηματισμοί Möbius. Στη διάσταση 2 κάτι τέτοιο δεν ισχύει: οι ολόμορφες (και οι αντιολόμορφες) απεικονίσεις του \mathbb{C} είναι όλες σύμμορφες.

Το Θεώρημα 8.3.7 μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 8.3.8. Το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$ που διατηρούν τον προσανατολισμό θα συμβολίζεται με $M(n)$.

Το σύνολο $M(n)$ είναι ομάδα, δείτε την Άσκηση 8.3.5.3.

8.3.3 Μετρικός διπλός λόγος

Έστω d η χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{R}^n}$ και τετράδα σημείων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Καθορίζοντας τη σειρά που παίρνουμε αυτά τα σημεία καθορίζουμε και έναν *προσανατολισμό* στην τετράδα. Λόγου χάρη, γράφοντας $\mathfrak{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ εννοούμε την τετράδα με το \mathbf{x}_1 να είναι το πρώτο σημείο, το \mathbf{x}_2 το δεύτερο, κ.ο.κ. Για οποιαδήποτε προανατολισμένη τετράδα $\mathfrak{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ τεσσάρων διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων, ο *μετρικός διπλός λόγος* της \mathfrak{p} ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbb{X}(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{d(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2) \cdot d(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1)}{d(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_1) \cdot d(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι αρκεί να χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\mathbb{X}(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|},$$

με την παραδοχή (η οποία τώρα είναι απολύτως δικαιολογημένη) $\infty : \infty = 1$ (δείτε την Άσκηση 8.3.5.6). Ισχύει το εξής λήμμα (δείτε την Άσκηση 8.3.5.10).

Λήμμα 8.3.9. *Εάν $\mathfrak{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα σημείων του \mathbf{R}^n διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, τότε οι μετρικοί διπλοί λόγοι $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$, $(i, j, k, l) \in S_4$, είναι συναρτήσεις των μετρικών διπλών λόγων*

$$\mathbb{X}_1(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4).$$

Θεώρημα 8.3.10. *Μία απεικόνιση $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ είναι μετασχηματισμός Möbius αν και μόνο αν διατηρεί τον μετρικό διπλό λόγο κάθε τετράδας σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, αρκεί λόγω του Θεωρήματος 8.3.5 να δείξουμε ότι οι μεταφορές, τα στοιχεία της $O(n)$, οι ομοιοθεσίες και η αντιστροφή στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$ διατηρούν τον μετρικό διπλό λόγο. Δείχνουμε εδώ μόνο το τελευταίο και αφήνουμε τα υπόλοιπα στην Άσκηση 8.3.5.7. Αν λοιπόν ι είναι η αντιστροφή στην $S(\mathbf{0}, 1)$, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 8.2.10 έχουμε

$$\begin{aligned} (\iota(\mathbf{x}_1), \iota(\mathbf{x}_2); \iota(\mathbf{x}_3), \iota(\mathbf{x}_4)) &= \frac{\|\iota(\mathbf{x}_4) - \iota(\mathbf{x}_2)\| \cdot \|\iota(\mathbf{x}_3) - \iota(\mathbf{x}_1)\|}{\|\iota(\mathbf{x}_4) - \iota(\mathbf{x}_1)\| \cdot \|\iota(\mathbf{x}_3) - \iota(\mathbf{x}_2)\|} \\ &= \frac{\frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_4\| \cdot \|\mathbf{x}_2\|} \cdot \frac{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_3\| \cdot \|\mathbf{x}_1\|}}{\frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_4\| \cdot \|\mathbf{x}_1\|} \cdot \frac{\|\mathbf{x}_3\| \cdot \|\mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_3\| \cdot \|\mathbf{x}_2\|}} \\ &= \frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|} \\ &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4). \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο, συνθέτοντας την f εν ανάγκη με έναν μετασχηματισμό Möbius, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(\infty) = \infty$. Για $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, 4$, η σχέση

$$\frac{(\infty, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)}{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \infty, \mathbf{x}_4)} = \frac{(\infty, f(\mathbf{x}_2); f(\mathbf{x}_3), f(\mathbf{x}_4))}{(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2); \infty, f(\mathbf{x}_4))}$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} = \frac{\|f(\mathbf{x}_3) - f(\mathbf{x}_4)\|}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4\|}.$$

Προκύπτει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = k > 0.$$

Άρα, ο f είναι Ευκλείδεια ομοιοθεσία και συνεπώς μετασχηματισμός Möbius. \square

Πόρισμα 8.3.11. Έστω $\mathfrak{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ και $\mathfrak{p}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4\}$ προσανατολισμένες τετράδες σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο. Αν υπάρχει $f \in \text{GM}(n)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}'_i$, $i = 1, \dots, 4$, τότε

$$\mathbb{X}(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2; \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4) = \mathbb{X}(\mathfrak{p}').$$

Το επόμενο θεώρημα είναι το Θεμελιώδεις Θεώρημα των Διπλών Λόγων.

Θεώρημα 8.3.12. Έστω $\mathfrak{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ και $\mathfrak{p}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4\}$ προσανατολισμένες τετράδες σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο. Υπάρχει $f \in \text{GM}(n)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathfrak{p}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) = \mathbb{X}_1(\mathfrak{p}'), \\ \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_4) = \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}'). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Το ευθύ προκύπτει από το Πόρισμα 8.3.11 (αναλλοίωτο των μετρικών διπλών λόγων). Για το αντίστροφο, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ώστε

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = \infty, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{y}_3 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x}_4 = \mathbf{X}, \quad \mathbf{y}_4 = \mathbf{Y},$$

με $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}_*^n \setminus \{\mathbf{1} = \mathbf{e}_1\}$ (γιατί:). Από τις ισότητες των διπλών λόγων παίρνουμε τότε, αντίστοιχα

$$\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\|, \quad \|\mathbf{X} - \mathbf{1}\| = \|\mathbf{Y} - \mathbf{1}\|.$$

Αν $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, τότε υψώνοντας τη δεύτερη σχέση στο τετράγωνο και χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα προκύπτει $X_1 = Y_1$. Επίσης, αν $\mathbf{X}_{n-1} = (X_2, \dots, X_n)$ και $\mathbf{Y}_{n-1} = (Y_2, \dots, Y_n)$, τότε πάλι από την πρώτη σχέση παίρνουμε $\|\mathbf{X}_{n-1}\| = \|\mathbf{Y}_{n-1}\|$. Συνεπώς, υπάρχει $A \in \text{O}(n-1)$ τέτοιος ώστε ο αντίστοιχος ορθογώνιος μετασχηματισμός α ικανοποιεί την $\alpha(\mathbf{X}_{n-1}) = \mathbf{Y}_{n-1}$. Έπεται ότι ο μετασχηματισμός $\phi : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

είναι μετασχηματισμός Möbius με $\phi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$. \square

8.3.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας της Αντιστροφής

Το παρακάτω θεώρημα είναι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας της Αντιστροφής:

Θεώρημα 8.3.13. *Η $g \in \text{GM}(n)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}^n}$: αν \mathbf{x}_i και \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, 3$, είναι τριάδες διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $g \in \text{GM}(n)$ τέτοιος ώστε*

$$g(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Εάν g' είναι ένας άλλος μετασχηματισμός που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις, τότε $g' \in gH$ όπου H υποομάδα της $\text{GM}(n)$ συζυγής με την $O(n-1)$. Εάν $n = 2$, τότε είτε $g = g'$, είτε $g' = gh$ όπου h συζυγής με ανάκλαση σε ευθεία. Εάν $n = 1$ τότε ο g είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Υπάρχουν μετασχηματισμοί Möbius h_1 και h_2 τέτοιοι ώστε

$$h_1(\mathbf{x}_1) = h_2(\mathbf{y}_1) = \infty, \quad h_1(\mathbf{x}_2) = h_2(\mathbf{y}_2) = \mathbf{0}, \quad h_1(\mathbf{x}_3) = h_2(\mathbf{y}_3) = \mathbf{1}.$$

Ο μετασχηματισμός $g = h_2^{-1} \circ h_1 \in M(\overline{\mathbb{R}^n})$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος. Έστω ότι υπήρχε g' με $g'(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$. Τότε ο μετασχηματισμός $f = h_1 g^{-1} g' h_1^{-1}$ σταθεροποιεί τα σημεία ∞ , $\mathbf{0}$, $\mathbf{1} = \mathbf{e}_1$ και άρα $f \in O(n-1)$. Συνεπώς, $g^{-1} g' = h_1^{-1} f h_1 = h$ που είναι στοιχείο που σταθεροποιεί τα \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3$. Παίρνουμε έτσι $g' = gh$ (δείτε και την Άσκηση 8.3.5.9).

Εάν $n = 2$ τότε $h = id$. αν $f = id$. και $h = h_1^{-1} r h_1$ αν $f = r$, η ανάκλαση στην $x_2 = 0$. Προκύπτει λοιπόν ότι είτε $g' = g$ είτε $g' = gh$ όπου h συζυγής με ανάκλαση. Για $n = 1$ είναι τώρα προφανές. \square

8.3.5 Ασκήσεις

1. Δείξτε με τον ορισμό ότι το σύνολο $\text{GM}(n)$ των Möbius μετασχηματισμών του $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.
2. Η άσκηση αυτή δικαιολογεί τη συνθήκη για τις διαφορίσιμες σύμμορφες απεικονίσεις. Έστω $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμικός μετασχηματισμός και \mathbf{v}, \mathbf{w} διανύσματα του \mathbb{R}_*^n . Η γωνία $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ των \mathbf{v}, \mathbf{w} ορίζεται από τη σχέση

$$\cos(\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

Συνεπώς ο A διατηρεί τις γωνίες αν για οποιαδήποτε μη μηδενικά \mathbf{v}, \mathbf{w} ισχύει ότι

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{A(\mathbf{v}) \cdot A(\mathbf{w})}{\|A(\mathbf{v})\| \cdot \|A(\mathbf{w})\|}. \quad (8.7)$$

(Υπενθυμίζουμε πως $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A$ εφόσον τα \mathbf{x} θεωρούνται διανύσματα γραμμής.) Θα δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας A του μετασχηματισμού ικανοποιεί τη σχέση

$$AA^T = A^T A = \lambda I, \quad \text{για κάποιο } \lambda \neq 0.$$

Έστω η κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ του \mathbb{R}^n . Για $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_j$, $i \neq j$ παίρνουμε από την Εξίσωση (8.7) ότι $A(\mathbf{e}_i) \cdot A(\mathbf{e}_j) = 0$ και συνεπώς οι γραμμές του A είναι ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα. Αυτό σημαίνει όμως ότι τα (ij) -στοιχεία του AA^T είναι όλα 0 για $i \neq j$. Κατά συνέπεια, ο AA^T είναι διαγώνιος πίνακας. Τώρα πάλι για $i \neq j$ έχουμε

$$0 = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = (A(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)) \cdot (A(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)) = (A^T A)_{ii} - (A^T A)_{jj}$$

και συμπεραίνουμε ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του AA^T είναι ίσα με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$.

3. Έστω το σύνολο $M(n)$ των μετασχηματισμών Möbius που διατηρούν τον προσανατολισμό. Δείξτε ότι είναι υποομάδα της $GM(n)$.
4. (Κανονικοποίηση των γενικευμένων σφαιρών). Δείξτε τα ακόλουθα.
 - (α) Αν Σ είναι μία σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ στο $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $f \in M(n)$ με $f(\Sigma) = S(\mathbf{0}, 1)$. (Υπόδειξη: Με τη μεταφορά $T_{-\mathbf{a}}$ απεικονίστε την Σ στην $S(\mathbf{0}, r)$. Εφαρμόστε κατόπιν την ομοιοθεσία $D_{1/r}$).
 - (β) Αν P είναι ένα υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ στο $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $g \in M(n)$ με $g(P) = \overline{W(\mathbf{e}_1, 0)}$. (Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση του υπερεπιπέδου ως $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{A} = 0$. Με τη μεταφορά $T_{-\mathbf{a}}$ απεικονίστε το υπερεπίπεδο στο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0$. Πάρτε κατόπιν το στοιχείο εκείνο της $O(n)$ που απεικονίζει το \mathbf{A} σε διάνυσμα $\delta \mathbf{e}_1$, $\delta > 0$).
 - (γ) Δείξτε ότι υπάρχει $h \in GM(n)$ με $h(S(\mathbf{0}, 1)) = \overline{W(\mathbf{e}_1, 0)}$. (Υπόδειξη: Κάνοντας πρώτα κατάλληλη μεταφορά, χρησιμοποιήστε κατόπιν την Πρόταση 8.2.12).
 - (δ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράνετε το Θεώρημα 8.2.16, στο οποίο τώρα μπορεί να προστεθεί η εξής πρόταση: *Εάν Σ και Σ' είναι γενικευμένες σφαίρες του $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $\phi \in GM(n)$ με $\phi(\Sigma) = \Sigma'$.*

5. Δείξτε ότι το σύνολο $GM(1)$ αποτελείται από 1-1 και επί μετασχηματισμούς f του $\overline{\mathbb{R}}$ της μορφής

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

(Εδώ θεωρούμε πάντοτε ότι $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$). Δείξτε επίσης ότι η ομάδα $M(1)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς της παραπάνω μορφής με $ad - bc > 0$. (Υπόδειξη: Ονομάστε G το σύνολο των f της παραπάνω μορφής και δείξτε ότι είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Αν τώρα $f \in G$, διακρίνετε δύο περιπτώσεις: α) Αν $c = 0$, τότε $f(x) = (a/d)x + (b/d)$ που είναι σύνθεση Ευκλείδειων ισομετριών και ομοιοθεσιών του \mathbb{R} . β) Αν $c \neq 0$ τότε

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + (d/c)},$$

που είναι σύνθεση ισομετριών, ομοιοθεσιών και της αντιστροφής στο 0. Άρα, έχουμε ότι $G \subset GM(1)$. Από την άλλη, κάθε στοιχείο του $GM(1)$ μπορεί να γραφεί ως στοιχείο του G .

6. Δείξτε την ισοδυναμία των ορισμών του μετρικού διπλού λόγου τεσσάρων σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$.
7. Δείξτε ότι οι μεταφορές, τα στοιχεία της $O(n)$ και οι ομοιοθεσίες διατηρούν τον μετρικό διπλό λόγο τεσσάρων σημείων.
8. Αποδείξτε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius f με $f(\infty) = \infty$ είναι επεκτεταμένη ομοιοθεσία. (Υπόδειξη: Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.10).
9. Δείξτε ότι κάθε Möbius μετασχηματισμός του $\overline{\mathbb{R}^n}$ που κρατά σταθερά τα σημεία ∞ , $\mathbf{0}$, $\mathbf{1} = \mathbf{e}_1$, είναι στοιχείο της $O(n-1)$ όπως αυτή θεωρείται με την εμφύτευσή της

$$O(n-1) \ni A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in O(n).$$

Συμπεράνετε πως αν $n = 2$, τότε ένας τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να είναι είτε ο ταυτοτικός είτε η ανάκλαση στην ευθεία $x_2 = 0$. Το αποτέλεσμα της άσκησης μπορεί να γραφεί και ως

$$\text{Stab}((\infty, \mathbf{0}, \mathbf{1})) = O(n-1).$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.3.5.9 για να συμπεράνετε πως για τυχαία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, είναι

$$\text{Stab}((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)) = hO(n-1)h^{-1}, \quad h \in \text{GM}(n),$$

δηλαδή, ο σταθεροποιητής των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι ομάδα συζυγής με την $O(n-1)$.

10. Αποδείξτε το Λήμμα 8.3.9.
11. (Θεώρημα του Πτολεμαίου.) Έστω $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 4$ διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Θεωρήστε μία οποιαδήποτε μετάταξη $(1, 2, 3, 4) \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4))$ της S_4 και την τετράδα $\mathfrak{p} = \{\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \mathbf{x}_{\sigma(3)}, \mathbf{x}_{\sigma(4)}\}$. Θεωρήστε επίσης τους μετρικούς διπλούς λόγους της \mathfrak{p} :

$$\mathbb{X}_1(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}; \mathbf{x}_{\sigma(3)}, \mathbf{x}_{\sigma(4)}) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}) = (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(3)}; \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \mathbf{x}_{\sigma(4)}).$$

(α') Δείξτε ότι $\mathbb{X}_1(\mathfrak{p}) + \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}) \geq 1$. (Υπόδειξη: Κανονικοποιήστε ώστε

$$\mathbf{x}_{\sigma(1)} = \infty, \quad \mathbf{x}_{\sigma(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{\sigma(3)} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x}_{\sigma(4)} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathfrak{p}) + \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}) &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{1}\| \\ &\geq \|\mathbf{x} - (\mathbf{x} - \mathbf{1})\| = 1. \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε το κάθε βήμα σας.)

(β') Γράψτε την παραπάνω ανισότητα ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{\sigma(4)} - \mathbf{x}_{\sigma(1)}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\sigma(3)} - \mathbf{x}_{\sigma(2)}\| &\leq \|\mathbf{x}_{\sigma(4)} - \mathbf{x}_{\sigma(2)}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\sigma(3)} - \mathbf{x}_{\sigma(1)}\| \\ &+ \|\mathbf{x}_{\sigma(4)} - \mathbf{x}_{\sigma(3)}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\sigma(2)} - \mathbf{x}_{\sigma(1)}\|. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας τα $\mathbf{x}_{\sigma(1)}$ κορυφές τετραπλεύρου, ερμηνεύστε γεωμετρικά την παραπάνω ανισότητα που είναι γνωστή ως *Ανισότητα του Πτολεμαίου*.

(γ') Αποδείξτε το *Θεώρημα του Πτολεμαίου*: Η ισότητα στην Ανισότητα του Πτολεμαίου ισχύει τότε και μόνον τότε όταν τα \mathbf{x}_i κείνται σε γενικευμένο κύκλο του $\overline{\mathbb{R}}^n$. (Υπόδειξη: Στην ανισότητα του πρώτου ερωτήματος η ισότητα ισχύει τότε και μόνον τότε όταν τα $\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{1}$ είναι συνευθειακά.)

8.4 Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}}$

Η Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι η γεωμετρία (κατά Klein) $(\overline{\mathbb{R}}, \text{GM}(1))$. Η ομάδα $\text{GM}(1)$ έχει μια ενδιαφέρουσα περιγραφή την οποία εξετάζουμε αμέσως παρακάτω.

8.4.1 Η ομάδα $\text{GM}(1)$

Στο $\overline{\mathbb{R}}$ θεωρούμε απεικονίσεις της μορφής

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (8.8)$$

όπου $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$ (αν $c = 0$ τότε έχουμε μόνο τη σχέση $f(\infty) = \infty$). Τέτοιου είδους απεικονίσεις είναι 1-1 και επί: η αντίστροφη f^{-1} της f δίνεται από την

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a},$$

και $f^{-1}(\infty) = -d/c$, $f^{-1}(a/c) = \infty$. Κάθε τέτοια f είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{R}}$ (δείτε την Άσκηση 8.4.4.1). Επίσης, το σύνολο G των μετασχηματισμών της μορφής (8.8) αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων (δείτε την Άσκηση 8.4.4.2). Παρατηρούμε τώρα ότι όλοι οι παρακάτω μετασχηματισμοί, θεωρούμενοι ως μετασχηματισμοί του $\overline{\mathbb{R}}$, είναι στοιχεία της G :

- Μεταθέσεις: $T_a(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}$,
- Ανάκλαση στο 0: $R(x) = -x$,
- Συστολές/διαστολές: $D_\delta(x) = \delta x$, $\delta > 0$,
- Αντιστροφή στο 0: $\iota(x) = 1/x$.

Άρα, $G \subset \text{GM}(1)$. Επίσης, κάθε $f \in G$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(x) = \begin{cases} (a/d)x + b/d & \text{όταν } c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+(d/c)} & \text{όταν } c \neq 0, \end{cases}$$

που είναι σύνθεση όλων των παραπάνω μετασχηματισμών. Συμπεραίνουμε την παρακάτω:

Πρόταση 8.4.1. Η ομάδα $\text{GM}(1)$ των μετασχηματισμών Möbius της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας αποτελείται από μετασχηματισμούς της μορφής (8.8).

8.4.2 Η προβολική ομάδα $P(1)$ και η $\text{GM}(1)$

Υπενθυμίζουμε πως αν $[A] \in P(1) = \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ και

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

τότε γράφουμε

$$[A] = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right].$$

Υπάρχει απεικόνιση $\Phi : P(1) \rightarrow \text{GM}(1)$ που δίνεται από την

$$\Phi \left(\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \right) = f \mid f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}. \quad (8.9)$$

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται στην Άσκηση 8.4.4.3.

Πρόταση 8.4.2. Η απεικόνιση Φ της (8.9) είναι ισομορφισμός ομάδων.

Κατά συνέπεια, η $\text{GM}(1)$ ταυτίζεται με την ομάδα $P(1)$ των μετασχηματισμών της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό εφόσον υπάρχει ταύτιση του κύκλου $S^1 = \overline{\mathbb{R}}$ και της $\mathbb{R}P^1$. Προκύπτει λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 8.4.3. Η Γεωμετρία της Αντιστροφής $(\overline{\mathbb{R}}, \text{GM}(1))$ είναι η Γεωμετρία της Προβολικής Ευθείας $(\mathbb{R}P^1, P(1))$.

Υπάρχει και μία άλλη περιγραφή της $\text{GM}(1)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Psi : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R}), \quad A \mapsto [A].$$

Η Ψ είναι μονομορφισμός ομάδων και $\ker(\Psi) = \{I, -I\}$. Συνεπώς, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Ομάδων έχουμε την εξής:

Πρόταση 8.4.4.

$$\text{GM}(1) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\} := \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Σχόλιο 8.4.5. Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί Möbius του $\overline{\mathbb{R}}$ που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι οι μεταφορές και οι ομοιοθεσίες· η ανάκλαση $x \mapsto -x$ και η αντιστροφή $x \mapsto 1/x$ αλλάζουν τον προσανατολισμό. Επειδή κάθε στοιχείο της $\text{GM}(1)$ είναι σύνθεση αντιστροφών, έχουμε ότι το υποσύνολο της $\text{GM}(1)$ που αποτελείται από στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό, είναι το σύνολο των στοιχείων που είναι συνθέσεις αρτίου πλήθους ανακλάσεων. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με $\text{M}(1)$ ή $\text{PSL}^+(2, \mathbb{R})$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι αν $f \in \text{GM}(1)$, τότε

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \implies f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2},$$

και συνεπώς ο f αντιστρέφει ή διατηρεί τον προσανατολισμό αναλόγως του προσήμου της ορίζουσας του αντιπροσώπου του στην $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

8.4.3 Διπλοί λόγοι

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας είτε αποτελούν περιπτώσεις αποτελεσμάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί είτε οι αποδείξεις τους είναι απλές· για τον λόγο αυτόν αφήνονται ως ασκήσεις.

Υπάρχουν δύο είδη διπλών λόγων, ο πραγματικός και ο μετρικός διπλός λόγος. Ο πρώτος, μας έρχεται από τη γεωμετρία της προβολικής ευθείας. Έστω $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$, τότε ο διπλός λόγος της \mathbf{p} είναι ο

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

με τις αναγκαίες τροποποιήσεις αν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ . Αυτός είναι ακριβώς ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ και ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 8.4.6. Έστω $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $\sigma \in S_4$ μετάταξη των σημείων της \mathbf{p} . Τότε ο διπλός λόγος $\mathbf{X}(\sigma(\mathbf{p})) = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}; x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]$ είναι συνάρτηση του $\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [x_1, x_2; x_3, x_4]$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.4.4.4. Δείτε και την Άσκηση 7.2.2.5. □

Πρόταση 8.4.7. Ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $\text{GM}(1)$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.4.4.5. □

Πρόταση 8.4.8. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $\text{GM}(1)$ που απεικονίζει μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ σε μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων με τρόπον ώστε $x_i \leftrightarrow x'_i, i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [x_1, x_2; x_3, x_4] = [x'_1, x'_2; x'_3, x'_4] = \mathbf{X}(\mathbf{p}').$$

Απόδειξη. Άσκηση 8.4.4.6, δείτε και αμέσως παρακάτω. □

Υπενθυμίζουμε ότι η $\text{GM}(1)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}}$. Υπάρχει ο εξής ωραίος τρόπος να το αποδείξουμε αυτό μέσω των διπλών λόγων. Έστω $\{x_1, x_2, x_3\}$ και $\{y_1, y_2, y_3\}$ τριάδες διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Ο μετασχηματισμός g που στέλνει τα x_1, x_2, x_3, x στα $\infty, 0, 1, g(x)$, αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση

$$[\infty, 0; 1, g(x)] = [x_1, x_2; x_3, x] \iff g(x) = \frac{(x - x_2)(x_3 - x_1)}{(x - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Ομοίως, ο μετασχηματισμός h που στέλνει τα y_1, y_2, y_3, x στα $\infty, 0, 1, h(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$h(x) = \frac{(x - y_2)(y_3 - y_1)}{(x - y_4)(y_3 - y_2)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $f = hg^{-1}$ και είναι μοναδικός. Πράγματι, αν υπήρχε f' ώστε $x_i \leftrightarrow y_i$ μέσω της f' , τότε ο $F = hf^{-1}f'g^{-1}$ θα σταθεροποιούσε τα $\infty, 0, 1$. Συνεπώς

$$[\infty, 0; 1, z] = [\infty, 0; 1, F(z)] \iff z = F(z).$$

Συμπεραίνουμε επίσης ότι αν ένας μετασχηματισμός Möbius της επεκτεταμένης ευθείας σταθεροποιεί τρία σημεία, τότε είναι αναγκαστικά ο ταυτοτικός.

Σχόλιο 8.4.9. Παρατηρήστε ότι

$$g'(x) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}{x_3 - x_2} \cdot \frac{1}{(x - x_1)^2}, \quad h'(x) = \frac{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{y_3 - y_2} \cdot \frac{1}{(x - y_1)^2}.$$

Συνεπώς ο f είναι στοιχείο της $M(1)$ αν οι παραστάσεις $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ και $(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)$ είναι ομόσημες. Συνεπώς το αν ο f είναι στοιχείο της $M(1)$ ή όχι, καθορίζεται από τη διάταξη των σημείων επάνω στην επεκτεταμένη ευθεία.

Ο δεύτερος διπλός λόγος είναι ο μετρικός διπλός λόγος που ορίσαμε μέσω της χορδικής μετρικής. Αν $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$, τότε ο μετρικός διπλός λόγος της \mathbf{p} είναι ο

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = (x_1, x_2; x_3, x_4) = |[x_1, x_2; x_3, x_4]| = \frac{|(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)|}{|(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)|},$$

και πάλι με τις αναγκαίες τροποποιήσεις αν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ . Ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 8.4.10. Έστω $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $\sigma \in S_4$ μετάταξη των σημείων της \mathbf{p} . Τότε ο μετρικός διπλός λόγος $\mathbb{X}(\sigma(\mathbf{p})) = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}; x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]$ είναι συνάρτηση των μετρικών διπλών λόγων

$$\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) = (x_1, x_2; x_3, x_4) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) = (x_1, x_3; x_2, x_4).$$

Απόδειξη. Άσκηση 8.4.4.7. □

Πρόταση 8.4.11. Ο μετρικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $GM(1)$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.4.4.8. □

Πρόταση 8.4.12. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $GM(1)$ που απεικονίζει μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων σε μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων με τρόπον ώστε $x_i \leftrightarrow x'_i$, $i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathbf{p}) &= (x_1, x_2; x_3, x_4) = (x'_1, x'_2; x'_3, x'_4) = \mathbb{X}_1(\mathbf{p}'), \\ \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) &= (x_1, x_3; x_2, x_4) = (x'_1, x'_3; x'_2, x'_4) = \mathbb{X}_2(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Άσκηση 8.4.4.9. □

8.4.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε f της μορφής (8.8) είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{R}}$. (Υπόδειξη: Κατ' αρχάς η f είναι προφανώς ομοιομορφισμός στο $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$. Τώρα, αν d είναι η χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{R}}$,

$$d(x, y) = \frac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{1/2}(1 + |y|^2)^{1/2}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$d(x, \infty) = \frac{2}{(1 + |x|^2)^{1/2}}.$$

Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} d(f(x), f(\infty)) &\rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad d(x, \infty) \rightarrow 0, \\ d(f(x), f(-d/c)) &\rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad d(x, -d/c) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Δείξτε ότι το σύνολο G των μετασχηματισμών της μορφής (8.8) αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση.
3. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.2.
4. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.6.
5. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.7.
6. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.8.
7. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.10.
8. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.11.
9. Αποδείξτε την Πρόταση 8.4.12.
10. Να βρεθεί το στοιχείο της $M(1)$ που απεικονίζει τα $-1, 0, 1$ στα $2, 3, 4$, αντίστοιχα.
11. Βρείτε το $r \in \mathbb{R}$, $|r| > 1$, ώστε να υπάρχει μετασχηματισμός της $GM(1)$ που να απεικονίζει τα $\infty, 0, 1, r$ στα $-r, -1, 1, r$, αντίστοιχα. Κατόπιν, βρείτε τον μετασχηματισμό αυτόν. (Απάντηση: Είναι $r = -1/3$ και αν ο f είναι ο ζητούμενος μετασχηματισμός, τότε

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3x + 1}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{2}{(3x + 1)^2} < 0,$$

άρα ο f^{-1} και συνεπώς και ο f αντιστρέφει τον προσανατολισμό.)

8.5 Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{C}}$

Η μελέτη της Γεωμετρίας της Αντιστροφής του επεκτεταμένου επιπέδου $(\overline{\mathbb{R}^2}, \text{GM}(2))$, γίνεται καλύτερα όταν ταυτίσουμε το επεκτεταμένο επίπεδο με την επεκτεταμένη μιγαδική ευθεία $\overline{\mathbb{C}}$, ή σφαίρα του *Riemann*. Γράφουμε

$$S^2 = \{(\zeta, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |\zeta|^2 + t^2 = 1\}.$$

Εάν $z = x + iy \in \mathbb{C}$, τότε η στερεογραφική προβολή $\mathbf{S} : \mathbb{C} \rightarrow S^2$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{S}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right) & z \in \mathbb{C} \\ (0, 1) & z = \infty. \end{cases}$$

Η αντίστροφη \mathbf{S}^{-1} δίνεται τότε από τον τύπο

$$\mathbf{S}^{-1}(\zeta, t) = \begin{cases} \frac{|\zeta|^2}{1-t}, & (\zeta, t) \in S^2 \setminus \{(0, 1)\} \\ \infty & (\zeta, t) = (0, 1). \end{cases}$$

8.5.1 Η ομάδα $\text{GM}(2)$

Θεώρημα 8.5.1. Η ομάδα $\text{GM}(2)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς του $\overline{\mathbb{C}}$ της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{ή} \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad (8.10)$$

όπου $ad - bc \neq 0$.

Απόδειξη. Γράφουμε πρώτα τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς Möbius σε μιγαδική μορφή:

- Οι μεταφορές $T_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$ γράφονται ως

$$T_\alpha(z) = z + \alpha, \quad \alpha = a + ib.$$

- Για τις περιστροφές R_θ , $\theta \in \mathbb{R}$ με

$$R_\theta(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

έχουμε

$$R_\theta(z) = e^{-i\theta} z.$$

- Για τις ανακλάσεις r_θ , $\theta \in \mathbb{R}$ με

$$r_\theta(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta)$$

έχουμε

$$r_\theta(z) = e^{i\theta}\bar{z}.$$

Για τις συστολές/διαστολές D_δ , $\delta > 0$ με $D_\delta(x, y) = (\delta x, \delta y)$ είναι

$$D_\delta(z) = \delta z.$$

- Τέλος, για την αντιστροφή ι με $\iota(x, y) = (x, y)/(x^2 + y^2)$ είναι

$$\iota(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Όλοι λοιπόν οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί της $\text{GM}(2)$, επομένως και όλοι οι μετασχηματισμοί της $\text{GM}(2)$ γράφονται σε μία από τις μορφές της σχέσης (8.10). Και τούτι γιατί κάθε $g \in \text{GM}(2)$ είναι σύνθεση στοιχειωδών μετασχηματισμών και κάθε σύνθεση συναρτήσεων της μορφής (8.10) είναι και πάλι συνάρτηση της μορφής (8.10). Μένει να αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο της μορφής (8.10) είναι σύνθεση στοιχειωδών μετασχηματισμών Möbius. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν $j(z) = \bar{z}$ είναι η ανάκλαση στην πραγματική ευθεία, τότε

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = g(j(z)), \quad g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Από την άλλη, για g όπως παραπάνω, έχουμε

$$g(z) = \begin{cases} (a/d)z + b/d & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 8.5.2. Η ομάδα $M(2)$ των μετασχηματισμών Möbius που διατηρούν τον προσανατολισμό αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (8.11)$$

Κάθε μετασχηματισμός Möbius που δεν διατηρεί τον προσανατολισμό είναι σύνθεση ενός στοιχείου της $M(2)$ με την ανάκλαση στην πραγματική ευθεία $j(z) = \bar{z}$.

Απόδειξη. Στοιχεία της μορφής (8.11) είναι ολόμορφες συναρτήσεις του $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ με μιγαδική παράγωγο

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

η οποία είναι διάφορη του 0 στο $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. Συνεπώς είναι σύμμορφες και διατηρούν τον προσανατολισμό.¹ □

¹Υπενθυμίζουμε ότι μία ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ σε ένα ανοικτό U του \mathbb{C} ικανοποιεί

8.5.2 Η προβολική ομάδα $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$

Η ομάδα $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ είναι το σύνολο των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με μιγαδικούς συντελεστές. Ορίζουμε την εξής σχέση στην $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$: για κάθε $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$,

$$A \sim B \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}_* : A = \lambda B. \quad (8.12)$$

Η σχέση \sim είναι σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο των τροχιών

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) = \{[A] \mid A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})\},$$

αποτελεί ομάδα με πράξη

$$[A] \cdot [B] = [AB]. \quad (8.13)$$

Η επόμενη πρόταση είναι η ανάλογη της Πρότασης 8.4.2:

Πρόταση 8.5.3. Η απεικόνιση $\Phi^{\mathbb{C}} : \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GM}(2)$ που δίνεται από την

$$\Phi^{\mathbb{C}} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = f \mid f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (8.14)$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Άρα, η $\mathrm{GM}(2)$ ταυτίζεται με την $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Η ομάδα $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ είναι η ομάδα $P^{\mathbb{C}}(1)$ των μετασχηματισμών της Μιγαδικής Προβολικής Ευθείας $\mathbb{C}P^1$ (υπάρχει ταύτιση της $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ και της $\mathbb{C}P^1$). Η $\mathbb{C}P^1$ κατασκευάζεται με τρόπο παντελώς ανάλογο με αυτόν της κατασκευής της $\mathbb{R}P^1$ στην Ενότητα 7.2. Προκύπτει λοιπόν το εξής ανάλογο του Θεωρήματος 8.4.3:

Θεώρημα 8.5.4. Η Γεωμετρία της Αντιστροφής $(\overline{\mathbb{C}}, \mathrm{GM}(2) = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$ είναι η Γεωμετρία της Μιγαδικής Προβολικής Ευθείας $(\mathbb{C}P^1, P^{\mathbb{C}}(1))$.

Η εναλλακτική περιγραφή της $\mathrm{GM}(2)$ προκύπτει από την απεικόνιση

$$\Psi^{\mathbb{C}} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}), \quad A \mapsto [A].$$

Η $\Psi^{\mathbb{C}}$ είναι μονομορφισμός ομάδων και $\ker(\Psi^{\mathbb{C}}) = \{I, -I\}$. Πάλι από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Ομάδων έχουμε την:

τις συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad \text{και} \quad u_y = -v_x.$$

Επομένως, ο Ιακωβιανός πίνακας της f σε τυχαίο σημείο $z \in U$ είναι της μορφής

$$Df(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Αν $|a| + |b| \neq 0$, τότε

$$\det(Df(z)) = a^2 + b^2 > 0$$

και

$$(Df(z))^T Df(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)I_2,$$

όπου I_2 είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. Υπογραμμίζουμε επίσης ότι η μιγαδική παράγωγος $f'(z) = a - ib$ και έτσι

$$\det(Df(z)) = |f'(z)|^2.$$

Πρόταση 8.5.5.

$$\mathrm{GM}(2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \{I, -I\} := \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

Σχόλιο 8.5.6. Η ομάδα $\mathrm{M}(2)$ συμβολίζεται και με $\mathrm{PSL}^+(2, \mathbb{C})$.

8.5.3 Διπλοί Λόγοι

Στην Ενότητα αυτή παρουσιάζονται έννοιες και αποτελέσματα που στην πλειοψηφία τους αποτελούν μιγαδικές γενικεύσεις των αποτελεσμάτων της Ενότητας 8.4.3.

Όπως και στην περίπτωση της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας, έτσι και εδώ υπάρχουν δύο διπλοί λόγοι. Κατ' αρχάς, έχουμε τον *μιγαδικό διπλό λόγο* που μας έρχεται από τη γεωμετρία της μιγαδικής προβολικής ευθείας: αν $\mathfrak{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, τότε ο μιγαδικός διπλός της λόγος είναι ο

$$\mathbf{X}(\mathfrak{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)},$$

πάντοτε με τις αναγκαίες τροποποιήσεις εάν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ .

Πρόταση 8.5.7. Έστω $\mathfrak{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, και $\sigma \in S_4$ μετάταξη των σημείων της \mathfrak{p} . Τότε ο διπλός λόγος $\mathbf{X}(\sigma(\mathfrak{p})) = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}; z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}]$ είναι συνάρτηση του διπλού λόγου $\mathbf{X}(\mathfrak{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4]$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.5.4.2. □

Πρόταση 8.5.8. Ο μιγαδικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $\mathrm{M}(1)$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.5.4.3. □

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι ο μιγαδικός διπλός λόγος δεν παραμένει αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $\mathrm{GM}(2)$: για την ανάκλαση $j(z) = \bar{z}$ έχουμε

$$[j(z_1), j(z_2); j(z_3), j(z_4)] = \overline{[z_1, z_2; z_3, z_4]}.$$

Είναι φυσικό λοιπόν να ρωτήσουμε πότε ο μιγαδικός διπλός λόγος είναι πραγματικός (οπότε και παραμένει αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $\mathrm{GM}(2)$). Απαντούμε στο ερώτημα αυτό στην Πρόταση 8.5.10.

Πρόταση 8.5.9. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $\mathrm{M}(2)$ που απεικονίζει μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathfrak{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ σε μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathfrak{p}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ με τρόπον ώστε $z_i \leftrightarrow w_i$, $i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\mathbf{X}(\mathfrak{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4] = [w_1, w_2; w_3, w_4] = \mathbf{X}(\mathfrak{p}').$$

Απόδειξη. Άσκηση 8.5.4.4. □

Η $GM(2)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}^2}$. Θα αποδείξουμε εδώ μέσω μιγαδικών διπλών λόγων ότι η $M(2)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{C}}$. Ο τρόπος είναι παραπλήσιος με αυτόν που ακολουθήσαμε στην Ενότητα 8.4.3, αλλά για πληρότητα επαναλαμβάνουμε την απόδειξη. Έστω $(z_i), (w_i), i = 1, 2, 3$, τριάδες διαφορετικών μεταξύ τους σημείων και έστω $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Ο μετασχηματισμός g που στέλνει τα z_1, z_2, z_3, z στα $\infty, 0, 1, g(z)$, αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση

$$[\infty, 0; 1, g(z)] = [z_1, z_2; z_3, z] \iff g(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_4)(z_3 - z_2)}.$$

Ομοίως, ο μετασχηματισμός h που στέλνει τα w_1, w_2, w_3, z στα $\infty, 0, 1, h(z)$, αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση

$$h(z) = \frac{(z - w_2)(w_3 - w_1)}{(z - w_4)(w_3 - w_2)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $f = hg^{-1}$. Αποδεικνύεται με τρόπο ταυτόσημο με αυτόν της ενότητας 8.4.3 ότι είναι μοναδικός. Προκύπτει επίσης ότι κάθε στοιχείο της $M(2)$ που αφήνει αναλλοίωτα τρία διαφορετικά σημεία είναι αναγκαστικά ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.

Πρόταση 8.5.10. *Ο μιγαδικός διπλός λόγος μιας προσανατολισμένης τετράδας \mathfrak{p} διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν τα σημεία της \mathfrak{p} κείνται στον ίδιο γενικευμένο κύκλο.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ και έστω $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathfrak{p})$. Υπάρχει στοιχείο της $M(2)$ που απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3, z_4 στα $\infty, 0, 1, \mathbf{X}$ αντίστοιχα. Τότε,

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [\infty, 0; 1, \mathbf{X}] = \mathbf{X}.$$

Αν $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$, τότε επειδή τα $\infty, 0, 1, \mathbf{X}$ ανήκουν στην ευθεία $y = 0$ έχουμε ότι και τα z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν σε γενικευμένο κύκλο. Το αντίστροφο είναι τώρα προφανές. \square

Ο μετρικός διπλός λόγος ορίζεται τώρα ως εξής: αν $\mathfrak{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, τότε ο μετρικός διπλός της λόγος είναι ο

$$\mathbb{X}(\mathfrak{p}) = (z_1, z_2; z_3, z_4) = |[z_1, z_2; z_3, z_4]| = \frac{|(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)|}{|(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)|},$$

και ως συνήθως εννοείται με τις αναγκαίες τροποποιήσεις αν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ . Ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 8.5.11. *Έστω $\mathfrak{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ και $\sigma \in S_4$ οποιαδήποτε μετάταξη των σημείων της. Τότε, ο μετρικός διπλός λόγος $\mathbb{X}(\sigma(\mathfrak{p})) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}; z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)})$ είναι συνάρτηση των μετρικών διπλών λόγων*

$$\mathbb{X}_1(\mathfrak{p}) = (z_1, z_2; z_3, z_4) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathfrak{p}) = (z_1, z_3; z_2, z_4).$$

Απόδειξη. Άσκηση 8.5.4.5. □

Πρόταση 8.5.12. Ο μετρικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $\text{GM}(2)$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.5.4.6. □

Πρόταση 8.5.13. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $\text{GM}(2)$ που απεικονίζει μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ σε μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, με τρόπον ώστε $z_i \leftrightarrow w_i, i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) &= [z_1, z_2; z_3, z_4] = [w_1, w_2; w_3, w_4] = \mathbb{X}_1(\mathbf{p}'), \\ \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) &= [z_1, z_3; z_2, z_4] = [w_1, w_3; w_2, w_4] = \mathbb{X}_2(\mathbf{p}').\end{aligned}$$

Απόδειξη. Άσκηση 8.5.4.7. □

8.5.4 Ασκήσεις

1. (Απολλώνιοι κύκλοι.) Για $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, k > 0$, θεωρήστε την εξίσωση

$$\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = k. \quad (8.15)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση των Απολλώνιων κύκλων στο $\overline{\mathbb{C}}$.

(α') Αποδείξτε ότι η εξίσωση των Απολλώνιων κύκλων παριστάνει ευθεία αν $k = 1$ και κύκλο αν $k \neq 1$. Άρα, η Εξίσωση (8.15) είναι εξίσωση γενικευμένου κύκλου στο $\overline{\mathbb{C}}$. (Απάντηση: Αν $k = 1$, έχουμε την ευθεία

$$2\Re(\bar{\alpha}z) = |\alpha|^2 - |\beta|^2,$$

Αν $k \neq 1$ έχουμε τον κύκλο

$$\left| z - \frac{\alpha - k^2\beta}{1 - k^2} \right| = \frac{k|\alpha - \beta|}{|1 - k^2|}.)$$

(β') Αποδείξτε ότι η $\text{GM}(2)$ απεικονίζει Απολλώνιους κύκλους σε Απολλώνιους κύκλους. (Υπόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει απευθείας από το Θεώρημα 8.3.2, αλλά μπορείτε να εξετάσετε και χωριστά τις περιπτώσεις των στοιχειωδών μετασχηματισμών).

(γ') Αποδείξτε αντιστρόφως ότι κάθε γενικευμένος κύκλος είναι Απολλώνιος, δηλαδή, γράφεται στη μορφή (8.15). Συμπαράνετε κατόπιν απευθείας πως αν $g \in \text{M}(2)$, τότε ο g απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους. (Υπόδειξη: Έστω C γενικευμένος κύκλος. Αν C είναι η ευθεία $\Re(e^{-i\theta}z) = 0$, τότε αυτή γράφεται

$$|z - e^{-i\theta/2}| = |z + e^{-i\theta/2}|.$$

Αν C είναι η ευθεία $\Re(e^{-i\theta}z) = b$, $b \in \mathbb{R}_*$, τότε είναι η μεταφορά της $\Re(e^{-i\theta}z) = 0$ κατά a (ποιού;) και άρα Απολλώνιος κύκλος. Αν C είναι ο κύκλος $|z| = r$, θεωρήστε τον μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{z-r}{z+r},$$

και δείξτε ότι ο $f(C)$ είναι Απολλώνιος κύκλος, οπότε και ο $|z| = r$ είναι Απολλώνιος κύκλος. Αν C είναι ο κύκλος $|z - z_0| = r$, ακολουθήστε διαδικασία ανάλογη με της ευθείας.

2. Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.7.
3. Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.8.
4. Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.9.
5. Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.11.
6. Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.12.
7. Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.13.
8. Βρείτε το στοιχείο της $M(2)$ που απεικονίζει τα $-i, 0, i$ στα $-1, 0, 1$, αντίστοιχα.
9. Έστω προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων και έστω

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1(\mathbf{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4], \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2(\mathbf{p}) = [z_1, z_3; z_2, z_4].$$

- a) Δείξτε ότι $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = 1$.
- b) Αν $\mathbb{X}_1 = |\mathbf{X}_1|$, $\mathbb{X}_2 = |\mathbf{X}_2|$ είναι οι αντίστοιχοι μετρικοί διπλοί λόγοι, τότε

$$\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \geq 1 \quad \text{και} \quad |\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2| \leq 1.$$

10. Έστω D ο μοναδιαίος δίσκος $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ και

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

- (α') Δείξτε ότι ο f απεικονίζει τον D στο χωρίο $\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. (Υπόδειξη: Γράψτε

$$w = \frac{z-i}{z+i} \implies z = -i \frac{w+1}{w-1}.)$$

- (β') Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της $M(2)$ της μορφής

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

απεικονίζει το \mathcal{H}^2 στον εαυτό του. Δείξτε και αντιστρόφως ότι αν κάποιο στοιχείο $f \in M(2)$ απεικονίζει το \mathcal{H}^2 στον εαυτό του, τότε είναι της παραπάνω μορφής. (Υπόδειξη για το αντίστροφο: Ο f θα διατηρεί την ευθεία $y = 0$, άρα θα είναι στοιχείο της $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.)

Κεφάλαιο 9

Υπερβολική Γεωμετρία

Η Υπερβολική Γεωμετρία (κατά Klein) στις δύο διαστάσεις που οφείλεται στους Gauss, Bolyai, Lobatchevsky, ορίζεται εδώ ως το ζεύγος $(\mathcal{H}^2, \text{GM}(\mathcal{H}^2))$, όπου

$$\mathcal{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

και $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$ είναι η υποομάδα της $\text{GM}(2)$ που αφήνει αναλλοίωτο το \mathcal{H}^2 . Η περιγραφή της Υπερβολικής Γεωμετρίας κατά τον τρόπον αυτόν αντιστοιχεί στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου το οποίο οφείλεται στον Poincaré.



H. Poincaré (1854-1912).

Υπάρχουν και άλλα μοντέλα, τα οποία θα εξετάσουμε στο τέλος του κεφαλαίου. Η Υπερβολική Γεωμετρία είναι μετρική γεωμετρία. Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι ακριβώς αυτή που παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση της $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$.



Έργο του Escher εμπνευσμένο από την Υπερβολική Γεωμετρία.

Σε σύγκριση με την Αξιοματική Θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, τονίζουμε ότι η Υπερβολική Γεωμετρία αλλάζει ως προς το Πέμπτο Ευκλείδειο Αίτημα: από σημείο εκτός δεδομένης ευθείας περνούν άπειρες παράλληλες με την ευθεία αυτή. Μένει βεβαίως να διευκρινιστεί τι ακριβώς σημαίνει ευθεία στην Υπερβολική Γεωμετρία. Ευθεία λοιπόν είναι μία *γεωδαισιακή καμπύλη*: ο συντομότερος δρόμος που ενώνει δύο σημεία της ευθείας ανήκει εξ ολοκλήρου στην ευθεία. Μπορεί όμως μία ευθεία να θεωρηθεί ισοδύναμα ως το σύνολο των σταθερών σημείων μίας σντιστροφής της $GM(\mathcal{H}^2)$. Θα εξετάσουμε όλα αυτά τα ζητήματα, καθώς και άλλα, σε ό,τι ακολουθεί.

9.1 Η ομάδα των υπερβολικών μετασχηματισμών

9.1.1 Επέκταση Poincaré της $GM(n)$

Η επέκταση Poincaré ενός μετασχηματισμού $f \in GM(n)$ σε ένα μετασχηματισμό $\tilde{f} \in GM(n+1)$ βασίζεται στην εμφύτευση του \mathbb{R}^n εντός του \mathbb{R}^{n+1} ως το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$, δηλαδή, μέσω της απεικόνισης

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

και προκύπτει από την επέκταση των στοιχειωδών μετασχηματισμών των οποίων αποτελεί τη σύνθεση, με τον εξής τρόπο:

- Η αντιστροφή σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ του \mathbb{R}^n επεκτείνεται στην αντιστροφή στη σφαίρα $S((\mathbf{a}, 0), r)$ του \mathbb{R}^{n+1} .
- Η αντιστροφή σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του \mathbb{R}^n επεκτείνεται στην αντιστροφή στο υπερεπίπεδο $\overline{W((\mathbf{A}, 0), b)}$ του \mathbb{R}^{n+1} .

Κατά τον τρόπον αυτόν, έχουμε πάντοτε $\tilde{f}(\mathbf{x}, 0) = (f(\mathbf{x}), 0)$, δηλαδή η \tilde{f} διατηρεί το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Επίσης, μέσω των τύπων των αντιστροφών σε σφαίρα και υπερεπίπεδο, διαπιστώνουμε ότι η \tilde{f} διατηρεί τον άνω ημιχώρο

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}.$$

Τίθεται το ερώτημα αν η επέκταση Poincaré \tilde{f} ενός μετασχηματισμού $f \in \text{GM}(n)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπήρχε $g \in \text{GM}(n+1)$ τέτοιος ώστε

$$g(\mathbf{x}, 0) = (f(\mathbf{x}), 0).$$

Τότε, η $h = \tilde{f} \circ g^{-1}$ διατηρεί κατά σημείο το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Αφού η h διατηρεί τα $(\mathbf{0}_n, 0)$, $(\mathbf{e}_n, 0)$, ∞ , έχουμε

$$h(\mathbf{x}_n, x_{n+1}) = (\mathbf{x}_n, x_n + 1)A, \quad A \in \text{O}(n+1).$$

Θέτοντας στη σχέση

$$(\mathbf{x}_n, 0)A = (\mathbf{x}_n, 0)$$

διαδοχικά $\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, προκύπτει λόγω της ορθογωνιότητας του A ότι είναι ένας διαγώνιος πίνακας με $a_{ii} = 1$, για $i = 1, \dots, n$ και $a_{n+1, n+1} = \pm 1$. Συνεπώς, ο h είναι είτε ο ταυτοτικός, ή η ανάκλαση στο υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Το τελευταίο όμως είναι αδύνατο εφ' όσον η h διατηρεί τον \mathcal{H}^{n+1} . Καταλήγουμε λοιπόν ότι η επέκταση Poincaré \tilde{f} της f είναι μοναδική.

Ορισμός 9.1.1. Το σύνολο $\widetilde{\text{GM}}(n)$ των επεκτάσεων Poincaré των στοιχείων της $\text{GM}(n)$ καλείται *επέκταση Poincaré της $\text{GM}(n+1)$* .

Πρόταση 9.1.2. Η επέκταση Poincaré $\widetilde{\text{GM}}(n)$ της $\text{GM}(n)$ είναι υποομάδα της $\text{GM}(n+1)$ ισόμορφη με την $\text{GM}(n)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την κλειστότητα ως προς την πράξη, οι υπόλοιπες λεπτομέρειες αφήνονται στην Άσκηση 9.1.5.1. Έστω προς τούτο $f, g \in \text{GM}(n)$ και \tilde{f}, \tilde{g} οι επεκτάσεις Poincaré των f, g , αντίστοιχα. Είναι

$$(\widetilde{f \circ g})(\mathbf{x}, 0) = ((f \circ g)(\mathbf{x}), 0) = (f(g(\mathbf{x})), 0)$$

και

$$(\tilde{f} \circ \tilde{g})(\mathbf{x}, 0) = \tilde{f}(\tilde{g}(\mathbf{x}, 0)) = \tilde{f}(g(\mathbf{x}), 0) = (f(g(\mathbf{x})), 0).$$

□

9.1.2 Επέκταση Poincaré της $\text{GM}(1)$

Θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 9.1.3. Έστω $f \in \text{GM}(1)$,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Η επέκταση Poincaré \tilde{f} του f δίνεται από την

$$\tilde{f}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{αν } ad - bc > 0, \quad (9.1)$$

ενώ δίνεται από την

$$\tilde{f}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \text{αν } ad - bc < 0. \quad (9.2)$$

Απόδειξη. Εντοπίζουμε πρώτα τις επεκτάσεις Poincaré των στοιχειωδών μετασχηματισμών της GM(1). Έχουμε ότι:

- Η επέκταση της μεταφοράς $x \mapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}$, είναι η $(x, y) \mapsto (x + a, y)$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto z + a$.
- Η επέκταση της αντιστροφής $x \mapsto -x$ ανάκλασης στο σημείο 0) είναι η ανάκλαση $(x, y) \mapsto (-x, y)$, δηλαδή, η ανάκλαση στην ευθεία $x = 0$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto -\bar{z}$.
- Η επέκταση της συστολής/διαστολής $x \mapsto \delta x$ είναι η συστολή/διαστολή $(x, y) \mapsto (\delta x, \delta y)$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto \delta z$.
- Η επέκταση της αντιστροφής $x \mapsto 1/x$ είναι η αντιστροφή $(x, y) \mapsto (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto 1/\bar{z}$.

Όλες οι παραπάνω επεκτάσεις ανήκουν σε μία από τις μορφές (9.1), (9.2). Τώρα, ο f γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} (a/d)x + (b/d) & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

Έστω πρώτα ότι $ad - bc > 0$. Εάν $c = 0$, τότε επειδή $ad > 0$, ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της ομοιοθεσίας κατά a/d και της μεταφοράς κατά b/d . Εάν $c \neq 0$, τότε ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της μεταφοράς κατά d/c , της αντιστροφής στο 0, της ανάκλασης στο 0, της ομοιοθεσίας κατά $(ad - bc)/c^2$ και της μεταφοράς κατά a/c . Επειδή η σύνθεση επεκτάσεων Poincaré μετασχηματισμών είναι η επέκταση Poincaré της σύνθεσής τους (Πρόταση 9.1.2), παίρνουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} (a/d)z + (b/d) & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι $ad - bc < 0$. Εάν $c = 0$, τότε επειδή $ad < 0$, ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της ομοιοθεσίας κατά $-a/d$, της ανάκλασης στο 0 και της μεταφοράς κατά b/d . Εάν $c \neq 0$, τότε ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της μεταφοράς κατά d/c , της αντιστροφής στο 0, της ομοιοθεσίας κατά $(bc - ad)/c^2$ και της μεταφοράς κατά a/c . Άρα, με το ίδιο επιχείρημα όπως προηγουμένως παίρνουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} (a/d)\bar{z} + (b/d) & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{\bar{z}+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

□

Παράδειγμα 9.1.4. Έστω $f \in \text{GM}(1)$,

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}.$$

Επειδή $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = -5 < 0$, η επέκταση Poincaré \tilde{f} του f δίνεται από την

$$\tilde{f}(z) = \frac{2\bar{z} - 1}{\bar{z} - 3}.$$

Από την άλλη, για τον $g \in \text{GM}(1)$,

$$g(x) = \frac{x - 2}{x - 1},$$

επειδή $1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 1 > 0$, η επέκταση Poincaré \tilde{g} του g δίνεται από την

$$\tilde{g}(z) = \frac{z - 2}{z - 1}.$$

Έστω τώρα το άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = y > 0\}$. Από τον ορισμό της επέκτασης Poincaré έχουμε αμέσως το παρακάτω:

Πόρισμα 9.1.5. Κάθε στοιχείο της $\widetilde{\text{GM}}(1)$ απεικονίζει την ευθεία $y = 0$ στον εαυτό της και το άνω ημιεπίπεδο \mathcal{H}^2 στον εαυτό του.

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα είδος αντιστρόφου του Θεωρήματος 9.1.3.

Θεώρημα 9.1.6. Κάθε στοιχείο της $\text{GM}(2)$ που διατηρεί το \mathcal{H}^2 είναι στοιχείο της $\widetilde{\text{GM}}(1)$.

Απόδειξη. Έστω πρώτα $f \in \text{M}(2)$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

με $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Επειδή ο f διατηρεί την $\overline{\mathbb{R}}$ έχουμε:

- $f(0) = b/d \in \overline{\mathbb{R}}$,
- $f(\infty) = a/c \in \overline{\mathbb{R}}$,
- $f(1) = (a + b)/(c + d) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Εάν $c = 0$ ($d \neq 0$), τότε $f(\infty) = \infty$, $f(0) = b/d \in \mathbb{R}$ και $f(1) = (a/d) + (b/d) \in \mathbb{R}$. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $a/d, b/d \in \mathbb{R}$. Άρα, θέτοντας $a/d = A$ και $b/d = B$ όπου $A, B \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(z) = Az + B$, που είναι η επέκταση Poincaré του $f(x) = Ax + B$. Παρατηρήστε ότι η $A = 0$ οδηγεί στο άτοπο $a = 0$. Έχουμε επιπλέον $\Im(f(i)) = A > 0$. Εάν $d = 0$, τότε $f(0) = \infty$, $f(\infty) = a/c \in \mathbb{R}$ και $f(1) = (a/c) + (b/c) \in \mathbb{R}$. Με όμοιο τρόπο όπως παραπάνω, θέτοντας $A = a/c$ και $B = b/c$, $A, B \in \mathbb{R}$, παίρνουμε ότι ο f είναι η επέκταση Poincaré της $f(x) = A + B/x$ που είναι στοιχείο της $\text{GM}(1)$ εφ' όσον $B \neq 0$. Επίσης, $\Im(f(i)) = -B > 0$. Εάν τέλος $cd \neq 0$, τότε $a/c = A \in \mathbb{R}$, $b/d = B \in \mathbb{R}$ και επίσης

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{cA + dB}{c + d} = C \in \mathbb{R} \implies c(A - C) + d(B - C) = 0.$$

Επειδή η σχέση $A + C = B$ είναι αδύνατη, εφ' όσον $ad - bc \neq 0$, προκύπτει ότι $c = Dd$ για κάποιο $D \in \mathbb{R}_*$. Συνεπώς,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{cAz + dB}{Ddz + d} = \frac{dDAz + dB}{Ddz + d} = \frac{ADz + B}{Dz + 1},$$

όπου και πάλι $AD - BD \neq 0$. Επειδή επιπλέον $\Im(f(i)) > 0$ έχουμε $AD - BD > 0$. Ομοίως αποδεικνύεται και η περίπτωση όπου $f = g \circ j$, $g \in \mathbf{M}(2)$ και $j(z) = \bar{z}$. \square

9.1.3 Η $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ ως η $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$

Με $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$ συμβολίζουμε την $\widetilde{\mathbf{GM}}(1)$ θεωρώντας τα στοιχεία της τελευταίας να δρουν στο \mathcal{H}^2 . Αυτή είναι ομάδα ισόμορφη με την $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ την οποία καλούμε ομάδα των μετασχηματισμών Möbius του άνω ημιεπιπέδου \mathcal{H}^2 :

$$\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\},$$

όπου I είναι ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας. Η υποομάδα $\mathbf{M}(\mathcal{H}^2)$ της $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$ που αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0,$$

είναι ισόμορφη με την $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$. Είναι λοιπόν

$$\mathbf{M}(\mathcal{H}^2) = \mathbf{PSL}^+(2, \mathbb{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Παρατηρούμε τέλος ότι τα στοιχεία της $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$ της μορφής (9.1) βρίσκονται σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία της μορφής (9.2):

$$\mathbf{M}(\mathcal{H}^2) \ni f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mapsto g(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}.$$

Κατά συνέπεια, στη μελέτη των Möbius μετασχηματισμών του \mathcal{H}^2 αρκεί να ασχολούμαστε με στοιχεία της $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$. Αν $f \in \mathbf{M}(\mathcal{H}^2)$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

διαιρώντας αν είναι απαραίτητο με την ρίζα του $ad - bc$. Ο πίνακας

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ονομάζεται *προσαρτημένος πίνακας* της $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ στον μετασχηματισμό f .

Παράδειγμα 9.1.7. Έστω οι μετασχηματισμοί της ευθείας

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{x - 2}{x + 1},$$

που αντιστοιχούν στα στοιχεία

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

της $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Είναι $\det(A) = -1 < 0$, άρα ο A είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $f \in \mathrm{GM}(\mathcal{H}^2)$ με

$$f(z) = \frac{2\bar{z} - 1}{\bar{z} - 1} = \frac{(-2)(-\bar{z}) - 1}{(-1)(-\bar{z}) - 1}.$$

Αυτός αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό

$$z \mapsto \frac{-2z - 1}{-z - 1} = \frac{2z + 1}{z + 1}$$

της $\mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$. Ο πίνακας του στοιχείου αυτού έχει ορίζουσα 1, άρα ανήκει στην $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Από την άλλη, $\det(B) = 3 > 0$, άρα ο g επεκτείνεται στον μετασχηματισμό $g \in \mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$ με

$$g(z) = \frac{z - 2}{z + 1}.$$

Ο προσαρτημένος του πίνακας είναι ο

$$(1/\sqrt{3})B = (1/\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

9.1.4 Κατάταξη των στοιχείων της $\mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$

Θα κατατάξουμε αρχικά τα στοιχεία της $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Το ίχνος $\mathrm{tr}(A) = a + d$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα $D = \mathrm{tr}^2(A) - 4$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $D > 0$: τότε, έχουμε δύο πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{και} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1.$$

Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$, έχουμε από τον τύπο του Vieta για το άθροισμα των ριζών τριωνύμου ότι $\lambda + 1/\lambda = \mathrm{tr}(A)$.

- $D = 0$: τότε, έχουμε μία πραγματική διπλή ιδιοτιμή

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} \implies \lambda^2 = 1.$$

- $D < 0$: τότε, έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm i\sqrt{-D}}{2}, \text{ και } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$, έχουμε $\lambda_2 = \bar{\lambda} = 1/\lambda$, οπότε $\lambda = e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Πρόταση 9.1.8. Κάθε $A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ είναι συζυγής στην $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ με έναν από τους παρακάτω πίνακες:

a)

$$\pm \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

b)

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \neq 1.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την περίπτωση των δύο διαφορετικών πραγματικών ιδιοτιμών, οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται στην Άσκηση 9.1.5.5, δείτε και τα παραδείγματα παρακάτω. Όταν λοιπόν $D > 0$, έχουμε $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1/\lambda$ και $\lambda + 1/\lambda = \operatorname{tr}(A)$, όπου $|\operatorname{tr}(A)| > 2$ και συνεπώς $\lambda^2 \neq 1$. Ο A είναι διαγωνίσιμος και έτσι υπάρχει $P \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ ώστε $A = PMP^{-1}$ με τον M να είναι ο πίνακας της μορφής c). \square

Έστω $f \in \operatorname{M}(\mathcal{H}^2)$ και υποθέτουμε ότι

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

είναι ο προσαρτημένος πίνακας της $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ στον f .

- Όταν ο A_f είναι συζυγής στην $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ με έναν πίνακα της μορφής a) τότε ο f καλείται *ελλειπτικός* και είναι συζυγής στην $\operatorname{M}(\mathcal{H}^2)$ με μετασχηματισμό της μορφής

$$z \mapsto \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta}.$$

- Όταν ο A_f είναι συζυγής στην $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ με έναν πίνακα της μορφής b) τότε ο f καλείται *παραβολικός* και είναι συζυγής στην $\operatorname{M}(\mathcal{H}^2)$ με τον μετασχηματισμό

$$z \mapsto z + 1.$$

- Όταν ο A_f είναι συζυγής στην $SL(2, \mathbb{R})$ με έναν πίνακα της μορφής c) τότε ο f καλείται *υπερβολικός* και είναι συζυγής στην $M(\mathcal{H}^2)$ με τον μετασχηματισμό

$$z \mapsto \lambda^2 z.$$

Παράδειγμα 9.1.9. Έστω

$$f(z) = \frac{z-2}{z-1}$$

και

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\pm i$. Ο ιδιοχώρος $V(i)$ προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(A - iI) \cdot (\xi_1 \ \xi_2)^T = \mathbf{0}$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} (1-i)\xi_1 - 2\xi_2 &= 0, \\ \xi_1 - (1+i)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$V(i) = \left\{ \begin{pmatrix} (1+i)\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad V(-i) = \left\{ \begin{pmatrix} (1-i)\nu \\ \nu \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Παίρνοντας μ, ν με $2i\mu\nu = 1$ και τους πίνακες

$$P = \begin{pmatrix} (1+i)\mu & (1-i)\nu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

έχουμε ότι $A = PMP^{-1}$ και άρα ο A είναι συζυγής στην $SL(2, \mathbb{C})$ με τον M . Παρατηρήστε ότι ο M είναι ο προσαρτημένος πίνακας στην $SL(2, \mathbb{C})$ του μετασχηματισμού $z \mapsto -z$ που παριστάνει περιστροφή κατά π στο $\bar{\mathbb{C}}$. Για να δούμε πως έχει η κατάσταση στην $SL(2, \mathbb{R})$, εργαζόμαστε ως εξής: παίρνουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ιδιοδιανύσματος $(1+i)^T$ και θεωρούμε τον πίνακα της $SL(2, \mathbb{R})$ που έχει στήλες τα διανύσματα αυτά:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό είναι πάντοτε εφικτό και μπορούμε να το καταφέρουμε επιλέγοντας κατάλληλο $\mu \in \mathbb{C}$. Γράφουμε τώρα $i = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) \cdot i = 0 + 1 \cdot i$ και θεωρούμε τον πίνακα

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι $A = QNQ^{-1}$, ο f είναι ελλειπτικός μετασχηματισμός και συζυγής με τον $z \mapsto -1/z$.

Παράδειγμα 9.1.10. Έστω

$$f(z) = \frac{2z - 5}{z - 2}$$

και

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

έχει μία διπλή ρίζα $\lambda = 1$. Αναζητούμε πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

ώστε να ισχύει

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1 + \alpha\gamma \end{pmatrix}.$$

Έχουμε λύσεις μόνο για την περίπτωση του αρνητικού προσήμου: $\alpha = \pm\sqrt{5}$, $\gamma = \pm 1$. Τα β, δ καθορίζονται από την $\beta\delta = \alpha\gamma - 1$. Ο f είναι παραβολικός, συζυγής με τον $z \mapsto z + 1$.

Παράδειγμα 9.1.11. Έστω

$$f(z) = \frac{2z + 1}{3z + 2}$$

και

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

έχει ρίζες $\lambda, 1/\lambda$, όπου $\lambda = 2 + \sqrt{3}$. Ο ιδιοχώρος $V(\lambda)$ προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(A - \lambda I) \cdot (\xi_1 \ \xi_2)^T = \mathbf{0}$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 &= 0, \\ 3\xi_1 - \sqrt{3}\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$V(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \sqrt{3}\mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρομοίως βρίσκουμε

$$V(1/\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ -\sqrt{3}\nu \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παίρνοντας μ, ν που ικανοποιούν την $-2\sqrt{3}\mu\nu = 1$, έχουμε ότι για

$$P = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \sqrt{3}\mu & -\sqrt{3}\nu \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix},$$

είναι $A = PMP^{-1}$. Ο f είναι συζυγής στην $SL(2, \mathbb{R})$ με τον $z \mapsto \lambda^2 z = (5 + 4\sqrt{3})z$ και είναι υπερβολικός.

Ένα σημείο $z \in \overline{\mathcal{H}^2} = \mathcal{H}^2 \cup \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται *σταθερό σημείο του f* αν $f(z_0) = z_0$. Το ερώτημα του πλήθους των σταθερών σημείων του f απαντάται διαμέσου της Πρότασης 9.1.8. Η σχέση $f(z) = z$ οδηγεί:

- στην εξίσωση

$$(a - d)z + b = 0$$

αν $c = 0$ και

- στην τετραγωνική εξίσωση

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

αν $c \neq 0$.

Όταν $c = 0$, έχουμε πάντοτε ότι $f(\infty) = \infty$. Επειδή $ad = 1$, $D \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει όταν ο f είναι παραβολικός και άρα δεν σταθεροποιεί άλλο σημείο. Στην περίπτωση της ανισότητας, σταθεροποιεί επιπλέον και το $z = b/(d - a)$ και είναι υπερβολικός.

Όταν $c \neq 0$, η διακρίνουσα της τετραγωνικής εξίσωσης είναι ίση με

$$(d - a)^2 + 4bc = \text{tr}^2(A_f) - 4 = D.$$

Άρα, καταλήγουμε στην παρακάτω:

Πρόταση 9.1.12. *Ο $f \in M(\mathcal{H}^2)$ έχει:*

- ένα σταθερό σημείο στο $\overline{\mathcal{H}^2}$ αν είναι παραβολικός,
- ένα σταθερό σημείο στο \mathcal{H}^2 αν είναι ελλειπτικός,
- δύο σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν είναι υπερβολικός.

Παράδειγμα 9.1.13. Έστω

$$f(z) = \frac{2z}{z + 2}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του f είναι ο

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\text{tr}(A_f) = 2$ και συνεπώς ο f είναι παραβολικός. Το σταθερό του σημείο είναι το $z = 0$.

Παράδειγμα 9.1.14. Έστω

$$f(z) = \frac{-z - 1}{2z + 1}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του f είναι ο

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\text{tr}(A_f) = 0$ και συνεπώς ο f είναι ελλειπτικός. Το σταθερό του σημείο στο \mathcal{H}^2 προκύπτει από την εξίσωση

$$f(z) = z \iff 2z^2 + 2z + 1 = 0 \implies z = \frac{-1 + i}{2}.$$

Παράδειγμα 9.1.15. Έστω

$$f(z) = \frac{z + 2}{z + 3}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του f είναι ο

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\text{tr}(A_f) = 3$ και συνεπώς ο f είναι υπερβολικός. Τα σταθερά του σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$ προκύπτουν από την εξίσωση

$$f(z) = z \iff z^2 + 2z - 2 = 0 \implies z = -1 \pm \sqrt{3}.$$

9.1.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Πρόταση 9.1.2.
2. Βρείτε τις επεκτάσεις Poincaré των παρακάτω στοιχείων της $\text{GM}(1)$:

$$x \mapsto \frac{2x - 3}{4x + 5}, \quad x \mapsto \frac{-x + 2}{x + 4}.$$

Διευκρινήστε ποιές απ' αυτές διατηρούν τον προσανατολισμό.

3. Έστω ο σταθεροποιητής $\text{Stab}(\infty) = \{f \in \text{GM}(1) \mid f(\infty) = \infty\}$.

(α') Δείξτε ότι ο $\text{Stab}(\infty)$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$x \mapsto ax + b, \quad a \neq 0.$$

Αυτή είναι ακριβώς η Αφφινική ομάδα $A(1)$ που δρά στο \mathbb{R} .

- (β') Βρείτε την επέκταση Poincaré του $\text{Stab}(\infty)$ και δείξτε ότι η υποομάδα της που δρα στο \mathcal{H}^2 και που αποτελείται από στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό, είναι ακριβώς το σύνολο των στοιχείων

$$z \mapsto az + b, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα ισόμορφη με την $A^+(1)$, δηλαδή την υποομάδα της $A(1)$ που περιέχει όλα τα στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό.

- (γ') Αποδείξτε ότι υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση

$$F : A^+(1) \rightarrow \mathcal{H}^2.$$

Μέσω της απεικόνισης αυτής, εφοδιάστε το \mathcal{H}^2 με δομή ομάδας. (Υπόδειξη: Η F ορίζεται από την

$$A^+(1) \ni (x \mapsto ax + b) \mapsto b + ia \in \mathcal{H}^2.$$

Αν τώρα $f(x) = ax + b$ και $f'(x) = a'x + b'$ είναι στοιχεία της $A^+(1)$, τότε επειδή

$$(f \circ f')(x) = aa'x + ab' + b,$$

ορίζουμε πράξη ομάδας \star στο \mathcal{H}^2 την

$$\begin{aligned} z \star z' &= (u + iv) \star (u' + iv') \\ &= F(vx + u) \star F(v'x + u') := F(vv'x + vu' + u) \\ &= vu' + u + ivv'. \end{aligned}$$

Μπορείτε επίσης να παρατηρήσετε ότι η $A^+(1)$ είναι ισόμορφη με την υποομάδα της $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ που περιέχει στοιχεία της μορφής

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^{1/2} & b/a^{1/2} \\ 0 & 1/a^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ 0 & 1/a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Έστω στοιχείο A της $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ τάξης 2. Δείξτε ότι τότε $A = \pm I$. Αν B είναι ο προσαρτημένος πίνακας της $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ κάποιου $f \in \text{GM}(\mathcal{H}^2)$ τάξης 2, τότε η τάξη του B είναι 4. (Υπόδειξη: Θεωρήστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι:

$$A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + I = 0.$$

Επειδή $A^2 = I$, παίρνουμε

$$\text{tr}(A) \cdot A = 2I \implies A = \frac{2}{\text{tr}(A)} I.$$

Επειδή $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, παίρνουμε $\text{tr}^2(A) = 4$.)

5. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 9.1.8.
6. Βρείτε τον προσαρτημένο πίνακα, το είδος και τα σταθερά σημεία των παρακάτω υπερβολικών μετασχηματισμών:

$$f(z) = \frac{-z}{z-4}, \quad g(z) = \frac{6z-5}{2z+1}, \quad h(z) = \frac{-z-5}{z+4}.$$

9.2 Υπερβολική Γεωμετρία

9.2.1 Υπερβολικές ευθείες

Στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία, οι ευθείες είναι τα σύνολα σταθερών σημείων ανακλάσεων (ως προς τις ευθείες αυτές). Κάθε ευθεία μπορεί με άλλα λόγια να οριστεί σαν το σύνολο λύσεων μια εξίσωσης της μορφής

$$R(z) = z - 2(b - \Re(e^{-i\theta}z))e^{i\theta} = z,$$

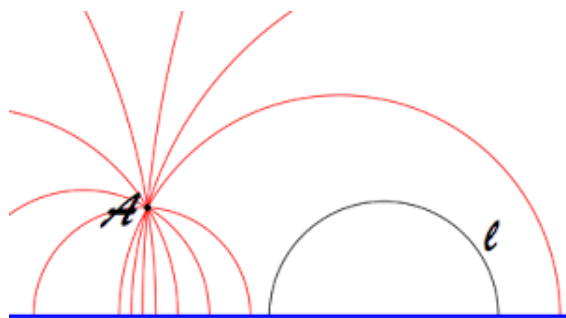
που δεν είναι τίποτε άλλο βέβαια παρά η ευθεία $\Re(e^{-i\theta}z) = b$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την ίδια συλλογιστική και στην περίπτωση του υπερβολικού επιπέδου. Έχουμε δει ότι οι επεκτάσεις Poincaré των αντιστροφών σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ και σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του \mathbb{R}^n είναι αντίστοιχα οι αντιστροφές σε σφαίρα $S((\mathbf{a}, 0), r)$ και σε υπερεπίπεδο $\overline{W((\mathbf{A}, 0), b)}$ του \mathbb{R}^{n+1} , αντίστοιχα. Όταν $n = 1$, μία σφαίρα κέντρου a και ακτίνας $r > 0$ αποτελείται απλώς από τα σημεία $a - r, a + r$. Η αντίστοιχη σφαίρα στο επίπεδο είναι ο κύκλος $S(a, 0), r$ και τα σημεία του που βρίσκονται στο \mathcal{H}^2 είναι το ανοικτό του άνω ημικύκλιο.

Από την άλλη, ένα υπερεπίπεδο στο \mathbb{R} είναι απώς ένα σημείο x_0 του \mathbb{R} και στην επέκταση Poincaré έχουμε την ευθεία $x = x_0$. τα σημεία της (x_0, y) που βρίσκονται στο \mathcal{H}^2 είναι βεβαίως αυτά με $y > 0$.

Έχουμε αμέσως την εξής:

Πρόταση 9.2.1. Έστω αντιστροφή της $GM(\mathcal{H}^2)$. Τότε το σύνολο των σταθερών της σημείων στο \mathcal{H}^2 είναι είτε ημικύκλιο με κέντρο πάνω στο σύνορο \mathbb{R} του \mathcal{H}^2 , είτε ανοικτή ημιευθεία της μορφής $x = x_0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 9.2.2. Ονομάζουμε υπερβολική ευθεία κάθε σύνολο της Πρότασης 9.2.1.



Υπερβολικές ευθείες.

Αν η υπερβολική ευθεία L έχει άκρα στο άπειρο τα z, z' , θα γράφουμε $L = (z, z')$. Η σειρά με την οποία γράφουμε τα άκρα δεν έχει ιδιαίτερη σημασία παρά μόνο εάν θέλουμε να προσδώσουμε έναν προσανατολισμό στην L . Σημειώνουμε και πάλι ότι τα z, z' είναι και τα δύο πραγματικά με $|z - z'| = 2r$, όπου r η ακτίνα του ημικυκλίου αποτελεί την ευθεία, ή, το ένα από τα δύο θα είναι το ∞ .

Πρόταση 9.2.3. Από δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία του \mathcal{H}^2 περνά μοναδική υπερβολική ευθεία.

Απόδειξη. Έστω $z_1, z_2 \in \mathcal{H}^2$, $z_1 \neq z_2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\Re(z_1) = \Re(z_2) = x_0$, τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η $x = x_0$.
2. Αν $\Re(z_1) \neq \Re(z_2)$, θεωρούμε το Ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα z_1 και z_2 :

$$(1-t)z_1 + tz_2 = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

Το μέσον του τμήματος αυτού είναι το $z_m = (z_1 + z_2)/2$. Φέρνουμε την κάθετο στο z_m . Αυτή έχει παραμέτρηση

$$\ell(s) = z_m - is(z_2 - z_1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Τέμνει δε τον πραγματικό άξονα όταν

$$\Im(\ell(s)) = \Im(z_m) - s\Re(z_2 - z_1) = 0 \implies s = \frac{\Im(z_m)}{\Re(z_2 - z_1)}.$$

Το σημείο τομής είναι λοιπόν το

$$a = \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{2\Re(z_2 - z_1)}. \quad (9.3)$$

Η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $r = |a - z_1| = |a - z_2| = |z_1 - z_2|/2$.

□

Πρόταση 9.2.4. Η $M(\mathcal{H}^2)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των υπερβολικών ευθειών: για κάθε δύο υπερβολικές ευθείες $L = (z_1, z_2)$, $L' = (w_1, w_2)$ και σημεία $z_0 \in L$ και $w_0 \in L'$, υπάρχει μοναδικός $g \in M(\mathcal{H}^2)$ ώστε $g(L) = L'$ με $g(z_i) = w_i$, $i = 0, 1, 2$.

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός g δίνεται από την ισότητα των μιγαδικών διπλών λόγων

$$[z_0, z_1; z_2, z] = [w_0, w_1; w_2, g(z)].$$

□

Παράδειγμα 9.2.5. Έστω η ευθεία $L = (2, 4)$ και το $3 + i \in L$. Ο μετασχηματισμός g που δίνεται από την ισότητα των μιγαδικών διπλών λόγων

$$[2, 4; 3 + i, z] = [\infty, 0; i, g(z)] \iff g(z) = \frac{z - 4}{z - 2},$$

ικανοποιεί: $g(2) = \infty$, $g(4) = 0$, $g(3 + i) = i$ και η $g(L)$ είναι η $(0, \infty)$. Παρατηρήστε πως η αλλαγή στον προσανατολισμό του φανταστικού άξονα θα δώσει άλλον μετασχηματισμό:

$$[2, 4; 3 + i, z] = [0, \infty; i, h(z)] \iff h(z) = \frac{-z + 2}{z - 4}.$$

Έχουμε τα εξής άμεσα πορίσματα της Πρότασης 9.2.4 που περιγράφουν τη δράση της $M(\mathcal{H}^2)$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ και στο \mathcal{H}^2 :

Πόρισμα 9.2.6. Η $M(\mathcal{H}^2)$ δρα διπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}}$: για οποιαδήποτε δύο σημεία z_1, z_2 και w_1, w_2 υπάρχει $g \in M(\mathcal{H}^2)$ με $g(z_1) = w_1$ και $g(z_2) = w_2$.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε τις υπερβολικές ευθείες (z_1, z_2) και (w_1, w_2) και να εφαρμόσουμε την Πρόταση 9.2.4 επιλέγοντας τυχαία σημεία επάνω στις ευθείες αυτές. \square

Πόρισμα 9.2.7. Η $M(\mathcal{H}^2)$ δρα μεταβατικά στο \mathcal{H}^2 : για οποιαδήποτε σημεία z_1, z_2 υπάρχει $g \in M(\mathcal{H}^2)$ με $g(z_1) = z_2$.

Απόδειξη. Έστω $L = (z_0, z_0^*)$ υπερβολική ευθεία που περιέχει το z_1 και $L' = (w_0, w_0^*)$ υπερβολική ευθεία που περιέχει το z_2 . Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 9.2.4. \square

Πρόταση 9.2.8. Από σημείο $z_0 \in \mathcal{H}^2$ περνούν άπειρες υπερβολικές ευθείες.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Πόρισμα 9.2.7 μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ώστε $z_0 = i$. Τότε η υπερβολική ευθεία $(0, \infty)$ και οι υπερβολικές ευθείες $L_a = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z - a| = \sqrt{a^2 + 1}\}$, $a \in \mathbb{R}$, περνούν όλες από το i . \square

Παράδειγμα 9.2.9. Έστω $z_1, z_2 \in \mathcal{H}^2$ και έστω $L = (z_0, z_0^*)$ η υπερβολική ευθεία που τα περιέχει. Υποθέτοντας ότι $z_0^* > z_0$,

$$L = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z - a| = r\}, \quad a = (z_0 + z_0^*)/2, \quad r = (z_0^* - z_0)/2$$

και συνεπώς $z_i = a + re^{i\theta_i}$, $i = 1, 2$, για κάποια $\theta_i \in (0, \pi)$. Έστω $L_0 = (0, \infty)$ και $i \in L_0$. Ο μετασχηματισμός $g \in M(\mathcal{H}^2)$ που δίνεται από την

$$[z_0, z_0^*; z_1, z] = [\infty, 0; i, g(z)] \iff g(z) = \frac{i(z_1 - z_0)}{z_1 - z_0^*} \cdot \frac{z - z_0^*}{z - z_0} = \tan(\theta_1/2) \cdot \frac{z - z_0^*}{z - z_0},$$

ικανοποιεί τις σχέσεις

$$g(z_1) = i, \quad g(z_2) = -\tan(\theta_1/2) \cdot \frac{z_2 - z_0^*}{z_2 - z_0} = i \tan(\theta_1/2) \tan(\theta_2/2).$$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για $z_1 = -1 + i$ $z_2 = 1 + i$. Η υπερβολική ευθεία που τα περιέχει είναι η $L = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Θεωρούμε τον g που δίνεται από την ισότητα

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}; -1 + i, z] = [\infty, 0; i, g(z)] \iff g(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}}.$$

Αυτός απεικονίζει το $z_1 = -1 + i$ στο i και το $z_2 = 1 + i$ στο $(-2i\sqrt{2})/(\sqrt{2} + 2)^2$.

Πρόταση 9.2.10. Δύο υπερβολικές ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο στο \mathcal{H}^2 .

Απόδειξη. Μία μη εκ του σχήματος απόδειξη είναι η εξής: έστω L, L' υπερβολικές ευθείες με σύο κοινά σημεία z_1, z_2 και έστω $z_0 \in L$ και $z'_0 \in L'$. Υπάρχει υπερβολικός μετασχηματισμός f με $f(z_i) = z_i, i = 1, 2$ και $f(z_0) = z'_0$. Όμως τότε ο f απεικονίζει την ευθεία από τα z_1, z_2 στον εαυτό της, συνεπώς το $z_0 \in L'$ και το $z'_0 \in L$ και άρα $L = L'$. \square

Παράδειγμα 9.2.11. Έστω οι υπερβολικές ευθείες $L_1 = (0, \infty)$ και $L_2 = (-1, b), b > 0$. Επειδή

$$L_2 = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z - a| = r\}, \quad a = (b - 1)/2, \quad r = (b + 1)/2,$$

προκύπτει η εξίσωση

$$|z|^2 + a^2 - 2a\Re(z) = r^2.$$

Θέτοντας $z = it, t > 0$, παίρνουμε

$$t^2 + a^2 = r^2 \implies t = \sqrt{r^2 - a^2} = b.$$

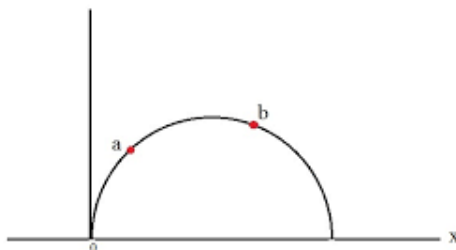
Συμπεραίνουμε πως για κάθε $b > 0$, Οι L_1 και L_2 τέμνονται στο ib .

Σχόλιο 9.2.12. Μπορούμε πάντοτε να κανονικοποιούμε δύο τεμνόμενες υπερβολικές ευθείες L_1 και L_2 ώστε $L_1 = (0, \infty)$ και $L_2 = (-1, b), b > 0$. Πράγματι, έστω L_1 και L_2 υπερβολικές ευθείες που τέμνονται στο $z_0 \in \mathcal{H}^2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Οι L_i είναι ημικύκλια. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό g που απεικονίζει την L_1 στην $(0, \infty)$ και το z_0 στο i , έχουμε ότι η L_2 θα απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού αυτού σε μία υπερβολική ευθεία της μορφής $(-a_1, a_2)$ με $a_i > 0, i = 1, 2$. Εφαρμόζοντας την D_{a_1} παίρνουμε τις $(0, \infty), (-1, a_1 a_2)$ που τέμνονται στο $a_1 i$.
2. Μία από τις L_i είναι κατακόρυφη ημιευθεία. Έστω ότι η L_1 είναι η $x = x_0$. Εφαρμόζοντας τη μετάθεση T_{-x_0} και μία ομοιοθεσία αν είναι απαραίτητο, προκύπτει και πάλι η προηγούμενη εικόνα.

9.2.2 Παραλληλία

Δύο υπερβολικές ευθείες λέγονται *παράλληλες* όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο στο \mathcal{H}^2 . Ενδέχεται όμως να έχουν κάποιο κοινό σημείο επάνω στην επεκτεταμένη πραγματική ευθεία, λ.χ. οι $(-1, 1)$ και $(1, 2)$, ή, όπως λ.χ. όλες οι ευθείες της μορφής (x, ∞) να έχουν κοινό σημείο το ∞ . Στην περίπτωση που συμβαίνει αυτό, οι παράλληλες ευθείες λέγονται *ασυμπτωτικά παράλληλες*, ή *υπερπαράλληλες*.



Η επόμενη πρόταση είναι το Αξίωμα των Παραλλήλων της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Ασυμπτωτικά παράλληλες υπερβολικές ευθείες.

Πρόταση 9.2.13. Έστω ευθεία L και σημείο z_0 εκτός αυτής. Από το z_0 περνούν άπειρες παράλληλες με την L .

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $L = (0, \infty)$ και $z_0 \in \mathcal{H}^2$ με $\Re(z_0) = x_0 \neq 0$. Μία (ασυμπτωτικά) παράλληλη προς την L από το z είναι προφανώς η $x = x_0$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 > 0$. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 0 και z_0 και από το z_0 την κάθετη στο τμήμα αυτό. Αυτή τέμνει το σύνορο σε κάποιο $2a$, $a > 0$. Τότε, το ημικύκλιο κέντρου a και ίσης ακτίνας είναι η υπερβολική ευθεία $(0, 2a)$ που περνά από το z_0 και είναι παράλληλη στην υπερβολική ευθεία $(0, \infty)$. Από εκεί και στο εξής, κάθε ημικύκλιο κέντρου $a' > a$ και ακτίνας $|a' - z_0|$ είναι υπερβολική ευθεία που περνά από το z_0 , ασυμπτωτικά παράλληλη L .

Στη γενική περίπτωση, για z_0 και $L = (z_1, z_2)$ τυχαία, απεικονίζουμε μέσω ενός g της $\mathbb{M}(\mathcal{H}^2)$ τα z_0, z_1, z_2 στα $z'_0, 0, \infty$, όπου z'_0 σημείο με $\Re(z'_0) \neq 0$. \square

9.2.3 Ασκήσεις

1. Βρείτε το σημείο τομής των $L = (1, 5)$ και $L' = (2, 6)$ με δύο τρόπους: α) γράφοντας αναλυτικά τις καρτεσιανές εξισώσεις των L, L' και λύνοντας το σύστημα και β) χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό που απεικονίζει την $(1, 5)$ και το σημείο της $2 + i\sqrt{3}$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο της i , αντίστοιχα. (Απάντηση: Οι καρτεσιανές εξισώσεις:

$$L : |z - 3| = 2, \quad L' : |z - 4| = 2.$$

Ο μετασχηματισμός δίνεται από την ισότητα των διπλών λόγων

$$[1, 5; 2 + i\sqrt{3}, z] = [\infty, 0; i, g(z)].$$

Χωρίς να γράψετε τον ακριβή τύπο του g , βρείτε τα $g(2), g(6)$.)

2. Έστω η ευθεία $L = (-1, 1)$ και η ευθεία $L_b = (0, b)$, $b > 0$. Βρείτε συνθήκες για το b ώστε οι L και L' να είναι: α) τεμνόμενες και β) παράλληλες. Στο α) προσδιορίστε το σημείο τομής, ενώ στο β) προσδιορίστε το είδος της παραλληλίας.
3. Ονομάζουμε δύο τεμνόμενες υπερβολικές ευθείες *ορθογώνιες* (ή, αλλιώς, *κάθετες*) αν είναι ορθογώνιες με την Ευκλείδεια έννοια, δηλαδή, οι εφαπτόμενές τους στο σημείο τομής είναι ορθογώνιες (θα δούμε στην Ενότητα 9.4.1 το λόγο που η υπερβολική κάθετοτητα ταυτίζεται με την Ευκλείδεια). Αποδείξτε ότι από σημείο z_0 εκτός ευθείας L άγεται μοναδική κάθετος προς την L . (Υπόδειξη: Αν $L = (z, w)$ θεωρήστε τον μετασχηματισμό g που απεικονίζει την L στην $L_0 = (0, \infty)$ και το z_0 στο z'_0 με $\Re(z'_0) \neq 0$. Η $L'_0 = (-|z'_0|, |z'_0|)$ περνά από το z'_0 και είναι ορθογώνια στην L'_0 .)
4. Αποδείξτε ότι εάν $f \in \mathbb{M}(\mathcal{H}^2)$ είναι υπερβολικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει υπερβολική ευθεία \mathcal{A}_f που παραμένει αναλλοίωτη από τον f : $f(\mathcal{A}_f) = \mathcal{A}_f$. Η ευθεία \mathcal{A}_f καλείται *άξονας* του υπερβολικού μετασχηματισμού f . (Υπόδειξη: Κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(z) = \delta z$, $\delta > 0$, $\delta \neq 1$. Τα σταθερά σημεία του f είναι τα $0, \infty$. Για κάθε $si \in (0, \infty)$ είναι $f(si) = \delta si \in (0, \infty)$.)

5. Έστω ο μετασχηματισμός

$$f(z) = \frac{4z - 1}{-3z + 1}.$$

Δείξτε ότι ο f είναι υπερβολικός και βρείτε τον άξονά του \mathcal{A}_f . (Απάντηση: Σταθερά σημεία: $(-1 \pm \sqrt{7/3})/2$. Άξονας:

$$\mathcal{A}_f = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z + 1/2| = \sqrt{7/3}/2\}.$$

9.3 Υπερβολική μετρική

9.3.1 Υπερβολικό μήκος καμπύλης

Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}^2$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, $I = [a, b]$, μία συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Η υπερβολική νόρμα της παραγώγου $\dot{\gamma}$ ορίζεται από τη σχέση

$$|\dot{\gamma}(t)|_h = \frac{|\dot{z}(t)|}{y(t)}.$$

Ονομάζουμε υπερβολικό μήκος της γ τον αριθμό

$$\ell_h(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_h dt.$$

Η επόμενη πρόταση αφήνεται να αποδειχθεί στην Άσκηση 9.3.6.1.

Πρόταση 9.3.1. Το υπερβολικό μήκος μίας συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης γ του \mathcal{H}^2 :

- δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της γ και
- παραμένει αναλλοίωτο από τη δράση της $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$.

Παράδειγμα 9.3.2. Έστω η καμπύλη $\gamma(t) = t + ib$, $b > 0$, $t \in (-a, a)$, $a > 0$. Είναι $\dot{\gamma}(t) = 1$, $|\dot{\gamma}(t)|_h = 1/b$ και $\ell_h(\gamma) = 2a/b$.

Παράδειγμα 9.3.3. (Μήκη υπερβολικών ευθυγράμμων τμημάτων) α) Έστω το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z = i$ και $w = si$, $s \neq 1$, επάνω στην υπερβολική ευθεία $(0, \infty)$. Ας υποθέσουμε ότι $s > 1$. Παίρνουμε την παραμέτρηση του τμήματος:

$$\gamma(t) = (1 - t)i + tsi = (1 + t(s - 1))i, \quad t \in [0, 1].$$

Άρα, $\dot{\gamma}(t) = (s - 1)i$ και συνεπώς $|\dot{\gamma}(t)|_h = |(s - 1)|/(1 + t(s - 1))$. Οπότε, για $s > 1$,

$$\ell_h(\gamma) = \int_0^1 \frac{(s - 1)}{1 + t(s - 1)} dt = [\ln(1 + t(s - 1))]_{t=0}^1 = \ln s,$$

ενώ για $s < 1$,

$$\ell_h(\gamma) = \int_0^1 \frac{(1 - s)}{1 + t(s - 1)} dt = -[\ln(1 + t(s - 1))]_{t=0}^1 = -\ln s$$

Άρα, $\ell_h(\gamma) = |\ln s|$. Θέτουμε $\rho = \ell_h(\gamma)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \cosh^2(\rho/2) &= \frac{(e^{\rho/2} + e^{-\rho/2})^2}{4} = \frac{e^\rho + e^{-\rho} + 2}{4} \\ &= \frac{s + (1/s) + 2}{4} = \frac{(s+1)^2}{4s} \\ &= \frac{|z - \bar{w}|^2}{4\Im(z)\Im(w)}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στον τύπο για το μήκος ρ του υπερβολικού ευθυγράμμου τμήματος με άκρα z, w που κείται στη $(0, \infty)$:

$$\cosh(\rho/2) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\Im(z))^{1/2}(\Im(w))^{1/2}}. \quad (9.4)$$

β) Έστω τώρα το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z = a + re^{i\theta_1}, w = a + re^{i\theta_2}, a \in \mathbb{R}, r > 0, \theta_1, \theta_2 \in (0, \pi), \theta_1 > \theta_2$. Παραμετρούμε το τμήμα ως προς τη γωνία θ :

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_1].$$

Είναι $\dot{\gamma}(\theta) = ire^{i\theta}$ και $|\dot{\gamma}(\theta)|_h = r/(r \sin \theta) = 1/\sin \theta$. Άρα,

$$\ell_h(\gamma) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{(1 + \tan^2(\theta/2))d\theta}{2 \tan(\theta/2)} = [\ln(\tan(\theta/2))]_{\theta=\theta_2}^{\theta_1} = \ln \left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)} \right).$$

Παρόμοια με το α), δείχνεται ότι και στην περίπτωση αυτή ισχύει ο τύπος (9.4). Ο τύπος αυτός αποτελεί μία από τις εκφράσεις της υπερβολικής απόστασης δύο οποιωνδήποτε σημείων, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει το εξής πόρισμα του οποίου η απόδειξη αφήνεται στην Άσκηση 9.3.6.2:

Πόρισμα 9.3.4. Οι υπερβολικές ευθείες έχουν άπειρο υπερβολικό μήκος.

9.3.2 Υπερβολική απόσταση

Η υπερβολική απόσταση $d_h(z, w)$ δύο σημείων $z, w \in \mathcal{H}^2$ ορίζεται ως εξής: έστω το σύνολο $C(z, w)$ των συνεχώς παραγωγίσιμων καμπυλών γ του \mathcal{H}^2 με άκρα τα z και w . Τότε,

$$d_h(z, w) = \inf_{\gamma \in C(z, w)} \{\ell_h(\gamma)\}.$$

Πρόταση 9.3.5. Η d_h όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μετρική.

Απόδειξη. Άσκηση 9.3.6.3. □

Θα δείξουμε τώρα ότι ο μετρικός χώρος (\mathcal{H}^2, d_h) είναι γεωδαισιακός. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία του \mathcal{H}^2 υπάρχει καμπύλη με το ελάχιστο υπερβολικό μήκος που τα ενώνει. Μία τέτοια καμπύλη λέγεται γεωδαισιακή.

Πρόταση 9.3.6. Οι γεωδαισιακές του (\mathcal{H}^2, d_h) είναι οι υπερβολικές ευθείες.

Απόδειξη. Έστω δύο σημεία $z, w \in \mathcal{H}^2$. κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z = i, w = si, s > 0$. Έστω μία οποιαδήποτε συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^2$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ με $\gamma(0) = i$ και $\gamma(1) = si$. Τότε,

$$\ell_h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \geq \left| \int_0^1 \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt \right| = |[\ln(y(t))]_{t=0}^1| = |\ln s|.$$

Το τελευταίο όμως είναι ακριβώς το μήκος του υπερβολικού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα i, si . Παίρνοντας το \inf επάνω σε όλες τις $\gamma \in C(i, si)$ προκύπτει το ζητούμενο. \square

Η επόμενη πρόταση προκύπτει απευθείας από τον τύπο (9.4) μέσω απλών πράξεων (δείτε την Άσκηση 9.3.6.4).

Πρόταση 9.3.7. Η υπερβολική απόσταση $\rho = d_h(z, w)$ δύο σημείων z, w του \mathcal{H}^2 δίνεται από τους παρακάτω ισοδύναμους τύπους:

$$\cosh(\rho/2) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\Im(z))^{1/2}(\Im(w))^{1/2}}, \quad (9.5)$$

$$\sinh(\rho/2) = \frac{|z - w|}{2(\Im(z))^{1/2}(\Im(w))^{1/2}}, \quad (9.6)$$

$$\cosh(\rho) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\Im(z)\Im(w)}, \quad (9.7)$$

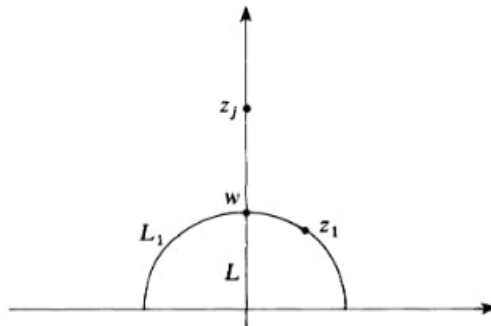
$$\rho = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (9.8)$$

Η πρόταση που κλείνει την ενότητα αυτή ουσιαστικά ορίζει την έννοια του μεταξύ:

Πρόταση 9.3.8. Έστω $z, w \in \mathcal{H}^2$ διαφορετικά σημεία. Τότε

$$d_h(z, w) = d_h(z, \zeta) + d_h(\zeta, w),$$

αν και μόνο αν το ζ ανήκει στο γεωδαισιακό τμήμα με άκρα z, w .

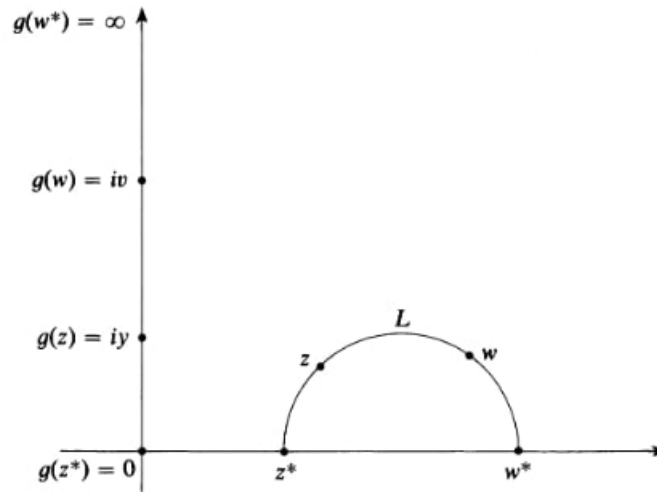


Πρόταση 9.3.8

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα z, w είναι τα i, si για κάποιο $s > 0$. Αν το ζ ανήκει στο γεωδαισιακό τμήμα των i, si τότε $\zeta = ti, 1 \leq t \leq s$ και η ισότητα της πρότασης ισχύει. Αντιστρόφως, πάλι για z, w όπως προηγουμένως, έστω ότι έχουμε ισότητα στην πρόταση και ας υποθέσουμε ότι το ζ δεν κείται στην $(0, \infty)$. Τότε όμως, η καμπύλη που αποτελείται από τα υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα $\alpha) s_1$ με αρχή το i και τέλος το ζ και $\beta) s_2$ με αρχή το z και τέλος το si , έχει μήκος αυστηρά μεγαλύτερο από το μήκος του τμήματος που ενώνει τα i και si . Καταλήγουμε σε άτοπο. \square

9.3.3 Ισομετρίες

Έχουμε ήδη δει ότι η $GM(\mathcal{H}^2)$ είναι υποομάδα της ομάδας ισομετριών του (\mathcal{H}^2, d_h) . Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε διαμέσου ενός τύπου που περιέχει μιγαδικούς διπλούς λόγους ότι είναι ακριβώς η ομάδα ισομετριών. Υπενθυμίζουμε ότι ο μιγαδικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος μόνο από μετασχηματισμούς Möbius.



Πρόταση 9.3.9.

Έστω $z, w \in \mathcal{H}^2$ οποιαδήποτε σημεία και L η υπερβολική ευθεία που τα περιέχει. Υποθέτουμε ότι η L έχει άκρα z^*, w^* και ότι τα τέσσερα σημεία εμφανίζονται με τη σειρά z^*, z, w, w^* , επάνω στην L .

Πρόταση 9.3.9. Η υπερβολική απόσταση $d_h(z, w)$ δίνεται από τον τύπο:

$$d_h(z, w) = \ln([w^*, z^*; z, w]). \quad (9.9)$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι επειδή τα z^*, z, w, w^* , κείνται επάνω σε υπερβολική ευθεία, ο διπλός λόγος είναι πραγματικός. Εφαρμόζουμε το στοιχείο εκείνο g της $M(\mathcal{H}^2)$ που απεικονίζει τα w^*, z^*, z, w , στα $\infty, 0, i, si$ για κάποιο $s > 1$. Τότε

$$\begin{aligned} d_h(z, w) &= d_h(g(z), g(w)) = \ln s \\ &= \ln([\infty, 0; i, si]) \\ &= \ln([w^*, z^*; z, w]). \end{aligned}$$

□

9.3.4 Υπερβολικοί δίσκοι

Ο ανοικτός υπερβολικός δίσκος κέντρου $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$D_h(z_0, r) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid d_h(z, z_0) < r\}.$$

Ο κλειστός υπερβολικός δίσκος κέντρου $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$D_h(z_0, r) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid d_h(z, z_0) \leq r\},$$

και ο υπερβολικός κύκλος κέντρου $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$S_h(z_0, r) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid d_h(z, z_0) = r\}.$$

Θα δείξουμε ότι κάθε υπερβολικός κύκλος είναι Ευκλείδειος κύκλος του οποίου θα προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα. Έστω $S_h(z_0, r)$. τότε η σχέση $d_h(z, z_0) = r$ και οι τύποι (9.5), (9.6) δίνουν

$$k = \tanh(r/2) = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η σχέση αυτή είναι εξίσωση Απολλώνιου κύκλου (δείτε την Άσκηση 8.5.4.1) και μένει να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα του. Υψώνοντας στο τετράγωνο και απαλείφοντας τον παρονομαστή, παίρνουμε

$$|z|^2 - 2\Re\left(z \cdot \frac{\bar{z}_0 - k^2 z_0}{1 - k^2}\right) + |z_0|^2 = |z|^2 - 2\Re(z \cdot (\Re(z_0) - i\Im(z_0) \cosh r)) + |z_0|^2 = 0.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο βρίσκουμε

$$|z - (\Re(z_0) + i\Im(z_0) \cosh r)|^2 = \sinh^2(r)\Im^2(z_0).$$

Καταλήγουμε λοιπόν την εξής:

Πρόταση 9.3.10. *Ο υπερβολικός κύκλος $S_h(z_0, r)$ είναι ο Ευκλείδειος κύκλος κέντρου $\Re(z_0) + i\Im(z_0) \cosh r$ και ακτίνας $\sinh r \Im(z_0)$.*

Αποδεικνύεται ότι η υπερβολική περίμετρος του $S_h(a, r)$ ισούται με $2\pi \sinh r$ (δείτε την Άσκηση 9.3.6.7), ενώ βεβαώς, η Ευκλείδεια περίμετρός του είναι $2\pi \Im(z_0) \sinh r$.

9.3.5 Υπερβολικό εμβαδόν

Έστω χωρίο $\Omega \subset \mathcal{H}^2$. Το υπερβολικό εμβαδόν $\text{Area}_h(\Omega)$ του Ω ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\text{Area}_h(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται στην Άσκηση 9.3.6.8.

Πρόταση 9.3.11. Το υπερβολικό εμβαδόν παραμένει αναλλοίωτο από τις υπερβολικές ισομετρίες.

Το υπερβολικό εμβαδόν υπερβολικού δίσκου $D_h(z_0, r)$, δίνεται από την εξής:

Πρόταση 9.3.12. Το υπερβολικό εμβαδόν $\text{Area}_h(D_h(z_0, r))$ υπερβολικού δίσκου $D_h(z_0, r)$ είναι ίσο με $4\pi \sinh^2(r/2)$.

Απόδειξη. Άσκηση 9.3.6.9. □

9.3.6 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Πρόταση 9.3.1. (Υπόδειξη: Αν $f \in M(\mathcal{H}^2)$, έστω τότε

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Επειδή

$$f'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2},$$

έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(f \circ \gamma)(t) = f'(z(t))\dot{z}(t) \implies |(f \circ \gamma)(t)| = \frac{|\dot{z}(t)|}{|cz + d|^2}.$$

Επίσης,

$$\Im((f \circ \gamma)(t)) = \frac{\Im(z(t))}{|cz + d|^2}.$$

Άρα,

$$\ell_h(f \circ \gamma) = \int_a^b |(f \circ \gamma)(t)|_h dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_h dt = \ell_h(\gamma).$$

Ομοίως και για f που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.)

2. Αποδείξτε το Πρόσμα 9.3.4. (Υπόδειξη: Επειδή το υπερβολικό μήκος παραμένει αναλλοίωτο από τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς, αρκεί να δείξετε το αποτέλεσμα για την ευθεία $(0, \infty)$. Προς τούτο, πάρτε $(1/s)i, si$, σημεία της ευθείας $s > 1$. Το υπερβολικό μήκος του υπερβολικού ευθυγράμμου τμήματος γ_s που τα ενώνει είναι ίσο με $2 \ln s$. Αφήνοντας το $s \rightarrow +\infty$ παίρνετε το αποτέλεσμα.)

3. Αποδείξτε την Πρόταση 9.3.5.

4. Αποδείξτε την ισοδυναμία των τύπων της Πρότασης 9.3.7.

5. Δείξτε ότι αν $d_h(z, w) = \rho$, για κάποια $z, w \in \mathcal{H}^2$, τότε

$$\rho = \tanh \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|.$$

6. Θεωρήστε το σύνολο $\Delta = \{z = x + iy \in \mathcal{H}^2 \mid x = y\}$. Αν $w \in \mathcal{H}^2$ τότε βρείτε το

$$d = \text{dist}(w, \Delta) = \inf\{d_h(z, w); \mid z \in \Delta\}.$$

(Υπόδειξη: Αν $w = u + iv$, $u > 0$, τότε $d = 0$ (γιατί;). Αν $u \leq 0$, τότε από την προηγούμενη άσκηση είναι

$$(\tanh^{-1} \rho)^2 = \frac{(x-u)^2 + (x-v)^2}{(x-u)^2 + (x+v)^2} = f(x), \quad x > 0.$$

Δείξτε τώρα ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.)

7. Υπολογίστε το υπερβολικό μήκος του υπερβολικού κύκλου $S_h(z_0, r)$. (Υπόδειξη: Έστω $\ell = \ell(S_h(z_0, r))$ υπερβολικό μήκος του $S_h(z_0, r)$: θεωρούμε την παραμέτρηση του υπερβολικού κύκλου

$$\gamma(\theta) = \Re(z_0) + i\Im(z_0) \cosh r + \sinh r \Im(z_0) e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Είναι $\dot{\gamma}(\theta) = i \sinh r \Im(z_0) e^{i\theta}$ και

$$|\dot{\gamma}(\theta)|_h = \frac{\sinh r}{\cosh r + \sinh r \sin \theta}.$$

Άρα,

$$\ell = \int_0^{2\pi} \frac{\sinh r \, d\theta}{\cosh r + \sinh r \sin \theta}.$$

Θέτουμε $\zeta = e^{i\theta}$, οπότε $d\zeta = ie^{i\theta} d\theta = i\zeta d\theta$ και $\sin \theta = (\zeta - \bar{\zeta})/(2i) = (\zeta - (1/\zeta))/(2i)$. Το ολοκλήρωμα τότε γράφεται σε μιγαδική μορφή μετά από τις πράξεις, ως

$$\ell = 2 \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 2i \coth r \zeta - 1}.$$

Ο παρονομαστής έχει ρίζες $i(1 \pm \cosh r)/\sinh r$, δηλαδή τις

$$\zeta_1 = -i \coth(r/2), \quad \zeta_2 = -i \tanh(r/2),$$

εκ των οποίων, επειδή είναι αντιθετοαντίστροφες, μόνο η μία βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου. Επειδή δε $\cosh x > \sinh x$ για κάθε $x > 0$, η ρίζα αυτή είναι η ζ_2 . Τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο ισούται με

$$\text{Res}(\zeta_2) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_2} \frac{2(\zeta - \zeta_2)}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} = \frac{2}{\zeta_2 - \zeta_1} = -i \sinh r.$$

Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων προκύπτει τότε

$$\ell = \ell(S_h(z_0, r)) = 2\pi i \text{Res}(\zeta_2) = 2\pi \sinh r.$$

8. Αποδείξτε την Πρόταση 9.3.11. (Υπόδειξη: Γράψτε το στοιχείο υπερβολικού εμβαδού ως

$$\frac{dx dy}{y^2} = \frac{dz d\bar{z}}{2i \Im^2(z)}.$$

Υπάρχει εξήγηση για τον λόγο που αυτό είναι δυνατόν, αλλά είναι πέραν από τον σκοπό των σημειώσεων αυτών. Γράφουμε για $\Omega \subset \mathcal{H}^2$ και $g \in \text{GM}(\mathcal{H}^2)$,

$$\text{Area}(g(\Omega)) = \frac{1}{2i} \iint_{g(\Omega)} \frac{dz d\bar{z}}{\Im^2(z)}.$$

Με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής, έχουμε για $g \in \text{M}(\mathcal{H}^2)$ ότι

$$\text{Area}(g(\Omega)) = \frac{1}{2i} \iint_{\Omega} |\det(g(\zeta))| \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\Im^2(g(\zeta))}.$$

Αν $g(\zeta) = (a\zeta + b)(c\zeta + d)$, $ad - bc = 1$, τότε

$$\det(g(\zeta)) = |g'(\zeta)|^2 = \frac{1}{|c\zeta + d|^4}$$

και επίσης $\Im(g(\zeta)) = \Im(\zeta)/|c\zeta + d|^2$. Επομένως,

$$\text{Area}(g(\Omega)) = \frac{1}{2i} \iint_{\omega} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\Im^2(\zeta)} = \text{Area}_h(\Omega).$$

Ομοίως και στην περίπτωση που $g(\zeta) = (a(-\bar{\zeta}) + b)/(c(-\bar{\zeta}) + d)$, $ad - bc = 1$.)

9. Αποδείξτε την Πρόταση 9.3.12. (Υπόδειξη: Από την Πρόταση 9.3.11 έχουμε ότι το ζητούμενο υπερβολικό εμβαδόν είναι ίσο με το υπερβολικό εμβαδόν του υπερβολικού δίσκου $D = D(i, R)$, όπου $\sinh R = \tanh r$ (γιατί:). Ο δίσκος αυτός αποτελείται από τα σημεία

$$z(\rho, \theta) = i + \sinh \rho e^{i\theta}, \quad (\rho, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi].$$

Οπότε, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Area}_h(D) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\cosh \rho \sinh \rho}{(1 + \sinh \rho \sin \theta)^2} dr d\theta \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cosh \rho \sinh \rho}{(1 + \sinh \rho \cos \theta)^2} d\theta \right) d\rho \end{aligned}$$

Υπολογίστε τώρα το εσωτερικό ολοκλήρωμα με τη μέθοδο της Άσκησης 9.3.6.7.)

9.4 Υπερβολική Τριγωνομετρία

9.4.1 Γωνίες και τρίγωνα

Έστω καμπύλες C_i , $i = 1, 2$ του \mathcal{H}^2 που τέμνονται στο z_0 . Αν $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}^2$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες παραμετρήσεις τους, $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $t \in [a, b]$, $i = 1, 2$, τότε υπάρχει $t_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0 \in \mathcal{H}^2$. Το υπερβολικό βαθμωτό γινόμενο των εφαπτομένων διανυσμάτων $\dot{\gamma}_1(t_0)$ και $\dot{\gamma}_2(t_0)$ στο z_0 ορίζεται από τη σχέση

$$(\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0))_h = \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\mathfrak{I}^2(z_0)},$$

όπου στον αριθμητή του δεξιού κλάσματος είναι το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι

$$|(\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0))_h| = \frac{|\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)|}{\mathfrak{I}^2(z_0)} \leq \frac{|\dot{\gamma}_1(t_0)| |\dot{\gamma}_2(t_0)|}{\mathfrak{I}^2(z_0)} = |\dot{\gamma}_1(t_0)|_h \cdot |\dot{\gamma}_2(t_0)|_h,$$

με την ανισότητα να προκύπτει από την Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski. Ονομάζουμε τώρα *γωνία* των C_1 και C_2 στο z_0 τον αριθμό

$$\angle(C_1, C_2)_{z_0} = \arccos \left(\frac{(\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0))_h}{|\dot{\gamma}_1(t_0)|_h \cdot |\dot{\gamma}_2(t_0)|_h} \right) \in [0, \pi]. \quad (9.10)$$

Η γωνία $\angle(C_1, C_2)_{z_0}$ δεν εξαρτάται από τις παραμετρήσεις των C_i , $i = 1, 2$. Αυτό αποδεικνύεται και αναλυτικά, προκύπτει όμως και άμεσα από την παρατήρηση ότι ορισμένη κατά τον τρόπον αυτόν η γωνία συμπίπτει με τη γωνία που ορίζεται στην Ευκλείδεια περίπτωση.

Στην Ευκλείδεια περίπτωση, ο αριθμός που ορίζεται ως η γωνία μεταξύ δύο ευθειών (δηλαδή, μεταξύ γεωδαισιακών του Ευκλείδειου χώρου) βρίσκεται σε μία 1–1 και επί αντιστοιχία με το κυρτό χωρίο που ορίζουν δύο εκ των προτέρων καθορισμένες ημιευθείες που εκκινούν από το σημείο τομής των ευθειών. Υπενθυμίζουμε ότι ένα χωρίο του Ευκλείδειου χώρου είναι κυρτό, αν για κάθε δύο σημεία του χωρίου ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει κείται εξ ολοκλήρου εντός του χωρίου. Με την ίδια συλλογιστική, ένα χωρίο του \mathcal{H}^2 ονομάζεται *υπερβολικά κυρτό*, αν κάθε δύο σημεία του χωρίου μπορούν να ενωθούν με υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που κείται εξ ολοκλήρου εντός του χωρίου. Απλά παραδείγματα υπερβολικών κυρτών χωρίων είναι βεβαίως το ίδιο το \mathcal{H}^2 , καθώς και κάθε γεωδαισιακή του. Υπερβολικά κυρτό όμως είναι και κάθε *υπερβολικό ημιεπίπεδο*. Τούτο ορίζεται ως μία από τις συνιστώσες του συμπληρώματος μίας γεωδαισιακής L . Οι συνιστώσες αυτές είναι δύο, όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Jordan και είναι και οι δύο υπερβολικά κυρτές. Μία απλή απόδειξη του γεγονότος αυτού βασίζεται στη χρήση του μοντέλου Beltrami-Klein και την παραθέτουμε στην Πρόταση 9.5.10.

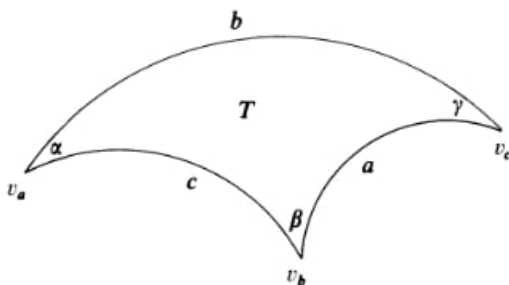
Έστω $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και L_1, L_2 δύο υπερβολικές ημιευθείες που περνούν από το z_0 . Ας υποθέσουμε πρώτα ότι οι L_1, L_2 δεν κείνται επί της ίδιας υπερβολικής ευθείας. Αν L_1^* είναι η γεωδαισιακή που περιέχει την L_1 , τότε το σύνολο $L_2 \setminus \{z_0\}$ έχει κενή τομή με την L_1^* . Άρα, η ανοικτή υπερβολική ημιευθεία κείται εξ ολοκλήρου σε ένα από τα ανοικτά ημιεπίπεδα που είναι συμπληρωματικά της L_1^* . Αν P_2 είναι το ημιεπίπεδο στο οποίο κείται η $L_2 \setminus \{z_0\}$, τότε έστω P_1 το ανοικτό ημιεπίπεδο που προκύπτει με παρόμοιο τρόπο για την ανοικτή ημιευθεία $L_1 \setminus \{z_0\}$. Το *εσωτερικό της γωνίας των ημιευθειών L_1 και L_2 με κορυφή το z_0* ορίζεται

ως το σύνολο $P_1 \cap P_2$. Το εσωτερικό της γωνίας αποτελεί την μία από τις συνιστώσες του συμπληρώματος του συνόλου $L_1 \cup L_2$ · καλούμε την άλλη συνιστώσα *εξωτερικό της γωνίας*.

Εάν οι L_1, L_2 κείνται στην ίδια γεωδαισιακή, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: α) Η ένωση $L_1 \cup L_2$ είναι υπερβολική ευθεία. Τότε, δεν υπάρχει καμμία κανονική επιλογή εσωτερικού και εξωτερικού της γωνίας και η γωνία καλείται *ευθεία*. β) Είναι $L_1 = L_2 = L$ και η γωνία καλείται *μηδενική*. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε το εσωτερικό της μηδενικής γωνίας να είναι το κενό και το εξωτερικό της να είναι το συμπλήρωμα της L .

Δοθείσης γωνίας που ορίζουν οι διαφορετικές υπερβολικές ημιευθείες L_1, L_2 με κορυφή το z_0 , το εσωτερικό της γωνίας είναι υπερβολικά κυρτό σύνολο όντας τομή υπερβολικά κυρτών συνόλων. Το εξωτερικό δεν μπορεί να είναι υπερβολικά κυρτό, καθώς κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως κάθε γεωδαισιακό τμήμα που ενώνει σημεία της $L_1 \setminus \{z_0\}$ και της $L_2 \setminus \{z_0\}$ θα ανήκε ταυτόχρονα και στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της γωνίας. Στο εσωτερικό τώρα κάθε γωνίας που δεν είναι ευθεία ή μηδενική, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\theta \in (0, \pi)$ που ορίστηκε στην (9.10)· στο δε εξωτερικό της αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $2\pi - \theta$. Εάν η γωνία είναι μηδενική, $\theta = 0$. Εάν η γωνία είναι ευθεία, αντιστοιχίζουμε το π και στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της γωνίας.

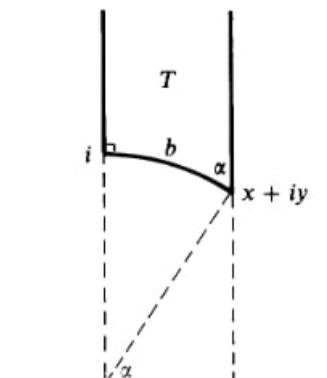
Έστω A, B, C τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του \mathcal{H}^2 (δηλαδή, δεν ανήκουν και τα τρία στην ίδια υπερβολική ευθεία). Θα συμβολίζουμε με a, b, c τα υπερβολικά μήκη των γεωδαισιακών τμημάτων $[B, C], [A, C]$ και $[A, B]$, αντίστοιχα, ενώ θα συμβολίζουμε με α, β, γ τις γωνίες με κορυφές τα $A = v_a, B = v_b, C = v_c$, αντίστοιχα. Το *υπερβολικό τρίγωνο* $\Delta(ABC)$ ορίζεται ως η ένωση των γεωδαισιακών τμημάτων $[B, C], [A, C]$ και $[A, B]$, τα οποία λέγονται πλευρές του τριγώνου. Το *εσωτερικό* του τριγώνου είναι η τομή των κυρτών χωρίων που ορίζουν οι γωνίες του τριγώνου.



Υπερβολικό τρίγωνο.

9.4.2 Γωνία Παραλληλισμού

Έστω τρίγωνο με γωνίες $\alpha, \pi/2, 0$ $\alpha \neq 0$. Η γωνία α καλείται γωνία παραλληλισμού.



Πρόταση 9.4.1: Η α είναι η Γωνία Παραλληλισμού.

Πρόταση 9.4.1. Για T όπως παραπάνω,

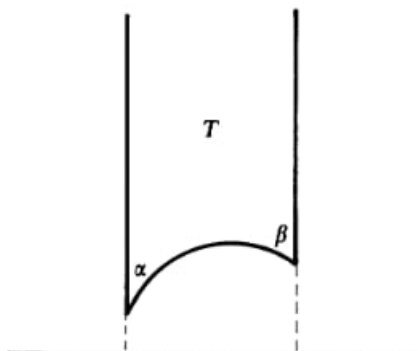
$$\cosh b \sin \alpha = 1. \quad (9.11)$$

Απόδειξη. Κανονικοποιούμε ώστε $v_c = i, v_b = \infty, v_a = z = x + iy, |z| = 1$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της απόστασης (9.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cosh b = \cosh(d_h(i, z)) &= 1 + \frac{|z - i|^2}{2\Im(z)} \\ &= 1 + \frac{2 - 2y}{2y} \\ &= 1/y = 1/\sin \alpha, \end{aligned}$$

με την τελευταία σχέση να προκύπτει από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης. \square

9.4.3 Τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο



Πρόταση 9.4.2: Νόμος Συνημιτόνων για τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο.

Η περίπτωση των τριγώνων της Ενότητας 9.4.2 αποτελεί ειδική περίπτωση των (ορθογωνίων) τριγώνων με κορυφή στο άπειρο, δηλαδή, τριγώνων με γωνίες $\alpha, \beta, 0$. Τότε, οι πλευρές a, b είναι απείρου μήκους.

Πρόταση 9.4.2. (Νόμος Συνημιτόνων για τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο) Για τρίγωνα $T(\alpha, \beta, 0)$ έχουμε

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + 1}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (9.12)$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_c = \infty$, $v_a = e^{i\theta}$, $v_b = e^{i\phi}$, με $0 < \theta < \phi < \pi$. Εδώ, $\alpha = \theta$, $\beta = \pi - \phi$. Η ζητούμενη σχέση προκύπτει ξανά από τον τύπο της απόστασης (9.7). \square

9.4.4 Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρεται σε τρίγωνα $T(\alpha, \beta, \pi/2)$.

Πρόταση 9.4.3. Σε υπερβολικό ορθογώνιο τρίγωνο $T(\alpha, \beta, \pi/2)$ είναι:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b. \quad (9.13)$$

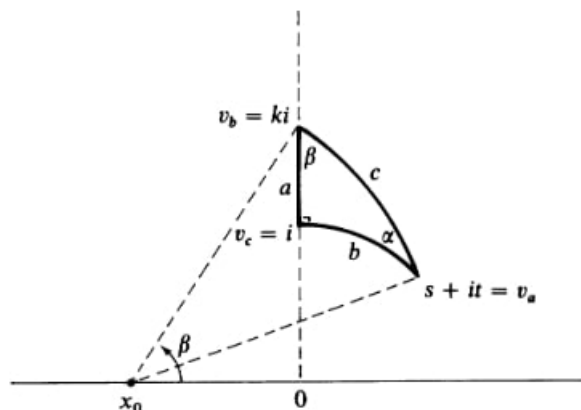
Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_a = z = s + it$, $|z| = 1$, $v_b = ki$, $s > 1$, και $v_c = i$. Τότε, εφαρμόζοντας και πάλι τον τύπο (9.7) παίρνουμε διαδοχικά

$$\cosh c = (1 + k^2)/(2kt),$$

$$\cosh b = 1/t,$$

$$\cosh a = (1 + k^2)(2k).$$

\square



Πρόταση 9.4.3: Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα.

9.4.5 Νόμοι Ημιτόνων και Συνημιτόνων

Για ένα γενικό υπερβολικό τρίγωνο $T(\alpha, \beta, \gamma)$ με πλευρές a, b, c ισχύουν οι παρακάτω νόμοι:

Νόμος των Ημιτόνων:

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

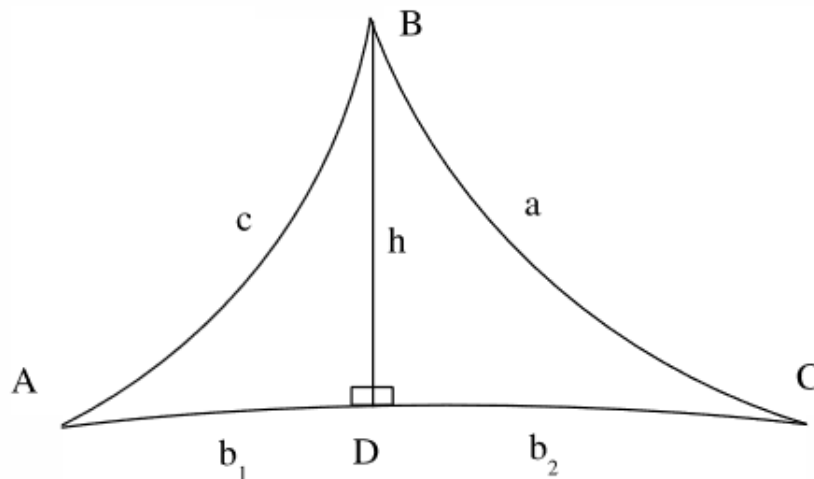
Πρώτος Νόμος των Συνημιτόνων:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

Δεύτερος Νόμος των Συνημιτόνων:

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Σημειώνουμε ότι οι Νόμοι των Συνημιτόνων έχουν ανάλογες συμμετρικές εκφράσεις ως προς γωνίες και πλευρές. Επίσης, ο Νόμος των Ημιτόνων και ο Δεύτερος Νόμος των Συνημιτόνων προκύπτουν από τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων (δείτε τις Ασκήσεις 9.4.7.6 και 9.4.7.7). Τέλος, όπως και στη Σφαιρική Γεωμετρία έτσι και εδώ έχουμε από τον Δεύτερο Νόμο των Συνημιτόνων ότι τα όμοια τρίγωνα είναι και ίσα. Δηλαδή, για κάθε δύο τρίγωνα που έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει το ένα στο άλλο.



Απόδειξη του Πρώτου Νόμου των Συνημιτόνων.

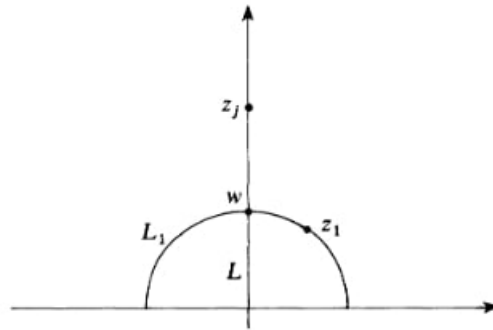
Απόδειξη του Πρώτου Νόμου των Συνημιτόνων. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια του Υπερβολικού Πυθαγορείου Θεωρήματος (Πρόταση 9.4.3 και τα πορίσματα αυτού που βρίσκονται στις Ασκήσεις 9.4.7.4 και 9.4.7.5. Με αναφορά λοιπόν σε αυτά, αλλά και στο παραπάνω

σχήμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \cosh c &= \cosh b_1 \cosh h \\
 &= \cosh(b - b_2) \cosh h \\
 &= (\cosh b \cosh b_2 - \sinh b \sinh b_2) \cosh h \\
 &= \cosh b (\cosh b_2 \cosh h) - \sinh b \sinh b_2 \cosh h \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh b_2 \cdot \frac{\cosh a}{\cosh b_2} \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh a \cdot \frac{\cosh a}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh b_2}{\cosh b_2} \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh a \cdot \frac{\tanh b_2}{\tanh a} \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh a \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

□

Ας σημειώσουμε ότι στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε δύο υποθέσεις: α) πως άγεται κάθετος από κορυφή τριγώνου στην απέναντι πλευρά και β) τουλάχιστον μία τέτοια κάθετος ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου. Όσον αφορά στο α), από σημείο εκτός υπερβολικής ευθείας μπορούμε πάντοτε να φέρουμε κάθετο προς την ευθεία. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε την ευθεία $L = (0, \infty)$ και σημείο z_0 με $\Re(z_0) \neq 0$. Τότε η ευθεία $|z| = |z_0|$ είναι κάθετη στην L . Για το β), μπορούμε να δείξουμε ότι η κάθετος προς τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται πάντοτε στο εσωτερικό του τριγώνου. Πράγματι, κανονικοποιούμε πάλι ώστε η μεγαλύτερη πλευρά, έστω η c να βρίσκεται επάνω στην $L = (0, \infty)$: $v_a = i$ και $v_b = e^c i$. Η κάθετος από την $v_c = z_1$ τέμνει την L στο $w = i|z_1|$.



Τώρα,

$$\begin{aligned}
 d_h(z_1, i) &\geq d_h(i|z_1|, i) = d_h(w, i), \\
 d_h(z_1, e^c i) &\geq d_h(i|z_1|, e^c i) = d_h(w, e^c i).
 \end{aligned}$$

Επειδή η c είναι η μεγαλύτερη πλευρά,

$$c = d_h(i, e^c i) \geq \max\{d_h(z_1, i), d_h(z_1, e^c i)\} \geq \max\{d_h(w, i), d_h(w, e^c i)\}.$$

Τα σημεία $i, w, e^c i$ είναι συνευθειακά και κάποιο πρέπει να κείται μεταξύ των άλλων δύο. Αυτό που ζητούμε, προκύπτει τώρα από την Πρόταση 9.3.8.

9.4.6 Εμβαδόν υπερβολικού τριγώνου

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το εξής σημαντικό:

Θεώρημα 9.4.4. Το άθροισμα των γωνιών υπερβολικού τριγώνου είναι αριθμός μεγαλύτερος του π .

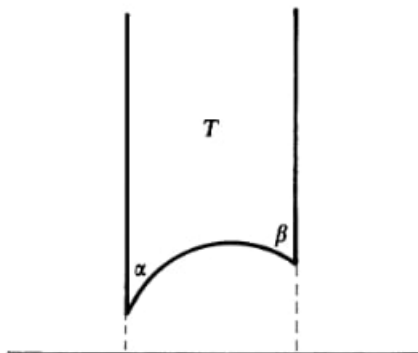
Το Θεώρημα 9.4.4 προκύπτει ως άμεσο πόρισμα της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 9.4.5. Το υπερβολικό εμβαδόν τριγώνου $T(\alpha, \beta, \gamma)$ είναι ίσο με

$$\text{Area}_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\gamma = 0$ και κανονικοποιούμε ώστε οι κορυφές v_a και v_b να κείνται στο μοναδιαίο ημικύκλιο: $v_b = e^{i\theta}$, $v_a = e^{i\phi}$, $0 < \phi < \theta < \pi$. Τότε το εσωτερικό του τριγώνου περιγράφεται ως εξής:

$$T(\alpha, \beta, 0) = \{x + iy \in \mathcal{H}^2 \mid \cos(\pi - \alpha) < x < \cos \beta, \sqrt{1 - x^2} < y < +\infty\}.$$



Συνεπώς, εφαρμόζεται το Θεώρημα του Fubini και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \text{Area}_h(T(\alpha, \beta, 0)) &= \iint_{T(\alpha, \beta, 0)} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \left(\int_{\sqrt{1 - x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx \\ &= \int_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=\sqrt{1 - x^2}}^{+\infty} dx \\ &= \int_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -[\arccos(x)]_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \\ &= \pi - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Εάν τώρα $T(\alpha, \beta, \gamma)$ είναι τρίγωνο με μηδενικές γωνίες, τότε προεκτείνουμε την πλευρά από τις v_a και v_c μέχρι να τμήσει το άπειρο σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, επειδή

$$\text{Area}_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \text{Area}_h(T(0, \beta', \gamma)) - \text{Area}_h(T(\pi - \alpha, \beta'', 0)),$$

όπου $\beta' - \beta'' = \beta$, έχουμε

$$\text{Area}_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\beta' + \gamma) - \pi + (\pi - \alpha + \beta'') = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

9.4.7 Ασκήσεις

- Αποδείξτε τα παρακάτω αποτελέσματα που αφορούν στην υπερβολική κυρτότητα:
 - Εάν το $\Omega \subset \mathcal{H}^2$ είναι υπερβολικά κυρτό χωρίο, τότε είναι και το $g(\Omega)$ για κάθε υπερβολική ισομετρία g .
 - Εάν το $\Omega \subset \mathcal{H}^2$ είναι υπερβολικά κυρτό χωρίο, τότε το εσωτερικό του $\text{Int}(\Omega)$ και η κλειστότητά του $\bar{\Omega}$ είναι υπερβολικά κυρτά.
 - Εάν $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ είναι μία αύξουσα ακολουθία υπερβολικά κυρτών συνόλων, τότε η ένωσή τους είναι υπερβολικά κυρτό σύνολο.
 - Η τομή οιοδήποτε πλήθους υπερβολικά κυρτών συνόλων είναι υπερβολικά κυρτό σύνολο.
- Αποδείξτε ότι ο τύπος (9.11) της Γωνίας Παραλληλισμού είναι ισοδύναμος με κάθε έναν από τους παρακάτω:
 - $\sinh b \tan \alpha = 1$.
 - $\tanh b \sec \alpha = 1$.
- Αποδείξτε ότι για τρίγωνα $T(\alpha, \beta, 0)$ έχουμε

$$\sinh c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

- Από την απόδειξη της Πρότασης 9.4.3 συμπεράνετε ότι $\tanh b = s$. Δείξτε κατόπιν ότι

$$\tanh b = \sinh a \tan \beta.$$

(Υπόδειξη: Αν η γεωδαισιακή που περνά από τα $x + iy$ και i έχει κέντρο x_0 , τότε

$$|x_0 - z|^2 = (x_0 - x)^2 + y^2 = 1 - 2x_0x = s^2 = |x_0 - si|^2.$$

Άρα, αν έχουμε υποθέσει $x > 0$, τότε $x_0 < 0$. Το Ευκλείδειο τρίγωνο με κορυφές $x_0, 0, si$ έχει γωνία β στο x_0 (γιατί;). Τότε, $\tan \beta = 2xs/(s^2 - 1)$.)

- Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι ισχύουν επίσης τα εξής:

$$(\alpha') \sinh b = \sinh c \sin \beta;$$

$$(\beta') \tanh a = \tanh c \cos \beta.$$

Δείξτε επίσης ότι

$$(\alpha') \cosh a \sin \beta = \cos \alpha.$$

$$(\beta') \cosh c = \cot \alpha \cot \beta.$$

6. Αποδείξτε τον Νόμο των Ημιτόνων. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων, γράφουμε

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin \gamma}\right)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}\right)^2}.$$

Ο Νόμος των Ημιτόνων θα ισχύει αν το δεξιό σκέλος είναι συμμετρικό ως προς a, b, c , δηλαδή, αν η έκφραση

$$\sinh^2 a \sinh^2 b - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2$$

είναι συμμετρική. Αυτό αποδεικνύεται με τη βοήθεια της σχέσης $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.)

7. Αποδείξτε τον Δεύτερο Νόμο των Συνημιτόνων. (Υπόδειξη: Γράφουμε για συντομία

$$A = \cosh a, \quad B = \cosh b, \quad c = \cosh C.$$

Ο Πρώτος Νόμος των Συνημιτόνων δίνει

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}.$$

Ο αριθμητής D είναι θετικός και συμμετρικός ως προς τα A, B, C . Βεβαιώστε τώρα ότι

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)} = C,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.)

8. Αποδείξτε ότι η γωνία ισοπλεύρου υπερβολικού τριγώνου είναι μικρότερη του $\pi/3$. Επίσης, δείξτε ότι

$$2 \cosh(a/2) \sin(\alpha/2) = 1.$$

9.5 Διάφορα μοντέλα Υπερβολικής Γεωμετρίας

Στην ενότητα αυτή πραγματευόμαστε τα μοντέλα του δίσκου του Poincaré και των Beltrami-Klein.



E. Beltrami (1835–1900).

Τα μοντέλα αυτά έχουν άμεση σύνδεση με το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου, όπως θα δούμε στις Ενότητες 9.5.1 και 9.5.2. Υπάρχει όμως μία θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στα μοντέλα του Poincaré και στο μοντέλο των Beltrami-Klein: τα πρώτα είναι σύμμορφα μοντέλα, οι γωνίες δηλαδή διατηρούνται και έτσι οι υπερβολικοί δίσκοι είναι Ευκλείδειοι δίσκοι. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στο μοντέλο Beltrami-Klein: υπάρχει παραμόρφωση των γωνιών και οι υπερβολικοί δίσκοι είναι Ευκλείδειοι μόνον όταν έχουν κέντρο την αρχή. Από την άλλη, το μοντέλο αυτό έχει Ευκλείδεια ευθύγραμμα τμήματα ως υπερβολικές γεωδαισιακές, κάτι που αποτελεί με κάποιο τρόπο πλεονέκτημα έναντι των άλλων δύο μοντέλων.



F. Klein (1849–1925).

Για να εισάγουμε το μοντέλο Beltrami-Klein ακολουθούμε μία μέθοδο που αναδεικνύει τη σχέση της Προβολικής με την Υπερβολική Γεωμετρία. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να

ακολουθηθεί για να δώσει όλα τα μοντέλα της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Θεωρήσαμε όμως την κλασική πραγμάτευση του μοντέλου του άνω ημιεπιπέδου (και εν συνεχεία, του δίσκου) παιδαγωγικά ορθότερη. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες και αναγνώστριες μπορούν να δουν την Άσκηση 9.5.3.10 για μία παρόμοια πραγμάτευση των μοντέλων του Poincaré.

9.5.1 Μοντέλο του δίσκου Poincaré

Η μετάβαση από το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου \mathcal{H}^2 στο μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ του \mathbb{C} γίνεται με τον μετασχηματισμό Cayley $\mathcal{C} : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ που δεν είναι παρά ο μετασχηματισμός της ομάδας $M(2)$ που δίνεται από την

$$\mathcal{C}(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad (9.14)$$

περιορισμένος στο \mathcal{H}^2 . Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{C}(0) = -1, \quad \mathcal{C}(\infty) = 1, \quad \mathcal{C}(1) = -i$$

και συνεπώς $\mathcal{C}(\partial\overline{\mathcal{H}^2}) = S^1 = \partial(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1)$. Από την άλλη, για $z \in \mathcal{H}^2$ είναι

$$w = \frac{z - i}{z + i} \iff z = -i \cdot \frac{(w + 1)}{w - 1},$$

και τότε, από τη σχέση $\Im(z) > 0$ προκύπτει $|w| < 1$. Μέσω του μετασχηματισμού Cayley, όλα τα στοιχεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας του \mathcal{H}^2 μεταφέρονται στον δίσκο $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$. Παρακάτω, δίνουμε ορισμένα παραδείγματα αυτού.

Πρόταση 9.5.1. *Το υπερβολικό μήκος $\ell_h(\gamma)$ συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, $\gamma(t) = z(t)$, δίνεται από τη σχέση*

$$\ell_h(\gamma) = 2 \int_a^b \frac{|\dot{z}(t)| dt}{1 - |z(t)|^2}. \quad (9.15)$$

Απόδειξη. Έστω η καμπύλη $c = \mathcal{C}^{-1} \circ \gamma$ του \mathcal{H}^2 . Το υπερβολικό μήκος $\ell_h(\gamma)$ της γ είναι τότε ίσο με το $\ell_h(c)$. Θέτοντας $f = \mathcal{C}^{-1}$ έχουμε:

$$c(t) = -i \cdot \frac{z(t) + 1}{z(t) - 1}, \quad \Im(c(t)) = \frac{1 - |z(t)|^2}{|z(t) - 1|^2},$$

και

$$\dot{c}(t) = \frac{2i \dot{z}(t)}{(z(t) - 1)^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η υπερβολική νόρμα της $\dot{\gamma}$ είναι:

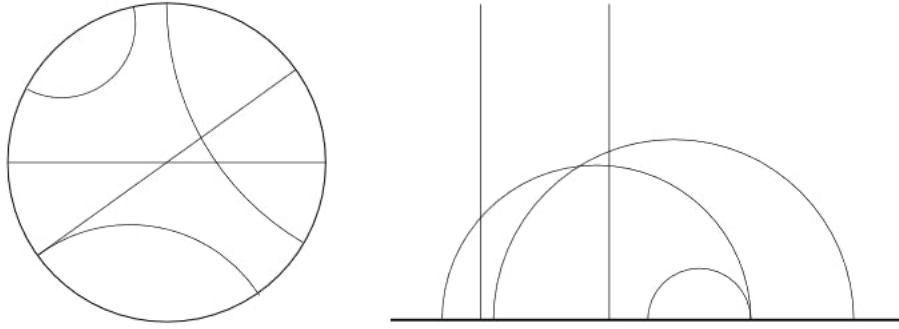
$$|\dot{\gamma}(t)|_h = \frac{2|\dot{z}(t)|}{1 - |z(t)|^2},$$

και συνεπάγεται από εδώ ο τύπος (9.15). □

Η υπερβολική απόσταση ρ_h στο μοντέλο του δίσκου ορίζεται από την

$$\rho_h(z, w) = d_h(\mathcal{C}^{-1}(z), \mathcal{C}^{-1}(w)). \quad (9.16)$$

Πρόταση 9.5.2. Οι υπερβολικές ευθείες (άρα, και γεωδαισιακές) στο μοντέλο του δίσκου $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1, \rho_h)$ είναι είτε ανοικτές διάμετροι του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, είτε τμήματα κύκλων εντός του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, ορθογώνια με το σύνορο S^1 του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$.



Γεωδαισιακές στα μοντέλα Poincaré

Απόδειξη. Εξ ορισμού, οι γεωδαισιακές του $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1, \rho_h)$ είναι οι \mathcal{C} -εικόνες των γεωδαισιακών του (\mathcal{H}^2, d_h) . Έστω κατ' αρχάς υπερβολική ευθεία L του \mathcal{H}^2 της μορφής (a, ∞) , $a \in \mathbb{R}$. Η εικόνα της $\mathcal{C}(L)$ είναι τμήμα γενικευμένου κύκλου με άκρα 1 και $\frac{a-i}{a+i}$ επάνω στον S^1 . Αν $a = 0$, τότε η $\mathcal{C}(L)$ είναι η ανοικτή διάμετρος $(-1, 1)$ που είναι ορθογώνια στον S^1 . Αν $a \neq 0$, τότε βρίσκουμε την εξίσωση του $\mathcal{C}(L)$:

$$w = u + iv = \mathcal{C}(a + iy) \iff a + iy = \mathcal{C}^{-1}(w) = -i \cdot \frac{w + 1}{w - 1}.$$

Η σχέση $a = \Re(\mathcal{C}^{-1}(w))$ δίνει

$$a = \Im\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right) = -\frac{2v}{|w - 1|^2}.$$

Εάν χωρίς βλάβη υποθέσουμε το $a > 0$, τότε $v < 0$ και μετά από τις πράξεις προκύπτει το τμήμα κύκλου

$$\mathcal{C}(L) : (u - 1)^2 + \left(v + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \quad |w| < 1, \quad v < 0.$$

Το κάθετο διάνυσμα του κύκλου αυτού είναι το

$$(u - 1, v + 1/a).$$

Η τομή του $\mathcal{C}(L)$ με τον S^1 αποτελείται από τα σημεία 1 και $e^{i\theta}$, για $\theta \in (\pi, 2\pi)$, που ικανοποιεί τη σχέση

$$(\cos \theta - 1)^2 + \left(\sin \theta + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} \iff \cos(\theta/2) + a \sin(\theta/2) = 0.$$

Θέτοντας $a = \tan(\pi b/2)$, $b \in (0, 1/2)$, παίρνουμε

$$\cos\left(\frac{\theta - \pi b}{2}\right) = 0 \iff \theta = (b + 1)\pi.$$

Στα σημεία τομής 1 και $e^{i\theta} = e^{i(b+1)\pi}$ του $\mathcal{C}(L)$ με τον S^1 , τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα του $\mathcal{C}(L)$ είναι τα

$$(0, 1/a), \quad (\cos \theta - 1, \sin \theta + 1/a),$$

ενώ τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα του S^1 είναι τα

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, \sin \theta).$$

Το ζητούμενο έπεται αμέσως. Η περίπτωση όπου $a < 0$ είναι παρόμοια, ενώ η περίπτωση όπου L είναι ημικύκλιο κέντρου a και ακτίνας r αφήνεται στην Άσκηση 9.5.3.1. \square

Πρόταση 9.5.3. *Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμοι τύποι για την υπερβολική απόσταση $\rho_h = \rho_h(z, w)$ δύο σημείων $z, w \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$:*

$$\begin{aligned} \cosh^2(\rho_h/2) &= \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}, \\ \tanh(\rho_h/2) &= \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|, \\ \rho_h &= \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Η απόδειξη της (9.17) βασίζεται στον ορισμό της ρ_h από την Εξίσωση 9.16· οι υπόλοιπες σχέσεις προκύπτουν από αλγεβρικές πράξεις. Δείτε την Άσκηση 9.5.3.2.

Πρόταση 9.5.4. *Η ομάδα των υπερβολικών ισομετριών του (B^2, ρ_h) αποτελείται από στοιχεία της μορφής*

$$z \rightarrow \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Τα στοιχεία της μορφής στο αριστερό σκέλος αποτελούν την ομάδα $M(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1)$ των σύμμορφων ισομετριών που συμβολίζεται και με $SU(1, 1)$. Η γενική ομάδα των ισομετριών $GM(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1)$ αποτελείται είτε από τα στοιχεία της $SU(1, 1)$, είτε από στοιχεία της $SU(1, 1)$ ακολουθούμενα από την $z \mapsto \bar{z}$. Η απόδειξη της Πρότασης 9.5.4 αφήνεται στην Άσκηση 9.5.3.3.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με τον τύπο που δίνει το υπερβολικό εμβαδόν χωρίου $\Omega \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$:

$$\text{Area}_h(\Omega) = 4 \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Υπογραμμίζουμε ότι οι τύποι που δίνουν το υπερβολικό μήκος της περιφέρειας και το υπερβολικό εμβαδόν υπερβολικού δίσκου $D(z_0, r)$, $z_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, $r > 0$, είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους στο υπερβολικό επίπεδο. Και αυτό, διότι ο μετασχηματισμός Cayley (9.14) είναι ισομετρία των μοντέλων (\mathcal{H}^2, d_h) και $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1, \rho_h)$, και συνεπώς και ισεμβαδική απεικόνιση.

9.5.2 Μοντέλο Beltrami-Klein

Το μοντέλο Beltrami-Klein έρχεται από την Προβολική Γεωμετρία του επιπέδου. Έστω $\mathbb{R}^{2,1}$ ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3 εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται ως εξής: αν $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$ και $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, Y_2)$, τότε

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = -X_0Y_0 + X_1Y_1 + X_2Y_2. \quad (9.18)$$

Το γινόμενο αυτό έχει πίνακα

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

ο οποίος έχει μία διπλή θετική ιδιοτιμή και μία αρνητική ιδιοτιμή. Επομένως, ορίζει αυτό που ονομάζεται $(2, 1)$ -γινόμενο: το γινόμενο ενός διανύσματος \mathbf{X} με τον εαυτό του μπορεί να είναι θετικό, αλλά και αρνητικό ή μηδέν. Θεωρούμε λοιπόν τα σύνολα των *θετικών*, *μηδενικών* και *αρνητικών* διανυσμάτων, αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} V_+ &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0 \}, \\ V_0 &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2,1} \setminus \{ \mathbf{0} \} \mid \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0 \}, \\ V_- &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle < 0 \}. \end{aligned}$$

Σχόλιο 9.5.5. Ο χώρος $\mathbb{R}^{2,1} \setminus \{ \mathbf{0} \}$ μπορεί να ειπωθεί και ως ο χώρος των ομογενών συντεταγμένων του Προβολικού Επιπέδου $\mathbb{R}P^2$, δηλαδή η ένωση των συνόλων H_0, H_1, H_2 όπως στην (7.5). Με άλλα λόγια, ο $\mathbb{R}^{2,1} \setminus \{ \mathbf{0} \}$ είναι το Προβολικό Επίπεδο εφοδιασμένο με το παραπάνω $(2, 1)$ -γινόμενο.

Θεωρούμε την τομή του $\mathbb{R}^{2,1}$ που ορίζεται από την $X_0 = 1$ και την προβολή $\mathbb{P} : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ που δίνεται για σημεία του $\mathbb{R}^{2,1}$ με $X_0 \neq 0$ από την

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2) \mapsto \left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0} \right) = \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

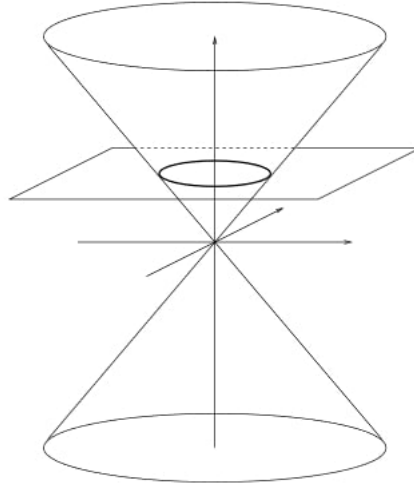
Ορίζουμε τον Beltrami-Klein δίσκο $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ να είναι η εικόνα $\mathbb{P}(V_-)$, δηλαδή,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \}.$$

Το σύνορο του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ είναι τότε η εικόνα $\mathbb{P}(V_0)$, δηλαδή,

$$S^1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}.$$

Σημειώνουμε εδώ πως αν $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ τότε η τυπική του ανύψωση στο $\mathbb{R}^{2,1}$ είναι το διάνυσμα $(1, x_1, x_2)$.



Ο κώνος φωτός: το μοντέλο Beltrami-Klein είναι η τομή του επιπέδου $X_0 = 1$ με τον κώνο.

Προφανώς, τοπολογικά τα $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ είναι τα ίδια σύνολα. Έχει σημασία όμως που τονίζουμε την *πραγματική* υφή του μοναδιαίου δίσκου όταν μιλάμε για το μοντέλο Beltrami-Klein: το μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου του Poincaré μπορεί να προκύψει με μία παρόμοια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε εδώ, αλλά στη θέση του $\mathbb{R}^{2,1}$ και του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ έχουμε τότε τον χώρο $\mathbb{C}^{1,1}$ και την μιγαδική προβολική ευθεία $\mathbb{C}P^1$ (δείτε την Άσκηση 9.5.3.10). Τα σύνολα αυτά διαφέρουν μεταξύ άλλων και στο ότι η μιγαδική προβολική ευθεία έχει μία εγγενή μιγαδική δομή, όντας σε 1–1 και επί αντιστοιχία με τη σφαίρα του Riemann, κάτι που δεν ισχύει για το πραγματικό προβολικό επίπεδο· αυτό θεωρείται χωρίς καμμία μιγαδική δομή. Αυτός είναι και ο λόγος που γράφουμε $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ αντί απλώς \mathcal{B}^2 , ούτως ώστε να διακρίνουμε το μιγαδικό μοντέλο του δίσκου Poincaré από το πραγματικό μοντέλο Beltrami-Klein.

Πρόταση 9.5.6. Η ομάδα ισομετριών του $(2, 1)$ -γινομένου (9.18) είναι η ομάδα πινάκων

$$\mathbf{O}(2, 1) = \{A \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) \mid AJA^T = J\}, \quad (9.20)$$

όπου J είναι ο πίνακας του γινομένου (9.19). Αν $A \in \mathbf{O}(2, 1)$, τότε

$$A^{-1} = JA^T J,$$

και συνεπώς $\det^2(A) = 1$.

Απόδειξη. Αν $A \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$ είναι ισομετρία, τότε για κάθε $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2,1}$ είναι

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}J\mathbf{Y}^T = \langle \mathbf{X}A, \mathbf{Y}A \rangle = \mathbf{X}AJA^T\mathbf{Y}^T.$$

Επειδή τώρα $J^2 = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας, έχουμε

$$AJA^T = J \iff A(JA^T J) = I \implies A^{-1} = JA^T J.$$

Τέλος, $\det(A^{-1}) = \det(J) \det(A) \det(J) = \det(A)$, επομένως $\det^2(A) = 1$. □

Η ομάδα $O(2, 1)$ καλείται *ορθογώνια $(2, 1)$ -ομάδα* και είναι εύκολο να δούμε χρησιμοποιώντας τη σχέση $AJA^T = J$ ότι οι γραμμές του κάθε στοιχείου της είναι διανύσματα ανάσφου ορθογώνια ως προς το γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Πράγματι, αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix},$$

τότε η $AJA^T = J$ δίνει

$$\begin{aligned} -a^2 + b^2 + c^2 &= -1, & -ad + be + cf &= 0, & -ag + bh + cj &= 0, \\ -d^2 + e^2 + f^2 &= 1, & -dg + eh + fj &= 0, \\ -g^2 + h^2 + j^2 &= 1. \end{aligned}$$

Επίσης, η σχέση $A^{-1} = JA^TJ$ σημαίνει

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -d & -g \\ -b & e & h \\ -c & f & j \end{pmatrix}.$$

Από την $A^{-1}A = I$ πέρνουμε τις επιπλέον σχέσεις

$$\begin{aligned} a^2 - d^2 - g^2 &= 1, & ab - de - gh &= 0, & ac - df - gj &= 0, \\ -b^2 + e^2 + h^2 &= 1, & -bc + ef + hj &= 0, \\ -c^2 + f^2 + j^2 &= 1. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο ότι και οι στήλες του A είναι ανά δύο ορθογώνιες μεταξύ τους και ότι επίσης:

- η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη του A είναι αρνητικά μοναδιαία διανύσματα;
- η δεύτερη και η τρίτη γραμμή (αντ. η δεύτερη και η τρίτη στήλη) του A είναι θετικά μοναδιαία διανύσματα.

Η ομάδα $O(2, 1)$ αποτελείται από στοιχεία A με $\det(A) = 1$ ή $\det(A) = -1$. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε το σύνολο $SO(2, 1)$ που είναι υποομάδα της $O(2, 1)$. Στην ομάδα $O(2, 1)$ ορίζουμε μία σχέση \sim ως εξής:

$$A \sim B \text{ αν } A = \lambda B \text{ για κάποιο } \lambda \neq 0.$$

Παρατηρήστε ότι επειδή $\det(A) = \pm 1$ για κάθε $A \in O(2, 1)$, το παραπάνω λ μπορεί να πάρει τις τιμές ± 1 . Είναι απλό να δείξουμε ότι η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας. Η *προβολική ορθογώνια $(2, 1)$ -ομάδα* είναι η

$$PO(2, 1) = O(2, 1) / \sim.$$

Επειδή η δράση της $O(2, 1)$ διατηρεί τους χώρους V_+ , V_0 και V_- , έπεται ότι η δράση της $PO(2, 1)$ στο $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ το αφήνει ομοίως αναλλοίωτο. Η Υπερβολική Γεωμετρία (κατά Klein) είναι το ζεύγος $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2, PO(2, 1))$. Η ομάδα $PSO(2, 1)$ αποτελείται από τα στοιχεία που διατηρούν

τον προσανατολισμό-δηλαδή, την ομάδα $\text{PSO}^+(2, 1)$ που είναι ισόμορφη με την $\text{SO}(2, 1)$, και από στοιχεία που δεν διατηρούν τον προσανατολισμό: αυτά, είναι συνθέσεις στοιχείων της $\text{PSO}^+(2, 1)$ με την συζυγή απεικόνιση, δηλαδή, την προβολοποίηση της

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (-x_0, x_1, x_2).$$

Αναφέρουμε τέλος ότι

$$\text{PO}(2, 1) = \text{SO}(2, 1)/\{I, -I\},$$

όπως προκύπτει από την εμφύτευση της $\text{SO}(2, 1)$ στην $\text{PO}(2, 1)$ και το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Ομάδων.

Η υπερβολική απόσταση σ_h στο μοντέλο Beltrami-Klein ορίζεται τώρα ως εξής: για οποιαδήποτε $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ σημεία του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ ορίζουμε την $\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ από τη σχέση

$$\cosh^2(\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle}, \quad (9.21)$$

όπου \mathbf{X}, \mathbf{Y} είναι ανυψώσεις των \mathbf{x}, \mathbf{y} , αντίστοιχα. Ο ορισμός της σ_h από την (9.21) είναι αναλλοίωτος από τη δράση της $\text{PO}(2, 1)$ και δεν εξαρτάται από τις ανυψώσεις των \mathbf{x}, \mathbf{y} : πράγματι, αν \mathbf{X}', \mathbf{Y}' είναι άλλες ανυψώσεις τους, αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*$ με $\mathbf{X}' = \lambda \mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}' = \mu \mathbf{Y}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \rangle^2}{\langle \mathbf{X}', \mathbf{X}' \rangle \langle \mathbf{Y}', \mathbf{Y}' \rangle} &= \frac{\langle \lambda \mathbf{X}, \mu \mathbf{Y} \rangle^2}{\langle \lambda \mathbf{X}, \lambda \mathbf{X} \rangle \langle \mu \mathbf{Y}, \mu \mathbf{Y} \rangle} \\ &= \frac{\lambda^2 \mu^2 \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\lambda^2 \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \cdot \mu^2 \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle}. \end{aligned}$$

Για $\mathbf{X} = (1, x_1, x_2)$ και $\mathbf{Y} = (1, y_1, y_2)$ παίρνουμε τον τύπο

$$\cosh^2(\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 1)^2}{(\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1)} = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2}{(x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)}. \quad (9.22)$$

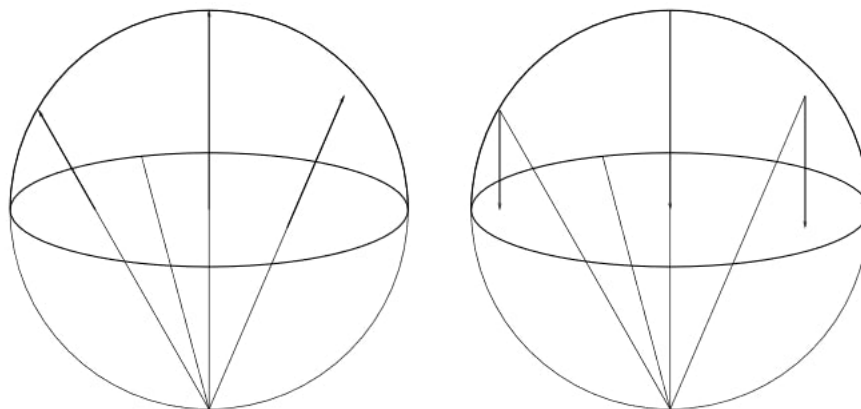
Μπορεί να δειχθεί απευθείας ότι η σ_h είναι καλώς ορισμένη μετρική. Κατ' αρχάς, για το καλώς ορισμένο, πρέπει πρώτα να δειχθεί ότι αν $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V_-$, τότε

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2 \geq \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle, \quad (9.23)$$

με την ισότητα να ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα \mathbf{X}, \mathbf{Y} αντιπροσωπεύουν το ίδιο σημείο στο προβολικό επίπεδο (και άρα, είναι ανυψώσεις του ίδιου σημείου του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$). Η ανισότητα 9.23 λέγεται και *Αντίστροφη Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski* για προφανείς λόγους. Για την απόδειξή της, δείτε την Άσκηση 9.5.3.5. Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η $\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ είναι θετική και μηδενίζεται μόνον όταν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Αμέσως φαίνεται επίσης και η συμμετρικότητα: $\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την Τριγωνική Ανισότητα· δείτε την Άσκηση 9.5.3.7. Προτιμούμε όμως εδώ να αναδείξουμε τη σχέση του μοντέλου Beltrami-Klein

με το μοντέλο του δίσκου και κατά συνέπεια και με το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου. Προς τούτο, θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{C} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 + \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}}. \quad (9.24)$$



Η απεικόνιση \mathcal{C} .

Είναι απλό να δειχθεί η παρακάτω πρόταση, δείτε και την Άσκηση 9.5.3.8.

Πρόταση 9.5.7. Η απεικόνιση \mathcal{C} που δίνεται από την (9.24) είναι 1-1 και επί και η αντίστροφη της \mathcal{C}^{-1} δίνεται από την

$$z = x + iy \mapsto \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2} \right). \quad (9.25)$$

Η \mathcal{C}^{-1} είναι σύνθεση της στερεογραφικής προβολής από τον δίσκο στην S^2 :

$$z = x + iy \mapsto \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

και της κάθετης προβολής από την S^2 στον δίσκο:

$$\left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right) \mapsto \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2} \right).$$

Τέλος, η \mathcal{C} αφήνει αναλλοίωτο το σύνορο S^1 κατά σημείο.

Αποδεικνύουμε τώρα την εξής βασική πρόταση:

Πρόταση 9.5.8. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$. Τότε

$$\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_h(\mathcal{C}(\mathbf{x}), \mathcal{C}(\mathbf{y})),$$

όπου ρ_h είναι η υπερβολική μετρική στον δίσκο $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$.

Απόδειξη. Δείχνουμε ισοδύναμα ότι για κάθε $z, w \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$,

$$\rho_h(z, w) = \sigma_h(\mathfrak{C}^{-1}(z), \mathfrak{C}^{-1}(w)).$$

Αν $z = x + iy$ και $w = u + iv$, θέτουμε

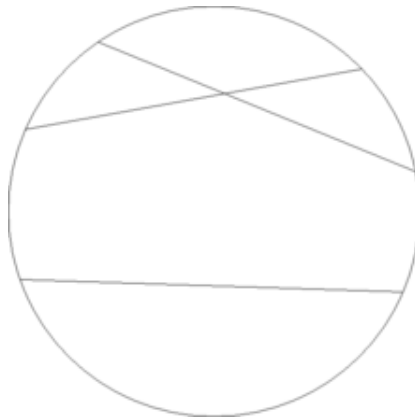
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x}{1 + |z|^2}, & x_2 &= \frac{2y}{1 + |z|^2}, \\ y_1 &= \frac{2u}{1 + |w|^2}, & y_2 &= \frac{2v}{1 + |w|^2}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \cosh^2(\sigma_h(\mathfrak{C}^{-1}(z), \mathfrak{C}^{-1}(w))) &= \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2}{(x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)} \\ &= \frac{(4\Re(z\bar{w}) - (1 + |z|^2)(1 + |w|^2))^2}{(1 - |z|^2)^2(1 - |w|^2)^2} \\ &= \left(\frac{2|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} - 1 \right)^2 \\ &= (2 \cosh^2(\rho_h(z, w)/2) - 1)^2 \\ &= \cosh^2(\rho_h(z, w)). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 9.5.9. Οι υπερβολικές ευθείες (γεωδαισιακές του $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2, \sigma_h)$) είναι Ευκλείδειες ευθείες.



Γεωδαισιακές στο μοντέλο Beltrami-Klein.

Απόδειξη. Αυτό μπορεί κανείς να το δει είτε αλγεβρικά μέσω της απεικόνισης \mathfrak{C} και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η \mathfrak{C} αφήνει αναλλοίωτο τον μοναδιαίο κύκλο κατά σημείο, είτε με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της Άσκησης 9.5.3.10ζ'). Όμως, πολύ πιο σύντομα και με γεωμετρικό τρόπο το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται μέσω της εξής απλής παρατήρησης: έστω

L γεωδαισιακή του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση που η L είναι Ευκλείδεια διάμετρος. Αυτή τότε ανυψώνεται σε ημιμεσημβρινό της S^2 ο οποίος μέσω της αντίστροφης στερεογραφικής προβολής \mathbf{S}^{-1} απεικονίζεται και πάλι στην L . Αν τέλος η L είναι τμήμα κύκλου ορθογώνιο στον S^1 , τότε αυτός ανυψώνεται στο τμήμα του σφαιρικού κύκλου της S^2 που περνά από τα άκρα της L και είναι ορθογώνιος στον S^1 στα σημεία αυτά. Όμως οι εικόνες τέτοιων κύκλων μέσω της \mathbf{S}^{-1} είναι και πάλι Ευκλείδειες ευθείες. \square

Πρόταση 9.5.10. *Κάθε υπερβολικό ημιεπίπεδο είναι υπερβολικά κυρτό.*

Απόδειξη. Εργαζόμενοι στο μοντέλο Beltrami-Klein, ένα υπερβολικό ημιεπίπεδο είναι μία από τις συνιστώσες του συμπληρώματος μίας γεωδαισιακής, που στην περίπτωση αυτή είναι μία ανοικτή χορδή του S^1 (δηλαδή, ένας κυκλικός τομέας). Για κάθε δύο σημεία ενός τέτοιου συνόλου (που είναι κυρτό με την Ευκλείδεια έννοια) υπάρχει Ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει και που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο σύνολο. Το τμήμα όμως αυτό είναι και γεωδαισιακό για την υπερβολική μετρική και η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

9.5.3 Ασκήσεις

1. Ολοκληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 9.5.2.
2. Αποδείξτε την Πρόταση 9.5.3.
3. Αποδείξτε την Πρόταση 9.5.4. (Υπόδειξη: Κάθε ισομετρία g του υπερβολικού δίσκου είναι της μορφής $g = \mathcal{C} \circ f \circ \mathcal{C}^{-1}$, όπου f ισομετρία του υπερβολικού επιπέδου και \mathcal{C} είναι ο μετασχηματισμός Cayley (9.14). Από δω και στο εξής η απόδειξη είναι θέμα πράξεων.)
4. Δείξτε ότι το γινόμενο (9.18) έχει όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου πλήν της $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.
5. Δείξτε την αντίστροφη Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski (9.23). (Υπόδειξη: Επειδή η ανισότητα δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V_-$ είναι ανυψώσεις των $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$, αντίστοιχα. Έτσι,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2 &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 1)^2, \\ \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle &= (\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1),\end{aligned}$$

όπου \cdot είναι το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο και $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Η ανισότητα (9.23) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2.$$

Αν κάποιο από τα \mathbf{x}, \mathbf{y} είναι το $(0, 0)$, η ανισότητα ισχύει. Έστω ότι κανένα από τα δύο δεν είναι το $(0, 0)$ και έστω $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία των \mathbf{x} και \mathbf{y} . Τότε, επειδή

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta,$$

γράφουμε ισοδύναμα

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta \geq \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \theta.$$

Διαιρώντας με $\|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$ παίρνουμε την ισοδύναμη έκφραση

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq \frac{2 \cos \theta}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} + \sin^2 \theta.$$

Η συνάρτηση

$$f(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} + \sin^2 \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(\theta) \leq f(0) = 2/(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|)$. Από την άλλη,

$$\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \right)^2 \geq 0 \implies \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq \frac{2}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|},$$

και η ανισότητα αποδείχθηκε. Παρατηρούμε ότι έχουμε ισότητα όταν $\theta = 0$, ισοδύναμα όταν $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ και κατά συνέπεια $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.)

6. Αποδείξτε ότι η $\text{PO}(2, 1)$ δρα μεταβατικά στο $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$. (Υπόδειξη: αρκεί να δείξετε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ υπάρχει $A \in \text{SO}(2, 1)$ με $\mathbf{X}A = [1 : 0 : 0]$, όπου μπορείτε να θεωρήσετε ότι $\mathbf{X} = [1 : x_1 : x_2]$.)
7. Αποδείξτε απευθείας την ισχύ της Τριγωνικής Ανισότητας για την σ_h . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9.5.3.6, πάρτε τα σημεία $\mathbf{0} = (0, 0)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ και αποδείξτε ότι

$$\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sigma_h(\mathbf{0}, \mathbf{x}) + \sigma_h(\mathbf{0}, \mathbf{y}).$$

8. Αποδείξτε την Πρόταση 9.5.7.
9. Εργαζόμενοι όπως στην Άσκηση 9.5.3.3 και χρησιμοποιώντας την απεικόνιση \mathfrak{C} που δίνεται από την (9.24), βρείτε τη μορφή των υπερβολικών ισομετριών του $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2, \sigma_h)$.
10. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο που ακολουθήσαμε για το μοντέλο Beltrami-Klein για να ορίσετε ανεξάρτητα από τη Γεωμετρία της Αντιστροφής τα μοντέλα Poincaré του άνω ημιεπιπέδου και του δίσκου ως εξής:

(α') Συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^{1,1}$ τον μιγαδικό διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^2 εφοδιασμένο με ένα από τα παρακάτω $(1, 1)$ -Ερμιτιανά γινόμενα $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ με πίνακες

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{kai} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα. Αναλυτικά, αν $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1)$ και $\mathbf{W} = (W_0, W_1)$, τότε

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_1 &= \mathbf{Z} J_1 \mathbf{W}^* = -Z_0 \overline{W_0} + Z_1 \overline{W_1}, \\ \langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_2 &= \mathbf{Z} J_2 \mathbf{W}^* = -i Z_0 \overline{W_1} + i Z_1 \overline{W_0}, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{W}^* = (\overline{W_0}, \overline{W_1})^T$. Διαπιστώστε ότι όλες οι ιδιότητες του Ερμιτιανού γινομένου ισχύουν, πλην της θετικότητας. Διαπιστώστε ότι και οι δύο πίνακες J_1, J_2 έχουν μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή.

- (β') Και για τα δύο γινόμενα, ορίστε τα σύνολα των θετικών, μηδενικών και αρνητικών διανυσμάτων, αντίστοιχα. Παίρνοντας την προβολή $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{1,1} \rightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την $\mathbb{P}(Z_0, Z_1) = Z_1/Z_0 = z \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι η προβολή του συνόλου των αρνητικών διανυσμάτων ως προς το πρώτο γινόμενο Στην τομή $Z_0 = 1$ είναι ο $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, ενώ ως προς το δεύτερο είναι το \mathcal{H}^2 . Δείξτε επίσης ότι τα αντίστοιχα σύνολα είναι οι προβολές των αντίστοιχων συνόλων των μηδενικών διανυσμάτων.
- (γ') Βρείτε τις ομάδες ισομετριών των $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ και από αυτές ορίστε τις $\text{PSU}(1, 1)$ και $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ αντίστοιχα, ως τις ομάδες μετασχηματισμών των $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και \mathcal{H}^2 .
- (δ') Ορίστε την υπερβολική απόσταση ρ_i $i = 1, 2$ από τη σχέση

$$\cosh^2(\rho_i(z, w)/2) = \frac{|\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_i|^2}{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle_i \langle \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle_i}, \quad i = 1, 2$$

και δείξτε ότι είναι καλώς ορισμένη, ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής και παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση των $\text{PSU}(1, 1)$ και $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, αντίστοιχα.

- (ε') Βρείτε τον μετασχηματισμό που μας επιτρέπει να περνάμε από το ένα μοντέλο στο άλλο.
- (ς') Εντοπίστε τις γεωδαισιακές και των δύο μοντέλων ως εξής: στο μοντέλο του δίσκου λ.χ., πάρτε $z, w \in S^1 = \partial \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και ανυψώστε τους \mathbf{Z} και \mathbf{W} , αντίστοιχα, στο σύνολο των μηδενικών διανυσμάτων. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_1 = -1$. Το ανοικτό τμήμα με άκρα τα \mathbf{Z}, \mathbf{W} είναι το

$$\gamma(t) = e^{t/2} \mathbf{Z} + e^{-t/2} \mathbf{W}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε τώρα πως κάθε σημείο του τμήματος αυτού είναι αρνητικό διάνυσμα και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο της απόστασης, δείξτε επίσης ότι

$$\rho_1(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|, \quad \text{για κάθε } t, s \in \mathbb{R}.$$

Βιβλιογραφία

- [1] M.A. Armstrong: *Ομάδες και συμμετρία*. Επιμέλεια: Ν. Μαμαρίδης. Μετάφραση: Δ. Νταής. Leader Books, 2002.
- [2] A.F. Beardon: *The Geometry of Discrete groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [3] H.S.M. Coxeter & S.L. Greitzer: *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America, 1967.
- [4] R. Fenn: *Geometry*. Springer-Verlag, 2000.
- [5] R. Hartshorne: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer-Verlag, 2000.
- [6] F. Klein: *Geometry*. Translated from the Third German Edition by: E.R. Hendrick & C.A. Noble. Dover Publ. Inc., 1939.
- [7] B.E. Meserve: *Fundamental concepts of Geometry*. Dover Publ. Inc., 1959.
- [8] Ν. Σακελλαρίου: *Στοιχεία Προβολικῆς Γεωμετρίας*. Έκδοτική Μπλαζουδάκη, 1927.