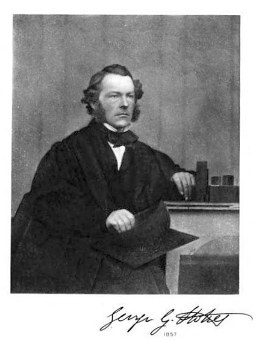
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΕΜ-216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ, ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ



Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εκδοχή 1.0   21 Ιανουαρίου 2023

Πρόλογος

Οἱ σημειώσεις αὐτὲς ἀφοροῦν στὸ μάθημα ΜΕΜ216-Ἀνάλυση Πολλῶν Μεταβλητῶν τοῦ κανονικοῦ Προγράμματος Σπουδῶν τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν καὶ Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Κρήτης. Ἐκδοχὲς τῶν σημειώσεων αὐτῶν ποὺ γράφονταν περιοδικὰ σὲ χρόνο περίπου εἴκοσι ἐτῶν ὑπῆρχαν σὲ χειρόγραφη (καὶ μᾶλλον ἄναρχη) μορφή. Τὸ παρόν κείμενο εἶναι τυπογραφημένη σύζευξη αὐτῶν τῶν σημειώσεων μὲ ἐπιλογὴ τῶν καλύτερων κομματιῶν ἀπὸ ὅλες τὶς ἐκδοχές τους.

Οἱ ἐνδιαφερόμενοι φοιτητὲς καὶ φοιτήτριες ποὺ θὰ ἐντρυφήσουν στὶς σημειώσεις αὐτές:

α) θὰ δοῦν ἐμπεριστατωμένες καὶ πλήρεις ἀποδείξεις ὅλων τῶν σπουδαίων θεωρημάτων τοῦ Λογισμοῦ ποὺ διδάχθηκαν (συνήθως χωρὶς ἀπόδειξη) κατὰ τὰ πρῶτα ἔτη τῶν σπουδῶν τους,

β) θὰ κάνουν τὸ πρῶτο βῆμα πρὸς τὰ προχωρημένα μεταπτυχιακὰ μαθήματα τῶν Διαφορισίμων Πολλαπλοτήτων ἀλλὰ καὶ τῆς Πραγματικῆς Ἀνάλυσης καὶ τέλος

γ) ἀκόμη καὶ ἂν τὰ ἐνδιαφέροντά τους κινοῦνται πρὸς τὰ Ἐφαρμοσμένα Μαθηματικά, οἱ σημειώσεις αὐτὲς ἀποτελοῦν σύντομο ὁδηγό/προπομπό, πλείστων πολλῶν προχωρημένων μαθημάτων τῆς συγκεκριμένης κατεύθυνσης.

Οἱ σημειώσεις βασίζονται κατὰ κύριο λόγο στὰ κλασικὰ βιβλία τοῦ Spivak καὶ τοῦ Munkres, στὶς χειρόγραφες σημειώσεις τοῦ Κ. Ἀθανασόπουλου (Ἡράκλειο 1992), ὅπως καὶ σὲ διαφόρων εἰδῶν σημειώσεις ποὺ κυκλοφοροῦν εὐρέως στὸ διαδίκτυο. Καταβλήθηκε ἰδιαίτερη προσπάθεια νὰ ἐλαχιστοποιηθοῦν τὰ τυπογραφικὰ λάθη καὶ οἱ διαφόρων εἰδῶν ἀβλεψίες· σὲ αὐτὸ βοήθησαν οὐσιαστικὰ τὰ μέλη τοῦ ἀκροατηρίου μου, τὰ ὁποῖα καὶ εὐχαριστῶ.

Τέλος, κάτι ἐπὶ προσωπικοῦ: θὰ ἐπιθυμοῦσα διακαῶς οἱ σημειώσεις αὐτὲς νὰ συμπεριελάμβαναν ἕνα μικρὸ κεφάλαιο ἀφιερωμένο στὴν εἰσαγωγὴ στὶς Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες-ἐνδεχομένως αὐτὸ τὸ κεφάλαιο νὰ προστεθεῖ σὲ ὕστερες ἐκδοχὲς τοῦ κειμένου. Ἔτσι κι ἀλλιῶς ὅμως, λόγω τοῦ τετραώρου τοῦ μαθήματος, πολὺ δύσκολα θὰ καταστεῖ δυνατὸ νὰ διδαχθεῖ τὸ κεφάλαιο αὐτό.

Ἡράκλειο Κρήτης
Ὀκτώβριος 2022

Συνάρτηση μίας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες.

-Leonhard Euler, 1707-1783

Στὴν Ἀλίκη

Περιεχόμενα

1 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$: άλγεβρα και τοπολογία 1
- 1.1 Ανασκόπηση του $\mathbb{R}$ . . . 1
  - 1.1.1 Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών . . . 1
  - 1.1.2 Θεμελιώδη θεωρήματα του Λογισμού μιας μεταβλητής . . . 2
- 1.2 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$. Νόρμα και εσωτερικό γινόμενο . . . 3
- 1.3 Ο Μετρικός Ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^n, e)$ . . . 6
  - 1.3.1 Ευκλείδεια μετρική . . . 6
  - 1.3.2 Ακολουθίες-σύγκλιση . . . 7
  - 1.3.3 Ανοικτά και κλειστά σύνολα . . . 8
  - 1.3.4 Συμπάγεια . . . 11
  - 1.3.5 Συνεκτικότητα . . . 13
- 1.4 Ανασκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας . . . 14
  - 1.4.1 Γραμμικές απεικονίσεις . . . 14
  - 1.4.2 Ορίζουσες . . . 16
- 1.5 Ασκήσεις . . . 17

2 Απεικονίσεις του $\mathbb{R}^n$: όρια και συνέχεια 19
- 2.1 Απεικονίσεις του $\mathbb{R}^n$ . . . 19
  - 2.1.1 Πράξεις μεταξύ απεικονίσεων . . . 19
  - 2.1.2 Όρια . . . 20
- 2.2 Συνέχεια . . . 21
  - 2.2.1 Συνέχεια στα συμπαγή . . . 23
  - 2.2.2 Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών . . . 26
- 2.3 Ασκήσεις . . . 27

3 Διαφόριση 29
- 3.1 Ορισμός της παραγώγου . . . 29
  - 3.1.1 Διαφορισιμότητα και συνέχεια . . . 31
  - 3.1.2 Παράγωγος καμπύλης . . . 33
- 3.2 Κανόνας της αλυσίδας . . . 34
- 3.3 Μερικές παράγωγοι-Ιακωβιανός πίνακας . . . 36
  - 3.3.1 Παραγώγιση υπό το σύμβολο ολοκλήρωσης . . . 40
- 3.4 Κατά κατεύθυνση παράγωγοι-κλίση . . . 41
  - 3.4.1 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής . . . 43
- 3.5 Θεωρήματα Αντιστροφής και Πεπλεγμένων Συναρτήσεων . . . 43
  - 3.5.1 Το Θεώρημα της Αντιστροφής . . . 43
  - 3.5.2 Το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων . . . 50
  - 3.5.3 Θεώρημα Καταβύθισης . . . 53

3.6 Διαφόριση υψηλότερης τάξης . . . 55
3.6.1 Κατά κατεύθυνση παράγωγοι υψηλότερης τάξης . . . 56
3.6.2 Θεώρημα Taylor . . . 57
3.7 Ασκήσεις . . . 57

4 Ολοκλήρωση **63**
4.1 Ολοκλήρωμα σε ορθογώνια . . . 63
4.1.1 Ιδιότητες του ολοκληρώματος . . . 69
4.1.2 Ολοκληρωσιμότητα και συνέχεια . . . 71
4.1.3 Σύνολα μηδενικού μέτρου . . . 71
4.1.4 Το Θεώρημα Riemann-Lebesgue . . . 75
4.1.5 Το Θεώρημα του Fubini . . . 77
4.2 Ολοκλήρωση σε γενικότερα χωρία . . . 80
4.2.1 Όγκος φραγμένου συνόλου . . . 80
4.2.2 Ολοκλήρωση σε φραγμένα χωρία . . . 82
4.2.3 Διαμερίσεις της μονάδας και γενικευμένα ολοκληρώματα . . . 84
4.3 Το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών . . . 91
4.4 Το Θεώρημα του Sard . . . 95
4.4.1 Μηδενικό μέτρο και $\mathcal{C}^1$ συναρτήσεις . . . 95
4.4.2 Το Θεώρημα του Sard . . . 97
4.5 Ασκήσεις . . . 98

5 Διαφορικές μορφές **103**
5.1 Στοιχεία Εξωτερικής Άλγεβρας . . . 103
5.1.1 Ομάδα μετατάξεων . . . 103
5.1.2 Δυϊκός χώρος . . . 104
5.1.3 Πολυγραμμικές απεικονίσεις . . . 105
5.1.4 Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί τανυστές . . . 106
5.1.5 Τανυστικό γινόμενο . . . 108
5.1.6 Εξωτερικό (σφηνοειδές) γινόμενο . . . 109
5.2 Διανυσματικά πεδία και διαφορικές μορφές . . . 112
5.2.1 Εφαπτόμενος χώρος, διανυσματικά πεδία . . . 112
5.2.2 Διαφορικές μορφές . . . 114
5.2.3 Εξωτερικό διαφορικό . . . 116
5.3 Ασκήσεις . . . 121

6 Το Θεώρημα του Stokes **125**
6.1 Το Λήμμα Poincaré . . . 125
6.1.1 Κλειστές και ακριβείς μορφές . . . 125
6.1.2 Συσταλτά σύνολα . . . 126
6.1.3 Το Λήμμα Poincaré . . . 127
6.2 Το Θεώρημα του Stokes . . . 131
6.2.1 Ολοκλήρωση σε αλυσίδες . . . 131
6.2.2 Το Θεώρημα του Stokes . . . 135
6.3 Ασκήσεις . . . 137

Κεφάλαιο 1

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$: άλγεβρα και τοπολογία

1.1 Ανασκόπηση του $\mathbb{R}$

1.1.1 Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $\mathbb{R}$, ώστε $0, 1 \in \mathbb{R}$ και το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ τις οποίες καλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, αντίστοιχα. Το επόμενο θεώρημα περιγράφει τα *αξιώματα σώματος* του $\mathbb{R}$:

Θεώρημα 1.1.1. *S1)* $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

S2) $0 + x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

S3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$: $x + y = 0$ $(y := -x)$.

S4) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

P1) $(xy)z = x(yz)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

P2) $1x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

P3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists y \in \mathbb{R}$: $yx = 1$ $(y := 1/x)$.

P4) $xy = yx$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

D) $(x + y)z = xz + yz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Πόρισμα 1.1.2.

$$0x = 0, \quad x - y = x + (-y), \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε το επόμενο *Θεώρημα Διάταξης*:

Θεώρημα 1.1.3. *O1)* $\forall x \in \mathbb{R}$: *είτε* $x > 0$, *είτε* $-x > 0$, *είτε* $x = 0$.

O2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *εάν* $x > 0$, $y > 0$, *τότε* $x + y > 0$.

O3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *εάν* $x > 0$, $y > 0$, *τότε* $xy > 0$.

Έχουμε ότι

$$x < y \iff y - x > 0$$

Θεώρημα 1.1.4. *(Θεώρημα Πλήρωσης) Έστω* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, *άνω φραγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει το ελάχιστο των άνω φραγμάτων του* $\sup A$.

Ένα $S \subset \mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό, αν

I1) $0 \in S$,

I1) $\forall x \in S \implies x+1 \in S$.

Τυπικό παράδειγμα επαγωγικού συνόλου είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών [1]

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}.$$

Θεώρημα 1.1.5. *(Θεώρημα Επαγωγής) Έστω $P(n)$ πρόταση ορισμένη $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι*

1. *Ισχύει η $P(0)$,*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \implies P(n+1)$.*

Τότε η $P(n)$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 1.1.6. *(Αρχιμήδεια ιδιότητα) Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο εντός του $\mathbb{R}$.*

Θεώρημα 1.1.7. *(Θεώρημα Πλήρωσης) Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}$ συγκλίνει.*

1.1.2 Θεμελιώδη θεωρήματα του Λογισμού μιας μεταβλητής

Θεώρημα 1.1.8. *(**Μεγίστου-Ελαχίστου**) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχουν $x_m, x_M \in [a,b]$ ώστε για κάθε $x \in [a,b]$ να είναι:*

$$m = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = M.$$

Με άλλα λόγια η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (αντ. ελάχιστο) στο x_M, (αντ. στο x_m). Συμβολίζουμε

$$m = \min_{x\in[a,b]} f, \quad M = \max_{x\in[a,b]} f.$$

Θεώρημα 1.1.9. *(**Ενδιαμέσων Τιμών**) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Εάν $y \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι υπάρχουν $x, x' \in [a,b]$ ώστε $f(x) < y$ και $f(x') > y$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = y$.*

Θεώρημα 1.1.10. *(**Μέσης Τιμής**) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και διαφορίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Θεώρημα 1.1.11. *(**Taylor**) Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$. Αν $a \in I$, τότε για κάθε $x \in I$ ισχύει ότι*

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x^*)(x-a)^{k+1},$$

όπου x^* είναι κατάλληλο σημείο του I ανάμεσα στα x, a.

[1] Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι το

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι το

$$\mathbb{Q} = \{a/b : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\}$$

και τέλος το σύνολο των αρρήτων είναι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 1.1.12. *(***Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού Ι***) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

είναι διαφορίσιμη στο (a, b) και

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in (a, b).$$

Θεώρημα 1.1.13. *(***Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού ΙΙ***) Με τις προϋποθέσεις του ΘΘΟΛ Ι:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

1.2 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$. Νόρμα και εσωτερικό γινόμενο

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι ο n-διάστατος πραγματικός χώρος

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n), \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n\},$$

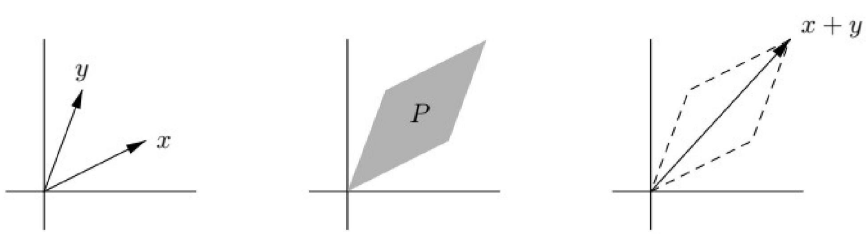
με τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ να καλούνται εδώ και *διανύσματα*. Θα υπάρχει στο εξής σιωπηρή ταύτιση των *σημείων* x με τα διανύσματα που έχουν αρχή το $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$[2]και τέλος το x). Η πρόσθεση $+$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από τη σχέση

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Μεταθετική: $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. Προσεταιριστική: $x + (y + z) = (x + y) + z$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
3. Ουδέτερο στοιχείο: $x + \mathbf{0} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
4. Αντίθετο στοιχείο: $x + (-x) = \mathbf{0}$ για κάθε $x, \mathbb{R}^n$, όπου $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Συμπεραίνουμε πως το ζεύγος $(\mathbb{R}^n, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα (η *προσθετική πραγματική ομάδα*).



[2]Είθισται τα διανύσματα να συμβολίζονται με έντονους χαρακτήρες: **x** αντί του x. Για να μην επιβαρυνθεί ο συμβολισμός, το μόνο διάνυσμα που θα συμβολίζουμε με έντονους χαρακτήρες θα είναι το μηδενικό διάνυσμα.

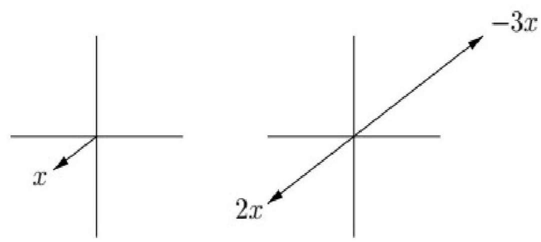
Σχήμα 1.1. Η πρόσθεση διανυσμάτων δίνεται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ορίζεται επίσης και ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\cdot$ ως εξής: αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$\lambda \cdot x = \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$.
4. $1x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.



Σχήμα 1.2. Ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων με αριθμό είναι συστολή ή διαστολή.

Συνεπώς, η τριάδα $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Η διάσταση του δ.χ. $\mathbb{R}^n$ είναι n. Η *κανονική βάση* του αποτελείται από τα διανύσματα $e_1, \dots, e_n$, όπου

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

με το 1 να βρίσκεται στην i-συντεταγμένη. Αν $x = (x_1, \dots, x_n)$ τότε

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

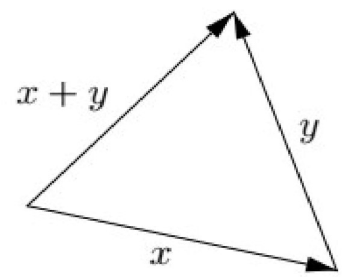
Η *Ευκλείδεια νόρμα* $\|\cdot\|$ ορίζεται για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ από την

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Για κάθε x, η νόρμα του $\|x\|$ είναι το *μήκος* του διανύσματος x. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι *χώρος με νόρμα*. Τα ακόλουθα αξιώματα της νόρμας ικανοποιούνται:

1. Η $\|\cdot\|$ είναι μία συνάρτηση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (Τριγωνική ανισότητα)
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα x, y, είναι γραμμικά εξαρτημένα: υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, τέτοιο ώστε $y = \lambda x$.



Σχήμα 1.3. Η Τριγωνική ανισότητα.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ και $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Το *βαθμωτό (εσωτερικό) τους γινόμενο* $a \cdot b$ ορίζεται από την
$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$
Παρατηρήστε ότι
$$4\ a \cdot b = \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2.$$
Συνεπώς, το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο ορίζεται από την Ευκλείδεια νόρμα.[3] Ο $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ είναι *χώρος με εσωτερικό γινόμενο*. Πράγματι, ισχύουν οι εξής ιδιότητες για την $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

1. $a \cdot a \geq 0$ και $a \cdot a = 0 \iff a = \mathbf{0}$. (Θετικά ορισμένο).

2. $a \cdot b = b \cdot a$, για κἀθε $a, b \in \mathbb{R}^n$. (Συζυγία).

3. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. (Γραμμικότητα Ι).

4. $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Γραμμικότητα ΙΙ).

Πρόταση 1.2.1. *Έστω u, v διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Τότε ισχύει η Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Bunyakowski (CSB):*
$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \tag{1.1}$$
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα u, v είναι γραμμικά εξαρτημένα.

[3] Αν έχουμε έναν διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο, έστω τον $(X, \cdot)$, τότε τον τρέπουμε σε νορμικό χώρο ορίζοντας τη νόρμα $\|\cdot\|_X$ στον X από τη σχέση
$$\|x\|_X = \sqrt{x \cdot x}, \quad x, \in X.$$
Στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου είδαμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, κάτι που δεν ισχύει εν γένει σε τυχαίους χώρους με νόρμα.

Απόδειξη. Έστω $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ και $x \in \mathbb{R}$. Εάν κάποιο από τα u, v είναι το μηδενικό διάνυσμα, η πρόταση ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι και τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{n} (u_i x + v_i)^2 \\ &= \|u\|^2 x^2 + 2(u \cdot v)\, x + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός:

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2.$$

Η διακρίνουσα είναι αυστηρά μικρότερη του μηδενός αν και μόνο αν το τριώνυμο είναι μεγαλύτερο του μηδενός για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $u_i x + v_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή, αν και μόνο αν τα διανύσματα δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Η Ανισότητα CSB μας επιτρέπει να ορίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων. Πράγματι, αν $u, v \in \mathbb{R}^n$ τότε ορίζουμε τη γωνία $\theta = \angle(u, v)$ από τη σχέση

$$\theta = \arccos \left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right) \in [0, \pi].$$

Προκύπτει κατόπιν ο τύπος

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Πόρισμα 1.2.2. *Τα $u, v \in \mathbb{R}^n$ λέγονται κάθετα ή ορθογώνια μεταξύ τους, $u \perp v$, αν και μόνο αν $u \cdot v = 0$.*

1.3 Ο Μετρικός Ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^n, e)$

1.3.1 Ευκλείδεια μετρική

Η *Ευκλείδεια απόσταση*[4] $e(x, y)$ δύο σημείων $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από τη σχέση

$$e(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, e)$ είναι *μετρικός χώρος*. Πράγματι, ισχύουν τα ακόλουθα αξιώματα μετρικής:

1. Η e είναι μία συνάρτηση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

2. $e(x, y) = 0 \iff x = y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. $e(x, y) = e(y, x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4. (Τριγωνική ανισότητα)
$$e(x, y) \leq e(x, z) + e(z, y)$$
για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα x, y, z, είναι συνευθειακά.

[4] Κανονικά, θα έπρεπε να συμβολίζουμε με $e_n(x, y)$ αντί $e(x, y)$. Προτιμάμε το δεύτερο για λόγους ελάφρυνσης του συμβολισμού.

Ας παρατηρήσουμε[5] ότι η Ευκλείδεια απόσταση συνδέεται άμεσα με τη νόρμα:

$$e(x,y) = \|x-y\|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

1.3.2 Ακολουθίες-σύγκλιση

Μια *ακολουθία* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία απεικόνιση $x^k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$,

$$k \mapsto x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k).$$

λέμε ότι *η* x^k *συγκλίνει στο* $x \in \mathbb{R}^n$, $x^k \to x$, αν και μόνο αν

$$\lim_{k\to\infty} e(x^k, x) = \|x^k - x\| = 0,$$

δηλαδή,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\epsilon):\ \forall\, k \geq n_0 \implies e(x^k, x) < \epsilon.$$

Έχουμε το παρακάτω πόρισμα που αφορά στις *μηδενικές* ακολουθίες:

Πόρισμα 1.3.1. *1. Εάν* $x^k \to \mathbf{0}$ *και η* y^k *είναι τέτοια ώστε* $\|y^k\| \leq \|x^k\|$, $k \in \mathbb{N}$, *τότε* $y^k \to \mathbf{0}$.

2. *Εάν* $x^k, y^k \to \mathbf{0}$, *τότε* $x^k + y^k \to \mathbf{0}$.

3. *Εάν* $x^k \to \mathbf{0}$ *και* $\lambda > 0$ *τότε* $\lambda x^k \to \mathbf{0}$.

4. $x^k \to \mathbf{0} \iff \|x^k\| \to 0$.

5. $x^k \to \mathbf{0}$ *αν και μόνο αν* $x_i^k \to 0$, *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$.

6. $x^k \to x_0 \iff x^k - x_0 \to \mathbf{0}$.

Για οποιεσδήποτε συγκλίνουσες ακολουθίες έχουμε τώρα το εξής:

Πόρισμα 1.3.2. *1. Εάν* $x^k \to x_0$, $y^k \to y_0$, *τότε* $x^k + y^k \to x_0 + y_0$.

2. *Εάν* $x^k \to x_0$ *και* $\lambda > 0$ *τότε* $\lambda x^k \to \lambda x_0$.

3. $x^k \to x_0 \implies \|x^k\| \to \|x_0\|$.

4. $x^k \to x_0$ *αν και μόνο αν* $x_i^k \to x_0^i$, *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$.

Η ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\epsilon):\ \forall\, k, l \geq n_0 \implies e(x^k, x^l) < \epsilon.$$

Σχόλιο 1.3.3. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μία ακολουθία (x^k) του $\mathbb{R}^n$ είναι Cauchy αν και μόνο αν όλες οι συντεταγμένες ακολουθίες (x_i^k) είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Σε έναν οιονδήποτε μετρικό χώρο μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy με το αντίστροφο να μην ισχύει εν γένει. Στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, e)$ αυτό συμβαίνει και γι αυτό καλείται *πλήρης* μετρικός χώρος. Διαμέσου τώρα της πληρότητας του $(\mathbb{R}, e)$ και της προηγούμενης παρατήρησης, μπορούμε να δείξουμε την πληρότητα του $(\mathbb{R}^n, e)$. Δείτε την άσκηση 1.5.6.

[5]Ένας οποιοσδήποτε διανυσματικός χώρος με νόρμα $|\cdot|$ τρέπεται αυτομάτως σε μετρικό χώρο: ορίζουμε απόσταση d από τη σχέση $d(x,y) = |x-y|$. Στην περίπτωση του Ευκλείδειου μετρικού χώρου συμβαίνει και το αντίστροφο, πράγμα που δεν ισχύει εν γένει σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο. Πράγματι,για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = e(x, \mathbf{0})$.

Η ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ λέγεται *φραγμένη* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x^k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.3.4. *Εάν η ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $x^k \to x_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}: \ \|x^k - x_0\| \leq 1, \ \forall k > k_0.$$

Έστω

$$M > \max\{\|x^1\|, \ldots, \|x^{k_0}\|, \|x_0\| + 1\}.$$

Τότε, $\|x^k\| \leq M$, $k \in \mathbb{N}$. □

Έστω ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ένα υποσύνολό της $(x^{k_l})_{k_l\in\mathbb{N}}$ που περιέχει κάποιους (πιθανώς και όλους τους) όρους της, λέγεται *υπακολουθία* της x^k. Το επόμενο Λήμμα αποδεικνύεται άμεσα:

Λήμμα 1.3.5. *Κάθε υπακολουθία φραγμένης ακολουθίας είναι φραγμένη. Κάθε υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας είναι συγκλίνουσα.*

Θεώρημα 1.3.6. *(**Bolzano-Weierstrass**) Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ έχει κάποια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Για λόγους πληρότητας του κειμένου αποδεικνύουμε πρώτα το θεώρημα για την περίπτωση του $\mathbb{R}$. Έστω $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία. Ένας όρος της x^ν λέγεται μέγιστος αν $x^\nu > x^\mu$, $\forall \mu > \nu$. Εάν υπάρχουν άπειροι μέγιστοι όροι, τότε σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία που επειδή είναι φραγμένη θα είναι και συγκλίνουσα. Εάν υπάρχουν πεπερασμένοι μέγιστοι όροι, τότε η x^k έχει μία αύξουσα υπακολουθία που ξεκινά από τον τελευταίο μέγιστο όρο.

Η γενική περίπτωση ανάγεται στην περίπτωση του $\mathbb{R}$: πράγματι, η ακολουθία των πρώτων συντεταγμένων είναι μια φραγμένη πραγματική ακολουθία, επομένως έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Ομοίως, μπορεί κανείς να εξαγάγει μια συγκλίνουσα υπακολουθία απο την ακολουθία των δεύτερων συντεταγμένων και ούτω καθεξής, μέχρι στο τέλος να περάσουμε από την αρχική ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ σε μια υπακολουθία στην οποία συγκλίνει κάθε ακολουθία συντεταγμένων. Επομένως, η ίδια η υπακολουθία είναι συγκλίνουσα. □

1.3.3 Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Η *ανοικτή μπάλλα $B(x, r)$ κέντρου $x \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνας $r > 0$* είναι το σύνολο

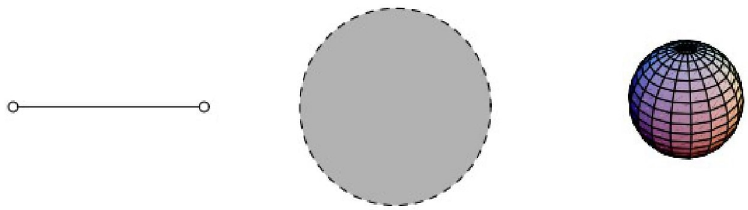
$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid e(y, x) < r\}.$$

Η *κλειστή μπάλλα $B(x, r)$ κέντρου $x \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνας $r > 0$* είναι το σύνολο

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid e(y, x) \leq r\}.$$

Η *σφαίρα $S(x, r)$ κέντρου $x \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνας $r > 0$* είναι το σύνολο

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid e(y, x) = r\}.$$



Σχήμα 1.4. Μπάλλες σε διάφορες διαστάσεις.

Σχόλιο 1.3.7. Μπορούμε ισοδύναμα να γράφουμε αντιστοίχως

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < r\}, \\ \overline{B(x,r)} &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \leq r\}, \\ S(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| = r\}. \end{aligned}$$

Καλούμε *ανοικτό ορθογώνιο* κάθε σύνολο της μορφής

$$R = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i), \quad (a_i, b_i) \subset \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n.$$

Από την άλλη, καλούμε *κλειστό ορθογώνιο* κάθε σύνολο της μορφής

$$\overline{R} = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i], \quad [a_i, b_i] \subset \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n.$$

Ένα $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *ανοικτό* αν

$$\forall x \in A\ \exists r = r(x) :\ B(x,r) \subset A,$$

ενώ καλείται *κλειστό* αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοικτό.[6]

Σχόλιο 1.3.8. Συμφωνούμε ότι τα μόνα σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά είναι το κενό σύνολο $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$.

Σχόλιο 1.3.9. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$. Λέγοντας (ανοικτή) περιοχή $V_a = V(a)$ του a εννοούμε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το a. Προφανώς όλες οι ανοικτές μπάλλες και τα ανοικτά ορθογώνια κέντρου a ειναι περιοχές του a.

Σχόλιο 1.3.10. Η *Ευκλείδεια ή συνήθης τοπολογία* του $\mathbb{R}^n$ είναι η κλάση όλων των ανοικτών του συνόλων. Ισχύουν τα εξής:

1. Η ένωση οιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

[6] Ο ορισμός του ανοικτού συνόλου μπορεί να αντικατασταθεί με τον ισοδύναμό του όπου αντί ανοικτές μπάλλες χρησιμοποιούμε ανοικτά ορθογώνια. Δείτε την Άσκηση 1.5.8.

2. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

Λέμε επίσης ότι η κλάση όλων των ανοικτών μπαλλών του $\mathbb{R}^n$ αποτελεί μία *βάση ανοικτών περιοχών* για την συνήθη τοπολογία.

Πρόταση 1.3.11. *Το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό αν και μόνο αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του A έχει όριο μέσα στο A.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του με

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x \notin A.$$

Τότε, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ το οποίο είναι ανοικτό. Άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ να είναι $x^k \in B(x,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ για κάθε $k \geq N$, άτοπο.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το A δεν είναι κλειστό. Τότε, το $\mathbb{R}^n \setminus A$ δεν είναι ανοικτό, δηλαδή

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus A : \ B(x,\epsilon) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus A, \ \forall \epsilon > 0,$$

οπότε

$$B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

Άρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x^k \in B(x, 1/k) \cap A$. Όμως τότε,

$$e(x^k, x) \leq \frac{1}{k} \to 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\lim_{k\to\infty} x^k = x \in A$. □

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Ενα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *οριακό σημείο του* (ή, *σημείο συσσώρευσης του*) A αν υπάρχει ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του A που να συγκλίνει στο x. Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι τα οριακά σημεία ενός $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ακριβώς τα όρια ακολουθιών του A.

Πρόταση 1.3.12. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε το x_0 είναι όριο ακολουθίας του A αν και μόνο αν είναι οριακό σημείο του A.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Εάν το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι όριο ακολουθίας x^k σημείων του A, τότε κάθε ανοικτή μπάλλα $B(x_0,\epsilon)$, $\epsilon > 0$, περιέχει (απείρου πλήθους) σημεία του A.

($\Leftarrow$) Εάν το x_0 είναι οριακό σημείο του A, τότε η ανοικτή μπάλλα $B(x_0, 1/2)$ περιέχει κάποιο $x^1 \in A$, $x^1 \neq x_0$. Έστω τώρα $\epsilon_2 = \|x^1 - x_0\|/2$. Η ανοικτή μπάλλα $B(x_0, \epsilon_2)$ περιέχει κάποιο $x^2 \in A$, $x^2 \neq x_0$. Συνεχίζουμε κατ'αυτόν τον τρόπο ορίζοντας

$$\epsilon_k = \|x^{k-1} - x_0\| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 3, \ldots$$

□

Η *κλειστότητα* $\overline{A}$ ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι η ένωση

$$\overline{A} = A \cup A'$$

όπου A' είναι το σύνολο των οριακών σημείων του A. Λόγω της Πρότασης 1.3.11 έχουμε ότι ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$. Ένα σημείο x του A που δεν ειναι οριακό σημείο λέγεται *απομονωμένο*: υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(B(x,\epsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$.

Το *εσωτερικό* $\text{Int}(A)$ ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται ώς το σύνολο

$$\text{Int}(A) = \{x \in A : \ \exists \delta > 0, \ B(x, \delta) \subset A\}.$$

Εξ ορισμού, το $\text{Int}(A)$ είναι ανοικτό σύνολο. Το *σύνορο* ∂A ενός συνόλου A ορίζεται ως $\partial A = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$. Μία άλλη περιγραφή του ∂A είναι:

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A \cap B(x, \delta) \neq \emptyset, \ (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B(x, \delta) \neq \emptyset, \ \forall \delta > 0\}.$$

Το σύνορο ∂A είναι κλειστό σύνολο,

$$\partial A = \overline{A} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(A).$$

Είναι επίσης φραγμένο σύνολο όταν το A είναι φραγμένο. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $M > 0$: $\|x\| \leq M, \forall x \in A$.

Η *απόσταση* $\text{dist}(x, \partial A)$ τέλος ενός σημείου $x \in \mathbb{R}^n$ από το σύνορο ∂A ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$\text{dist}(x, \partial A) = \inf_{y \in \partial A} e(x, y).$$

1.3.4 Συμπάγεια

Μία συλλογή

$$\mathfrak{U} = \{U_i, i \in I\}$$

ανοικτών συνόλων, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών,[7] λέγεται *κάλυψη* ή *κάλυμμα* ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ αν

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Το A λέγεται *συμπαγές* αν οποιαδήποτε κάλυψή του έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Πρόταση 1.3.13. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοικτό. Έστω σημείο $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Τότε για κάθε σημείο $a \in A$ υπάρχει $\delta_a = \delta(a) > 0$,

$$\delta_a = \frac{1}{2} \min\{\text{dist}(x, \partial A), \ \text{dist}(a, \partial A)\},$$

ώστε

$$B(a, \delta_a) \cap B(x, \delta_a) = \emptyset.$$

Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα

$$\mathfrak{U} = \{B(a, \delta_a), \ a \in A\}$$

του A. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \delta_{a_i}).$$

Αν $\delta = \min \delta_{a_i}, \ i = 1, \ldots, k$ τότε $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Το φραγμένο προκύπτει από την αναγωγή του καλύμματος

$$\mathfrak{V} = \{B(\mathbf{0}, i), \ i \in \mathbb{N}\}$$

του A σε πεπερασμένο. □

[7] Ο πληθάριθμος του συνόλου I μπορεί να είναι οποιοσδήποτε.

Πρόταση 1.3.14. *Κάθε κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα και $\mathfrak{U} = \{u_i,\ i \in I\}$ τυχαίο ανοικτό του κάλυμμα. Έστω επίσης το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{x \in [a,b] :\ \text{το } [a,x] \text{ καλύπτεται από πεπερασμένου πλήθους σύνολα του } \mathfrak{U}\}.$$

Το $\mathcal{A}$ είναι μη κενό ($a \in \mathcal{A}$) και επιπλέον φραγμένο, συνεπώς υπάρχει το

$$\sup \mathcal{A} = t \in (a,b].$$

Θα δείξουμε ότι $t \in \mathcal{A}$ και $t = b$, πράγμα που θα ολοκληρώσει την απόδειξη. Έστω $i \in I : t \in U_i$. Αφού το U_i είναι ανοικτό και $t = \sup \mathcal{A}$, υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ ώστε $x \in U_i$. Αφού επιπλέον $U_i \supset (t-\epsilon,\ t+\epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $[x,t] \subset U_i$. Αν

$$[a,x] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k},$$

τότε

$$[a,t] \subset (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}) \cup U_i$$

και συνεπώς $t \in \mathcal{A}$. Εάν τώρα $t < b$, υπάρχει $y \in U_i$ με $t < y < b$ και

$$[a,y] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup U_i.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι $y < \sup \mathcal{A}$, άτοπο. □

Πρόταση 1.3.15. *Έστω $B \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές, $x \in \mathbb{R}^n$ και $\mathfrak{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ ανοικτό κάλυμμα του $\{x\} \times B$. Υπάρχει $B(x,\epsilon)$ τέτοια ώστε το $B(x,\epsilon) \times B$ να καλύπτεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathfrak{U}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\{x\} \times B$ είναι συμπαγές του $\mathbb{R}^{n+m}$: πράγματι, ας είναι $\mathfrak{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ η ανοικτή κάλυψη του $\{x\} \times B$. Για κάθε $y \in U_i$ είναι

$$y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}).$$

Θεωρούμε για κάθε $i \in I$ τα σύνολα

$$\tilde{U}_i = \{\tilde{y} = (y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) :\ y \in U_i\}.$$

Τα σύνολα $\tilde{U}_i$ είναι ανοικτά και καλύπτουν το B. Άρα, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{x\} \times B$ και έτσι

$$\{x\} \times B \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

Για κάθε $y \in B$, υπάρχει $\delta > 0$, $\delta = \delta(y)$ ώστε

$$B(x,\delta_y) \times B(y,\delta_y) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

Επειδή τώρα το B είναι συμπαγές, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_s$ με

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{s} B(y_j, \delta_{y_j}).$$

Θεωρούμε την ανοικτή περιοχή

$$B(x,\delta), \quad \delta = \min_{j=1,\ldots,s} \{\delta_{y_j}\}.$$

Αν $(x',y') \in B(x,\delta) \times B$ τότε υπάρχει $y_i \in B$ με $y' \in B(y_i, \delta_{y_i})$, $1 \le j \le s$, και βέβαια $x' \in B(x, \delta_{y_i})$. Άρα,

$$(x',y') \in B(x,\delta_{y_i}) \times B(y_i,\delta_{y_i}) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

□

Πρόταση 1.3.16. *Εάν τα* $A \subset \mathbb{R}^n$ *και* $B \subset \mathbb{R}^m$ *είναι συμπαγή, τότε το* $A \times B$ *είναι συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}^{n+m}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $A \times B$. Λόγω της Πρότασης 1.3.15 κάθε $x \in A$ έχει μία ανοικτή περιοχή $B(x, \epsilon_x)$ ώστε το $B(x, \epsilon_x) \times B$ καλύπτεται από πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathfrak{U}$. Επειδή το A είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \dots x_k \in A$ με $A \subset \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \epsilon_{x_j})$. Άρα,

$$A \times B \subset \bigcup_{j=1}^{k} \big(B(x_j, \epsilon_{x_j}) \times B \big) .$$

Όμως, κάθε ένα από τα σύνολα της ένωσης στα δεξιά καλύπτεται από πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathfrak{U}$. □

Πρόταση 1.3.17. *Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου του* $\mathbb{R}^n$ *είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $B \subset A$ κλειστό. Αν $\mathfrak{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του B, τότε το $\mathfrak{U} \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του A. Αυτό όμως ανάγεται σε πεπερασμένο και

$$B \subset A \subset U_1 \cup \dots \cup U_s \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)).$$

□

Θεώρημα 1.3.18. *(***Heine-Borel***) Ένα* $A \subset \mathbb{R}^n$ *είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Το ευθύ είναι η Πρόταση 1.3.13. Για το αντίστροφο, επειδή το A είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$A \subset \overline{B(\mathbf{0}, M)}.$$

Όμως η κλειστή μπάλλα $\overline{B(\mathbf{0}, M)}$ περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο $R = [a_1, b_1] \times [a_n, b_n]$ το οποίο είναι συμπαγές από την Πρόταση 1.3.16. Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από την Πρόταση 1.3.17. □

Άμεσα προκύπτει από το Θεώρημα 1.3.6 ότι σε ένα συμπαγές σύνολο κάθε ακολουθία έχει υπακολουθία συγκλίνουσα στο σύνολο. Γενικά, καλούμε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ *ακολουθιακά συμπαγές* αν κάθε ακολουθία του έχει υπακολουθία συγκλίνουσα στο σύνολο. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.3.18 έχουμε ότι κάθε συμπαγές σύνολο είναι και ακολουθιακά συμπαγές. Ισχύει όμως και ότι κάθε ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο. Πράγματι, ας υποθέσουμε κατ'αρχάς ότι το A δεν είναι φραγμένο. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει σημείο $x^k \in A$ με $\|x^k\| > k$. Η ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεν έχει καμμία συγκλίνουσα υπακολουθία, πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση. Τέλος, έστω ότι το A δεν είναι κλειστό· τότε αυτό έρχεται σε αντίθεση με την Πρόταση 1.3.11. Καταλήγουμε στο

Θεώρημα 1.3.19. *Ένα* $A \subset \mathbb{R}^n$ *είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι ακολουθιακά συμπαγές.*

1.3.5 Συνεκτικότητα

Ένα $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *συνεκτικό* εάν δεν μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δύο (μη κενών) ανοικτών συνόλων. Στοιχειώδη συνεκτικά σύνολα είναι το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$. Σε αδρές γραμμές, ένα σύνολο είναι συνεκτικό όταν είναι *ένα κομμάτι*. Έχουμε αμέσως την παρακάτω

Πρόταση 1.3.20. *Κάθε κλειστό διάστημα του* $\mathbb{R}$ *είναι συνεκτικό σύνολο.*

Υπενθυμίζουμε πως αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, τότε μία παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος που διέρχεται από τα x_1, x_2 είναι η

$$l(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \quad t \in [0,1].$$

Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό* αν κάθε δύο σημεία του ενώνονται με ευθύγραμμο τμηήμα το οποίο κείται εξ ολοκλήρου εντός του A.

Πρόταση 1.3.21. *Εάν το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό, τότε είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το κυρτό A δεν είναι συνεκτικό. Τότε, υπάρχουν μη κενά ανοικτά X, Y ξένα μεταξύ τους ώστε $A = X \cup Y$. Έστω $x \in X$ και $y \in Y$. Επειδή το A είναι κυρτό, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα x, y περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού τα X, Y είναι ξένα μεταξύ τους. □

Σχόλιο 1.3.22. Το αντίστροφο της Πρότασης 1.3.21 δεν ισχύει εν γένει. Λόγου χάρη, η σφαίρα

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 1\}$$

είναι ένα μη κυρτό συνεκτικό σύνολο.

1.4 Ανασκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

Η ενότητα αυτή είναι το πρελούδιο του επόμενου κεφαλαίου.

1.4.1 Γραμμικές απεικονίσεις

Υπενθυμίζουμε ότι μία απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται *γραμμική*, αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

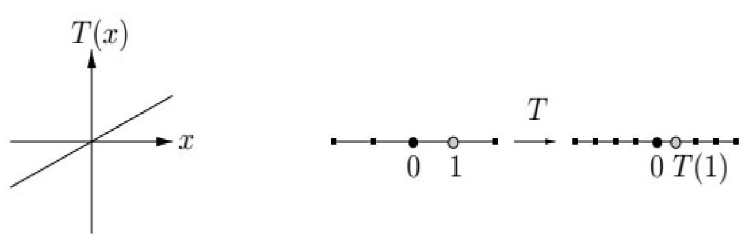
Μπορούμε να δείξουμε ότι αν $T = (T_1, \ldots, T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε όλες οι συντεταγμένες συναρτήσεις $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις (γραμμικές συναρτήσεις), $i = 1, \ldots, m$.

Αν $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. όπου $\{e_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^N$, τότε εξ ορισμού, αν $T = (T_1, \ldots, T_m)$ είναι γραμμική απεικόνιση,

$$T_j(x) = \sum_{i=1}^n x_i T_j(e_i) := \sum_{i=1}^n x_i a_{ji} = x \cdot a_j,$$

όπου

$$a_j = (a_{j1}, \ldots a_{jn}) = (T_j(e_1), \ldots, T_j(e_n)).$$



Σχήμα 1.6. Γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.4.1. *Κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ακριβώς της μορφής*[8]

$$T(x) = Ax,$$

όπου A είναι ένας $m \times n$ πίνακας. Το σύνολο $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ των γραμμικών απεικονίσεων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης nm.

Η *σύνθεση* $T \circ S$ δύο γραμμικών απεικονίσεων $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(x) = Ax$ και $S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $S(x) = Bx$, είναι η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$(T \circ S)(x) = T(S(x)) = A(Bx) = (AB)x$$

Γενικά, κάθε γραμμική απεικόνιση μπορεί να ταυτιστεί με τον πίνακά της και οι πράξεις μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων με τις πράξεις των πινάκων.

Μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται *αντιστρέψιμη*, εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}.$$

όπου $\mathrm{id}(x) = x$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Η T^{-1} λέγεται *αντίστροφη* της T και ισχύει ότι υπάρχει αν και μόνο αν η T είναι 1-1 και επί. Αν $T(x) = Ax$ τότε $T^{-1}(x) = A^{-1}x$ όπου A^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα A.

Παράδειγμα 1.4.2. Θα δείξουμε την ύπαρξη και θα προσδιορίσουμε ακριβώς την αντίστροφη απεικόνιση της $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$T(x) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := Ax.$$

Ο αντίστροφος του πίνακα A είναι ο

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

συνεπώς η αντίστροφη T^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

[8] Ως συνήθως στη Γραμμική Άλγεβρα όλα τα διανύματα θα θεωρούνται διανύματα στήλες' με αλλα λόγια, η σχέση $T(x) = A(x)$ γράφεται ως

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Εάν επιθυμούσαμε να διατηρήσουμε τα σημεία ως διανύσματα γραμμές, θα έπρεπε αυστηρά να γράφουμε $T(x) = xA$. Για να μην επιβαρύνουμε όμως τον συμβολισμό, προτιμούμε τη γραφή με τα διανύσματα στήλες.

1.4.2 Ορίζουσες

Έστω M_n ο χώρος των τετραγωνικών πινάκων. Υπάρχει μοναδική απεικόνιση,[9] η *ορίζουσα*,

$$\det : M_m \to \mathbb{R}$$

με τις εξής ιδιότητας:

i) Πολυγραμμικότητα ως προς γραμμές ή στήλες: αν

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

πίνακας γραμμένος ως προς τις στήλες του, τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και στήλες r_k, r_k',

$$\lambda \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda k + \mu r_k' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

και αναλόγως για τις γραμμές.

ii) Αντισυμμετρική (ως προς γραμμές ή στήλες):

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix},$$

και αναλόγως για τις γραμμές.

iii)

$$\det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = 1.$$

Η επόμενη πρόταση συνοψίζει περαιτέρω σημαντικές ιδιότητες των οριζουσών.

Πρόταση 1.4.3. • $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, *για κάθε* $A, B \in M_n$.

[9] Η απεικόνιση αυτή δίνεται για κάθε $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, αναλυτικά από τον τύπο

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S^n} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)},$$

όπου S_n είναι η ομάδα μετατάξεων n αριθμών.

- $\det(A) = \det(A^T)$, *για κάθε* $A \in M_n$.
- A *αντιστρέψιμος* $\iff \det(A) \neq 0$.

Τέλος, σημειώνουμε μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των οριζουσών που έρχεται από την γεωμετρία των γραμμικών απεικονίσεων. Έστω $v_1, \ldots, v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και

$$P(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

ένα *n-διάστατο παραλληλεπίπεδο του* $\mathbb{R}^n$. Ο *n-όγκος* $\mathrm{vol}(P)$ του P ισούται με την απόλυτη τιμή του πίνακα που έχει γραμμές (ή στήλες) τα διανύσματα $\lambda_i v_i$.

Πρόταση 1.4.4. *Εάν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική απεικόνιση με πίνακα A, τότε*

$$\mathrm{vol}(T(P)) = |\det(A)|\mathrm{vol}(P).$$

1.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα για διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$:
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

2. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες για $x, y \in \mathbb{R}^n$:
   - $$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2x \cdot y,$$
   - $$4\ a \cdot b = \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2.$$

3. Αποδείξτε ότι η Ευκλείδεια απόσταση e ικανοποιεί τις μετρικές ιδιότητες. Για την τριγωνική ανισότητα, αποδείξτε πρώτα πως αν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ και $z = (z_1, \ldots, z_n)$, τότε
$$e^2(x, y) = e^2(x, z) + e^2(z, y) + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i).$$
Για να ολοκληρώσετε την απόδειξη, αποδείξτε ότι
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq e(x, z) \cdot e(y, z)$$
χρησιμοποιώντας την ανισότητα CSB.

4. i) Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$
$$\|x\| = \sup_{i=1,\ldots n} \{|x_i|\}$$
είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

ii) Αποδείξτε ότι η νόρμα αυτή *δεν* προέρχεται από κανένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. (*Υπόδειξη.* Υποθέστε ότι υπάρχει κάποιο εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ τέτοιο ώστε

$$\|x\|_\infty =< x, x >^{1/2} .$$

Τότε, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$< x \pm y, x \pm y >= \|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2 \pm 2 < x, y > .$$

(Δείτε παραπάνω την Άσκηση 2). Εφαρμόστε τώρα για $x = e_1$, $y = e_2$.)

5. Αποδείξτε ότι για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$|x_i| \leq \|x\|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Συμπεράνετε ότι

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|.$$

6. Έστω $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$, ακολουθία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

   - Η $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, συγκλίνουν.
   - Η $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy αν και μόνο αν οι $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, είναι Cauchy.
   - Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, e)$ είναι πλήρης.

7. Αποδείξτε ότι μια ανοικτή (αντ. κλειστή) μπάλλα του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) σύνολο. Αποδείξτε επίσης ότι η σφαίρα $S(x, r)$ είναι όντως το σύνορο της μπάλλας $B(x, r)$.

8. Αποδείξτε την ισοδυναμία των ορισμών του ανοικτού συνόλου με ανοικτές μπάλλες από τη μία και ανοικτά ορθογώνια από την άλλη.

9. Αποδείξτε τους ισχυρισμούς του Σχολίου 1.3.10. Συμπεράνετε ότι

   (α΄) Η τομή οιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

   (β΄) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

10. (α΄) Δώστε παράδειγμα συνόλου και οριακού του σημείου που δεν ανήκει στο σύνολο.

    (β΄) Δώστε παράδειγμα συνόλου και σημείου του που δεν είναι οριακό του σημείο.

11. Αποδείξτε αναλυτικά την Πρόταση 1.4.1 κάνοντας τα ακόλουθα βήματα:

    α) Κάθε γραμμική απεικόνιση $T = (T_1, \ldots, T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική αν και μόνο αν όλες οι συντεταγμένες συναρτλησεις $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικές.

    β) Κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως

    $$T(x) = a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

    γ) Ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης $T = (T_1, \ldots, T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ έχει γραμμές τα διανύσματα a_i, όπως αυτά ορίστηκαν στο β).

Κεφάλαιο 2

Απεικονίσεις του $\mathbb{R}^n$: όρια και συνέχεια

2.1 Απεικονίσεις του $\mathbb{R}^n$

Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, μία *απεικόνιση* (*διανυσματική συνάρτηση*).[1] Οι $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ λέγονται *συντεταγμένες συναρτήσεις*. Εάν $B \subseteq A$ τότε το σύνολο

$$f(B) = \{y \in \mathbb{R}^m : \ \exists x \in B, \ y = f(x)\}$$

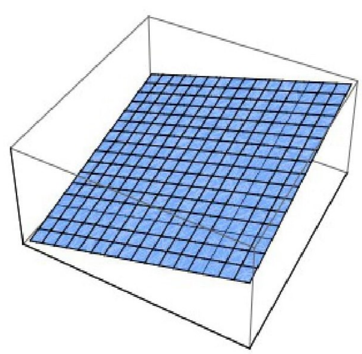
καλείται *εικόνα* του B μέσω της f. Εάν $C \subset \mathbb{R}^m$ τότε το σύνολο

$$f^{-1}(C) = \{x \in A : \ f(x) \in C\},$$

καλείται *αντίστροφη εικόνα* ή *προεικόνα* του C μέσω της f. Το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ x \in A, \ y = f(x)\},$$

λέγεται *γράφημα* της f.



Σχήμα 2.1. Το γράφημα γραμμικής απεικόνισης $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που περνά από το $\mathbf{0}$.

2.1.1 Πράξεις μεταξύ απεικονίσεων

Εάν $f, g : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$, τότε ορίζεται το *άθροισμα* $f + g$ από τη σχέση

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

[1] Στην ειδική περίπτωση $m = 1$ έχουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ορίζεται επίσης ο *πολλαπλασιασμός με αριθμό*: αν $\lambda \in \mathbb{R}$, η λf δίνεται από τη σχέση

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Πρόταση 2.1.1. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Ο χώρος όλων των απεικονίσεων $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ από το A στο $\mathbb{R}^m$, εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό, είναι διανυσματικός χώρος.*

Έχουμε επιπλέον το *βαθμωτό γινόμενο* $f \cdot g$:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Εάν $m = 1$ και $g(x) \neq 0$, τότε ορίζεται το *πηλίκο* $\frac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ και $g : \mathbb{R}^m \supset B \to \mathbb{R}^k$ ώστε $g(B) \subset A$. Τότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ ως εξής:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

2.1.2 Όρια

Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ και x_0 οριακό σημείο του A. Λέμε ότι η f συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}^m$ καθώς το x τείνει στο x_0 και συμβολίζουμε με $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ αν

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in B(a, \epsilon).$$

Σχόλιο 2.1.2. Εάν υπάρχει το όριο όπως ορίστηκε παραπάνω, τότε είναι μοναδικό. Λόγω της επόμενης πρότασης, μπορούμε να αναχθούμε στην περίπτωση της απόδειξης για συναρτήσεις.[2]

Πρόταση 2.1.3. *Εάν f είναι όπως προηγουμένως, τότε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

όπου $f = (f_1, \ldots, f_m)$ και $a = (a_1, \ldots, a_m)$.

Μπορούμε συνεπώς στο εξής να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $m = 1$. Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει όλες τις εύλογες ιδιότητες των ορίων.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ και x_0 οριακό σημείο του A. Έστω επίσης ότι υπάρχουν τα όρια*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Τότε,

- $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

[2] Δείτε λόγου χάρη για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, καθώς και για την απόδειξη όλων των ιδιοτήτων των ορίων, την Ενότητα 2.7 στο βιβλίο των Marsden-Tromba.

- *Για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x).$$

-
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

- *Αν* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Σχόλιο 2.1.5. Ο υπολογισμός του ορίου μιας απεικόνισης γίνεται είτε με τον ορισμό, είτε με τη χρήση των ιδιοτήτων. Ένα χρήσιμο κριτήριο για να δείξουμε τη *μη ύπαρξη* ορίου συνάρτησης είναι το παρακάτω: έστω ότι υπάρχουν δρόμοι γ_1 και γ_2 που περνούν από το A και το x_0 και
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ κατά μήκος του δρόμου } \gamma_1,$$
ενώ
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \neq a \text{ κατά μήκος του δρόμου } \gamma_2.$$
Τότε, το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών με τύπο
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0.) \end{cases}$$
Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Όταν είμαστε στον δρόμο $x=0$, $y\neq 0$, $f(0,y)=0$ η οποία τετριμμένα τείνει στο 0 καθώς $y\to 0$. Από την άλλη, επάνω στον δρόμο $y=x$, $x\neq 0$, $f(x,x)=\frac{1}{2}$ η οποία τετριμμένα τείνει στο $1/2$ καθώς το $x\to 0$.

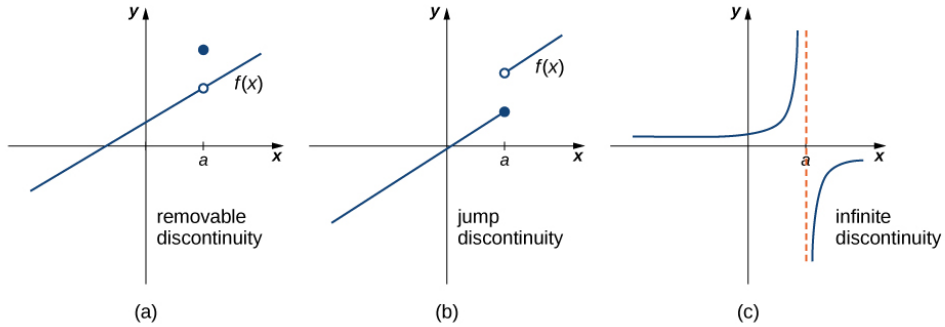
2.2 Συνέχεια

Έστω $f:\mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$. Η f λέγεται *συνεχής στο* $x_0 \in A$ αν
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \forall x \in B(x_0,\delta) \implies f(x) \in B(f(x_0),\epsilon),$$
με άλλα λόγια,
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Η $f:\mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ λέγεται *συνεχής στο* A αν ειναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.[3]

Σχόλιο 2.2.1. Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς του ορίου και της συνέχειας σε σημείο. Το όριο δεν νοείται σε απομονωμένα σημεία, ενώ κάθε συνάρτηση ειναι συνεχής στα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Και τούτο γιατί ο ορισμός (η $f(x)$ πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο $f(x_0)$ καθώς το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο x_0), ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, εφ'όσον το x δεν μπορεί να πλησιάσει το x_0).[4]

[3] Σε αδρές γραμμές, το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης στο $(x_0, f(x_0)$ δεν έχει *κοψίματα* ή *άλματα*. Τα σημεία στα οποία παρουσιάζονται τέτοιου είδους φαινόμενα αποτελούν το σύνολο των ασυνεχειών της συνάρτησης, ένα σύνολο που θα φανεί ιδιαίτερα σημαντικό στο Κεφάλαιο 4.

[4] Σκεφτείτε κατ' αναλογία την πρόταση: εάν υπάρχουν νεράϊδες, τότε είμαι πράσινος. Εάν δεν υπάρχουν νεράϊδες, η πρόταση είναι πάντοτε αληθής μια και η υπόθεση δεν ικανοποιείται ποτέ.



Σχήμα 2.2. Διάφορα είδη ασυνεχειών συνάρτησης μιας μεταβλητής: α) απαλείψιμη ασυνέχεια, β) άλμα και γ) μη φραγμένη ασυνέχεια.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν οι f_i, $i = 1, \ldots, m$ είναι συνεχείς στο x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = f_i(x_0),\ i = 1, \ldots, n.$$

Πόρισμα 2.2.3. *Κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $T = (T_1, \ldots, T_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική. Κάθε συντεταγμένη συνάρτηση $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ είναι γραμμική, άρα έχει τύπο

$$T_i(x) = a_i \cdot x, \quad a_i \in \mathbb{R}^n.$$

Η T_i είναι συνεχής στο $\mathbf{0}$:

$$\|T_i(x)\| = |a_i \cdot x| \leq \|a_i\| \|x\|$$

από την ανισότητα CSB. Για οποιοδήποτε x_0 τώρα,

$$\|T_i(x) - T_i(x_0)\| = \|T_i(x - x_0)\| \leq \|a_i\| \|x - x_0\|.$$

Το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 2.2.2. ☐

Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων. [5]

Πρόταση 2.2.4. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ συνεχείς στο $x_0 \in A$. Τότε:*

- *Η $f \pm g$ είναι συνεχής στο x_0 και*

$$\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = f(x_0) \pm g(x_0).$$

- *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η λf είναι συνεχής στο x_0 και*

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda f(x_0).$$

- *Η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0 και*

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = f(x_0) \cdot g(x_0).$$

[5] Για την απόδειξη δείτε λόγου χάρη το βιβλίο των Marsden-Tromba

- *($m = 1$) Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε η f/g είναι συνεχής στο x_0 και*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Σημαντική είναι επίσης και η παρακάτω

Πρόταση 2.2.5. *Έστω A ανοικτό, $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ και $g : \mathbb{R}^m \supset B \to \mathbb{R}^k$ συνεχείς συναρτήσεις και υποθέτουμε ότι ορίζεται η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$. Τότε είναι συνεχής στο και ειδικότερα, για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει ότι*

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)).$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει έναν εναλλακτικό, *τοπολογικό* ορισμό της συνέχειας.

Θεώρημα 2.2.6. *Η $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $V \subset R^m$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $f^{-1}(V) = U \cap A$.* [6]

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $x \in f^{-1}(V)$. Επειδή $f(x) \in V$, υπάρχει $B(f(x), \epsilon) \subset V$. Λόγω συνέχειας, υπάρχει $B(x, \delta_x)$, $\delta_x = \delta(x) > 0$, με

$$f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \epsilon).$$

Αλλά τότε,

$$B(x, \delta_x) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subset f^{-1}(V).$$

Θέτουμε

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B(x, \delta_x)$$

και τότε $f^{-1}(V) = U \cap A$.

($\Leftarrow$) Δοθέντων $x \in A$ και $\epsilon > 0$, έστω το ανοικτό σύνολο $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Υπάρχει ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ με $f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) = U \cap A$. Τότε, $x \in U \cap A \subset U$ και άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subset U$. Τότε όμως, $f(A \cap B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. □

Για έναν τρίτο, *ακολουθιακό* ορισμό της συνέχειας, δείτε την Άσκηση 2.3.4.

2.2.1 Συνέχεια στα συμπαγή

Η συνέχεια στα συμπαγή υποσύνολα είναι ιδιαίτερης σημασίας. Ξεκινάμε από την παρακάτω

Πρόταση 2.2.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και υποθέτουμε επίσης ότι το A είναι συμπαγές. Τότε και η εικόνα του $f(A)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{V} = \{V_i,\ i \in I\}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(A)$: $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$. Επειδή η f είναι συνεχής, για κάθε V_i υπάρχει ανοικτό $U_i \subset \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(V_i) = U_i \cap A$. Θεωρούμε το κάλυμμα $\mathfrak{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ του A: λόγω συμπάγειας ανάγεται σε πεπερασμένο και συνεπώς $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Έχουμε τότε

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i) = \bigcup_{i=1}^n V_i,$$

πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

[6] Η σχέση αυτή σημαίνει ότι η προεικόνα τυχόντος ανοικτού του $\mathbb{R}^m$ είναι ανοικτό στην *επαγόμενη τοπολογία* του A.

Θεώρημα 2.2.8. **(Μεγίστου-Ελαχίστου)** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ συνεχής και A συμπαγές. Τότε υπάρχουν σημεία $x_m, x_M \in A$ τέτοια ώστε*

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M, \quad x \in A.$$

Δηλαδή, το x_M (αντ. x_m) είναι σημείο ολικού μεγίστου (αντ. ελαχίστου) της f στο A.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2.7 η εικόνα $f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο λόγω του Θεωρήματος 1.3.18. Συνεπώς έχουμε ότι υπάρχουν σημεία x_m, $x_M \in A$ τέτοια ώστε

$$\sup_{x\in A} f(x) = \max_{x\in A} f(x) = f(x_M),$$

και

$$\inf_{x\in A} f(x) = \min_{x\in A} f(x) = f(x_m).$$

□

Μία έννοια ισχυρότερη της συνέχειας είναι αυτή της *ομοιόμορφης συνέχειας*. Υπενθυμίζουμε ότι μία απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο A αν

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in A : \ \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

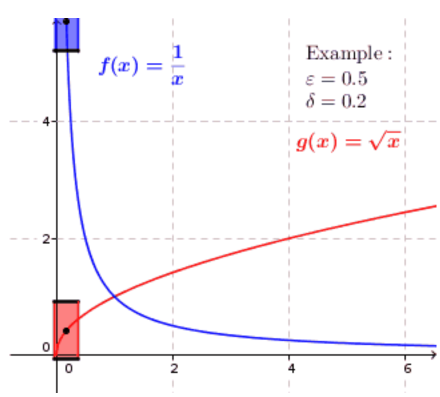
Σχόλιο 2.2.9. Μία ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει: έστω η $f(x) = x^2$ που είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Για $\epsilon = 1$, $\delta > 0$ οποιοδήποτε και

$$x = \frac{1-\delta^2}{2\delta},\ y = x + \delta$$

έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \delta|2x + \delta| = \delta\left|2\frac{1-\delta^2}{2\delta} + \delta\right| = 1.$$

Η διαφορά μεταξύ ομοιόμορφης συνέχειας και συνήθους συνέχειας είναι ότι, στην ομοιόμορφη συνέχεια υπάρχει ένα δ που εξαρτάται μόνο από το δοθέν $\epsilon > 0$ και όχι από το σημείο.[7] Άρα η ομοιόμορφη συνέχεια είναι έννοια ισχυρότερη της συνέχειας.



Για τα συμπαγή σύνολα όμως έχουμε το παρακάτω θεώρημα που οφείλεται στον Heine:

[7] Πρακτικά, σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση, το ίδιο δ πρέπει να δουλεύει για κάθε δοθέν ϵ πάνω σε κάθε σημείο του γραφήματος της συνάρτησης.

Σχήμα 2.3. Η $1/x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής ενώ η $\sqrt{x}$ είναι.

Θεώρημα 2.2.10. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο συμπαγές A. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Εάν $x \in A$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε y με $e(x,y) < \delta_x$ να είναι $e(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα

$$\mathfrak{U} = \left\{ B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right), \ x \in A \right\}$$

του A. Λόγω της συμπάγειας, υπάρχουν σημεία $x_1, \dots, x_s \in A$ με

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{s} B(x_i, \delta_{x_i}/2).$$

Θέτουμε $\delta = (1/2)\min\{\delta_{x_i}, \ i = 1, \dots, s\}$. Εάν τώρα $x, y \in A$ με $e(x,y) < \delta$, υπάρχει κάποιο x_j με $e(x, x_j) < \delta_{x_j}/2$. Επίσης,

$$e(x_j, y) \leq e(x_j, x) + e(x, y) < \delta + \delta_{x_j}/2 \leq \delta_{x_j}.$$

Άρα,

$$e(f(x), f(y)) \leq e(f(x), f(x_j)) + e(f(x_j), f(y)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Μία εύλογη ερώτηση εδώ είναι αν υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις σε σύνολα που δεν είναι συμπαγή. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι αυτό των γραμμικών απεικονίσεων. Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $\|x\| \leq 1$, ισχύει ότι $x_i \in (-1, 1)$, $i = 1, \dots, n$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|T(e_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\|. \end{aligned}$$

Έπεται ότι το σύνολο $\{\|T(x)\|, \ \|x\| \leq 1\}$ είναι άνω φραγμένο. Ορίζουμε

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(x)\|\} = \sup_{\|x\| = 1} \{\|T(x)\|\},$$

και καλούμε τον μη αρνητικό αριθμό $\|T\|$ *νόρμα της γραμμικής απεικόνισης T*.[8]

[8] Η νόρμα μιας γραμμικής απεικόνισης (ή, *νόρμα τελεστή*) ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της νόρμας:

Πρόταση 2.2.11. *Κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ είναι $\|x/\|x\|\| = 1$. Οπότε,

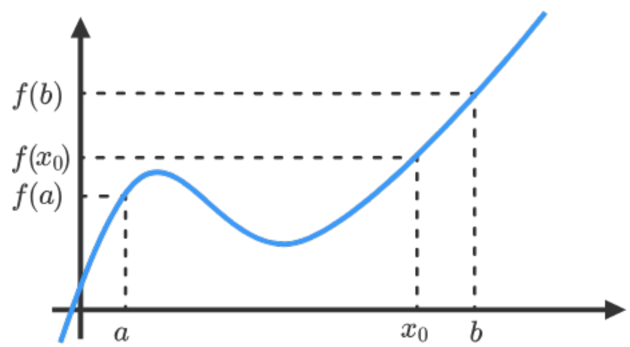
$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \implies \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|.$$

□

2.2.2 Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών αφορά στη συνέχεια στα συνεκτικά σύνολα.

Θεώρημα 2.2.12. *(**Ενδιαμέσων Τιμών**) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ συνεκτικό. Εάν η $f : A \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής, τότε η εικόνα $f(A)$ είναι συνεκτικό σύνολο. Ειδικότερα, εάν $f : A \to \mathbb{R}$, και $f(x_1) < y < f(x_2)$ για κάποια $x_1, x_2 \in A$ και $y \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = y$.*



Σχήμα 2.4. Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη κενά ανοικτά σύνολα X, Y ξένα μεταξύ τους και $f(A) = X \cup Y$. Επειδή η f είναι συνεχής,

$$A = f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y),$$

πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τη συνεκτικότητα του A.

Τώρα, δοθείσης συνεχούς $f : A \to \mathbb{R}$, έστω τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$X = (-\infty, y_0), \quad Y = (y_0, +\infty).$$

Εάν η εικόνα $f(A)$ δεν περιέχει το y_0, τότε

$$f(A) = (f(A) \cap X) \cup (f(A) \cap Y),$$

δηλαδή, είναι ξένη ένωση μη κενών ανοικτών συνόλων, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τη συνεκτικότητα του $f(A)$. □

- $\|T\| \geq 0$ και $\|T\| = 0 \iff T = 0$,
- $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$,
- $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

Στην προκειμένη περίπτωση, το sup μπορεί να αντικατασταθεί με το max. Μία γεωμετρική ερμηνεία της νόρμας τελεστή είναι η εξής: ας σκεφτούμε μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Αυτή απεικονίζει κύκλους κέντρου (0,0) σε ελλείψεις κέντρου (0,0). Η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου λοιπόν, είναι μία έλλειψη κέντρου (0,0) και η $\|T\|$ μας δίνει την ακτίνα του μικρότερου κύκλου που περιέχει την έλλειψη αυτή.

2.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Πρόταση 2.1.1. Δείξτε επίσης ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ είναι απειροδιάστατος. (*Υπόδειξη.* Περιοριστείτε στην περίπτωση του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ και δείξτε ότι οι συναρτήσεις
$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$
είναι γραμμικά ανεξάρτητες.)

2. Αποδείξτε την Πρόταση 2.1.3.

3. Αποδείξτε την Πρόταση 2.2.2.

4. Αποδείξτε ότι ο παρακάτω ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας είναι ισοδύναμος με έναν από τους δύο που έχουμε παραθέσει: η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν για κάθε ακολουθία $x^k \to x_0$ ισχύει ότι $f(x^k) \to f(x_0)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : \ y = 0\} \to \mathbb{R}$ με
$$f(x, y) = \frac{1 - \cos\sqrt{xy}}{y}.$$
Είναι δυνατόν να επεκτείνουμε την f σε όλο το $\mathbb{R}^2$ με συνεχή τρόπο;

6. Αν το σύνολο A δεν είναι κλειστό, τότε δείξτε ότι υπάρχει μια μη φραγμένη συνάρτηση του A. (*Υπόδειξη.* Για κάθε $y \in A$, θέσατε
$$f(y) = \frac{1}{\|x - y\|},$$
όπου $x \in (\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.)

7. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Στο κλειστό ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d]$ ορίζουμε
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} & x \neq y \\ \\ g'(x) & x = y. \end{cases}$$
Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο R. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;

8. Αποδείξτε με κάποιον από τους ορισμούς της συνέχειας ότι η συνάρτηση
$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$
που ορίζεται στο σύνολο
$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\},$$
είναι συνεχής. Δείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο
$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 1, \ y > 1\},$$
αλλά όχι στο A_0.

9. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $x_0 \notin A$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_1 \in A$ τέτοιο ώστε

$$\|x_1 - x_0\| = \min\{\|x - x_0\|,\ x \in A\}.$$

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι μπορούν να υπάρξουν πολλά x_1 με αυτήν την ιδιότητα. (*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \|x - x_0\|$.)

10. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\mathbf{0}) \neq 0$ και τέτοια ώστε να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}^n :\ f(x_1) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$x_0 = \min\{\|x\| :\ f(x) = 0\}$$

(*Υπόδειξη.* Δείξτε πρώτα ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = 0,\ \|x\| \leq \|x_0\|\},$$

είναι κλειστό και φραγμένο.)

11. Αποδείξτε τις ιδιότητες της νόρμας για τη νόρμα τελεστή $\|\cdot\|$.

12. Αποδείξτε ότι αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση με πίνακα $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, τότε

$$\max\{|a_{ij}|,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\} \leq \|T\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Κεφάλαιο 3

Διαφόριση

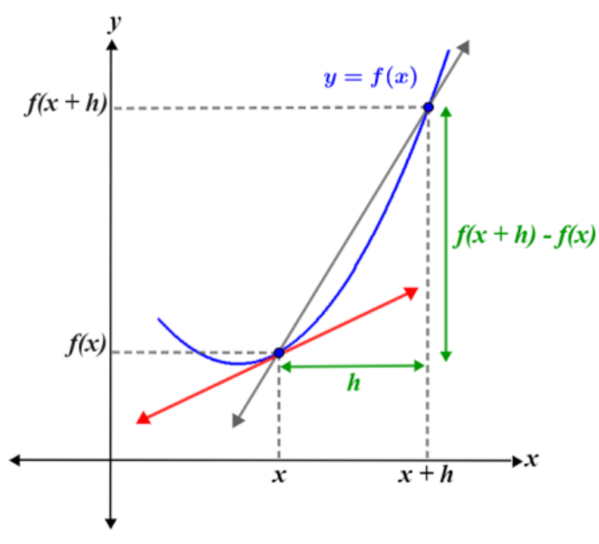
3.1 Ορισμός της παραγώγου

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$, τότε η f λέγεται *διαφορίσιμη στο* x_0[1] αν υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ισοδύναμα, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $f'(x_0)$ ώστε

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h|}{|h|} = 0.$$



Σχήμα 3.1. Παράγωγος και γραμμική προσέγγιση στη μία μεταβλητή.

Η ερμηνεία του ορισμού αυτού είναι ότι κοντά στο $h = 0$, η συνάρτηση $g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ προσεγγίζεται από την *γραμμική* συνάρτηση $f'(x_0) \cdot h$, και μάλιστα με ρυθμό μεγαλύτερο από αυτόν που το h προσεγγίζει το 0. Γεωμετρικά, κοντά στο x_0 η f προσεγγίζεται από την *εφαπτόμενη ευθεία*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

[1] Ή, *παραγωγίσιμη*. Στις σημειώσεις αυτές θα προτιμούμε τον όρο διαφορίσιμη.

Ορισμός 3.1.1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό και $x_0 \in A$. Η f θα λέγεται *διαφορίσιμη στο* x_0[2] αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης θα λέγεται *παράγωγος της* f στο x_0 και θα συμβολίζεται με $Df(x_0)$.

Θεώρημα 3.1.2. *(***Μοναδικότητα της παραγώγου***) Αν η $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$, τότε η γραμμική απεικόνιση T του ορισμού είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη μία γραμμική απεικόνιση $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - S(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\|T(h) - S(h)\|}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\|T(h) + f(x_0) - f(x_0+h) + f(x_0+h) - f(x_0) - S(h)\|}{\|h\|} \\
&\le \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - S(h)\|}{\|h\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|T(h) - S(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $h = tx$, $t \to 0$. Τότε για $x \neq \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to 0} \frac{\|T(tx) - S(tx)\|}{\|tx\|} \\
&= \lim_{t\to 0} |t| \cdot \frac{\|T(x) - S(x)\|}{|t|\|x\|} \\
&= \frac{\|T(x) - S(x)\|}{\|x\|}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$0 = \|T(x) - S(x)\| \implies T(x) = S(x).$$

□

Η γραμμική απεικόνιση στον ορισμό της παραγώγου στο εξής θα συμβολίζεται με $Df(x_0)$, δηλαδή με το ίδιο σύμβολο που χρησιμοποιούμε και για την παράγωγο, δηλαδή τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης.[3]

[2] Ο ορισμός μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

[3] Τον πίνακα της παραγώγου (καθώς και τη γραμμική απεικόνιση T του ορισμού) συμβολίζουμε και με $f'(x_0)$.

Παράδειγμα 3.1.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $f(x, y) = \sin x$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο $Df(x_0, y_0)$ στο τυχαίο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με τον ορισμό, αυτή θα είναι ένας πίνακας 1×2. Ισχυριζόμαστε ότι

$$Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} == \cos x_0 \cdot h_1,$$

οπότε ο πίνακας της είναι ο

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \cos x_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|\sin(x_0 + h_1) - \sin(x_0) - \cos(x_0) \cdot h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} &\leq \\ \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|\sin(x_0 + h_1) - \sin(x_0) - \cos(x_0) \cdot h_1|}{|h_1|} &= 0, \end{aligned}$$

με το τελευταίο βεβαίως να ισχύει επειδή $(\sin x)' = \cos x$.

Έχουμε την παρακάτω πρόταση που περιγράφει τις ιδιότητες της διαφόρισης που προκύπτουν απευθείας από τον ορισμό:

Πρόταση 3.1.4.

- *Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = c$ σταθερή, τότε $Df(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*
- *Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η λf είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$.*
- *Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = T(x)$ γραμμική, τότε $Df(x) = T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

3.1.1 Διαφορισιμότητα και συνέχεια

Θεώρημα 3.1.5. *Αν η $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη. Εφ' όσον η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 υπάρχει η παράγωγος $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{3.1}$$

Λόγω της Πρότασης 2.2.11 ισχύει ότι

$$\|Df(x_0)(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\|, \ (M = \|Df(x_0)\| > 0).$$

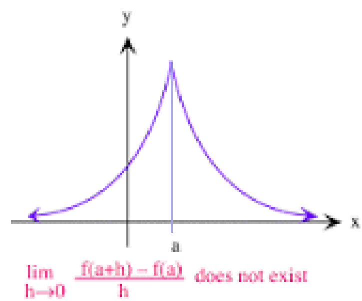
Τώρα, η Εξ. (3.1) μας λέει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|x - x_0\| < \delta$ τότε

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \epsilon.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(x_0)\| &= \|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)+Df(x_0)(x-x_0)\| \\ &\leq \|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|+M\|x-x_0\| \\ &\leq (\epsilon+M)\|x-x_0\|.\end{aligned}$$

Συνεπώς, δοθέντος $\epsilon > 0$, εάν πάρουμε $\delta = \epsilon/(\epsilon+M)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in B(x_0,\delta)$ ισχύει ότι $f(x) \in B(f(x_0),\epsilon)$. □



Σχήμα 3.2. Παραδείγματα συνεχών και μη διαφορίσιμων συναρτήσεων στη μία μεταβλητή.

Παράδειγμα 3.1.6. Στο παράδειγμα αυτό δείχνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος 3.1.5 δεν ισχύει εν γένει, χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση που είναι συνεχής και "σχεδόν" διαφορίσιμη. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$:

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Συνεπώς, δοθέντος $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \epsilon > 0$ ώστε για κάθε $(x,y) \in B((0,0),\delta))$ να είναι $f(x,y) \in B(0,\epsilon)$.

Προτού ελέγξουμε τη διαφορισιμότητα στο $(0,0)$, δείχνουμε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία που περνά από το $(0,0)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Πράγματι, έστω πρώτα η ευθεία $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ο περιορισμός $g(x) = f(x,\lambda x)$ της f στην ευθεία αυτή είναι η συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|\lambda| x}{\sqrt{1+\lambda^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Από την άλλη, ο περιορισμός $h(y) = f(0,y)$ της f στην ευθεία $x = 0$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Αμφότερες οι g, h είναι συναρτήσεις διαφορίσιμες στο $0'$ και στις δύο περιπτώσεις η παράγωγος είναι 0.

Παρ' όλα αυτά, δείχνουμε ευθύς αμέσως ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Πράγματι, αν υπήρχε η $Df(0,0)$ τότε λόγω των παραπάνω υπολογισμών θα έπρεπε αναγκαστικά να ήταν η μηδενική γραμμική απεικόνιση. Αλλά, το

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{h_1^2+h_2^2}$$

δεν υπάρχει: στον δρόμο $h_2 = h_1 = h$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{2h} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{2h}.$$

3.1.2 Παράγωγος καμπύλης

Με σκοπό να εντοπίσουμε ποια ακριβώς είναι η γραμμική απεικόνιση $T = Df(x_0)$ μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $f : \mathbb{R}^n \subset A \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, $x_0 \in A$, ασχολούμαστε πρώτα με την πλέον προσβάσιμη περίπτωση.

Θεώρημα 3.1.7. *Έστω $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ (παραμετρημένη) καμπύλη του $\mathbb{R}^n$,*

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (a,b).$$

Η γ είναι διαφορίσιμη στο $t_0 \in (a,b)$ αν και μόνο αν οι x_i, $i = 1,\dots,n$, είναι διαφορίσιμες στο t_0. Η παράγωγος είναι η[4]

$$D\gamma(t_0) = \gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν η γ είναι διαφορίσμη στο t_0, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, T = (T_1, \dots, T_n)$ ώστε

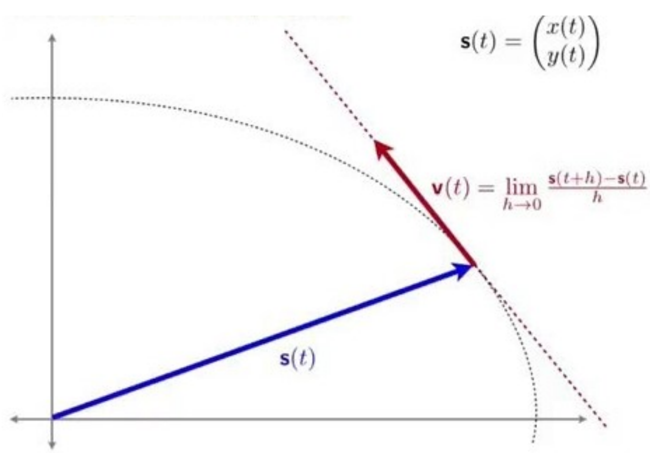
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) - T(h)\|}{|h|} = 0.$$

Όμως τότε

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|x_i(t_0+h) - x_i(t_0) - T_i(h)\|}{|h|} = 0, \quad i = 1, \dots n.$$

Τούτο σημαίνει ακριβώς ότι $T_i(h) = x_i'(t_0)h$, $i = 1, \dots, n$.

($\Rightarrow$) Η απόδειξη είναι άμεση. □



Σχήμα 3.3. Παράγωγος επίπεδης καμπύλης.

[4]Η παράγωγος καμπύλης σε σημείο της, δίνει το *διάνυσμα ταχύτητας* της καμπύλης στο σημείο αυτό.

3.2 Κανόνας της αλυσίδας

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο x_0 και $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη στο $f(x_0)$. Τότε η $g \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και η παράγωγος της δίνεται από τη σχέση:*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $y_0 = f(x_0), T = Df(x_0), S = Dg(y_0)$. Από την υπόθεση έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$
$$\lim_{y \to y_0} \frac{\|g(y) - g(y_0) - S(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} = 0$$

και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) - (S \circ T)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Θέτουμε

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - T(x - x_0),$$
$$\psi(y) = g(y) - g(y_0) - S(y - y_0).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) - (S \circ T)(x - x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) - S(T(x - x_0)) \\
&= g(f(x)) - g(y_0) - S(f(x) - f(x_0) - \phi(x)) \\
&= g(f(x)) - g(y_0) - S(f(x) - f(x_0)) - S(\phi(x)) \\
&= \psi(f(x)) + S(\phi(x)).
\end{aligned}$$

Πρέπει συνεπώς να δειχθεί ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|\psi(f(x))\|}{\|x - x_0\|} = 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\|S(\phi(x))\|}{\|x - x_0\|}.$$

Για την δεξιά σχέση έχουμε ότι

$$\frac{\|S(\phi(x))\|}{\|x - x_0\|} \leq \|S\| \frac{\|\phi(x)\|}{\|x - x_0\|} \to 0$$

καθώς $x \to x_0$. Για την αριστερή σχέση, έχουμε από την διαφορισιμότητα της g στο y_0 ότι αν $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε για κάθε x με $f(x) \in B(y_0, \delta)$ να συνεπάγεται ότι

$$\|\psi(f(x))\| < \epsilon \|f(x) - y_0\|.$$

Αν $x \in B(x_0, \delta_1)$ για κάποιο αρκετά μικρό δ_1, τότε $f(x) \in B(y_0, \delta)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|\psi(f(x))\| &< \epsilon ||f(x) - y_0|| \\
&= \epsilon \|\phi(x) + T(x - x_0)\| \\
&\leq \epsilon \|\phi(x)\| + \epsilon \|T\| \|x - x_0\|.
\end{aligned}$$

Τότε η αριστερή σχέση ισχύει και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Οι παρακάτω προτάσεις 3.2.2 και 3.2.4 που περιγράφουν τις ιδιότητες της διαφόρισης που προκύπτουν από τον κανόνα της αλυσίδας, συμπληρώνουν την Πρόταση 3.1.4:

Πρόταση 3.2.2. *Η $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν οι f_i είναι διαφορίσιμες στο x_0, $i = 1, \ldots, m$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Γράφουμε $f_i = \pi_i \circ f$ όπου $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή

$$\pi_i(x) = \pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i.$$

Διαπιστώνουμε απευθείας ότι για κάθε $i = 1, \ldots, m$, η π_i είναι διαφορίσιμη στο τυχαίο x και

$$D\pi_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε κατόπιν τον κανόνα της αλυσίδας.

($\Leftarrow$) Προφανές. □

Λήμμα 3.2.3. *α) Η συνάρτηση $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $s(x, y) = x + y$ είναι διαφορίσιμη και για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $Ds(a, b) = s$.*

β) Η συνάρτηση $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = xy$ είναι διαφορίσιμη και για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, είναι

$$Dp(a, b) = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη. Το α) προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 3.1.4 (η s είναι γραμμική). Αποδεικνύουμε το β): αν $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{|p(a + h_1, b + h_2) - p(a, b) - bh_1 - ah_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} &= \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &\leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0, \ (h_1, h_2) \to 0. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2.4. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$, A ανοικτό, διαφορίσιμες στο $x_0 \in A$ με παραγώγους $Df(x_0)$ και $Dg(x_0)$ αντίστοιχα. Τότε:*

α) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, η $\lambda f + \mu g$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και η παράγωγος της είναι η

$$D(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda Df(x_0) + \mu Dg(x_0).$$

β) (Κανόνας του Leibniz) Το γινόμενο $f \cdot g$,

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

είναι συνάρτηση διαφορίσιμη στο x_0 με παράγωγο που δίνεται από την:

$$D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0).$$

γ) Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση πηλίκο f/g είναι διαφορίσιμη στο x_0 και η παράγωγός της είναι η

$$D(f/g)(x_0) = \frac{Df(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot Dg(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Απόδειξη. Για το α) αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0),$$

γράφοντας $f+g = s \circ (f,g)$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και το Λήμμα 3.2.3. Το υπόλοιπο της απόδειξης προκύπτει από την Πρόταση 3.1.4.

Για το β), γράφουμε $fg = p \circ (f,g)$ και χρησιμοποιούμε ξανά τον κανόνα της αλυσίδας και το Λήμμα 3.2.3. Το γ) είναι εφαρμογή του β) και της σχέσης

$$D(1/g)(x_0) = -\frac{Dg(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

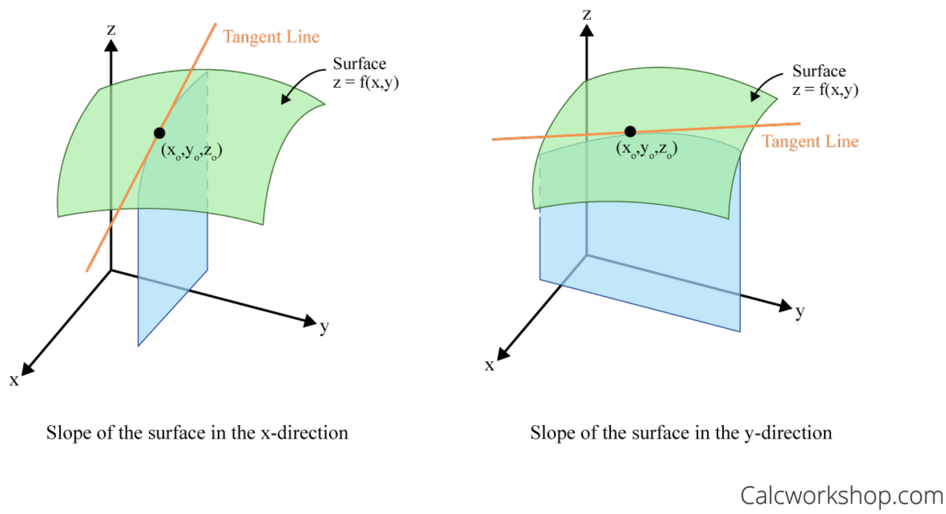
□

3.3 Μερικές παράγωγοι-Ιακωβιανός πίνακας

Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$, και $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Η *μερική παράγωγος* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *της* f *στο* a *ως προς τη μεταβλητή* x_i είναι η

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

Γεωμετρικά, ερμηνεύουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ως την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(a, f(a))$ του γραφήματος $\mathrm{Gr}(f)$ της καμπύλης που προκύπτει από την τομή του $\mathrm{Gr}(f)$ με το υπερεπίπεδο $x_j = a_j$.



Σχήμα 3.4. Μερικές παράγωγοι στις δύο μεταβλητές.

Λέμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ της f στο A αν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ για κάθε $a \in A$.

Υπενθυμίζουμε το παρακάτω θεώρημα του Fermat από τον Λογισμό μίας μεταβλητής:

Θεώρημα 3.3.1. *Εάν η* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *είναι διαφορίσιμη στο* $x_0 \in (a,b)$ *και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο* x_0*, τότε* $f'(x_0) = 0$.

Το παρακάτω θεώρημα γενικεύει το Θεώρημα 3.3.1:

Θεώρημα 3.3.2. *Εάν για τη $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ στο $a \in \mathrm{Int}(A)$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο a, τότε $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω για κάθε $x \in A$ η συνάρτηση μίας μεταβλητής

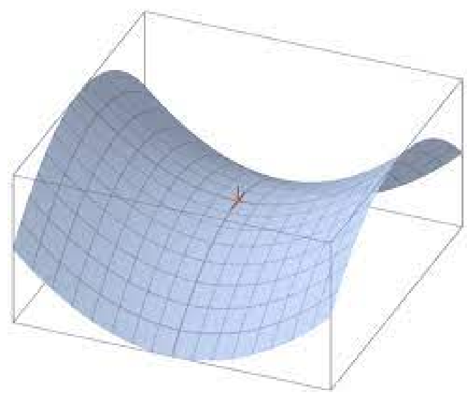
$$g_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Τότε, λόγω του Θεωρήματος 3.3.1 και του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g_i'(a_i) = 0.$$

□

Σχόλιο 3.3.3. Όπως και στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.3.2 δεν ισχύει εν γένει. Λόγου χάρη, η σαγματική επιφάνεια $f(x, y) = x^2 - y^2$ έχει μηδενικές μερικές παραγώγους στο (0,0), παρ' όλα αυτά το (0,0) δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.



Σχήμα 3.5. Σαγματική επιφάνεια: στο (0,0) υπάρχουν κατευθύνσεις που η συνάρτηση αυξάνεται και κατευθύνσεις που η συνάρτηση μειώνεται.

Το παρακάτω θεώρημα προσδιορίζει ακριβώς τη γραμμική απεικόνιση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης.

Θεώρημα 3.3.4. *Αν η $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο a, τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$$

και

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_a . \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $m = 1$. Ορίζουμε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με

$$h(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε, από τον ορισμό της μερικής παραγώγου και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ h)'(a_i) = Df(a) \cdot h'(a_i) = Df(a) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

με το 1 να βρίσκεται στην i-θέση. Προκύπτει τώρα το συμπέρασμα από την Πρόταση 3.2.2. □

Παράδειγμα 3.3.5. Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα. Παίρνουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Η μερική παράγωγος της f στο $(0, 0)$ ως προς x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.4, εάν υπάρχει η $Df(0, 0)$, *τότε οφείλει να είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση*. Όμως το όριο

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$$

δεν υπάρχει: για $h_2 = 0$ το όριο είναι 0, ενώ για $h_1 = h_2$ το όριο είναι 1/2.

Γεωμετρικά, μπορούμε να καταλάβουμε γιατί δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.3.4 ως εξής. Ας θεωρήσουμε για απλότητα μία συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε η ύπαρξη των μερικών παραγώγων εξασφαλίζει την ύπαρξη δύο εφαπτόμενων διανυσμάτων πάνω στο γράφημα της συνάρτησης στο δοθέν σημείο. Εάν τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε σχηματίζουν επίπεδο, που είναι το εφαπτόμενο της συνάρτησης στο δοθέν σημείο, δηλαδή η γραμμική της προσέγγιση. Τότε, η παράγωγος υπάρχει. Στην αντίθετη περίπτωση, η παράγωγος δεν υπάρχει.

Μία συνάρτηση $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \subset A \to \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, θα λέγεται *κλάσης* $\mathcal{C}^1$ *στο* $a \in A$ και θα συμβολίζουμε $f \in \mathcal{C}^1(a)$, αν όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial f_j/\partial x_i$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο a.

Έχουμε το εξής:

Θεώρημα 3.3.6. *Αν η* $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \subset A \to \mathbb{R}^m$, *$A$ ανοικτό, ανήκει στην* $\mathcal{C}^1(a)$, $a \in A$, *τότε είναι διαφορίσιμη στο* a.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση $m = 1$. Έστω $a = (a_1, \ldots, a_n)$ και αντί του $Df(a)$ εισάγουμε τον διανυσματικό συμβολισμό

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Το διάνυσμα $\nabla f(a)$ λέγεται *κλίση της f στο a*.[5] Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a) \cdot (x - a)|}{\|x - a\|} = 0. \tag{3.3}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\ &= f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + f(a_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, a_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &\quad \cdots \\ &\quad + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Μέσης Τιμής (για συναρτήσεις μιας μεταβλητής), παίρνουμε ότι η παραπάνω έκφραση ισούται με

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, b_n)(x_n - a_n),$$

όπου $b_i = b_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Οπότε, η παράσταση εντός του ορίου στην Εξ. (3.3) είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \right) (x_i - a_i) \right|}{\left(\sum_{i=1}^m (x_i - a_i)^2 \right)^{1/2}} \quad &\le \quad \text{(CSB)} \\ \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Λόγω της συνέχειας των μερικών παραγώγων,

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (a_1, \ldots, a_n)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, b_i(x), \ldots, x_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, \lim_{x_i \to a_i} b_i(x), \ldots, a_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Το επόμενο παθολογικό παράδειγμα μας λέει ότι το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.3.6 δεν ισχύει εν γένει.

[5] Γεωμετρικά, η κλίση $\nabla f(a)$ είναι διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο a,δείτε την Ενότητα 3.4.

Παράδειγμα 3.3.7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Η f είναι διαφορίσιμη στο (0,0): πράγματι, παίρνουμε $Df(0,0) = (0\ 0)$ και έχουμε

$$\frac{\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

Συνεπώς, το Θεώρημα 3.3.4 μας λέει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Από την άλλη, για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Η $\partial f/\partial x$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ διότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$$

δεν υπάρχει. Πράγματι στον δρόμο $x = 0$,

$$g(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0.$$

Αλλά, στον δρόμο $y = 0, x > 0$, είναι

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

και το όριο της h καθώς το $x \to 0^+$ δεν υπάρχει. Για να το δούμε αυτό, παίρνουμε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad x'_n = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

που τείνουν στο 0. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = -1 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} h(x'_n).$$

3.3.1 Παραγώγιση υπό το σύμβολο ολοκλήρωσης

Μία σημαντική εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας είναι ο παρακάτω κανόνας του Leibniz για την παραγώγιση υπό το σύμβολο της ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 3.3.8. *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f = f(x,y)$ και $\partial f/\partial x$ είναι συνεχείς στο κλειστό ορθογώνιο $\overline{R} = [x_1, x_2] \times [\alpha_0, \beta_0]$ και ότι οι συναρτήσεις μίας μεταβλητής*

$$\alpha, \beta : [x_1, x_2] \to [\alpha_0, \beta_0]$$

είναι $\mathcal{C}^1(x_1, x_2)$. Τότε η

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy$$

έχει παράγωγο

$$g'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy + \beta'(x) f(x, \beta(x)) - \alpha'(x) f(x, \alpha(x)).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = \beta(x)$, $v = \alpha(x)$ και γράφουμε

$$g(x) = \int_u^v f(x,y)\, dy = G(u,v,x).$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$g'(x) = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\int_v^u f(x,y)\, dy \right) = f(x,u),$$
$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\int_v^u f(x,y)\, dy \right) = -f(x,v).$$

Από την άλλη,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_v^u f(x,y)\, dy \right) = \int_v^u \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy$$

πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

3.4 Κατά κατεύθυνση παράγωγοι-κλίση

Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$, ανοικτό, $a \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η *παράγωγος* $\nabla_v f(a)$ *της* f *στο* a *κατά την κατεύθυνση του* v ορίζεται ως

$$\nabla_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Θεώρημα 3.4.1. *Εάν η f όπως παραπάνω είναι διαφορίσιμη στο a, τότε*

$$\nabla_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma(t) = a + tv$, η ευθεία που περνά από το a στην κατεύθυνση του v. Η γ είναι διαφορίσιμη, ειδικότερα είναι διαφορίσιμη στο 0 και συνεπώς από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι η σύνθεση $f \circ \gamma$ είναι διαφορίσιμη στο 0. Η παράγωγος είναι

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = D(f \circ \gamma)(a) = Df(a)(\gamma(0))\gamma'(0) = \nabla f(a) \cdot v.$$

□

Σχόλιο 3.4.2. Επειδή

$$D(f \circ \gamma)(a) = \|\nabla f(a)\| \cos\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία των $\nabla f(a)$ και v, έπεται ότι η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης (αντ. μέγιστης μείωσης) της είναι η $\nabla f(a)/\|\nabla f(a)\|$ (αντ. η $-\nabla f(a)/\|\nabla f(a)\|$). Σε κατευθύνσεις κάθετες στα $\pm\nabla f(a)/\|\nabla f(a)\|$, η f ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται στο a.

Σχόλιο 3.4.3. Η μερική παράγωγος συνάρτησης είναι περίπτωση κατευθυνόμενης παραγώγου:

$$\nabla_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

όπου e_i είναι το στοιχείο της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$ με 1 στην i-θέση.

Παράδειγμα 3.4.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Έστω $v = (v_1, v_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = v_1^2 v_2 = \nabla_v f(0,0).$$

Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$. Πράγματι, επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

αν υπήρχε η παράγωγος $Df(0,0)$ θα έπρεπε να ισούται με τη μηδενικό πίνακα. Όμως το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

δεν υπάρχει, εφ'όσον στον δρόμο $x = y$ το όριο δεν υπάρχει.

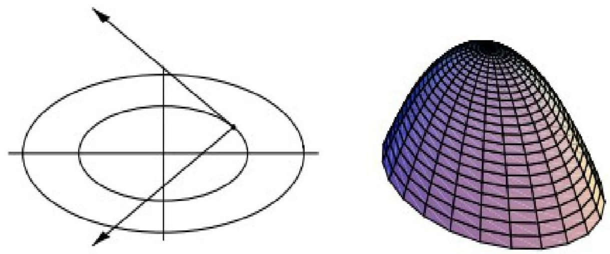
Σχόλιο 3.4.5. Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο ανοικτό A και $b \in \mathbb{R}$. Το *σύνολο στάθμης* L_b είναι το

$$L_b = \{x \in A : \ f(x) = b\}.$$

Έστω $\gamma : I = (-\epsilon, \epsilon) \to L_b$ καμπύλη με $\gamma(0) = a$. Τότε, για κάθε $t \in I$, $(f \circ \gamma)(t) = b$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας όταν $t = 0$ παίρνουμε

$$\nabla f(a) \cdot \gamma'(0) = 0,$$

με άλλα λόγια, το διάνυσμα κλίσης είναι κάθετο σε κάθε σύνολο στάθμης.



Σχήμα 3.4. Η κλίση και το ορθογώνιό της διάνυσμα για το παραβολικό βουνό.

3.4.1 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα 3.4.6. *(**Θεώρημα Μέσης Τιμής**) Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο ανοικτό και κυρτό A. Τότε, για κάθε $x_1, x_2 \in A$ υπάρχει x^* στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(x_1\ x_2)$ που συνδέει τα x_1, x_2 ώστε*

$$f(x_2) - f(x_1) = \nabla f(x^*) \cdot (x_2 - x_1).$$

Απόδειξη. Το (κλειστό) ευθύγραμμο τμήμα $[x_1\ x_2]$ που συνδέει τα x_1, x_2 παραμετράται από την

$$\ell(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \quad t \in [0,1].$$

Η ℓ είναι διαφορίσιμη στο $(0,1)$ και $\ell'(t) = x_2 - x_1$. Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα Μέσης Τιμής 1.1.10 για τη συνάρτηση $g = f \circ \ell : [0,1] \to \mathbb{R}$: υπάρχει $t^* \in (0,1)$ ώστε

$$g'(t^*) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = f(x_2) - f(x_1).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$g'(t^*) = \nabla f(\ell(t^*)) \cdot \ell'(t^*),$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται θέτοντας $x^* = \ell(t^*)$. □

Σχόλιο 3.4.7. Είναι σαφής η σχέση του ΘΜΤ με την κατευθυνόμενη παράγωγο. Αν θέσουμε $a = x_2 - x_1$, τότε ο τύπος του θεωρήματος γράφεται:

$$f(x_2) - f(x_1) = \nabla_a f(x^*).$$

3.5 Θεωρήματα Αντιστροφής και Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

3.5.1 Το Θεώρημα της Αντιστροφής

Ας εκκινήσουμε από ένα απλό ερώτημα για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής: πότε μία συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη; Η απάντηση βεβαίως είναι όταν είναι 1–1 και επί και γεωμετρικά μπορούμε να σκεφτούμε τη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης να τέμνεται το πολύ σε ένα σημείο με ευθείες παράλληλες στον άξονα των x.

Ας δυσκολέψουμε τώρα λίγο την ερώτηση: εάν έχουμε μία διαφορίσιμη συνάρτηση, πότε δέχεται τοπική αντίστροφο που να είναι και αυτή διαφορίσιμη; Είναι γνωστό το παράδειγμα της $f(x) = x^3$ η οποία είναι μία διαφορίσιμη (σε όλο το $\mathbb{R}$) αντιστρέψιμη συνάρτηση. Όμως, η αντίστροφή της $f^{-1}(x) = x^{1/3}$

δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Για να καταλάβουμε τον λόγο που συμβαίνει αυτό, ας εξετάσουμε την f στο 0. Είναι $f'(0)=0$, δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία στο 0 είναι παράλληλη με τον άξονα των x, πράγμα που καθιστά απαγορευτική την παραγωγισιμότητα (αλλά βεβαίως όχι την ύπαρξη) της αντίστροφης συνάρτησης στο 0.

Από την άλλη, εάν γνωρίζουμε ότι υπάρχει η $(f^{-1})'(a)$ για κάποια διαφορίσιμη συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a, τότε η σχέση $f^{-1}\circ f = \mathrm{id.}$ και ο κανόνας της αλυσίδας μας δίνουν

$$(f^{-1})'(f(a))\cdot f'(a)=1,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$$

αν $f'(a)\neq 0$. Βεβαίως, ο κανόνας της αλυσίδας είναι κενός περιεχομένου στην ενάντια περίπτωση. Ας εξειδικεύσουμε λίγο παραπάνω στην περίπτωση που $f'(a)\neq 0$. Αν η f' είναι συνεχής κοντά στο a, τότε μπορούμε να εικάσουμε την ύπαρξη τοπικής αντιστρόφου εκεί, που μάλιστα να έχει και συνεχή παράγωγο.

Υπάρχει και μία αλγεβρική διάσταση στο θέμα: η εξίσωση $y=f(x)$ για f διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο κοντά σε κάποιο a όπου $f'(a)\neq 0$, λύνεται ως προς x, $x=g(y)$ τοπικά, η g είναι διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο και $g'(y)=1/f'(x)$, για κατάλληλα y κοντά στο $f(a)$.

Κλείνουμε αυτά τα εισαγωγικά κάνοντας μία σημαντική παρατήρηση. Η απαίτησή μας για την f να είναι $\mathcal{C}^1$ σε μια περιοχή του a, είναι αναγκαία. Πράγματι, η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0,\\[2ex] 0 & x=0\end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο 0, $f'(0)=1/2\neq 0$ αλλά δεν υπάρχει η $(f^{-1})'(0)$. Η f δεν είναι $\mathcal{C}^1$ στο 0:

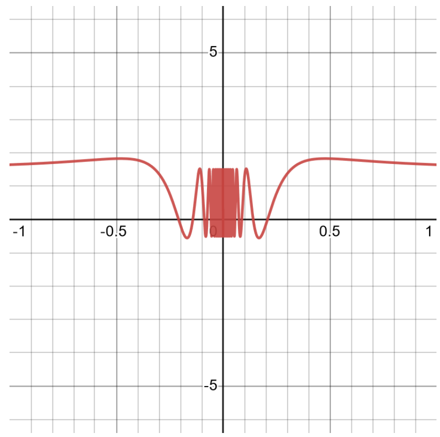
$$f'(x)=\begin{cases}1/2+2x\sin(1/x)-\cos(1/x) & x\neq 0\\[2ex] 1/2 & x=0\end{cases}$$

Αν $x_n=\frac{1}{2n\pi}$,

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=-\frac{1}{2}.$$

Από την άλλη, αν $x_n'=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$,

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n')=\frac{1}{2}.$$



Σχήμα 3.5. Συνάρτηση παραγωγίσιμη αλλά όχι συνεχώς παραγωγίσιμη στο 0. Το Θεώρημα Αντιστροφής δεν εφαρμόζεται.

Θεώρημα 3.5.1. **(Θεώρημα της Αντιστροφής)** *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$*,* A *ανοικτό και* $a \in A$*. Υποθέτουμε ότι* $f \in \mathcal{C}^1(A)$ *και* $\det(Df(a)) \neq 0$*. Τότε υπάρχει περιοχή* $V = V_a \subset A$ *και περιοχή* $W = W_{f(a)}$ *τέτοιες ώστε να υπάρχει η* $f^{-1} : W \to V$*, να είναι* $\mathcal{C}^1(W)$ *και επίσης να ισχύει*

$$Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}, \quad \forall y \in W.$$

Το επόμενο λήμμα μας λέει ότι μια $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση με φραγμένες μερικές παραγώγους είναι *συνάρτηση Lipschitz*.

Λήμμα 3.5.2. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$*,* A *ανοικτό, κυρτό και* $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{C}^1(A)$*. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει* $M > 0$ *ώστε για κάθε* $i, j = 1, \ldots, n$*,*

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right| \leq M, \quad x \in A.$$

Τότε για κάθε $x, y \in A$*,*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq nM\|x - y\|.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής 3.4.6 σε όλες τις f_i, $i = 1, \ldots, n$ επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[x\ y]$: υπάρχουν $x_i^* \in (x\ y)$ ώστε

$$f_i(x) - f_i(y) = \nabla f(x_i^*) \cdot (x - y).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_i(y)| &\leq \|\nabla f(x_i^*)\| \cdot \|x - y\| \quad \text{ανισότητα (CSB)} \\ &\leq \sqrt{n}M\| \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} nM^2\|x - y\|^2 \right)^{1/2} \\ &= nM\|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1. Έστω $T = Df(a)$. Επειδή $\det(T) \neq 0$, ο T είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$D(T^{-1} \circ f)(a) = DT^{-1}(f(a)) \cdot Df(a) = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}.$$

Ισχυριζόμαστε πως αν το θεώρημα αληθεύει για την $T^{-1} \circ f$, τότε αληθεύει και για την f. Πράγματι, έστω ότι αληθεύει για την $T^{-1} \circ f$. Τότε υπάρχουν περιοχές V_a του a και $W_{T^{-1}(f(a))}$ του $T^{-1}(f(a))$ ώστε η

$$(T^{-1} \circ f)(x) = y$$

λύνεται ως προς x στην V_a. Τότε, επειδή ο T είναι 1–1, ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = T(y) := z$$

λύνεται ως προς x στην V_a. Θέτουμε

$$x = f^{-1}(z) = (f^{-1} \circ T)(y).$$

Η $f^{-1} \circ T$ είναι η τοπική αντίστροφη της $T^{-1} \circ f$ και είναι διαφορίσιμη. Επειδή

$$f^{-1} = (f^{-1} \circ T) \circ T^{-1}$$

προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας ότι η f^{-1} είναι διαφορίσιμη.

Έπεται λοιπόν ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου $Df(a) = I$, ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας.

1) Επειδή $f \in \mathcal{C}^1(A)$, υπάρχει περιοχή V' τέτοια ώστε:

$$\det(Df(x)) \neq 0, \ \forall x \in V' \tag{3.4}$$

λόγω της συνέχειας των μερικών παραγώγων και της συνάρτησης της ορίζουσας.

2) Ισχύει ότι

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right| = \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) - \delta_{ij}\right| < \frac{1}{2n}, \tag{3.5}$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ και για κάθε $x \in V'$. Εδώ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j \end{cases}$$

είναι το *δέλτα του Kronecker*.

3) Υπάρχει κλειστή περιοχή $\overline{U} \subset V'$: $f(x) \neq f(a)$ για κάθε $x \in U$. Ειδάλλως, θα υπήρχε ακολουθία $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim x^k = a$, με $f(x^k) = f(a)$ για κάθε x^k. Τότε,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|f(x^k) - f(a) - I(x^k - a)\|}{\|x^k - a\|} = 1,$$

που είναι άτοπο.

4) Για κάθε $x_1, x_2 \in \overline{U}$ ισχύει ότι

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \tag{3.6}$$

Αυτό φαίνεται ως εξής: θέτουμε $g(x) = f(x) - x$. Τότε

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| &\leq \|(f(x_1) - x_1) - (f(x_2) - x_2)\| \\ &= \|g(x_1) - g(x_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει από το Λήμμα 3.5.2 για $M = \frac{1}{2n}$.

5) Από την Πρόταση 2.2.7, έχουμε ότι η εικόνα $f(\partial U)$ είναι συμπαγές σύνολο και $f(a) \notin f(\partial U)$. Άρα,

$$\exists \delta > 0 : \ \|f(a) - f(x)\| \geq \delta, \ \forall x \in \partial U.$$

Θέτουμε

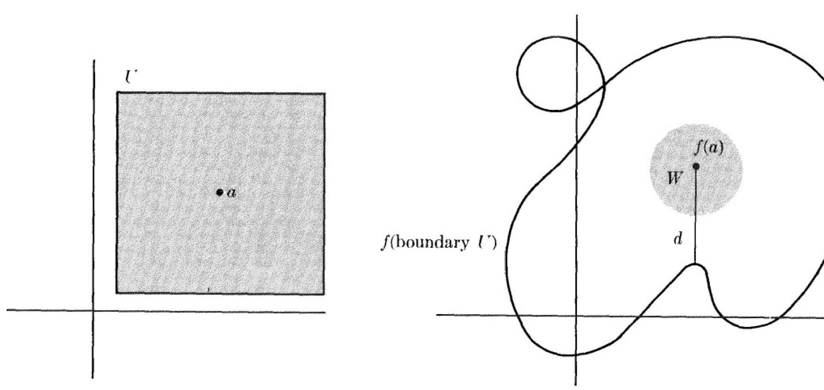
$$W = W_{f(a)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y - f(a)\| < \delta/2\}.$$

Τότε, αν $y \in W$ και $x \in \partial U$, έχουμε

$$\|y - f(a)\| < \|y - f(x)\|, \tag{3.7}$$

διότι

$$\|y - f(a)\| < \frac{\delta}{2} \leq \frac{\|f(x) - f(a)\|}{2} \leq \frac{\|f(x) - y\| + \|y - f(a)\|}{2}.$$



Σχήμα 3.6

5) Ισχυριζόμαστε ότι

$$\forall y \in W, \ \exists x \in U : \ f(x) = y.$$

Θεωρούμε για σταθερό $y \in W$ τη συνάρτηση $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \|y - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - f_i(x)|^2.$$

Η h είναι συνεχής, άρα έχει ελάχιστο στο συμπαγές $\overline{U}$, λόγω του Θεωρήματος 2.2.8. Αν $x \in \partial U$, τότε από την Εξ. (3.7) έχουμε ότι $h(a) < h(x)$, άρα το ελάχιστο δεν πιάνεται στο ∂U αλλά σε κάποιο $x^* \in U$. Από το Θεώρημα του Fermat 3.3.2,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x^*) = 0 \; j = 1, \dots, n, \iff \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - f_i(x^*)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) = 0, \; j = 1, \dots, n,$$

όπως προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας. Από την Εξ. (3.5), $\det(Df(x^*)) \neq 0$, άρα $y_i = f_i(x^*)$, $i = 1, \dots, n$, δηλαδή, $y = f(x^*)$. Αυτό το x^* είναι μοναδικό. Αν υπήρχε και άλλο $x' \in U$, $f(x') = y$, τότε λόγω της Εξ. (3.6) θα είχαμε

$$\|x^* - x'\| \leq 2\|f(x') - f(x^*)\| = 0.$$

Αυτό που έχουμε δείξει ως τώρα, είναι ότι η f αντιστρέφεται στο

$$V_a = U \cap f^{-1}(W).$$

Οπότε, η Εξ. (3.6) γράφεται

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|, \; \forall y_1, y_2 \in W, \tag{3.8}$$

πράγμα που δείχνει τη συνέχεια της f^{-1}.

Δείχνουμε τέλος την τοπική διαφορισιμότητα της f^{-1}. Θέτουμε $T = Df(x)$ και θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι διαφορίσιμη στο $y = f(x)$ με $Df^{-1}(y) = T^{-1}$, δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$$\lim_{y' \to y} \frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y) - T^{-1}(y' - y)\|}{\|y' - y\|} = 0.$$

Θέτοντας $x = f^{-1}(y')$, $x' = f^{-1}(y')$, έχουμε από την υπόθεση ότι

$$\lim_{x' \to x} \frac{\|f(x') - f(x) - T(x' - x)\|}{\|x' - x\|} = 0. \tag{3.9}$$

Αν

$$\phi(x) = f(x' + x) - f(x) - T(x'),$$

τότε η (3.9) γράφεται και ως

$$\lim_{x' \to x} \frac{\|\phi(x' - x)\|}{\|x' - x\|} = 0. \tag{3.10}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την T^{-1} στη σχέση

$$f(x') - f(x) = T(x' - x) + \phi(x' - x).$$

Παίρνουμε

$$\begin{aligned} &T^{-1}(f(x') - f(x)) = x' - x + T^{-1}(\phi(x' - x)) \\ &\therefore T^{-1}(y' - y) = f^{-1}(y') - f^{-1}(y) + T^{-1}(\phi(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))) \\ &\therefore f^{-1}(y') = f^{-1}(y) + T^{-1}(y' - y) - T^{-1}(\phi(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{y'\to y} \frac{\|T^{-1}(\phi(f^{-1}(y') - f^{-1}(y)))\|}{\|y'-y\|} = 0 \iff \lim_{y'\to y} \frac{\|\phi(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\|}{\|y'-y\|} = 0.$$

Αλλά,

$$\frac{\|\phi(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\|}{\|y'-y\|} = \frac{\|\phi(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|} \cdot \frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|}{\|y'-y\|}.$$

Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής, $f^{-1}(y') \to f^{-1}(y)$ καθώς $y' \to y$, άρα ο αριστερός όρος του δεξιού σκέλους τείνει στο 0. Από την (3.8) το ίδιο ισχύει και για τον δεξιό όρο. Τέλος το $\mathcal{C}^1$ προκύπτει από τον κανόνα του Crammer. □

Παράδειγμα 3.5.3. Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε πώς μπορεί να οριστεί τοπικά μία παραμετρημένη καμπύλη ως τομή δύο επιφανειών. Προς τούτο ας θεωρήσουμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^2 \supset A \to \mathbb{R}, \emptyset \neq A$, ανοικτό, $f, g \in \mathcal{C}(A)$ και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε η ορίζουσα

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} \neq 0.$$

Από το Θεώρημα της Αντιστροφής παίρνουμε ότι κοντά στο (x_0, y_0, z_0), όπου

$$z_0 = f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0),$$

το σύστημα

$$\begin{aligned} z &= f(x,y), \\ z &= g(x,y), \end{aligned}$$

έχει $\mathcal{C}^1$ λύση

$$x = x(z), \quad y = y(z),\ z \in I_\epsilon = (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon),\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

Για να βρούμε τις παραγώγους, διαφορίζουμε και τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς z για να πάρουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dz}, \\ 1 &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dz}. \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα παίρνουμε

$$x'(z) = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|}, \quad y'(z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}}{\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|},$$

για $z \in I_\epsilon$. Αυτό που δείξαμε είναι ότι τοπικά η τομή των δύο επιφανειών είναι η $\mathcal{C}^1(I_\epsilon)$ καμπύλη $\gamma : I_\epsilon \to \mathbb{R}^3$, με

$$\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$$

και παράγωγο

$$\gamma'(z) = (x'(z), y'(z), 1).$$

Έχουμε τα παρακάτω σημαντικά πορίσματα του Θεωρήματος της Αντιστροφής:

Πόρισμα 3.5.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$, A ανοικτό, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Αν $\det(Df(x)) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε για κάθε $U \subset A$ ανοικτό, η εικόνα $f(U)$ είναι ανοικτό σύνολο. Συμπεραίνουμε ότι μία $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση με $\det(Df(x)) \neq 0$ είναι ανοικτή απεικόνιση.*

Πόρισμα 3.5.5. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$, A ανοικτό, μία $\mathcal{C}^1$ 1–1 απεικόνιση με $\det(Df(x)) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε η f είναι $\mathcal{C}^1$ αμφιδιαφόριση[6] στο A.*

3.5.2 Το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Ξεκινάμε με μία ενδεικτική εφαρμογή από τις δύο μεταβλητές. Έστω ο μοναδιαίος κύκλος, την εξίσωση του οποίου γράφουμε ως εξής:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{3.11}$$

Μπορούμε να επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς y: είναι $y = \sqrt{1 - x^2}$ όταν $y \geq 0$ και $y = -\sqrt{1 - x^2}$ όταν $y \leq 0$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παντού διαφορίσιμες εκτός από τα σημεία $x = \pm 1$ ($y = 0$) δηλαδή τα σημεία όπου $\partial f / \partial y = 0$. Ας περιοριστούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας στην περίπτωση $x > 0$. Παραγωγίζουμε την Εξ. (3.11) ως προς x:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Επειδή $x \neq \pm 1 \implies y \neq 0$ και συνεπώς

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \forall x > 0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η παράγωγος εκφράζεται ως πεπλεγμένη συνάρτηση των x, y, ειδικότερα,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Έτσι λοιπόν δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον ακριβή τύπο της $y = y(x)$ (που στην προκειμένη περίπτωση είναι η $y = \sqrt{1 - x^2}$).

Στις τρεις μεταβλητές τώρα, έστω η μοναδιαία σφαίρα της οποίας τον τύπο γράφουμε ως

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \tag{3.12}$$

Μπορούμε να επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς z: είναι $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όταν $z \geq 0$ και $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όταν $z \leq 0$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παντού διαφορίσιμες εκτός από τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ ($z = 0$) δηλαδή τα σημεία όπου $\partial \phi / \partial z = 0$. Υποθέτοντας $z > 0$ και πάλι χωρις βλάβη, παραγωγίζουμε την Εξ. (3.12) ως προς x:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

[6] Υπενθυμίζουμε ότι μία 1–1 απεικόνιση λέγεται αμφιδιαφόριση όταν η απεικόνιση και η αντίστροφή της είναι διαφορίσιμες.

και ως προς y:

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}}.$$

Διατυπώνουμε ευθύς αμέσως το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων που είναι η ευρεία γενίκευση της παραπάνω συζήτησης.

Θεώρημα 3.5.6. (**Πεπλεγμένων Συναρτήσεων**) *Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ανοικτό. Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$,*

$$f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x, y), \ldots, f_m(x, y))$$

απεικόνιση κλάσεως $\mathcal{C}^1(A)$. Εάν $(x_0, y_0) \in A$ με $f(x_0, y_0) = 0$ τέτοια ώστε

$$\det(\partial_y f) := \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right| = \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0,$$

τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $U = U_{x_0}$ και $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση $g : U \to \mathbb{R}^n$ με $g(x_0) = y_0$ $g = (g_1, \ldots, g_n)$, ώστε

$$y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Οι μερικές παράγωγοι των g_i σε σημεία του U δίνονται από τη σχέση

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\frac{\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j,y_{j+1},\ldots,y_m)}\right|}{\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right|}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}^{n+m}$, με

$$\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Η $\tilde{f}$ είναι $\mathcal{C}^1$ και

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ & \\ * & \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα 3.5.1 υπάρχει $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ανοικτή περιοχή του (x_0, y_0) και ανοικτή περιοχή $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ του $\tilde{f}(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ώστε η $\tilde{f} : U \times V \to W$ να έχει $\mathcal{C}^1$ αντίστροφη

$$\tilde{f}^{-1} : W \to U \times V.$$

Είναι $\tilde{f}^{-1}(x, y) = (x, \tilde{g}(x, y))$ για κάποια $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση $\tilde{g}$, εφ' όσον και η $\tilde{f}$ είναι της μορφής αυτής. Έστω η προβολή $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\pi(x, y) = y$. Τότε, $\pi \circ \tilde{f} = f$ και

$$\begin{aligned} f(x, \tilde{g}(x, y)) &= f \circ \tilde{f}(x, y) \\ &= (\pi \circ \tilde{f}) \circ \tilde{f}^{-1}(x, y) \\ &= (\pi \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1})(x, y) \\ &= \pi(x, y) = y. \end{aligned}$$

Άρα, $f(x, \tilde{g}(x,0)) = 0$ και έστω $g(x) = \tilde{g}(x,0)$. Είναι $g(x_0) = \tilde{g}(x_0, 0)$ και επίσης,

$$f(x_0, g(x_0)) = 0 \implies y_0 = g(x_0).$$

Τα υπόλοιπα προκύπτουν τώρα απευθείας από το Θεώρημα 3.5.1. □

Παράδειγμα 3.5.7. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z,u,v) &= x^2y + z + u + v = 0, \\ f_2(x,y,z,u,v) &= x^2 - y^2 + u - v = 0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε στο σημείο $\mathbf{0} = (0,0,0,0,0)$ την ορίζουσα

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{matrix}\right|_{\mathbf{0}} = -2 \neq 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα 3.5.6 υπάρχουν τοπικά γύρω από το $(0,0,0)$ $\mathcal{C}^1$ συναρτήσεις $u = u(x,y,z)$ και $v = v(x,y,z)$. Εκεί, μπορούμε να υπολογίσουμε πεπλεγμένα τις μερικές τους παραγώγους. Λόγου χάρη, παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x παίρνουμε

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς x παίρνουμε

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Καταλήγουμε στο

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x(y+1), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -x(y-1).$$

Τονίζουμε εδώ πως *στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε ακριβή τύπο για τις* u, v. Αυτό όμως ούτε συμβαίνει πάντοτε, ούτε είναι και ο σκοπός της εφαρμογής του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων που είναι ένα *τοπικό* θεώρημα.

Παράδειγμα 3.5.8. Το παράδειγμα αυτό είναι ανάλογο του Παραδείγματος 3.5.3: θα δούμε πως εφαρμόζοντας το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων μπορούμε να ορίσουμε την τομή δύο υπερεπιφανειών

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 0, \\ g(x,y,z) &= 0, \end{aligned}$$

ως παραμετρημένη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι για $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ είναι $f(p_0) = g(p_0) = 0$ και επίσης, υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι

$$\left|\frac{\partial(f,g))}{\partial(x,y)}\right|_{p_0} \neq 0.$$

Τότε, από το Θεώρημα Πεπλεγμένων συναρτήσεων, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$x = x(z), \quad y = y(z), \quad z \in I_\epsilon = (z_0 - \epsilon,\ z_0 + \epsilon),$$

με $x(z), y(z)$ να είναι $\mathcal{C}^1(I_\epsilon)$ και $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Προκύπτει λοιπόν η παραμετρημένη καμπύλη

$$\gamma(z) = (x(z), y(z), z), \quad z \in I_\epsilon.$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις του συστήματος ως προς z παίρνουμε

$$f_x x' + f_y y' + f_z = 0,$$
$$g_x x' + g_y y' + g_z = 0.$$

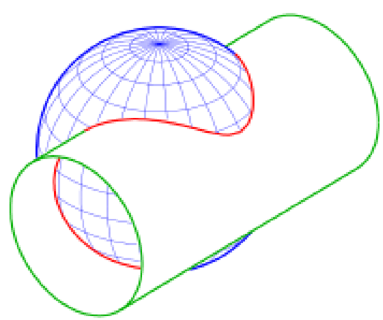
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι για κάθε $z \in I_\epsilon$,

$$\gamma'(z) = \left(\left| \frac{\partial(f,g))}{\partial(y,z)} \right| / \left| \frac{\partial(f,g))}{\partial(x,y)} \right|, \; - \left| \frac{\partial(f,g))}{\partial(x,z)} \right| / \left| \frac{\partial(f,g))}{\partial(x,y)} \right|, \; 1 \right).$$

Εφαρμόστε τα παραπάνω αποτελέσματα για την καμπύλη του Σχήματος

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$
$$g(x,y,z) = (y-1)^2 + z^2 - 1 = 0,$$

τοπικά γύρω από το σημείο $p_0 = (0,1,0)$.



Σχήμα 3.7

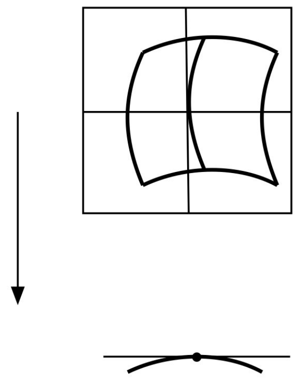
3.5.3 Θεώρημα Καταβύθισης

Το παρακάτω είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Θεώρημα Καταβύθισης (Submersion Theorem).

Θεώρημα 3.5.9. ***(Θεώρημα Καταβύθισης)*** *Έστω $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^m$, μία $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση στο ανοικτό A και έστω $x_0 \in A$ με $f(x_0) = 0$. Έστω επίσης ότι* rank$(Df(x_0)) = m$.[7] *Τότε υπάρχει ανοικτή μπάλλα $B = B(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{C}^1$ αμφιδιαφόριση $h : B \to \mathbb{R}^n$, ώστε*

$$(f \circ h)(x_1, \ldots, x_{n-m}, \ldots, x_n) = (x_{n-m+1}, \ldots, x_n).$$

[7] Δηλαδή, η γραμμική απεικόνιση $Df(x_0)$ είναι επί.



Σχήμα 3.8 Καταβύθιση. Η απεικόνιση τοπικά είναι προβολή.

Απόδειξη. Αν
$$\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_{n-m+1},\ldots,x_n)}\right|_{x_0}\neq 0,$$
τότε από το Θεώρημα 3.5.6 υπάρχει h (η $\tilde{f}^{-1}$ της απόδειξης) ώστε
$$(f\circ h)(x_1,\ldots,x_{n-m},\ldots,x_n)=(x_{n-m+1},\ldots,x_n).$$
Αν δεν έχει έτσι η κατάσταση, επειδή rank$(Df(x_0))=m$ υπάρχει μία διάταξη
$$j_1<\cdots<j_m,$$
ώστε
$$\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_m})}\right|_{x_0}\neq 0.$$
Έστω $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ με
$$g(x_1,\ldots,x_{n-m},x_{n-m+1},\ldots,x_m)=(x_1,\ldots,x_{n-m},x_{j_1},\ldots,x_{j_m}),$$
και θεωρούμε την $f'=f\circ g:g^{-1}(A)\to\mathbb{R}^m$. Είναι
$$\left|\frac{\partial(f_1',\ldots,f_m')}{\partial(x_{n-m+1},\ldots,x_n)}\right|_{g^{-1}(x_0)}=\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_m})}\right|_{x_0}\neq 0.$$
Κατά συνέπεια, υπάρχει h' με
$$(f\circ g\circ h')(x_1,\ldots,x_n)=(x_{n-m+1},\ldots,x_n),$$
οπότε εδώ $h=g\circ h'$. □

3.6 Διαφόριση υψηλότερης τάξης

Έστω $f : \mathbb{R}^n \subset A \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A$ ανοικτό, και υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$ της f στο A. Θεωρούμε τώρα δεδομένη την ύπαρξη των μερικών παραγώγων *αυτών* των συναρτήσεων. Λόγου χάρη, η μερική παράγωγος ως προς x_j της $\partial f/\partial x_i$ είναι η

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ καλούνται *δεύτερες μερικές παράγωγοι* ή *μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης*. Ομοίως, μπορούμε να ορίσουμε τις μερικές παραγώγους τρίτης, τέταρτης και γενικότερα r τάξης, $r \geq 1$.

Εάν οι μερικές παράγωγοι r-τάξης μιας συνάρτησης f όπως παραπάνω είναι συνεχείς στο A, τότε λέμε ότι η f είναι *κλάσεως* $\mathcal{C}^r$ στο A, και συμβολίζουμε $f \in \mathcal{C}^r(A)$.

Για τις περισσότερες "καλές" συναρτήσεις, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j.$$

Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποδεικνύουμε στην περίπτωση των δύο μεταβλητών, μας προσδιορίζει ακριβώς τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες αυτό συμβαίνει.

Θεώρημα 3.6.1. **(Λήμμα του Schwarz)** *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \supset A \to \mathbb{R}$, κλάσεως $\mathcal{C}^2$ στο ανοικτό $A \neq \emptyset$. Τότε, για κάθε $a = (a_1, a_2) \in A$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

Απόδειξη. Για το τυχαίο $a = (a_1, a_2) \in A$, θεωρούμε το κλειστό ορθογώνιο

$$R = [a_1, a_1 + h_1] \times [a_2, a_2 + h_2]$$

με h_1, h_2 κατάλληλα μικρά ώστε $R \subset A$. Είναι τώρα

$$\int_{a_1}^{a_1+h_1} \left(\int_{a_2}^{a_2+h_2} dy\right) dx = \int_{a_1}^{a_1+h_1} h_2 \, dx = h_1 h_2.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού,

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_1+h_1} \left(\int_{a_2}^{a_2+h_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \, dy\right) dx &= \int_{a_1}^{a_1+h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2)\right) dx \\
&= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) \\
&\quad - f(a_1 + h_1, h_2) + f(a_1, a_2) \\
&:= \Delta(h_1, h_2).
\end{aligned}$$

Λόγω της συνέχειας των δευτέρων μερικών παραγώγων εντός του συμπαγούς R, το Θεώρημα 2.2.8 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη των

$$m_{h_1,h_2} = \min_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad M_{h_1,h_2} = \max_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Είναι για κάθε $(x, y) \in R$

$$m_{h_1,h_2} \leq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \leq M_{h_1,h_2}.$$

Ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς y και κατόπιν ως προς x παίρνουμε την ανισότητα

$$m_{h_1,h_2} \leq \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1 h_2} \leq M_{h_1,h_2}.$$

Και πάλι λόγω συνέχειας της δεύτερης μερικής παραγώγου, καθώς το $(h_1, h_2) \to (0, 0)$ έχουμε ότι

$$m_{h_1,h_2}, M_{h_1,h_2} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2).$$

Άρα,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2).$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια ακριβώς διαδικασία, αλλά εναλλάσσοντας τώρα τη σειρά των x, y, παίρνουμε

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

□

3.6.1 Κατά κατεύθυνση παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Για απλότητα, θα υποθέσουμε αρχικά ότι έχουμε μια $f : \mathbb{R}^2 \supset A \to \mathbb{R}$, ανοικτό και κυρτό, και $f \in \mathcal{C}^2(A)$. Αν $\alpha = (a, b) \in A$ και $v = (v_1, v_2)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η παράγωγος της f στο α στην κατεύθυνση του v είναι η

$$\nabla_v f(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) \cdot v_2,$$

ή, με άλλα λόγια, η παράγωγος της $g(t) = f(\alpha + tv)$ στο $t = 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το t κινείται σε ένα αρκετά μεγάλο ανοικτό διάστημα I κέντρου 0. Παίρνοντας τώρα τη δεύτερη παράγωγο της g στο 0, έχουμε πάλι από τον κανόνα της αλυσίδας τον τύπο

$$g''(0) := \nabla_v^2 f(\alpha) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha) \cdot v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha) \cdot v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha) \cdot v_2^2.$$

Η ποσότητα $\nabla_v^2 f(\alpha)$ ονομάζεται *δεύτερη παράγωγος της f στο α στην κατεύθυνση του v*. Στη γενική περίπτωση όταν $A \subset \mathbb{R}^n$, έχουμε τον τύπο

$$\nabla_v^2 f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\alpha) v_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\alpha) v_i v_j.$$

Για ευκολία στο συμβολισμό, μπορούμε να γράφουμε και

$$\nabla_v^2 f(\alpha) = (\nabla f(\alpha) \cdot v)^2.$$

Με τον ίδιο τρόπο, αν $f \in \mathcal{C}^k(A)$, ορίζουμε την παράγωγο k-τάξης της f στο α στην κατεύθυνση του v από τη (φορμαλιστική) σχέση

$$\nabla_v^k f(\alpha) = (\nabla f(\alpha) \cdot v)^k.$$

Παράδειγμα 3.6.2. Αν $A \subset \mathbb{R}^2$ και $k = 3$, τότε ο παραπάνω φορμαλιστικός τύπος αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nabla_v^3 f(\alpha) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\cdot v_2\right)^3 \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\alpha)\cdot v_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\alpha)\cdot v_1^2 v_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\alpha)\cdot v_1 v_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\alpha)\cdot v_2^3.\end{aligned}$$

3.6.2 Θεώρημα Taylor

Ο φορμαλιστικός ορισμός που χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου υψηλότερης τάξης θα μας χρησιμεύσει στην διατύπωση και την απόδειξη του Θεωρήματος Taylor στις πολλές μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και κυρτό και ότι $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε για $\alpha \in A$ και $v \in \mathbb{R}$ (όχι κατ'ανάγκη μοναδιαίο) την ποσότητα

$$D_v^n f(\alpha) = (\nabla f(\alpha)\cdot v)^n, \quad n = 1, \ldots, k+1.$$

Θεώρημα 3.6.3. *(***Taylor***) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και κυρτό και $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$. Αν $\alpha \in A$, τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι*

$$f(x) = f(\alpha) + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!}(D_v^n f)(\alpha) + \frac{1}{(k+1)!}(D_v^{k+1} f)(x^*),$$

όπου $v = x - \alpha$ και x^* είναι κατάλληλο σημείο του A πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα x, α.

Απόδειξη. Θεωρούμε την $g(t) = f(\alpha + tv)$ με το t να κινείται σε κατάλληλο ανοικτό διάστημα που έχει κέντρο 0 και περιέχει το 1. Τότε, λόγω του κανόνα της αλυσίδας και των υποθέσεών μας για την f, έχουμε ότι

$$g^n(t) = (D_v^n f)(\alpha + tv).$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα Taylor 1.1.11 στη μία μεταβλητή για την g, το οποίο, για $t = 1$ και για κέντρο 0 δίνει

$$g(1) = g(0) + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} g^{n)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t^*),$$

για κάποιο t^* ανάμεσα στα 0,1. Αντικαθιστώντας, προκύπτει το θεώρημα. □

3.7 Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ αλλά οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Τι μπορείτε να πείτε για τη διαφορισιμότητα στο (0,0);

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$, A ανοικτό, μη κενό και έστω επίσης ότι υπάρχει ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάποιο $a \in A$ ισχύουν τα ακόλουθα:

   a) $T(a) = f(a)$,

   b)
   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{\|x - a\|^m} = 0, \ m > 0.$$

   Αποδείξτε ότι αν $m \geq 1$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο a με παράγωγο $Df(a) = T$. Αν όμως $0 < m < 1$, το αποτέλεσμα μπορεί και να μην ισχύει. (Πάρτε την
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
   η οποία δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Όμως, για κάθε $0 < m < 1$, ισχύει ότι για $T \equiv 0$ έχουμε
   $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^m} = 0.)$$

3. Εφαρμόζοντας πρώτα τον κανόνα του Leibniz για την παραγώγιση υπό το σύμβολο της ολοκλήρωσης στην
   $$g(x) = \int_0^x \frac{\log(1+xy)}{1+y^2}\, dy,$$
   δείξτε κατόπιν ότι
   $$\int_0^1 \frac{\log(1+y)}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{8} \log 2.$$

4. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A$ λέγεται *Lipschitz στο* A αν υπάρχει $M = M(f) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ να είναι
   $$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|.$$
   Η σταθερά M καλείται *σταθερά Lipschitz της* f.

   α) Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

   β) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f σε κάθε σημείο του ανοικτού A. Δείξτε ότι είναι απόλυτα φραγμένες από το M.

   Υπάρχει και ένα μερικό αντίστροφο του β):

   γ) Υποθέτουμε ότι η f είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ στο ανοικτό και κυρτό A. Δείξτε ότι αν για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχουν $M_i > 0$ τέτοια ώστε
   $$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq M_i, \quad x \in A,$$
   τότε η f είναι Lipschitz στο A και άρα ομοιόμορφα συνεχής στο A.

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x,y) = (y - e^{x+2y},\ xy),$$
$$g(u,v) = (u + v\sin u,\ (u+v)^2).$$

Με τόν κανόνα της αλυσίδας υπολογίστε την $D(g \circ f)(-2,1)$.

6. Αν $z = f(x,y)$ διαφορίσιμη και

$$x = u\cos a - v\sin a, \quad y = u\sin a - v\cos a,$$

όπου a μη μηδενική σταθερά, τότε αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

7. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq A$ ανοικτό, είναι διαφορίσιμη με διαφορίσιμη αντίστροφη $f^{-1} : \mathbb{R}^n \supset f(A) \to A$. Τότε, για κάθε $a \in f(A)$,

$$Df^{-1}(a) = (Df(f^{-1}(a)))^{-1}.$$

8. Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Δείξτε ότι η παράγωγος της f στο (0,0) κατά την κατεύθυνση του τυχόντος μοναδιαίου $a = (a_1, a_2)$ υπάρχει, αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

9. Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Εξετάστε αν υπάρχουν οι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Τί παρατηρείτε;

10. Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου

$$f(x,y) = (x^3 + 3xy^2,\ x - y).$$

α) Δείξτε ότι υπάρχει $\mathcal{C}^1$ τοπική αντίστροφη της f σε κατάλληλα μικρές περιοχές σημείων που δεν ανήκουν στην ευθεία $y = -x$.

β) Βρείτε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$Df^{-1}(4,0) \quad ((4,0) = f(1,1)).$$

11. Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου

$$f(x,y) = (u(x,y),\ v(x,y)) = \left(xy,\ \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right).$$

α) Δείξτε ότι υπάρχει $\mathcal{C}^1$ τοπική αντίστροφη της f σε κατάλληλα μικρές περιοχές όλων των σημείων του $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

β) Εάν σε τέτοια σημεία συμβολίσουμε

$$f^{-1}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v)),$$

τότε υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των x, y ως προς u και v.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία $\mathcal{C}^1$ συνάρτηση ώστε να υπάρχει $M > 0$, $M < 1$, τέτοιο ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(x,y) = (x + f(y),\ y + f(x)).$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

α) $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ και $\det(DF(x,y)) > 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Συμπεράνετε από το Θεώρημα της Αντιστροφής ότι η F αντιστρέφεται τοπικά γύρω από κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$. Αν

$$F^{-1}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v))$$

για κάποιο (x,y), βρείτε τον $DF^{-1}(u,v)$.

β) Η F είναι 1–1 και επί. (Υπόδειξη. 1) Για το επί: έστω $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ και όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος της Αντιστροφής θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(u,v) = \|(u,v) - F(x,y)\|^2$$

και δείξτε ότι παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο.

2) Για το 1–1, θεωρήστε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος της Αντιστροφής τη συνάρτηση

$$g(x,y) = F(x,y) - (x,y)$$

κι επαναλάβετε την απόδειξη για αυτήν την περίπτωση.)

γ) Συμπεράνετε ότι η F^{-1} ορίζεται ολικά στο $\mathbb{R}^2$ και είναι $\mathcal{C}^1$.

13. Αν

$$\begin{aligned} &u^2 + xv + uy + z = 0 \\ &u_v + xyz + 1 = 0, \end{aligned}$$

υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των u, v ως προς x, y και z, στο

$$(u,v,x,y,z) = (1, -1, `1, 1, -1).$$

14. Μία υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^2$ ορίζεται από μία σχέση της μορφής

$$\Phi(p) = \Phi(x, y, z) = 0,$$

όπου $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Έστω $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ με $\Phi(p_0) = 0$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων 3.5.6, διατυπώστε συνθήκες για την Φ ούτως ώστε να υπάρχει τοπικά γύρω από το (x_0, y_0) μία $\mathcal{C}^1$ συνάρτηση f για την οποία $z = f(x, y)$ και $z_0 = f(x_0, y_0)$. Αποδείξτε επιπλέον ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi/\partial x}{\partial \Phi/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi/\partial y}{\partial \Phi/\partial z}.$$

Συμπεράνετε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της υπερεπιφάνειας στο p_0 δίνεται από τη σχέση

$$\nabla\Phi(p_0) \cdot (p - p_0) = 0,$$

εφαρμόστε τα παραπάνω όταν

$$\Phi(x, y, z) = x^2y^2 - 3y^2z^2 + 2xz + 3x - 2y - 2z + 1 = 0, \quad p_0 = (1, 1, 1).$$

15. Έστω $f : \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}$, A μη κενό και ανοικτό, και έστω ότι υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots n$, στο A.

α) Διατυπώστε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να είναι η

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_x, \quad x \in A$$

διαφορίσιμη στο A.

β) Στην περίπτωση που η Df είναι διαφορίσιμη, δείξτε ότι ο Ιακωβιανός της πίνακας είναι ο

$$DD(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_x.$$

Ο πίνακας $DD(f)(x)$ καλείται στην περίπτωση αυτή *δεύτερη παράγωγος της f στο x.*

γ) Υποθέστε τώρα ότι $f \in \mathcal{C}^2(A)$ και δείξτε τότε ότι ο πίνακας

$$\mathcal{H}(f)(x) = (DDf(x))^T$$

είναι συμμετρικός. Ο πίνακας αυτός είναι ο *Εσσιανός πίνακας της f στο x* (και είναι ίσος με τον ανάστροφο της δευτέρας παραγώγου DDf).

16. Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της $f(x, y) = e^{xy}$ στο σημείο $\alpha = (1, 1)$.

17. Βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο τρίτης τάξης της $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ στο $(0, 0)$ στην κατεύθυνση του $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

18. (*) Με κάποιο πειστικό επιχείρημα, δείξτε εντός πολύ λίγων γραμμών ότι

$$\sin(x + y) = x + y - \frac{(x + y)^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2k+1}\frac{(x + y)^{2k+1}}{(2k + 1)!)} + \ldots$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

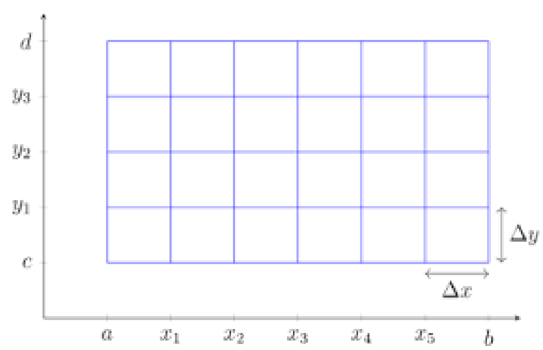
Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωση

4.1 Ολοκλήρωμα σε ορθογώνια

Ένα συμπαγές *ορθογώνιο* R του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο της μορφής[1]

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$



Σχήμα 4.1. Ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^2$.

Ο *όγκος του* R ορίζεται από τον τύπο:

$$\mathrm{vol}(R) = \prod_{j=1}^{n} \ell(I_j),$$

όπου $\ell(I_j) = b_j - a_j$ παριστάνει το *μήκος του* I_j, $j = 1, \ldots, n$.

Υπενθυμίζουμε πως μια *διαμέριση* P *ενός συμπαγούς διαστήματος* $I = [a, b]$ είναι ένα σύνολο σημείων $t_i \in I$, $i = 1, \ldots, k$, ώστε

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b.$$

Τώρα, μία *διαμέριση* P *ενός συμπαγούς ορθογωνίου* όπως παραπάνω είναι ένα καρτεσιανό γινόμενο

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n,$$

[1]Τα ορθογώνια είναι στερεά παραλληλεπίπεδα με ακμές παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων.

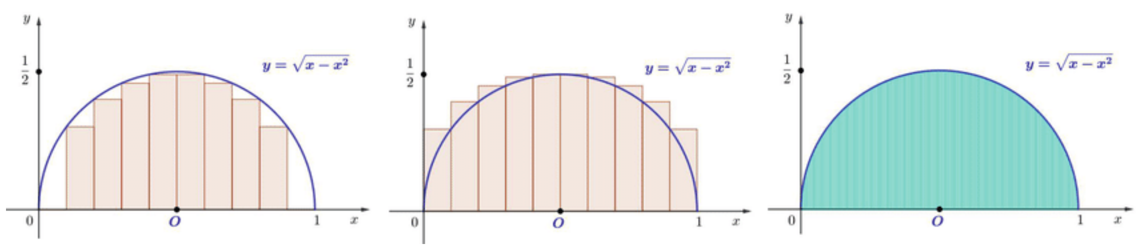
όπου P_i είναι διαμέριση του I_i, $i = 1, \ldots, n$.

Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f(x)\| \leq M$, για κάθε $x \in R$. Ορίζουμε το *κάτω (αντ. άνω) άθροισμα Darboux* $L(f, P)$ *(αντ.* $U(f, P)$*) της* f *στο* R *που υπόκειται στη διαμέριση* P από τη σχέση

$$L(f, P) = \sum_J m_J(f)\mathrm{vol}(J)$$

και αντίστοιχα

$$U(f, P) = \sum_J M_J(f)\mathrm{vol}(J).$$



Σχήμα 4.2. Αθροίσματα Darboux σε συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Η άθροιση και στις δύο περιπτώσεις είναι στα υποορθογώνια $J \subset R$ που σχηματίζονται από την P και[2]

$$m_J(f) = \inf_{x \in J}(f(x)), \quad M_J(f) = \sup_{x \in J}(f(x)).$$

Σχόλιο 4.1.1. Πρακτικά δηλαδή, αθροίζουμε *προσημασμένους όγκους* ορθογωνίων στη διάσταση $n+1$, με τα ορθογώνια αυτά να έχουν n-διάστατες βάσεις τα υποορθογώνια J της διαμέρισης και προσημασμένα ύψη τα $m_J(f)$, $M_J(f)$, αντίστοιχα. Η ιδέα αυτή ανάγεται στον Αρχιμήδη, δείτε και το Σχήμα 4.1.

Επειδή

$$m_J(f) \leq M_J(f), \quad \text{για κάθε } J,$$

είναι πάντοτε

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

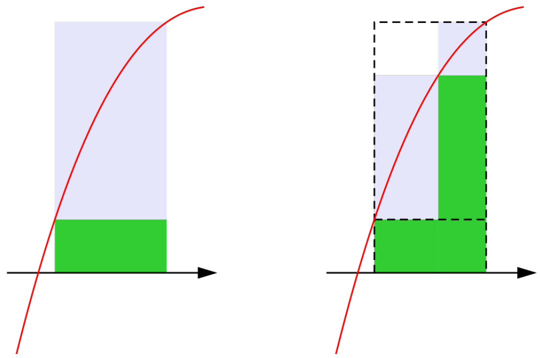
και επίσης

$$L(f, P) \leq \sup_R(f) \cdot \mathrm{vol}(R), \quad \inf_R(f) \cdot \mathrm{vol}(R) \leq U(f, P).$$

Έστω P, P' διαμερίσεις του ορθογωνίου R. Η P' λέγεται *εκλέπτυνση της* P αν $P' \supset P$.[3]

[2]Οι αριθμοί αυτοί υπάρχουν επειδή η f είναι φραγμένη και το $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρες. Εάν η f είχε θεωρηθεί συνεχής, τότε οι αριθμοί αυτοί θα μπορούσαν να αντικατασταθούν με min και max, αντίστοιχα.

[3]Οι εκλεπτύνσεις φέρνουν πλησιέστερα τα sup και inf.



Σχήμα 4.3. Η δεξιά διαμέριση είναι εκλέπτυνση της αριστερής.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω $P' \supset P$ εκλέπτυνση στο R. Τότε*

$$L(f,P) \le L(f,P'), \quad U(f,P') \le U(f,P).$$

Απόδειξη. Κάθε υποορθογώνιο J της P διαιρείται περαιτέρω σε υποορθογώνια J' της P'. Επειδή $J' \subset J$ είναι $m_{J'}(f) \ge m_J(f)$. Έτσι,

$$\sum_{J'\subset J} m_{J'}(f)\mathrm{vol}(J') \ge \sum_{J'\subset J} m_J(f)\mathrm{vol}(J') = m_J(f)\sum_{J'\subset J}\mathrm{vol}(J') = m_J(f)\mathrm{vol}(J).$$

Αθροίζοντας στα J παίρνουμε την αριστερή ανισότητα και η δεξιά ανισότητα αποδεικνύεται ομοίως. □

Έστω P, P' διαμερίσεις του ορθογωνίου R:

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n, \quad P' = P_1' \times \cdots \times P_n'.$$

Η κοινή τους εκλέπτυνση είναι η διαμέριση

$$P'' = (P_1 \cup P_1') \times \cdots \times (P_n \cup P_n').$$

Πρόταση 4.1.3. *Έστω P, P' διαμερίσεις του ορθογωνίου R και $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε*

$$L(f,P) \le U(f,P').$$

Απόδειξη. Έστω P'' η κοινή εκλέπτυνση των P και P'. Τότε

$$L(f,P) \le L(f,P'') \le U(f,P'') \le U(f,P').$$

□

Ορισμός 4.1.4. Έστω R ορθογώνιο και $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Θεωρούμε τους αριθμούς

$$\int_R^- f = \sup\{L(f,P) : \ P \text{ διαμέριση του } R\}$$

και

$$\int_R^+ f = \inf\{U(f,P) : \ P \text{ διαμέριση του } R\}$$

τους οποίους και ονομάζουμε *κάτω και άνω ολοκλήρωμα της f στο R*, αντίστοιχα. Λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη στο R*, ($f \in L^1(R)$), αν

$$\int_R^{-} f = \int_R^{+} f := \int_R f,$$

και ονομάζουμε το $\int_R f$ *(Riemann) ολοκλήρωμα της f* στο R.

Το επόμενο λήμμα είναι γνωστό ως Λήμμα Διατήρησης της Τάξης.

Λήμμα 4.1.5. ***(Διατήρησης της Τάξης)*** *Έστω $\mathcal{L}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ μη κενά και*

$$l \leq u, \ \forall l \in \mathcal{L}, \ \forall u \in \mathcal{U}.$$

Τότε υπάρχουν τα $\sup(\mathcal{L})$, $\inf(\mathcal{U})$ και ικανοποιούν τη σχέση

$$\sup(\mathcal{L}) \leq \inf(\mathcal{U}).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\forall l \in \mathcal{L}, \ l \leq u, \ \forall u \in \mathcal{U}.$$

Άρα, κάθε $l \in \mathcal{L}$ είναι κάτω φράγμα για το $\mathcal{U}$. Αφού το $\mathcal{U} \neq \emptyset$ και έχει κάτω φράγματα, έχει και ανώτατο κάτω φράγμα $\inf(\mathcal{U})$. Οπότε,

$$l \leq \inf(\mathcal{U}), \ \forall l \in \mathcal{L},$$

δηλαδή, το $\inf(\mathcal{U})$ είναι άνω φράγμα για το $\mathcal{L}$. Αφού το $\mathcal{L}$ έχει άνω φράγματα, έχει και κατώτατο άνω φράγμα $\sup(\mathcal{L})$ και

$$\sup(\mathcal{L}) \leq \inf(\mathcal{U}).$$

□

Πόρισμα 4.1.6. *Ισχύει πάντοτε ότι για $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη, είναι*

$$\int_R^{-} f \leq \int_R^{+} f.$$

Παράδειγμα 4.1.7. Φαίνεται αμέσως από τον ορισμό ότι κάθε σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ ορισμένη σε ορθογώνιο R είναι ολοκληρώσιμη:

$$\int_R c = c \cdot \mathrm{vol}(R).$$

Παράδειγμα 4.1.8. Η παρακάτω συνάρτηση, γνωστή και ως συνάρτηση Dirichlet (η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών στο $R = [0,1]^2$), είναι ένα τυπικό παράδειγμα φραγμένης και μή ολοκληρώσιμης συνάρτησης: ορίζουμε την $\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in R \cap \mathbb{Q}^2 \\ \\ 0 & (x,y) \in R \setminus \mathbb{Q}^2. \end{cases}$$

Για κάθε διαμέριση P του R,

$$L(f,P) = 0 \implies \int_R^{-} \chi_{\mathbb{Q}} = 0.$$

Όμως από την άλλη, λόγω της πυκνότητας των ρητών,

$$U(f,P) = 1 \implies \int_R^{+} \chi_{\mathbb{Q}} = 1.$$

Έχουμε το εξής Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας:

Θεώρημα 4.1.9. *Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε υπάρχει το $\int_R f$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του R με*

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και έστω $\epsilon > 0$. Επειδή

$$\int_R f - \frac{\epsilon}{2} < \sup_P(L(f,P)),$$

έπεται ότι δεν είναι άνω φράγμα των $L(f,P)$. Ομοίως, το

$$\int_R f - \frac{\epsilon}{2} > \inf_P(U(f,P))$$

δεν είναι κάτω φράγμα των $U(f,P)$. Αυτό ισχύει για κάθε διαμέριση του R, άρα υπάρχουν διαμερίσεις P, P' με

$$L(f,P) > \int_R f - \frac{\epsilon}{2}, \quad U(f,P') < \int_R f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Έστω P'' η κοινή εκλέπτυνση των διαμερίσεων P, P'. Τότε

$$L(f,P'') > \int_R f - \frac{\epsilon}{2}, \quad U(f,P'') < \int_R f + \frac{\epsilon}{2}$$

και συνεπώς

$$U(f,P'') - L(f,P'') < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Θα δείξουμε ότι η ποσότητα

$$\int_R^+ f - \int_R^- f$$

είναι μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Δοθέντος $\epsilon > 0$ έχουμε από την υπόθεση

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

για κάποια διαμέρση P. Εξ ορισμού:

$$L(f,P) \leq \int_R^- f \leq \int_R^+ f \leq U(f,P)$$

και άρα

$$\int_R^+ f - \int_R^- f < \epsilon.$$

Επειδή το είναι τυχαίο, το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Παράδειγμα 4.1.10. Έστω $R = [0,1]^2$ και $f : R \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

που είναι ασυνεχής στα σημεία του R που ανήκουν στην ευθεία $1/2$. Έστω

$$P_1 = \{0, 1/2, 1\},\ P = P_1^2.$$

Τότε,

$$L(f, P) = \sum_{J \in P} m_J(f)\mathrm{vol}(J) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$U(f, P) = \sum_{J \in P} M_J(f)\mathrm{vol}(J) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ είναι $U(f, P) - L(f, P) = 0$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\int_R f = 1/2.$$

Ονομάζουμε *βήμα* $|P|$ *διαμέρισης* P *ορθογωνίου* R τον αριθμό

$$|P| = \max_J \{\mathrm{vol}(J),\ J \subset P\}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη του Κριτηρίου Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 4.1.9) μπορεί τότε να γραφεί ισοδύναμα ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ και διαμέριση P του R με $|P| < \delta$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \iff \lim_{|P| \to 0} (U(f, P) - L(f, P)) = 0.$$

Θεώρημα 4.1.11. *(***Riemann-Darboux***) Η φραγμένη $f : R \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R με*

$$\int_R f = l \in \mathbb{R},$$

αν και μόνο αν

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{J \in P} f(\xi_J)\mathrm{vol}(J) = \lim_{|P| \to 0} R(f, P) = l, \tag{4.1}$$

για κάθε διαμέριση P του R σε υποορθογώνια $J \subset P$ και σημεία $\xi_J \in J$.[4]

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Λόγω ολοκληρωσιμότητας, είναι

$$\int_R^- f = \int_R^+ f = \int_R f = l \in \mathbb{R}.$$

Έστω P διαμέριση του R. Τότε

$$L(f, P) \le l \le U(f, P), \quad L(f, P) \le R(f, P) \le U(f, P),$$

ανεξάρτητα από την επιλογή των σημείων $\xi_J \in J$. Άρα,

$$|R(f, P) - l| \le U(f, P) - L(f, P)$$

[4] Οι ποσότητες $R(f, P)$ καλούνται *αθροίσματα Riemann της f υπαγόμενα στη διαμέριση P*.

και το συμπέρασμα προκύπτει από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας.

($\Leftarrow$) Ισοδύναμα, η συνθήκη (4.1) γράφεται ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ και διαμέριση P του R με $|P| < \delta$ ώστε

$$l - \frac{\epsilon}{2} < R(f, P) < l + \frac{\epsilon}{2},$$

ανεξάρτητα από την επιλογή των σημείων ξ_J στα υποορθογώνια J της P. Επιλέγοντας $\xi_J \in P$ τέτοια ώστε

$$f(\xi_J) = M_J(f) = \sup_J(f),$$

παίρνουμε

$$U(f, P) < l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Από την άλλη, επιλέγοντας τέτοια ώστε

$$f(\xi_J) = m_J(f) = \inf_J(f),$$

παίρνουμε

$$L(f, P) > l - \frac{\epsilon}{2}.$$

Συνεπώς,

$$l - \frac{\epsilon}{2} < L(f, P) \leq U(f, P) < l + \frac{\epsilon}{2}$$

και τελικά

$$U(f, P) - l(f, P) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

και το συμπέρασμα προκύπτει ξανά από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. □

4.1.1 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Πρόταση 4.1.12. *Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη και P διαμέριση του R. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο R, τότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποορθογώνιο J του R και*

$$\sum_{J \in P} \int_J f = \int_R f.$$

Απόδειξη. Έστω P' οποιαδήποτε διαμέριση του R που εκλεπταίνει την P. Για κάθε υποορθογώνιο $J \subset P$ έστω $P'_J = P' \cap J$ μια διαμέριση του J. Εάν με J' συμβολίσουμε υποορθογώνια της P', τότε

$$L(f, P') = \sum_{J'} m_{J'}(f) \text{vol}(J') = \sum_J \sum_{J' \subset J} m_{J'}(f) \text{vol}(J') = \sum_J L(f, P'_J).$$

Ομοίως,

$$U(f, P') = \sum_J U(f, P'_J).$$

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και έστω δοθέν $\epsilon > 0$. Από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, υπάρχει διαμέριση P' του R με

$$U(f, P') - L(f, P') < \epsilon.$$

Οπότε,

$$\sum_J \big(U(f,P'_J) - L(f,P'_J)\big) < \epsilon$$

και άρα $U(f,P'_J) - L(f,P'_J) < \epsilon$. Συνεπώς, πάλι από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποορθογώνιο J. Εφ'όσον η εκλέπτυνση μιας διαμέρισης δεν μπορεί να αυξήσει τη διαφορά μεταξύ των άνω και των κάτω αθροισμάτων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η P' είναι εκλέπτυνση της P.

Τώρα,

$$L(f,P') \le \sum_J L(f,P'_J) \le \sum_J \int_J f \le \sum_J U(f,P'_J) = U(f,P').$$

Άρα,

$$\int_R^{-} f \le \sum_J \int_J f \le \int_R^{+} f$$

και συνεπώς

$$\sum_J \int_J f = \int_R f,$$

αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο R. □

Τα συμπεράσματα της παρακάτω πρότασης που περιγράφει ορισμένες βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος, προκύπτουν απευθείας από τον ορισμό.

Πρόταση 4.1.13. *Έστω R ορθογώνιο και $f,g : R \to \mathbb{R}$ φραγμένες και ολοκληρώσιμες στο $\mathbb{R}$. Τότε:*

(L) Η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και

$$\int_R \lambda f + \mu g = \lambda \int_R f + \mu \int_R g,$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(P)

$$f \ge 0 \implies \int_R f \ge 0.$$

(O)

$$f \ge g \implies \int_R f \ge \int_R g.$$

Αμέσως επίσης προκύπτει και η παρακάτω πρόταση (Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής):

Πρόταση 4.1.14. *Για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : R \to \mathbb{R}$ που είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R, ισχύει ότι*

$$m\mathrm{vol}(R) \le \int_R f \le M\mathrm{vol}(R)$$

όπου $m = \inf_R(f)$, $M = \sup_R(f)$.

Από το Θεώρημα 4.1.11 και την Πρόταση 4.1.14 προκύπτει αμέσως και η παρακάτω:

Πρόταση 4.1.15. *Εάν η φραγμένη συνάρτηση $f : R \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και*

$$\left|\int_R f\right| \le \int_R |f| \le \sup_R(|f|)\mathrm{vol}(R).$$

4.1.2 Ολοκληρωσιμότητα και συνέχεια

Θεώρημα 4.1.16. *Εάν η $f : R \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο R τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R.*

Απόδειξη. Εάν το R είναι εκφυλισμένο ($\mathrm{vol}(R) = 0$), τότε $\int_R f = 0$ εξ ορισμού και δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Στην ενάντια περίπτωση, επειδή το R είναι συμπαγές, έχουμε από το Θεώρημα 2.2.10 ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε

$$\forall x, y \in R,\ \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{\mathrm{vol}(R)}.$$

Παίρνουμε διαμέριση P του R της οποίας τα υποορθογώνια J έχουν πλευρά μήκους $0 < \delta/\sqrt{n}$. Άρα, για κάθε $x, y \in J$ είναι $\|x - y\| < \delta$, οπότε

$$\forall x, y \in J \implies \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{\mathrm{vol}(R)}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2.8 Μεγίστου-Ελαχίστου στο J παίρνουμε

$$M_J(f) - m_J(f) < \frac{\epsilon}{\mathrm{vol}(R)},$$

οπότε

$$M_J(f) \cdot \mathrm{vol}(J) - m_J(f) \cdot \mathrm{vol}(J) < \epsilon \cdot \frac{\mathrm{vol}(J)}{\mathrm{vol}(R)}.$$

Αθροίζοντας στα υποορθογώνια J παίρνουμε

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon,$$

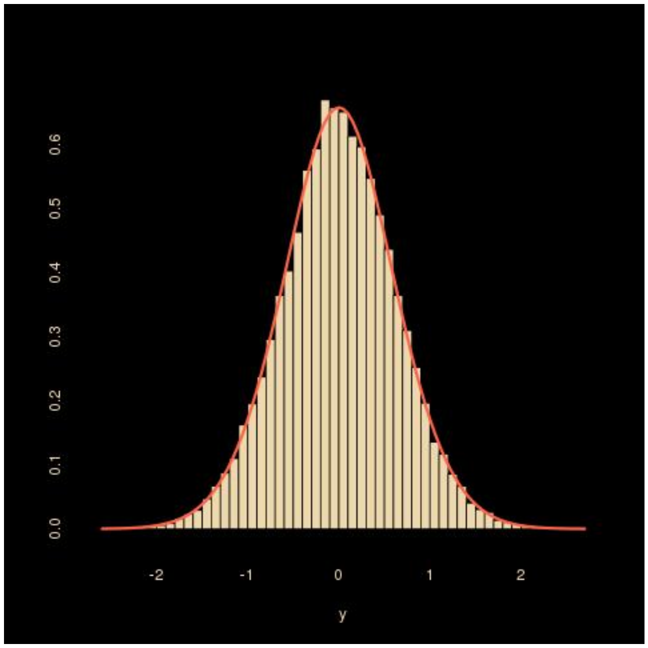
και το συμπέρασμα προκύπτει από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. □

4.1.3 Σύνολα μηδενικού μέτρου

Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *μέτρου 0 στο $\mathbb{R}^n$* και συμβολίζουμε $m(A) = 0$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάλυμμα $R_1, R_2, \ldots$ του A από αριθμησίμου πλήθους ορθογώνια ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(R_i) < \epsilon.$$

Λέμε τότε ότι *ο ολικός όγκος των $R_1, R_2, \ldots$ είναι μικρότερος του ϵ.*



Σχήμα 4.4. Σύνολο μηδενικού μέτρου στον $\mathbb{R}^2$.

Η παρακάτω πρόταση περιγράφει τις ιδιότητες των συνόλων μηδενικού μέτρου.

Πρόταση 4.1.17. *α) Εάν $B \subset A$ και $m(A) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ τότε $m(B) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$.*

β) Έστω $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $m(A_i) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$. Τότε $m(A) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$.

γ) $m(A) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμο κάλυμμα του A από ανοικτά ορθογώνια $\text{Int}(R_1), \text{Int}(R_2), \ldots$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) < \epsilon.$$

δ) Έστω R ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, $m(\partial R) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ αλλά $m(R) \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Το α) προκύπτει αμέσως. Για το β), καλύπτουμε κάθε R_j με αριθμησίμου πλήθους ορθογώνια

$$R_{1j}, R_{2j}, \ldots$$

συνολικού όγκου $< \epsilon/2^j$. Τότε, η συλλογή ορθογωνίων $\{R_{ij}\}$ είναι αρθμήσιμη, καλύπτει το A κι ο συνολικός της όγκος είναι μικρότερος από

$$\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon/2^j = \epsilon.$$

γ) Εάν τα ανοικτά ορθογώνια $\text{Int}(R_1), \text{Int}(R_2), \ldots$ καλύπτουν το A, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $R_1, R_2, \ldots$. Συνεπώς, η δοθείσα συνθήκη συνεπάγεται ότι $m(A) = 0$. Αντιστρόφως, καλύπτουμε το A με ορθογώνια $R_1', R_2', \dots$ συνολικού όγκου μικρότερου του $\epsilon/2$. Για κάθε $i = 1, 2, \dots$, επιλέγουμε ορθογώνιο R_i ώστε[5]

$$R_i' \subset R_i \quad \text{και} \quad \text{vol}(R_i) < 2\text{vol}(R_i').$$

Τότε, τα ανοικτά $\text{Int}(R_1), \text{Int}(R_2), \dots$ καλύπτουν το A και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) < \epsilon.$$

δ) Έστω $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, τα σύνολα

$$F_{a_i} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R : \ x_i = a_i\}$$

και

$$F_{b_i} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R : \ x_i = b_i\},$$

καλούνται πρώτη και δεύτερη i-έδρα του R, αντίστοιχα. Κάθε έδρα έχει μέτρο 0 στον $\mathbb{R}^n$. Λόγου χάρη, η F_{a_i} καλύπτεται από το μοναδικό ορθογώνιο

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, a_i + \delta] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

του οποίου ο όγκος μπορεί να είναι όσο μικρός επιθυμούμε, επιλέγοντας το κατάλληλο $\delta > 0$. Τώρα,

$$\partial R = \bigcup_{i=1}^{n} (F_{a_i} \cup F_{b_i}),$$

δηλαδή, είναι πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδενικού μέτρου. Άρα, $m(\partial R) = 0$. Τώρα, υποθέτουμε ότι $m(R) = 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παίρνουμε $\epsilon = \text{vol}(R)$. Από το γ) μπορούμε να καλύψουμε το r με ανοικτά ορθογώνια $\text{Int}(R_1), \text{Int}(R_2), \dots$, με

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(R_i) < \epsilon.$$

Λόγω συμπάγειας του R, η κάλυψη αυτή ανάγεται σε πεπερασμένη, οπότε υπάρχουν $j_1 < \cdots < j_k$ φυσικοί αριθμοί ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} \text{vol}(R_{j_i}) < \epsilon,$$

το οποίο αντιτίθεται στην Πρόταση 4.1.12. □

[5]Μπορούμε να το κάνουμε αυτό, διότι η συνάρτηση vol : $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : \ x = y\})^n \to \mathbb{R}$, με

$$\text{vol}(a_1^1, a_2^1, \dots, a_1^n, a_2^n) = \prod_{i=1}^{n} |a_2^i - a_1^i|$$

είναι συνεχής. Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχίζει τις κορυφές ενός ορθογωνίου στον όγκο του ορθογωνίου.

Σύνολα μηδενικού περιεχομένου

Ουσιαστικό μέρος του ορισμού των συνόλων μηδενικού μέτρου είναι η απαίτηση να καλύπτονται τα σύνολα αυτά από *αριθμησίμου* πλήθους ορθογώνια. Αν απαιτούσαμε απλώς η κάλυψη να γίνεται από πεπερασμένου πλήθους ορθογώνια, τότε παίρνουμε τα σύνολα *μηδενικού περιεχομένου* και συμβολίζουμε $\mathrm{Cont}(A) = 0$. Λόγου χάρη, αν $I = [0, 1]$, το σύνολο $A = I \cap \mathbb{Q}$ είναι μηδενικού μέτρου στο R ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων μηδενικού μέτρου. Όμως το A δεν είναι μηδενικού περιεχμένου: θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους διαστήματα συνολικού μήκους $< \epsilon$ αν $\epsilon < 1$. Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει και για $0 < \epsilon < 1$ υπάρχει πεπερασμένη συλλογή $\{I_i,\ i = 1, \ldots, k\}$ με

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i := B.$$

Το B είναι κλειστό σύνολο ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων και περιέχει όλους τους ρητούς του I. Λόγω κλειστότητας, περιέχει και τα οριακά τους σημεία, συνεπώς περιέχει όλο το I. Τότε όμως, τα I_i καλύπτουν το I, άρα

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(I_i) \geq \mathrm{vol}(I) = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Σχόλιο 4.1.18. Εάν ένα υποσύνολο A ορθογωνίου R είναι μηδενικού περιεχομένου, τότε είναι και μηδενικού μέτρου. Το αντίστροφο είδαμε πιο πάνω ότι δεν ισχύει εν γένει. Ισχύει όμως όταν το A είναι συμπαγές μιας και κάθε ανοικτή του κάλυψη από ορθογώνια ανάγεται σε πεπερασμένη.

Ταλάντωση συνάρτησης

Έστω φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στην ανοικτή μπάλλα

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ \|y - x\| < r\}.$$

Θέτουμε

$$M(x, f, r) = \sup_{y \in B(x,r)} f(y), \quad m(x, f, r) = \inf_{y \in B(x,r)} f(y)$$

και έστω

$$\Delta(x, f, r) = M(x, f, r) - m(x, f, r).$$

Η *ταλάντωση* της f[6] ορίζεται ως

$$o(f, x) = \lim_{r \to 0} \Delta(x, f, r).$$

Η ταλάντωση είναι καλά ορισμένη. Αν $r \geq r'$ τότε

$$M(x, f, r) \geq M(x, f, r'), \quad m(x, f, r) \leq m(x, f, r').$$

Άρα, $\Delta(x, f, r) \geq \Delta(x, f, r')$, δηλαδή η ποσότητα Δ ελαττώνεται καθώς ελαττώνεται το r.

Πρόταση 4.1.19. *Η φραγμένη f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν $o(f, x) = 0$.*

[6] Σε αδρές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι η ταλάντωση φραγμένης συνάρτησης f στο x μετρά το κατά πόσον απέχει η f ώστε να είναι συνεχής στο x.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Λόγω της συνέχειας της f στο x,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists r > 0 :\ \forall y :\ \|x-y\| < r \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Άρα,

$$f(B(x,r)) \subset (f(x) - \epsilon,\ f(x) + \epsilon).$$

Συνεπώς $\text{diam}(f(B(x,r))) < 2\epsilon$ και

$$\begin{aligned}\Delta(x,f,r) &= M(x,f,r) - m(x,f,r)\\ &= \sup_{y\in B(x,r)} f(y) - \inf_{y\in B(x,r)} f(y)\\ &< 2\epsilon \implies o(f,x) = 0.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Επειδή $o(f,x) = 0$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $r > 0$ ώστε αν $y \in B(x,r)$ τότε

$$\Delta(x,f,r) = \sup_{y\in B(x,r)} f(y) - \inf_{y\in B(x,r)} f(y) < \epsilon/2.$$

Δηλαδή,

$$\text{diam}(f(B(x,r))) \le \epsilon \implies \|f(x) - f(y)\| < \text{diam}(f(B(x,r))) \le \epsilon$$

αν $y \in B(x,r)$. □

4.1.4 Το Θεώρημα Riemann-Lebesgue

Το παρακάτω θεώρημα ουσιαστικά μας λέει ότι οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ορθογώνια είναι ακριβώς οι *ουσιαστικά συνεχείς*, αυτές δηλαδή για τις οποίες οι ασυνέχειές τους αποτελούν ένα *μικρό* σύνολο.

Θεώρημα 4.1.20. *Έστω $R \subset \mathbb{R}^n$ ορθογώνιο και $f : R \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R αν και μόνο αν $m(\text{Disc}(f)) = 0$, όπου*

$$\text{Disc}(f) = \{x \in R :\ f \textit{ ασυνεχής στο } x\}.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και θέτουμε $B = \text{Disc}(f)$. Έχουμε

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad B_k = \{x :\ o(f,x) \ge 1/k\}.$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι $m(B_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ (Πρόταση 4.1.17 β)). Αν δοθεί $\epsilon > 0$, τότε από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας υπάρχει διαμέριση P του τέτοια ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) \le \epsilon/k. \tag{4.2}$$

Έστω επίσης η συλλογή ορθογωνίων

$$G_P = \{J \in P :\ B_k \cap J \ne \emptyset\}.$$

Για κάθε $J \in G_P$,

$$M_J(f) - m_J(f) = \sup_{y\in J} f(y) - \inf_{y\in J} f(y) \ge 1/k.$$

Άρα,

$$\sum_{J\in G_P}(M_J(f)-m_J(f))\cdot \mathrm{vol}(J)\geq (1/k)\sum_{J\in G_P}\mathrm{vol}(J).$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας την Εξ. (4.2), παίρνουμε

$$\sum_{J\in G_P}(M_J(f)-m_J(f))\cdot \mathrm{vol}(J)\leq U(f,P)-L(f,P)\leq \epsilon/k.$$

Άρα,

$$(1/k)\sum_{J\in G_P}\mathrm{vol}(J)\leq \sum_{J\in G_P}(M_J(f)-m_J(f))\cdot \mathrm{vol}(J)\leq \epsilon/k.$$

Κάθε σύνολο B_k καλύπτεται από τα J της G_P. Συνεπώς,

$$m(B_k)\leq \sum_{J\in G_P}\mathrm{vol}(J)\leq \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\epsilon>0$. Υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $R_1, R_2, \ldots$ του B από ορθογώνια,[7] $B\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}R_j$, ώστε

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{vol}(R_j)\leq\epsilon.$$

Έστω $x\in R\setminus B$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές $R\setminus B$, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε για κάθε y που ανήκει σε κύβο T που περιέχει το x διαμέτρου $\mathrm{diam}(T)<r$ να συνεπάγεται

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon/2.$$

Με άλλα λόγια,

$$f(T)\subset(f(x)-\epsilon/2,\ f(x)+\epsilon/2)\implies \mathrm{diam}(f(T))=\max_{y\in T}(f(y))-\min_{y\in T}(f(y))<\epsilon.$$

Συνεπώς, υπάρχει ορθογώνιο R_x με

$$M_{R_x}(f)-m_{R_x}(f)<\epsilon.$$

Θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη του R από τα αριθμησίμου πλήθους ορθογώνια R_i και από τα R_x. Λόγω συμπάγειας, η κάλυψη αυτή ανάγεται σε πεπερασμένη:

$$R\subset\left(\bigcup_{m=1}^{k}R_{j_m}\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{l}R_{x_i}\right),$$

όπου $x_1,\ldots,x_l\in R\setminus B$. Έστω τώρα P μία διαμέριση που να περιέχεται στη διαμέριση του R από τα

[7] Μικραίνουμε το ϵ καταλλήλως αν είναι ανάγκη ώστε $R_i\subset R$ για κάθε $i\in\mathbb{N}$

πιο πάνω ορθογώνια. Τότε,

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{m=1}^{k} \big(M_{R_{j_m}}(f) - m_{R_{j_m}}(f)\big)\cdot \mathrm{vol}(R_{j_m}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \Big(M_{R_{x_i}}(f) - m_{R_{x_i}}(f)\Big)\cdot \mathrm{vol}(R_{x_i}) \\ &< 2\sup_{x\in R}|f(x)| \sum_{m=1}^{k} \mathrm{vol}(R_{j_m}) + \epsilon \sum_{i=1}^{l} \mathrm{vol}(R_{x_i}) \\ &\le \epsilon\left(2\sup_{x\in R}|f(x)| + \mathrm{vol}(R)\right). \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας (Θεώρημα 4.1.9). □

4.1.5 Το Θεώρημα του Fubini

Το Θεώρημα του Fubini που πραγματευόμαστε σε αυτήν την ενότητα, ισχύει για τις δύο ή περισσότερες μεταβλητές και είναι εξαιρετικά χρήσιμο για τουλάχιστον δύο λόγους: πρώτον, είναι το κύριο εργαλείο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και μάλιστα με τεχνικές απευθείας από την ολοκλήρωση μιας μεταβλητής και δεύτερον, αποτελεί το αντίστοιχο στις πολλές μεταβλητές του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Θεώρημα 4.1.21. *(***Fubini***, 1907). Έστω $A \times B$ ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{m+n}$ όπου $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ ορθογώνια, και έστω $f : A \times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $x \in A$ θεωρούμε την $f_x : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_x(y) = f(x, y)$. Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις*

$$\mathcal{L}(x) = \int_B^- f_x(y)\, dy = \int_B^- f(x,y)\, dy$$

και

$$\mathcal{U}(x) = \int_B^+ f_x(y)\, dy = \int_B^+ f(x,y)\, dy.$$

Τότε οι $\mathcal{L}$,$\mathcal{U}$ είναι ολοκληρώσιμες στο A και

$$\begin{aligned} \int_{A\times B} f(x,y)\, dxdy &= \int_A \mathcal{L}(x)\, dx = \int_A \left(\int_B^- f(x,y)\, dy\right) dx \\ &= \int_A \mathcal{U}(x)\, dx = \int_A \left(\int_B^+ f(x,y)\, dy\right) dx. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω διαμερίσεις P_A του A σε ορθογώνια J_A και P_B του B σε ορθογώνια J_B. Έστω $P = P_A \times P_B$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{L}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο A χρησιμοποιώντας το Κριτήριο

Ολοκληρωσιμότητας. Είναι

$$
\begin{aligned}
L(f,P) &= \sum_{J_A\times J_B} m_{J_A\times J_B}(f)\cdot \mathrm{vol}(J_A\times J_B)\\
&= \sum_{J_A\times J_B} \inf_{(x,y)\in J_A\times J_B}(f(x,y))\cdot \mathrm{vol}(J_A)\mathrm{vol}(J_B)\\
&\leq \sum_{J_A\times J_B} \inf_{y\in J_B}(f(x_0,y))\cdot \mathrm{vol}(J_A)\mathrm{vol}(J_B), \quad x_0\in A, \text{ τυχαίο},\\
&= \sum_{J_A\times J_B} \inf_{y\in J_B}(f_{x_0}(y))\cdot \mathrm{vol}(J_A)\mathrm{vol}(J_B)\\
&\leq \sum_{J_A}\left(\sum_{J_B}\inf_{y\in J_B}(f(x_0,y))\cdot \mathrm{vol}(J_B)\right)\mathrm{vol}(J_A)\\
&\leq \sum_{J_A}\mathcal{L}(x_0)\cdot \mathrm{vol}(J_A)),
\end{aligned}
$$

και αυτό συμβαίνει για κάθε $x_0\in A$. Παίρνοντας inf επάνω στα $x_0\in A$ έχουμε

$$L(f,P)\leq \sum_{J_A} m_{J_A}(\mathcal{L})\cdot \mathrm{vol}(J_A) = L(\mathcal{L},P_A).$$

Ομοίως δείχνουμε και ότι

$$U(\mathcal{L},P_A)\leq U(f,P).$$

Συνεπώς η ποσότητα

$$U(\mathcal{L},P_A)-L(\mathcal{L},P_A)$$

γίνεται όσο μικρή θέλουμε λόγω της ολοκληρωσιμότητας της f και συνεπώς η $\mathcal{L}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη. Τώρα, έχουμε από τη μία,

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \sup_P L(f,P)\leq \sup_{P_A}(\mathcal{L},P_A) = \int_A \mathcal{L}(x)\,dx,$$

και από την άλλη,

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \inf_P L(f,P)\geq \inf_{P_A}(\mathcal{L},P_A) = \int_A \mathcal{L}(x)\,dx,$$

πράγμα που αποδεικνύει τη σχέση

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \mathcal{L}(x)\,dx.$$

Η απόδειξη της σχέσης

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \mathcal{U}(x)\,dx,$$

γίνεται σε γραμμές παράλληλες με την απόδειξη της προηγούμενης. □

Σχόλιο 4.1.22. Σχεδόν πάντοτε στις εφαρμογές συμβαίνει οι συναρτήσεις f_x να είναι ολοκληρώσιμες. Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Σχόλιο 4.1.23. Με παρόμοια απόδειξη μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_B \left(\int_A^+ f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_B \left(\int_A^- f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Στην περίπτωση δε της ολοκληρωσιμότητας των συναρτήσεων $f_y(x) = f(x,y)$, συνδυάζοντας και την παρατήρηση του Σχολίου 4.1.22, έχουμε τον τύπο που μας είναι γνωστός από τον Λογισμό:

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_B \left(\int f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Παράδειγμα 4.1.24. Το απλούστερο παράδειγμα είναι όταν η $f : A\times B$ είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα της μορφής

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

με τις συναρτήσεις g, h να είναι ολοκληρώσιμες στα A, B, αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned}
\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy &= \int_A \left(\int_B g(x)h(y)\,dy\right)\,dx \\
&= \int_A g(x)\left(\int_B h(y)\,dy\right)\,dx \\
&= \left(\int_B h(y)\,dy\right)\left(\int_A g(x)\,dx\right).
\end{aligned}$$

Χρειάζεται όμως προσοχή: για να ισχύει ο παραπάνω τύπος του γινομένου, πρέπει όλες οι f, g, h να είναι ολοκληρώσιμες, λόγου χάρη, η ολοκληρωσιμότητα της f δεν συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα των g, h. Ας πάρουμε για παράδειγμα

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

η οποία δεν ειναι ολοκληρώσιμη στο [0,1], και $h(y)\equiv 0$ στο [0,1]. Η συνάρτηση $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = g(x)h(y) \equiv 0$ είναι προφανώς ολοκληρώσιμη στο $[0,1]^2$ με ολοκλήρωμα 0, το Θεώρημα του Fubini ισχύει εφ' όσον

$$0 = \int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]}^- g(x)h(y)\,dy\right)\,dx,$$

αλλά, λόγω της ανυπαρξίας του ολοκληρώματος της g στο [0,1], ο τύπος του γινομένου δεν ισχύει.

4.2 Ολοκλήρωση σε γενικότερα χωρία

4.2.1 Όγκος φραγμένου συνόλου

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* χ_A *του* A ορίζεται από την

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Θα υποθέσουμε στο εξής ότι το A είναι φραγμένο και περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο R. Ορίζουμε τον όγκο $\mathrm{vol}(A)$ του A από τη σχέση

$$\mathrm{vol}(A) = \int_R \chi_A.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν υπάρχει a priori, θα δούμε στην Ενότητα 4.2.2 πότε ακριβώς συμβαίνει αυτό. Όμως, προς το παρόν παρατηρούμε πως ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από το ορθογώνιο R. Πράγματι, έστω ορθογώνιο $R' \subset A$ και υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι $R' \subset R$. Έστω διαμέριση P του R ώστε για κάθε $\epsilon > 0$,

$$U(\chi_A, P) - L(\chi_A, P) < \epsilon.$$

Συμπληρώνουμε καταλλήλως την P σε διαμέριση του R'. Επειδή οι ποσότητες $U(\chi_A, P)$, $L(\chi_A, P)$ δεν αλλάζουν, η χ_A είναι ολοκληρώσιμη στο R'. Τώρα,

$$\int_{R'} \chi_A = \int_{(R' \setminus R) \cup R} \chi_A = \int_{R' \setminus R} \chi_A + \int_R \chi_A = 0 + \int_R \chi_A.$$

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί κριτήριο μηδενικού όγκου.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω R ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και $A \subset R$. Τότε,* $\mathrm{vol}(A) = 0$ *αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του R με*

$$\sum_{J \in P} \mathrm{vol}(J) < \epsilon.$$

Με άλλα λόγια, ένα φραγμένο σύνολο είναι μηδενικού όγκου αν και μόνο αν είναι μηδενικού περιεχομένου.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Εάν $\mathrm{vol}(A) = 0$, τότε εξ ορισμού $\int_R \chi_A = 0$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση P του R με

$$U(\chi_A, P) - L(\chi_A, P) < \epsilon.$$

Οπότε,

$$\sum_{J \in P} M_J(\chi_A) \cdot \mathrm{vol}(J) - \sum_{J \in P} m_J(\chi_A) \cdot \mathrm{vol}(J) = \sum_{J \in P} \mathrm{vol}(J) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του R με

$$\sum_{J \in P} \mathrm{vol}(J) < \epsilon.$$

Τότε, έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές συνεπαγωγές:

$$\begin{aligned}
&\sum_{J\in P} M_J(\chi_A)\cdot \mathrm{vol}(J) < \epsilon \\
\therefore\quad & U(\chi_A, P) < \epsilon \\
\therefore\quad & \inf_P (U(\chi_A, P)) < \epsilon,\ \forall \epsilon > 0 \\
\therefore\quad & \int_R^+ \chi_A = 0.
\end{aligned}$$

Επειδή

$$0 \le \int_R^- \chi_A \le \int_R^+ \chi_A = 0 \implies \int_R \chi_A = 0.$$

□

Η παρακάτω πρόταση μας εξασφαλίζει ότι τα γραφήματα συνεχών συναρτήσεων είναι μηδενικού όγκου. Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη όταν ολοκληρώνουμε επάνω σε φραγμένα χωρία των οποίων το σύνορο είναι πεπερασμένη ένωση συνεχών γραφημάτων.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω R ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και $f : R \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν*

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x) :\ x \in R\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

τότε $\mathrm{vol}(\mathrm{Gr}(f)) = 0$.

Απόδειξη. Λόγω συμπάγειας, η συνέχεια της f είναι ομοιόμορφη, και η εικόνα της κείται εντός συμπαγούς διαστήματος I. Έστω δοθέν $\epsilon > 0$. Έστω τότε

$$\epsilon' < \frac{\epsilon}{2\mathrm{vol}(R)} :\ \frac{\ell(I)}{\epsilon'} \in \mathbb{N}.$$

Υπάρχει διαμέριση Q του I της οποίας τα διαστήματα έχουν μήκος ϵ' και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, \tilde{x} \in R$ να είναι

$$\|x - \tilde{x}\| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon'.$$

Έστω τώρα διαμέριση P του R της οποίας τα ορθογώνια έχουν πλευρές μήκους $< \delta/m, m \in \mathbb{N}, m > 1$, ώστε εάν δύο σημεία κείνται εντός του ίδιου ορθογωνίου J, τότε η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρότερη του δ. Θεωρούμε τη διαμέριση $P \times Q$ του $R \times I$. Για κάθε ορθογώνιο J της P, υπάρχουν το πολύ δύο ορθογώνια $J \times K$ της $P \times Q$ υπεράνω του J που τέμνουν το γράφημα της f. Πράγματι, αν είχαμε τρία ή περισσότερα τέτοια ορθογώνια, τότε κάποιο ζεύγος $J \times K$ κα $J \times K'$ δεν είναι κατακόρυφοι γείτονες και άρα, κάθε υποθετικό ζεύγος σημείων του γραφήματος, ένα από κάθε ορθογώνιο, βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση μικρότερη του δ αλλά τουλάχιστον ϵ' καθέτως, πράγμα άτοπο από την ομοιόμορφη συνέχεια της f και τις υποθέσεις μα για το ϵ'.

Τώρα, αθροίζουμε στα $J \times K$ που περιγράψαμε παραπάνω και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum \mathrm{vol}(J\times K) &= \sum \mathrm{vol}(J)\cdot \epsilon' \quad (\ell(K) = \epsilon') \\
&\le 2\sum_J \mathrm{vol}(J)\cdot \epsilon' \quad \text{από το παραπάνω επιχείρημα} \\
&= 2\mathrm{vol}(R)\cdot \epsilon' < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

4.2.2 Ολοκλήρωση σε φραγμένα χωρία

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και έστω ότι περιέχεται σε ορθογώνιο R του $\mathbb{R}^n$. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε, αν η $f\chi_A$ είναι ολοκληρώσιμη στο R ορίζουμε

$$\int_A f = \int_R f\chi_A.$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος του R. Πράγματι, αν R' είναι ένα άλλο ορθογώνιο που περιέχει το A, τότε το $R \cap R'$ είναι ορθογώνιο και τα $R \setminus (R \cup R')$, $R' \setminus (R \cup R')$, αποτελούνται από ορθογώνια με τουλάχιστον μία κοινή πλευρά. Επειδή

$$f\chi_A \mid R \setminus (R \cup R') = f \mid R' \setminus (R \cup R') = 0,$$

έχουμε

$$\int_R f\chi_A = \int_{R\cap R'} f\chi_A = \int_{R'} f\chi_A.$$

Παρατηρούμε επίσης πως αν οι f, χ_A, είναι συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο A, τότε η $f\chi_A$ είναι ολοκληρώσιμη στο A: πράγματι, αν η $f\chi_A$ είναι ασυνεχής, τότε τουλάχιστον μία από τις f, χ_A, είναι ασυνεχής. Έπεται ότι

$$\text{Disc}_R(f\chi_A) \subset \text{Disc}_R(f) \cup \text{Disc}_R(\chi_A),$$

και άρα $m(\text{Disc}_R(f\chi_A)) = 0$.

Έχουμε το παρακάτω Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας για χαρακτηριστικές συναρτήσεις φραγμένων χωρίων.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο που περιέχεται σε ένα ορθογώνιο R του $\mathbb{R}^n$. Η χαρακτηριστική του συνάρτηση $\chi_A : R \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $m(\partial A) = 0$ (και άρα $\text{Cont}(\partial A) = 0$).*

Απόδειξη. Έστω R ένα ορθογώνιο με $A \subset \text{Int}(A)$. Η συνάρτηση $\chi_A : R \to \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής ακριβώς επάνω στα σημεία του ∂A. Προκύπτει το συμπέρασμα από το Θεώρημα 4.1.20. □

Ένα φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *Jordan μετρήσιμο* αν $m(\partial A) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει ο όγκος του

$$\text{vol}(A) = \int_A 1 = \int_R \chi_A,$$

όπου R ορθογώνιο που περιέχει το A.

Πόρισμα 4.2.4. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f : A \to R$ φραγμένη συνάρτηση. Αν $m(\text{Disc}_A(f)) = 0$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.*

Απόδειξη. Έστω ορθογώνιο R με $A \subset \text{Int}(R)$. Τότε η $f\chi_A$ είναι ασυνεχής το πολύ στα σημεία του συνόλου $\partial A \cup \text{Disc}_A(f)$, το οποίο είναι μηδενικού μέτρου. Προκύπτει το συμπέρασμα από το Θεώρημα 4.1.20. □

Το Θεώρημα του Fubini σε ειδικού τύπου χωρία

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και υποθέτουμε ότι το σύνορό του αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους γραφήματα συνεχών συναρτήσεων. Συνδυάζοντας το παραπάνω Πόρισμα 4.2.4 και την Πρόταση 4.2.2 έχουμε την παρακάτω εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini που μας είναι γνωστή από τον Λογισμό: θα την αναπτύξουμε για $n = 2$ και D στοιχειώδες χωρίο της μορφής

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

με ϕ_i να είναι συνεχείς συναρτήσεις, $i = 1, 2$. Προφανώς το D περιέχεται στο ορθογώνιο

$$R = [a, b] \times [m, M],$$

όπου

$$m = \min_{x \in [a,b]} (\phi_1(x)), \quad M = \max_{x \in [a,b]} (\phi_2(x)).$$

Τότε, εάν κάποια f είναι ολοκληρώσιμη στο D, τότε

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y)\, dxdy &= \iint_{[a,b]\times[m,M]} f(x, y)\chi_D(x, y)\, dxdy \\
&= \int_a^b \left(\int_m^M f(x, y)\chi_D(x, y)\, dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Ένα παθολογικό παράδειγμα

Ενδεχομένως ἑνα φραγμένο ανοικτό σύνολο A δεν είναι Jordan μετρήσιμο, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_A f$ μπορεί να μην ορίζεται ακόμη και όταν η f είναι συνεχής. Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ἐνδεικτικό της κατάστασης αυτής.

Παράδειγμα 4.2.5. Συμβολίζουμε με $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ σύνολο των ρητών του $[0, 1]$ και έστω

$$r_1, r_2, \ldots$$

αρίθμηση[8] του συνόλου αυτού. Έστω τώρα

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n = \left(r_n - \frac{1}{2^{n+2}}, \ r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Το A:

- Είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων και
- έχει σύνορο $\partial A = [0, 1] \setminus A$, εφ᾽ όσον οι ρητοί είναι παντού πυκνοί στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $\overline{A} = [0, 1]$.

[8]Την ύπαρξη της αρίθμησης αυτής μας την εξασφαλίζει το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor.

Θα δείξουμε ότι $\text{Cont}(\partial A) \neq 0'$ αυτό θα συνεπάγεται ότι $m(\partial A) \neq 0$ και συνεπώς το A δεν είναι Jordan μετρήσιμο. Υποθέτουμε προς το άτοπο ότι υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοικτά διαστήματα

$$J_1, \ldots, J_k, \mid \sum_{i=1}^{k} \text{vol}(J_i) < 1/4.$$

Επειδή $A \cup \partial A = [0,1]$ και

$$[0,1] = \left(\bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right),$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[0,1] = \left(\bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{n_0} I_n\right),$$

λόγω της συμπάγειας του $[0,1]$. Τότε όμως

$$\begin{aligned} 1 = \text{vol}([0,1]) &\leq \sum_{i=1}^{k} \text{vol}(J_i) + \sum_{n=1}^{n_0} \text{vol}(I_n) \\ &\leq \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε πως αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει ενδεχόμενο η $f\chi_A$ να είναι ασυνεχής ακριβώς στο ∂A που δεν είναι μηδενικού μέτρου. Έτσι, η f δεν μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη στο A, παρ' όλο που η f ως συνεχής είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1] \supset A$. Θα ξεπεράσουμε το εμπόδιο αυτό ορίζοντας ολοκλήρωμα συναρτήσεων σε χωρία που δεν είναι κατ' ανάγκη ούτε φραγμένα, ούτε Jordan μετρήσιμα. Για να το κάνουμε αυτό, μας χρειάζεται η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας σε ανοικτά καλύμματα την οποία και πραγματευόμαστε στην επόμενη ενότητα.

4.2.3 Διαμερίσεις της μονάδας και γενικευμένα ολοκληρώματα

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.6. *(**Διαμέρισης της μονάδας**) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\mathfrak{U}$ ανοικτό κάλυμμα του A. Υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή*

$$\Phi = \{\phi : A \to [0,1]\}$$

$\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων με τις παρακάτω ιδιότητες:

1) Κάθε $x \in A$ έχει μια ανοικτή περιοχή V_x ώστε $\phi \mid V_x \equiv 0$ για όλες τις $\phi \in \Phi$, εκτός από πεπερασμένου πλήθους.

2) Για κάθε $x \in A$,

$$\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = 1.$$

3) Η Φ κυριαρχείται από το κάλυμμα $\mathfrak{U}$: για κάθε $\phi \in \Phi$, υπάρχει $U \in \mathfrak{U}$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{supp}(\phi) = \overline{\{x \in A : \ \phi(x) \neq 0\}} \subset U.$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.6 είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 4.2.7. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\mathfrak{U}$ ένα κάλυμμα του A από ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει οικογένεια $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων*

$$\Phi = \{\phi : \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U \to [0,1]\}$$

που ικανοποιεί τα 1), 2) και 3) του Θεωρήματος 4.2.6.

Απόδειξη. Το σύνολο $\bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U$ είναι ανοικτή περιοχή του A. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.2.6 για το $\bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U$ και το κάλυμμα $\mathfrak{U}$. □

Η οικογένεια Φ των Θεωρημάτων 4.2.6 και 4.2.7 λέγεται $\mathcal{C}^\infty$ *διαμέριση της μονάδας του A που υπόκειται στο κάλυμμα $\mathfrak{U}$.*

Σχόλιο 4.2.8. Αξιοσημείωτη συνέπεια του α) του Θεωρήματος 4.2.6 είναι η εξής: έστω $K \subset A$ συμπαγές. Σύμφωνα με το α), κάθε $x \in K$ έχει μία ανοικτή περιοχή V_x ώστε $\phi \mid V_x = 0$, για όλα τα $\phi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$. Συνεπώς, $\phi \mid K = 0$ για όλα τα $\phi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.6 θα χρειαστούμε ένα λήμμα και την απόδειξη της εκδοχής του θεωρήματος για συμπαγή σύνολα.

Λήμμα 4.2.9. *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση $\phi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ώστε*

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq \epsilon, \\ \\ 0 & \|x\| \geq 2\epsilon. \end{cases}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση test $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ του Cauchy με τύπο

$$\tau(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \\ e^{-1/t} & t > 0. \end{cases}$$

Η τ είναι κλάσης $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, συνεπώς το ίδιο ισχύει κα για την $\tilde{\tau}$ με τύπο:

$$\tilde{\tau}(t) = \frac{\tau(4-t)}{\tau(4-t) + \tau(t-1)}.$$

Επιπλέον, $\tilde{\tau}(t) = 1$ για $t \leq 1$ και $\tilde{\tau}(t) = 0$ για $t \geq 4$. Ορίζουμε τώρα την $\phi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με τύπο

$$\phi_\epsilon(x) = \tilde{\tau}\left(\frac{\|x\|^2}{\epsilon^2}\right).$$

Η ϕ_ϵ είναι $\mathcal{C}^\infty$ και από τις ιδιότητες της τ προκύπτει ότι $\phi_\epsilon(x) = 1$, όταν $\|x\| \leq \epsilon$ και $\phi_\epsilon(x) = 0$, όταν $\|x\| \geq 2\epsilon$. □

Πρόταση 4.2.10. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\mathfrak{U}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $U_i \in \mathfrak{U}$, $i = 1, \dots, k$ που καλύπτουν το X και πεπερασμένη συλλογή*

$$\Psi = \{\psi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1],\ i = 1, \dots, k\}$$

$\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων με τις παρακάτω ιδιότητες:

i) Για κάθε $i = 1, \dots, k$,

$$\mathrm{supp}(\psi_i) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n :\ \psi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i.$$

ii) Υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$, $X \subset U$, ώστε για κάθε $x \in U$,

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) = 1.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $U_x \in \mathfrak{U}$ και $\epsilon_x > 0$ ώστε $\overline{B(x, 2\epsilon_x)} \subset U_x$. Επειδή το X είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in X$ ώστε

$$X \subset V = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \epsilon_{x_i}).$$

Το σύνολο V είναι ανοικτή περιοχή του X. Για κάθε $i = 1, \dots, k$ ορίζεται η $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση $\phi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με τύπο

$$\phi_i(x) = \phi_{\epsilon_{x_i}}(x - x_i),$$

όπου $\phi_{\epsilon_{x_i}}$ είναι η συνάρτηση που κατασκευάσαμε στο Λήμμα 4.2.9. Τότε, $\phi_i(x) = 1$, όταν $x \in B(x_i, \epsilon_{x_i})$, ενώ $\phi_i(x) = 0$ όταν $\|x - x_i\| \geq 2\epsilon_{x_i}$. Η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με τύπο

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{k} (1 - \phi_i(x))$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ και $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in V$. Αν $U_i = U_{x_i}$, $i = 1, \dots, k$, τότε

$$X \subset V \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Θεωρούμε τις $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις $\psi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με τύπους

$$\psi_i = \frac{\phi_i}{\phi + \sum_{j=1}^{k} \phi_j}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Αν $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_i, 2\epsilon_{x_i}) \supset \mathbb{R}^n \setminus U_i$, τότε $\psi_i(x) = 0$, αφού $\phi_i(x) = 0$. Άρα, $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset U_i$. Από την άλλη, αν $x \in V$ τότε $\phi(x) = 0$. Συνεπώς,

$$\psi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{j=1}^{k} \phi_j(x)}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) = 1.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.6. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα

$$A_i = \{x \in A : \ \|x\| \leq i, \ \text{dist}(x, \partial A) \geq 1/i\},$$

όπου $\text{dist}(x, \partial A) = \inf\{\|x - y\| : \ y \in \partial A\}$. Τότε $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, κάθε A_i είναι συμπαγές και

$$A_i \subset \text{Int}(A_{i+1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε $i \geq 3$ το

$$\mathfrak{U}_i = \{U \cup (\text{Int}(A_{i+1} \setminus A_{i-1}) : \ U \in \mathfrak{U}\},$$

είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου $X_i = A_i \setminus \text{Int}(A_{i-1})$. Από την Πρόταση 4.2.10 υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{C}^{\infty}$ συναρτήσεων

$$\Phi_i = \{\psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]\}$$

ώστε

α) για κάθε $\psi \in \Phi_i$ υπάρχει $W \in \mathfrak{U}_i$ με $\text{supp}(\psi) \subset W$ και

β) υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $U_i \subset X_i$ ώστε για κάθε $x \in U_i$ να είναι

$$\sum_{\psi \in \Phi_i} \psi(x) = 1,$$

Για κάθε $x \in A$ θέτουμε

$$\sigma(x) = \sum_{\psi \in \Phi_i, \ i \geq 3} \psi(x).$$

Το άθροισμα είναι πεπερασμένο σε μία περιοχή του x, γιατί αν $x \in A_i$, τότε λόγω του α) έχουμε ότι $\psi(x) = 0$ για κάθε $\psi \in \Phi_j$, $j \geq i+2$. Για κάθε $i \geq 3$ και $\psi \in \Phi_i$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : A \to [0, 1]$ με τύπο

$$\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\sigma(x)}.$$

Η ϕ είναι $\mathcal{C}^{\infty}$ και η οικογένεια Φ όλων των συναρτήσεων ϕ που ορίστηκαν είναι αριθμήσιμη εφ'όσον κάθε οικογένεια Φ_i είναι πεπερασμένη. Επίσης, $\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = 1$ για κάθε $x \in A$, ενώ τα 2), 3) προκύπτουν από τις ιδιότητες των ψ. $\square$

Η γενίκευση του ολοκληρώματος

Η ύπαρξη των διαμερίσεων της μονάδας συνεισφέρει ουσιαστικά στην γενίκευση του ορισμού του ολοκληρώματος είτε για συναρτήσεις που δεν είναι αναγκαστικά φραγμένες, είτε πάνω σε χωρία που δεν είναι αναγκαστικά φραγμένα είτε και για τα δύο.

Πράγματι έστω σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $f : A \to R$ μία τοπικά φραγμένη συνάρτηση. Δηλαδή, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $B(x, \delta_x) \subset A$ και η $f \mid B(x, \delta_x)$ είναι φραγμένη. Απαιτούμε επίσης

$$m(\text{Disc}_A(f)) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα[9] $\mathfrak{U}$ από Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του A ώστε η $f \mid U$ είναι φραγμένη για κάθε $U \in \mathfrak{U}$. Έστω επίσης αριθμήσιμη διαμέριση της μονάδας Φ που υπόκειται στο κάλυμμα $\mathfrak{U}$. Τότε για κάθε $\phi \in \phi$ το ολοκλήρωμα

$$\int_A \phi|f| = \int_U \phi|f|$$

υπάρχει λόγω του Θεωρήματος 4.1.20, όπου $\mathrm{supp}(\phi) \subset U$. Λέμε ότι η f είναι *γενικευμένα ολοκληρώσιμη* αν

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_A \phi_i|f| < \infty. \tag{4.3}$$

Εάν ισχύει η σχέση (4.3), τότε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_A \phi_i f \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_A \phi_i|f| < \infty,$$

δηλαδή, η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_A \phi_i f$$

συγκλίνει απόλυτα. Ορίζουμε συνεπώς το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα της f από τον τύπο

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A \phi_i f. \tag{4.4}$$

Έχουμε τα εξής ζητήματα να εξετάσουμε ώστε να εξασφαλίσουμε ότι ορίσαμε καλώς το ολοκλήρωμα. Εν πρώτοις, πρέπει να δείξουμε ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από το δοθέν κάλυμμα και τη δοθείσα διαμέριση της μονάδας. Κατόπιν, πρέπει να δείξουμε ότι ο ορισμός αυτός ταυτίζεται με τον ορισμό του συνήθους ολοκληρώματος όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι φραγμένο. Τέλος, πρέπει να δείξουμε ότι αν A ειναι Jordan μετρήσιμο και η f είναι φραγμένη στο A, τότε και πάλι οι δύο ορισμοί του ολοκληρώματος συμπίπτουν. Εξετάζουμε λεπτομερειακά τα ζητήματα αυτά αμέσως παρακάτω.

Λήμμα 4.2.11. *Ο ορισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος δεν εξαρτάται ούτε από το κάλυμμα $\mathfrak{U}$, ούτε από την διαμέριση Φ.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία άλλη διαμέριση της μονάδας Ψ που υπόκειται σε ένα άλλο ανοικτό κάλυμμα $\mathfrak{V}$ του A από Jordan μετρήσιμα υποσύνολά του. Για κάθε $\phi \in \Phi$ υπάρχει $V \in \mathfrak{V}$ ώστε $\mathrm{supp}(\phi) \subset V$. Επειδή το V είναι φραγμένο, και το $\mathrm{supp}(\phi)$ είναι κλειστό, έχουμε ότι το $\mathrm{supp}(\phi)$ είναι συμπαγές. Συνεπώς, $\psi \mid \mathrm{supp}(\phi f) \neq 0$ μόνο για πεπερασμένες το πλήθος $\psi \in \Psi$. Κατά συνέπεια,

$$\sum_{\phi\in\Phi} \int_A \phi f = \sum_{\phi\in\Phi} \int_A \left(\sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi \right) \phi f = \sum_{\phi\in\Phi} \int_A \sum_{\psi\in\Psi} \psi\phi f = \sum_{\phi\in\Phi} \sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi\phi f.$$

Η ίδια σχέση ισχύει εάν στην θέση της f βάλουμε την $|f|$. Συνεπώς, η σειρά

$$\sum_{\phi\in\Phi} \sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi\phi f$$

[9] Καλύμματα $\mathfrak{U}$ ενός συνόλου A για τα οποία ισχύει ότι $U \subset A$ για κάθε $U \in \mathfrak{U}$, ονομάζονται *παραδεκτά*. Για την παραπάνω περίπτωση το κάλυμμα μπορεί να αποτελείται από πεπερασμένες ενώσεις ανοιχτών μπαλλών ή ορθογωνίων.

συγκλίνει απόλυτα και γι αυτόν ακριβώς τον λόγο μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά άθροισης για να έχουμε

$$\sum_{\phi\in\Phi}\int_A \phi f = \sum_{\psi\in\Psi}\sum_{\phi\in\Phi}\int_A \phi\psi f = \sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi f$$

και το ίδιο ισχύει και για την $|f|$ στη θέση του f. Άρα τελικά, η $\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi|f|$ συγκλίνει και

$$\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi f = \sum_{\phi\in\Phi}\int_A \phi f.$$

□

Πρόταση 4.2.12. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Εάν το σύνολο ασυνεχειών* $\mathrm{Disc}_A(f)$ *είναι μέτρου 0 στον $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A.*

Απόδειξη. Έστω ότι για κάθε $x \in A$ είναι $|f(x)| \leq M$ για κάποιο $M > 0$. Υπάρχει ορθογώνιο R τέτοιο ώστε $A \subset \mathrm{Int}(R)$. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subset \Phi$, είναι

$$\sum_{\phi\in F}\int_A \phi|f| = \sum_{\phi\in F}\int_R \phi|f|\chi_A \leq \sum_{\phi\in F} M\int_R \phi\chi_A = M\int_R\left(\sum_{\phi\in F}\phi\right)\chi_A \leq M\int_R 1 = M\mathrm{vol}(R).$$

Άρα η σειρά $\sum_{\phi\in F}\int_A \phi|f|$ συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει. □

Μένει τέλος να αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας φραγμένης συνάρτησης f σε ένα Jordan μετρήσιμο ανοικτό σύνολο , ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα της f όπως ορίστηκε στην Ενότητα 4.2.2. Χρειαζόμαστε το παρακάτω

Λήμμα 4.2.13. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο ανοικτό σύνολο. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει Jordan μετρήσιμο συμπαγές $K \subset A$ ώστε*

$$\mathrm{vol}(A \setminus K) = \int_{A\setminus K} 1 < \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω ορθογώνιο R με $A \subset \mathrm{Int}(A)$. Επειδή το A είναι Jordan μετρήσιμο, υπάρχει διαμέριση P του R ώστε

$$U(\chi_A, P) - L(\chi_A, P) < \epsilon.$$

Θεωρούμε το σύνολο $S = \{J \in P : \ J \subset A\}$. Επειδή το A είναι ανοικτό, εκλεπταίνοντας την P εν ανάγκη, έχουμε ότι $S \neq \emptyset$. Έχουμε τώρα ότι

$$m_J = \begin{cases} 1 & J \in S \\ 0 & J \in P \setminus S \end{cases}$$

και θέτουμε $K = \bigcup_{J\in S} J$. Το K είναι ένα Jordan μετρήσιμο συμπαγές υποσύνολο του A. Επιπλέον,

$$L(\chi_A, P) = \sum_{J\in P} m_J\mathrm{vol}(J) = \sum_{J\in S} m_J\mathrm{vol}(J) = \sum_{J\in S}\mathrm{vol}(J) = \mathrm{vol}(K).$$

Άρα,

$$U(\chi_A, P) - \text{vol}(K) < \epsilon.$$

Επειδή

$$\partial(A \setminus K) = \partial A \cup \partial K$$

και

$$\text{vol}(\partial A) = \text{vol}(\partial K) = 0,$$

έπεται ότι το $A \setminus K$ είναι Jordan μετρήσιμο. Οπότε,

$$\begin{aligned}
\text{vol}(A \setminus K) = \int_{A\setminus K} 1 &= \int_R \chi_{A\setminus K} \\
&\leq U(\chi_A, P) \\
&= \sum_{J\in P\setminus S} M_J \text{vol}(J) \\
&= \sum_{J\in P} M_J \text{vol}(J) - \sum_{J\in S} M_J \text{vol}(J) \\
&= U(\chi_A, P) - \text{vol}(K) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Εδώ το M_J αναφέρεται στην χ_A. □

Πρόταση 4.2.14. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο ανοικτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη συνάρτηση ώστε το σύνολο των ασυνεχειών της $\text{Disc}_A(f)$ να είναι μηδενικού μέτρου στον $\mathbb{R}^n$. Αν το $\mathfrak{U}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του A με Jordan μετρήσιμα υποσύνολά του και Φ είναι διαμέριση της μονάδας υποκείμενη στο $\mathfrak{U}$, τότε*

$$\int_A f = \sum_{\phi\in\Phi} \int_A \phi f.$$

Απόδειξη. Έστω $M > 0$ ένα φράγμα της f. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα Jordan μετρήσιμο συμπαγές $K \subset A$ ώστε $\text{vol}(A \setminus K) < \epsilon$ (Λήμμα 4.2.13). Υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους $\phi \in \Phi$ με $\phi \mid K \neq 0$. Έστω $F \subset \Phi$ πεπερασμένο σύνολο που περιέχει αυτές τις ϕ. Τότε

$$\begin{aligned}
\left| \int_A f - \sum_{\phi\in F} \int_A \phi f \right| &\leq \int_A \left| f - \sum_{\phi\in F} \phi f \right| \\
&= \int_A |f| \left(1 - \sum_{\phi\in F} \phi \right) \\
&\leq M \int_A \sum_{\phi\in\Phi\setminus F} \phi = M \int_{A\setminus K} \sum_{\phi\in\Phi\setminus F} \phi \\
&\leq M \int_{A\setminus K} 1 = M\text{vol}(A \setminus K) \\
&< M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

4.3 Το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών στη μία διάσταση. Εκεί το θεώρημα μας δίνει τη μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $g : I = [a,b] \to J$ ένας $\mathcal{C}^1(I)$ μετασχηματισμός του $[a,b]$ σε ένα κλειστό διάστημα J με $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Έστω f συνεχής στο J. Τότε,*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b (f \circ g)(u) g'(u)\, du.$$

Ισοδύναμα,

$$\int_J f(x)\, dx = \int_I (f \circ g)(u) |g'(u)|\, du.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μία εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού: έστω F παράγουσα της f. Τότε,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Το ίδιο όμως ισχύει και για το $\int_a^b (f \circ g)(u) g'(u)\, du$ αφού η $(F \circ g)(x)$ είναι παράγουσα της $(f \circ g)(x) g'(x)$.

Για την ισοδύναμη έκφραση, παρατηρήστε ότι λόγω της συνέχειάς της, η g' μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Στην περίπτωση που $g' > 0$, ο τύπος γίνεται

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b (f \circ g)(u) g'(u)\, du.$$

Ενώ στην ενάντια περίπτωση,

$$\int_{g(b)}^{g(a)} f(x)\, dx = -\int_a^b (f \circ g)(u) g'(u)\, du.$$

□

Στις περισσότερες διαστάσεις η απόδειξη καθίσταται αρκετά πιο πολύπλοκη. Διατυπώνουμε ευθύς αμέσως το θεώρημα:

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $g : A \to \mathbb{R}^n$ ένας $\mathcal{C}^1(A)$, 1–1 μετασχηματισμός του A με* $\det(Df(x)) \neq 0$ *για κάθε $x \in A$. Αν η $f : g(A) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\int_{g(A)} f(x)\, dx = \int_A (f \circ g)(u) |\det(Dg)(u)|\, du.$$

Η απόδειξη θα προκύψει κατόπιν μίας σειράς λημμάτων.

Λήμμα 4.3.3. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\mathfrak{U}$ του A έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathfrak{U}$*[10] *και f ολοκληρώσιμη να είναι:*

$$\int_{g(U)} f(x)\, dx = \int_U (f \circ g)(u) |\det(Dg)(u)|\, du.$$

Τότε ισχύει το Θεώρημα 4.3.2.

Απόδειξη. Επειδή η g είναι 1–1,[11] η εικόνα $g(A)$ καλύπτεται από την οικογένεια των εικόνων $g(\mathfrak{U})$.

[10] Δηλαδή, το $\mathfrak{U}$ είναι παραδεκτό κάλυμμα.

[11] Η υπόθεση του 1–1 μας χρειάζεται μόνο σε αυτό το σημείο.

Έστω $\Phi = (\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, διαμέριση της μονάδας υπαγόμενη στην κάλυψη του $g(A)$ από το $g(\mathfrak{U})$. Τότε, εάν $\phi = 0$ έξω από κάποιο $g(U) \in g(\mathfrak{U})$, τότε, επειδή η g είναι 1–1 θα είναι και $(\phi \cdot f)\circ g = 0$ έξω από το U. Συνεπώς η εξίσωση

$$\int_{g(U)} \phi \cdot f = \int_U ((\phi \cdot f)\circ g)\,|\det(Dg)|$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\int_{g(A)} \phi \cdot f = \int_A ((\phi \cdot f)\circ g)\,|\det(Dg)|.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_{g(A)} f(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{g(A)} \phi_j(x) f(x)\,dx\right)\\
\text{εξ υποθέσεως} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_A (\phi_j \cdot g)(u)(f\circ g)(u)|\det(Dg(u))|\,du\right)\\
&= \int_A (f\circ g)(u)|\det(Dg)(u)|\,du.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.4. *Αρκεί να δειχθεί το Θεώρημα 4.3.2 για τη συνάρτηση $f = 1$.*

Απόδειξη. Εάν το θεώρημα ισχύει για την $f(x) = 1$, τότε ισχύει και για την σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$. Έστω $R \subset g(A)$ ορθογώνιο και P διαμέριση του R. Για κάθε υποορθογώνιο $J \in P$, έστω $f_J(x) = m_J(f) = \inf_{x\in J}(f(x))$. Τότε

$$\begin{aligned}
L(f,P) &= \sum_J m_J(f)\cdot \mathrm{vol}(J) = \sum_J \int_{\mathrm{Int}(J)} f_J\\
&= \sum_J \int_{g^{-1}(\mathrm{Int}(J))} (f_J\circ g)|\det(Dg)|\\
&\le \sum_J \int_{g^{-1}(\mathrm{Int}(J))} (f\circ g)|\det(Dg)|\\
&\le \int_{g^{-1}(R)} (f\circ g)|\det(Dg)|.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας inf επάνω σε όλες τις διαμερίσεις P, έχουμε

$$\int_R f \le \int_{g^{-1}(R)} (f\circ g)|\det(Dg)|.$$

Με όμοιο επιχείρημα για τη σταθερή συνάρτηση $f_J = M_j(f) = \sup_J(f)$ παίρνουμε

$$\int_R f \ge \int_{g^{-1}(R)} (f\circ g)|\det(Dg)|.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\int_R f = \int_{g^{-1}(R)} (f\circ g)|\det(Dg)|.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3.3 στην g^{-1}. □

Λήμμα 4.3.5. *Εάν το θεώρημα αληθεύει για $g : A \to \mathbb{R}^n$ και για $h : B \to \mathbb{R}^n$ όπου $g(A) \subset B$, τότε αληθεύει και για την $h \circ g : A \to \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\int_{(h\circ g)(A)} f = \int_{h(g(A))} f &= \int_{g(A)} (f \circ h)|\det(Dh)| \\ &= \int_A ((f \circ h) \circ g) \cdot (|\det(Dh)| \circ g) \cdot |\det(Dg)| \\ &= \int_A (f \circ (h \circ g))|\det(D(h \circ g))|.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.6. *Το θεώρημα αληθεύει όταν $g = T$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός (αυτομορφισμός).*

Απόδειξη. Αυτό συμβαίνει λόγω της Πρότασης 1.4.4 και του Λήμματος 4.3.4. □

Λήμμα 4.3.7. *Το θεώρημα αληθεύει για μετασχηματισμούς g με $Dg(a) = I$, για κάποιο a, όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.*

Απόδειξη. Έστω $T = Dg(a)$. Τότε για κάθε x,

$$\begin{aligned}D(T^{-1} \circ g)(x) &= (DT^{-1})(g(x)) \circ Dg(x) \\ &= T^{-1}(g(x) \circ Dg(x) \\ &= (Dg(a))^{-1} \circ Dg(x).\end{aligned}$$

Για $x = a$,

$$D(T^{-1} \circ g)(a) = I,$$

άρα, αν το θεώρημα αληθεύει για τον T θα αληθεύει και για τον g εφ΄ όσον αληθεύει για τον $T^{-1} \circ g$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη διάσταση. Για $n = 1$, η απόδειξη προκύπτει από τα σχόλια στην εισαγωγή της ενότητας αυτής και από τα Λήμματα 4.3.3, 4.3.4.

Υποθέτουμε τώρα την ισχύ του Θεωρήματος στη διάσταση $n-1$ και θα το αποδείξουμε στη διάσταση n. Για κάθε $a \in A$ αρκεί να βρούμε ανοικτό $U \subset A$, $a \in U$, ώστε να ισχύει το θεώρημα στο U. Μπορούμε επίσης λόγω του Λήμματος 4.3.7 να υποθέσουμε ότι $Dg(a) = I$.

Έστω $h : A \to \mathbb{R}^n$ με

$$h(x) = (g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), x_n).$$

Λόγω των υποθέσεών μας, $Dh(a) = I$ και $\det(Dh(a)) = 1$. Επομένως, από το Θεώρημα της Αντιστροφής προκύπτει ότι υπάρχει ανοικτό $U' \subset A$, $a \in U'$, όπου η h είναι 1–1 και δέχεται $\mathcal{C}^1$ αντίστροφη. Συνεπώς, ορίζεται η $k : h(U') \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$k(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, g_n(h^{-1}(x))).$$

Στο U' είναι $g = k \circ h$, δηλαδή γράψαμε τον g ως σύνθεση δύο μετασχηματισμών, εκ των οποίων ο καθένας αλλάζει λιγότερες από n μεταβλητές.

Τώρα, για την $g_n \circ h^{-1}$ έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$D(g_n \circ h^{-1})(h(a)) = Dg_n(a) \cdot Dh^{-1}(h(a)) = Dg_n(a).$$

Κατά συνέπεια, αφού $Dg(a) = I$ έχουμε

$$\frac{\partial(g_n \circ h^{-1})}{\partial x_n}(h(a)) = \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(a) = 1.$$

Άρα, $Dk(h(a)) = I$ και $\det(Dk(h(a))) = 1$, οπότε πάλι από το θεώρημα της αντιστροφής, σε κάποιο ανοικτό $V \subset h(U')$, $h(a) \in V$, η k είναι 1–1 και δέχεται $\mathcal{C}^1$ αντίστροφη. Θέτουμε $U = h^{-1}(V)$ και είναι $g = k \circ h$ όπου $h : U \to \mathbb{R}^n$, $k : V \to \mathbb{R}^n$, $h(U) \subset V$. Λόγω του Λήμματος 4.3.5, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για τις h και k.

Έστω προς τούτο $R \subset U$ ορθογώνιο

$$R = R_{n-1} \times [a_n, b_n],$$

όπου R_{n-1} είναι ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Από το Θεώρημα του Fubini,

$$\int_{h(R)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h(R_{n-1}\times\{x_n\})} 1 \; dx_1 \dots dx_{n-1} \right) \; dx_n.$$

Έστω τυχαίο x_n και η συνάρτηση $h_{x_n} : R_{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ με

$$h_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_{n-1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Η h_{x_n} είναι 1–1 και

$$\det(Dh_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})) = \det(Dh(x_1, \dots, x_n)) \neq 0.$$

Τώρα,

$$\int_{h(R_{n-1}\times\{x_n\})} 1 \; dx_1 \dots dx_{n-1} = \int_{h_{x_n}(R_{n-1})} 1 \; dx_1 \dots dx_{n-1}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής τώρα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{h(R)} 1 &= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h_{x_n}(R_{n-1})} 1 \; dx_1 \dots dx_{n-1} \right) \; dx_n \\
&= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{R_{n-1}} |\det(Dh_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}))| \; dx_1 \dots dx_{n-1} \right) \; dx_n \\
&= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{R_{n-1}} |\det(Dh(x_1, \dots, x_n))| \; dx_1 \dots dx_{n-1} \right) \; dx_n \\
&= \int_R |\det(Dh)|.
\end{aligned}$$

Αναλόγως αποδεικνύεται και η περίπτωση της k. □

4.4 Το Θεώρημα του Sard

4.4.1 Μηδενικό μέτρο και $\mathcal{C}^1$ συναρτήσεις

Πρόταση 4.4.1. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\emptyset \neq A$ *ανοικτό. Αν* $\mathrm{Cont}(E) = 0$ *και* $\overline{E} \subset A$, *τότε* $\mathrm{Cont}(f(\overline{E})) = 0$.

Απόδειξη. Κατ᾽ αρχάς, $\mathrm{Cont}(E) = 0 \iff \mathrm{Cont}(\overline{E}) = 0$. Επειδή $f(E) \subset f(\overline{E})$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Cont}(f(\overline{E})) = 0$. Εφ' όσον το $\overline{E} \subset A$ είναι συμπαγές, υπάρχει H ανοικτό[12] με

$$\overline{E} \subset H \subset \overline{H} \subset A,$$

($\overline{H}$ συμπαγές) και

$$M = \sup_{x \in \overline{H}} \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \right\} < +\infty.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχουν *κύβοι* $I_1, \dots, I_k$ τέτοιοι ώστε

$$\overline{E} \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(I_i) < \epsilon.$$

Επειδή το $\overline{E}$ είναι συμπαγές, υποθέτουμε ότι $R_i \subset \overline{H}$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Τότε, από το Λήμμα 3.5.2,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq nM\|x - y\|, \quad \forall x, y \in I_i,\ \forall i = 1, \dots, k.$$

Έστω a_i το μήκος της ακμής του κύβου I_i. Τότε, για κάθε $j = 1, \dots, n$, $x, y \in I_i$, $i = 1. \dots, k$

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq nM\|x - y\| \leq n^{3/2} M a_i.$$

Άρα, η εικόνα $f(I_i)$ περιέχεται σε κάποιο κύβο J_i με μήκος ακμής $n^{3/2} M a_i$. Άρα

$$f(\overline{E}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} f(I_i) \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(J_i) = \sum_{i=1}^{n} (n^{3/2} M a_i)^n &= (n^{3/2} M)^n \sum_{i=1}^{n} a_i^n \\ &= (n^{3/2} M)^n \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(I_i) \\ &< (n^{3/2} M)^n \epsilon. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.4.2. *Έστω* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *κλάσης* $\mathcal{C}^1(A)$. *Αν* $E \subset$ *κλειστό και* $m(E) = 0$, *τότε* $m(f(E)) = 0$.

[12] Αν $\mathfrak{U}$ ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς $\overline{E}$ παίρνουμε H να είναι η ένωση των συνόλων του πεπερασμένου υποκαλύμματος.

Πόρισμα 4.4.3. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ κλάσης $\mathcal{C}^1(A)$ αμφιδιαφόριση. Αν $K \subset A$ συμπαγές με $m(K) = 0$, τότε $m(f(K)) = 0$.*

Απόδειξη. Αφου η f είναι συνεχής, έπεται ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $f(A)$. Τώρα, η $f^{-1} : f(A) \to A$ είναι συνεχής, άρα $\partial(f(K)) = f(\partial K)$. Από την Πρόταση 4.4.1 τότε έχουμε ότι $m(f(\partial K)) = 0$ αφού έχει περιεχόμενο 0. □

Πόρισμα 4.4.4. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}^m$ κλάσης $\mathcal{C}^1(A)$. Αν $n < m$ τότε $m(f(A)) = 0$ στον R^m.*

Απόδειξη. Υπάρχει ακολουθία συμπαγών συνόλων $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$[13] τέτοια ώστε $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Εφ΄ όσον

$$f(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(C_k),$$

αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Cont}(f(C_k)) = 0$ στον $\mathbb{R}^m$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω η $\mathcal{C}^1$ συνάρτηση

$$F : A \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m, \quad F(x, y) = f(x).$$

Θέτουμε $H_k = C_k \times \{\mathbf{0}_{m-n}\}$. Επειδή είναι συμπαγές, το σύνολο H_k έχει μηδενικό περιεχόμενο στον $\mathbb{R}^m$ αφού έχει μηδενικό μέτρο στον $\mathbb{R}^m$. Άρα, από τη Πρόταση 4.4.1, έχουμε και ότι το περιεχόμενο του $F(H_k)$ είναι ίσο με το περιεχόμενο του $f(C_k)$ στον $\mathbb{R}^m$ και είναι 0. □

Πρόταση 4.4.5. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}^n$ κλάσης $\mathcal{C}^1(A)$. Αν $K \subset A$ συμπαγές, τότε υπάρχει $\lambda = \lambda(K) \geq 0$ ώστε*

$$\|f(x) - f(y) - Df(y) \cdot (x - y)\| < \lambda \|x - y\|, \quad x, y \in K$$

με

$$\lim_{\text{diam}(K)\to 0} \lambda(K) = 0.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε κάποιο $x \in K$ και ορίζουμε συνάρτηση F^x με τύπο

$$F^x(y) = f(x) + Df(x)(y - x),$$

δηλαδή,

$$F_i^x(y) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j).$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τις $\mathcal{C}^1$ συναρτήσεις f_i:

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)(y_j - x_j),$$

[13] Λόγου χάρη,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B(\mathbf{0}, k)}.$$

με το ξ_i να κείται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x, y. Αν $y \in B(x,\epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$, τότε

$$\begin{aligned}
\|F^x(y) - f(y)\| &\leq C \max_{i=1,\ldots,n} |F_i^x(y) - f_i(y)| \\
&= C \max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i) \right) (y_j - x_j) \right| \\
&\leq C \max_{i,j=1,\ldots n} \sup_{\xi_i,\, y \in B(x,\epsilon)} \left\{ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i) \right) \|x-y\| \right\} \\
&\leq CM(\epsilon)\|x-y\| \leq CM(\epsilon)\epsilon,
\end{aligned}$$

όπου

$$M(\epsilon) = \max_{i,j=1,\ldots n} \sup_{\xi_i,\, y \in B(x,\epsilon)} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i) \right\} \to 0$$

καθώς $\epsilon \to 0$ αφού οι f_i είναι $\mathcal{C}^1$. □

4.4.2 Το Θεώρημα του Sard

Θεώρημα 4.4.6. (**Morse (1941), Sard (1942)**) *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $g : A \to \mathbb{R}^n$ ένας $\mathcal{C}^1$ μετασχηματισμός. Έστω επίσης το σύνολο*

$$\mathrm{Cr}(g) = \{x \in a : \ \det(Dg(x)) = 0\}.$$

Τότε $m(\mathrm{Cr}(g)) = 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = [0,1]^n$ και έστω $N > 0$. Ο κύβος $[0,1]^n$ καλύπτεται με N^n κύβους

$$K_1, \ldots, K_{N^n}$$

ακμής $\epsilon = 1/N$, των οποίων τα εσωτερικά είναι ξένα μεταξύ τους. Έστω K_i ένας τέτοιος κύβος και $x \in K_i$ με $\det(Dg(x)) = 0$. Ορίζουμε στον K_i τη συνάρτηση

$$G^x(y) = g(x) + Dg(x)(y - x).$$

Επειδή η $Dg(x)$ δεν είναι επί, η εικόνα $G^x(\mathbb{R}^n)$ περιέχεται σε ένα $(n-1)$-διάστατο υπερεπίπεδο P_x. Είναι τώρα,

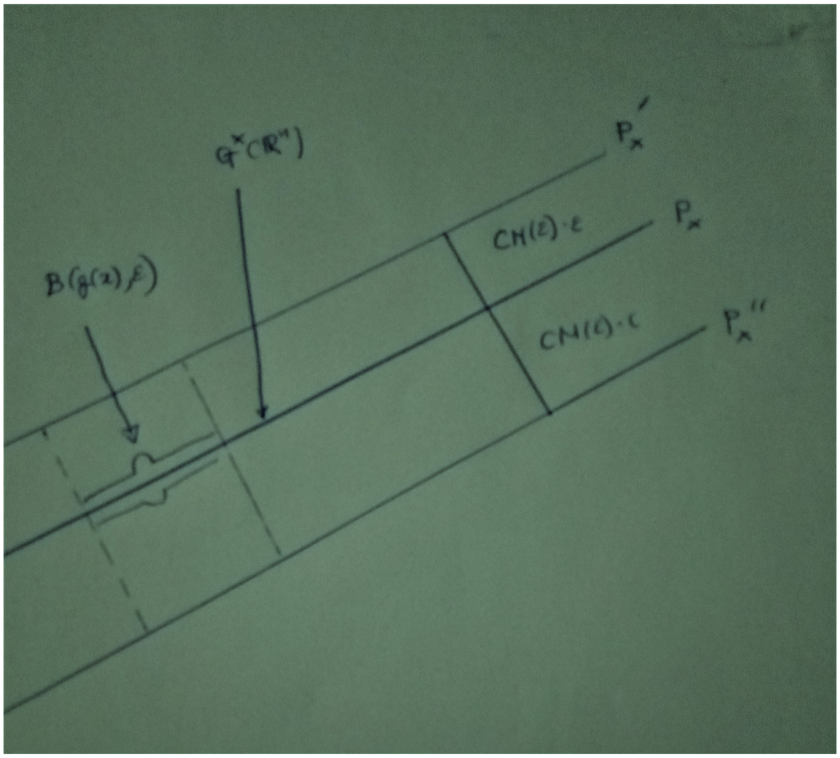
$$g(x) = G^x(x) \in P_x$$

και εάν $y \in K_i$, τότε από την Πρόταση 4.4.5 παίρνουμε

$$\|g(x) - G^x(y)\| = \|G^x(x) - G^x(y)\| \leq C\|x - y\| \leq C\epsilon,$$

για $\epsilon > 0$ με $\|x - y\| < \epsilon$, δηλαδή,

$$G^x(y) \subset B(g(x), \epsilon) \subset P_x \subset \mathbb{R}^n.$$



Και πάλι από την Πρόταση 4.4.5 συμπεραίνουμε ότι το $g(y)$ βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα P_x' και P_x'' που απέχουν από το P_x απόσταση ίση με $CM(\epsilon)\epsilon$. Άρα, για $y \in K_i$, το $g(y)$ ανήκει σε κύλινδρο $C_i(\epsilon)$, βάσης $B(g(x), \epsilon)$ και ύψους $2CM(\epsilon)\epsilon$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} m(g(K_i)) \leq \mathrm{vol}(C_i(\epsilon)) &= \epsilon^{n-1} \cdot (2CM(\epsilon)\epsilon) \\ &= 2C\epsilon^n M(\epsilon) = 2CM(1/N)/N^n, \quad (N = 1/\epsilon). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^{N^n} m(K_i) \leq 2CM(1/N)/N^n \leq 2CM(1/N) \to 0, \text{ καθώς } n \to +\infty.$$

□

4.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι η $f : R = [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1/2) \\ 1/2 & x \in [1/2,3/4) \\ 1 & x \in [3/4,1] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το

$$\iint_R f.$$

2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε τα ακόλουθα:

   α) Αν $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, τότε

   $$\sum_{i=1}^{n} (f, t_i) < f(b) - f(a),$$

   όπου $o(f, t_i)$ είναι η ταλάντωση της f στο t_i.

   β) Για κάθε $\epsilon > 0$, το σύνολο

   $$\{t \in [a,b] : \ o(f,t) > \epsilon\}$$

   έχει μέτρο μηδέν στο $\mathbb{R}$.

   γ) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

3. Αποδείξτε ότι για ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι

   $$\text{Cont}(A) = 0 \iff \text{Cont}(\overline{A})$$

4. Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου A για το οποίο ισχύει $m(A) = 0$ αλλά $m(\overline{A}) \neq 0$.

5. Έστω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ μηδενικού περιεχομένου. Αποδείξτε ότι κάθε φραγμένη $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και

   $$\int_A f = 0.$$

   Δείξτε επίσης ότι το παραπάνω δεν ισχύει για σύνολα μηδενικού μέτρου.

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και ολοκληρώσιμη. Έστω το σύνολο

   $$D_f = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

   Δείξτε ότι $m(\partial D_f) = 0$ και ότι

   $$\text{vol}(D_f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

7. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan μετρήσιμα σύνολα,

   α) Αποδείξτε ότι και τα σύνολα

   $$A \cup B, \quad A \cap B, A \setminus B$$

   είναι Jordan μετρήσιμα σύνολα.

   β) Αποδείξτε τις ταυτότητες

   $$\text{vol}(A \cup B) + \text{vol}(A \cap B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B),$$

   και

   $$\text{vol}(A \setminus B) = \text{vol}(A) - \text{vol}(A \cap B).$$

8. Αν η $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε

$$\int_a^b \left(\int_a^y f(x,y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b f(x,y)\, dy \right) dx.$$

(Υπόδειξη. Υπολογίστε με δύο διαφορετικούς τρόπους το

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy$$

όπου D κατάλληλο υποσύνολο του $[a,b]^2$.)

9. Αποδείξτε ότι αν $A \subset R$, όπου R είναι ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και $m(A) = 0$, τότε $\mathrm{vol}(A) = 0$. Αποδείξτε αντιστρόφως ότι αν $A \subset R$ και $\mathrm{vol}(A) = 0$, τότε $m(A) = 0$.

10. Αποδείξτε την Ανισότητα του Chebysev: αν $A \subset R$, όπου R είναι ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και f είναι ολοκληρώσιμη στο , τότε για κάθε $a > 0$,

$$\frac{1}{a} \int_A f(x)\, dx \geq \mathrm{vol}(\{x : \ f(x) > a\}).$$

(Υπόδειξη. $f(x) > a \implies f(x)\chi_A > a\chi_A$ και ολοκληρώστε.)

11. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και $f : A \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ και $\int_A f = 0$. Αποδείξτε ότι

$$m(\{x : \ f(x) \neq 0\}) = 0$$

(Υπόδειξη. Γράψτε

$$\{x : \ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : \ f(x) > 1/n\}$$

και εφαρμόστε την Ανισότητα Chebyshev.)

12. Αποδείξτε το Λήμμα Schwarz 3.6.1 με τόν εξής τρόπο: υποθέστε ότι υπάρχει ένα $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) > 0.$$

Λόγω συνέχειας, υπάρχει ορθογώνιο R με $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}(R)$ ώστε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > 0, \quad (x,y) \in R.$$

Συνεπώς έχουμε (γιατί;)

$$\iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \right) dxdy > 0.$$

Εφαρμόστε τώρα το Θεώρημα του Fubini.)

13. Θεωρούμε το εξής στοιχειώδες χωρίο του $\mathbb{R}^3$:

$$D = \{(x,y,z): \ a \leq x \leq b, \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\}$$

με τις ϕ_i, ψ_i, $i = 1, 2$ να είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι εάν η $f \in L^1(D)$ τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \left(\int_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x,y,z)\ dz \right)\ dy \right)\ dx.$$

14. Διατυπώστε το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $n = 2$ και
$$g(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, \ r\sin\theta),$$
όπου $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (Μετασχηματισμός πολικών συντεταγμένων).

β) $n = 3$ και
$$g(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos\theta, \ r\sin\theta, \ z),$$
όπου $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (Μετασχηματισμός κυλινδρικών συντεταγμένων).

γ) $n = 3$ και
$$g(r,\theta,\phi) = (x,y,z) = (r\sin\phi\cos\theta, \ r\sin\phi\sin\theta, \ r\cos\phi),$$
όπου $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$ (Μετασχηματισμός σφαιρικών συντεταγμένων).

15. (Το ολοκλήρωμα της καμπάνας του Gauss.) Αποδείξτε ότι

$$\int_{\Re}^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

(Υπόδειξη. Για κάποιο $r > 0$ θεωρούμε το τετράγωνο $R = [-r, r]^2$ και το ολοκλήρωμα

$$I_r = \iint_R e^{-x^2-y^2}\ dxdy.$$

Είναι

$$\iint_{B(\mathbf{0},r)} e^{-x^2-y^2}\ dxdy \leq I_r \leq \iint_{B(\mathbf{0},\sqrt{2}r)} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$$

και απο το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών προκύπτει

$$\pi(1 - e^{-r^2}) \leq I_r \leq \pi(1 - e^{-2r^2}).$$

Από το θεώρημα του Fubini,

$${}_r = J_r^2, \quad J_r = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\ dx.$$

Άρα,

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-r^2})} \leq J_r \leq \sqrt{\pi(1 - e^{-2r^2})},$$

και παίρνοντας όρια έχουμε το ζητούμενο.)

Κεφάλαιο 5

Διαφορικές μορφές

5.1 Στοιχεία Εξωτερικής Άλγεβρας

5.1.1 Ομάδα μετατάξεων

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Η *ομάδα μετατάξεων k* αντικειμένων είναι το σύνολο

$$S_k = \{\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\} : \ \sigma \ 1-1 \text{ και επί.}\} .$$

Γράφουμε $\sigma(1, \dots, k) = (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$, ή, χρησιμοποιώντας πίνακες περιγράφουμε την σ με τον πίνακα

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(k) \end{pmatrix} .$$

Η πράξη της ομάδας είναι σύνθεση και είθισται για μετατάξεις σ, τ να γράφουμε $\sigma\tau$ αντί $\sigma \circ \tau$.

Μία μετάταξη $\sigma \in S_k$ λέγεται *κυκλική μήκους r* αν υπάρχει υποσύνολο

$$\{a_1, \dots, a_r\} \subset \{1, \dots, k\}$$

ώστε

$$\sigma(a_i) = a_2, \dots \sigma(a_{r-1}) = a_r, \ \sigma(a_r) = a_1,$$

ένω αφήνει σταθερά τα στοιχεία του $\{1, \dots, k\} \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$. Συμβολίζουμε τέτοιες μετατάξεις (r-κύκλους) απλώς με $(a_1 \dots a_r)$. Κάθε μετάταξη γράφεται ως γινόμενο ξένων μεταξύ τους τέτοιων κύκλων και επίσης γράφεται ως γινόμενο 2-κύκλων.

Παράδειγμα 5.1.1. Η μετάταξη

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ισούται με το γινόμενο των κύκλων

$$(1\ 2\ 4)(3\ 5),$$

το οποίο με τη σειρά του είναι ίσο με το γινόμενο

$$(1\ 4)(1\ 2)(3\ 5).$$

Η μετάταξη $\sigma \in S_k$ λέγεται *άρτια* αν γράφεται ως γινόμενο αρτίου πλήθους 2-κύκλων ενώ λέγεται *περιττή* αν γράφεται ως γινόμενο περιττού πλήθους 2-κύκλων. Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε και $\text{sign}(\sigma) = 1$, ενώ στη δεύτερη γράφουμε $\text{sign}(\sigma) = -1$.[1] Εξ ορισμού τώρα του προσήμου μετάταξης, έχουμε τη σχέση

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau), \ \forall \tau, \sigma \in S_k. \tag{5.1}$$

5.1.2 Δυϊκός χώρος

Έστω V διανυσματικός χώρος και $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \to \mathbb{R}$. Το σύνολο V^* λέγεται *δυϊκός χώρος του* V και αποτελεί ο ίδιος διανυσματικό χώρο (με πράξεις την πρόσθεση συναρτήσεων και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων με αριθμό), τα στοιχεία του οποίου καλούμε *συνδιανύσματα*. Υποθέτουμε ότι $\dim V = n$ και έστω

$$e_1, \ldots, e_n$$

βάση του V. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$e_i^* : V \to \mathbb{R}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Πρόταση 5.1.2. *Τα $e_1^*, \ldots, e_n^*$ αποτελούν βάση του V^*, άρα $\dim V^* = n$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in V^*$, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in V$. Τότε,

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i f(e_i) = \sum_{1=1}^n f(e_i) e_i^*(v).$$

Άρα,

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*.$$

Γραμμική ανεξαρτησία: εάν υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ ώστε

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0,$$

τότε, εφαρμόζοντας και στις δύο πλευρές τα e_j παίρνουμε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Η $e_1^*, \ldots, e_n^*$ λέγεται *δυϊκή βάση του* V (προσαρτημένη στη βάση $e_1, \ldots, e_n$). Προκύπτει ότι $\dim(V^*) = n$ και άρα ο δυϊκός χώρος V^* είναι ισόμορφος με τον V.[2]

---

[1] Μπορούμε να βρούμε το πρόσημο μιας μετάταξης και με τον εξής τρόπο. Λ.χ. στο παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι η συγκεκριμένη μετάταξη, που την γράφουμε για ευκολία ως 24513 προήλθε από την ταυτοτική κατόπιν των εξής μεταφορών:

- Της εναλλαγής των 2 και 1: 21345.
- Της εναλλαγης των 4 και 1: 24315.
- Της εναλλαγης των 5 και 3: 24513.

Έχουμε συνολικό αριθμό 3 εναλλαγών, και συνεπώς η μετάταξη είναι περιττή.

[2] Η ισομορφία αυτή μπορεί να περιγραφεί και επακριβώς. Ορίζουμε $L : V \to V^*$ ως εξής: αν είναι $e_1, \ldots, e_n$ μία βάση του V, τότε για κάθε $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ η εικόνα $L(v)$ του v μέσω της L είναι η απεικόνιση που ορίζεται για κάθε $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$ από τον τύπο

$$v^*(w) = L(v)(w) =< v, w >:= \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Αποδεικνύεται ότι η L είναι γραμμική και ανεξάρτητη από την επιλογή της βάσης.

Σχόλιο 5.1.3. Έστω $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Τότε,

$$e_j^*(v) = \sum_{i=1}^n v_i e_j^*(e_i) = v_j \implies v_i = e_i^*(v),\ i = 1, \ldots, n.$$

5.1.3 Πολυγραμμικές απεικονίσεις

Έστω V διανυσματικός χώρος και $V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ φορές}}$. Μία απεικόνιση $f : V^k \to \mathbb{R}$ λέγεται *k-πολυγραμμική* αν είναι γραμμική σε κάθε συντεταγμένη: για κάθε $i = 1, \ldots, k$

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots v_k) + \mu f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots v_k),$$

για κάθε v_i και v_i', $i = 1, \ldots, k$, στον V.

Συμβολίζουμε των διανυσματικό χώρο των k-γραμμικών απεικονίσεων με $\mathcal{T}^k(V)$[3] και τον ονομάζουμε *χώρο των k-τανυστών του V*.[4] Προφανώς, $\mathcal{T}^1(V) = V^*$.

Παράδειγμα 5.1.4. Το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$,

$$p(v, w) = v \cdot w$$

είναι ένας 2-τανυστής του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα

$$p(v, w) = p(w, v), \quad v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Επίσης η συνάρτηση της ορίζουσας

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{vmatrix}$$

είναι n-τανυστής του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα

$$\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n),\ i, j = 1, \ldots, n.$$

[3]Οι πράξεις στον δ.χ. $\mathcal{T}^k(V)$ είναι η πρόσθεση,

$$(f + g)(v_1, \ldots, v_k) = f(v_1, \ldots, v_k) + g(v_1, \ldots, v_k),$$

και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό,

$$(\lambda f)(v_1, \ldots, v_k) = \lambda \cdot f(v_1, \ldots, v_k),$$

$f, g \in \mathcal{T}^k$, $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$.

[4]Για την ακρίβεια, είναι ο χώρος των *k-συναλλοίωτων* ή $(0, k)$-τανυστών. Ένας γενικός l-αντιαλλοίωτος και k-συναλλοίωτος (ή, (l, k)-)τανυστής είναι μία πολυγραμμική απεικόνιση

$$f : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ φορές}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ φορές}} \to \mathbb{R}.$$

5.1.4 Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί τανυστές

Ένας k-τανυστής λέγεται *συμμετρικός* (αντ.*αντισυμμετρικός* ή *εναλλασσόμενος*) αν για κάθε $\sigma \in S_k$

$$f(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

(αντ.

$$f(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),)$$

για κάθε $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$.[5] Για συντομία, ορισμένες φορές θα γράφουμε $\sigma f(v_1, \dots, v_k)$ αντί του $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$.

Παράδειγμα 5.1.5. Το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής. Από την άλλη, αντισυμμετρικοί τανυστές είναι η συνάρτηση της ορίζουσας καθώς και το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Ένας άλλος εναλλασσόμενος τανυστής είναι το σφηνοειδές γινόμενο συναρτήσεων. Λόγου χάρη, για $f, g : V \to \mathbb{R}$ γραμμικές, ορίζουμε $f \wedge g : V^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(f \wedge g)(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u) = \begin{vmatrix} f(u) & f(v) \\ g(u) & g(v) \end{vmatrix}.$$

Συμβολίζουμε με $\Sigma^k(V)$ (αντ. $\Lambda^k(V)$) τον διανυσματικό χώρο των συμμετρικών (αντ. αντισυμμετρικών) k-τανυστών του V. Προφανώς και οι δύο είναι υπόχωροι του $\mathcal{T}^k(V)$.

Ορίζουμε δύο τελεστές $\mathcal{S}$ και $\mathcal{A}$ που μετατρέπουν έναν οποιονδήποτε k-τανυστή σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό k-τανυστή, αντίστοιχα. Ονομάζουμε τους τελεστές αυτούς *συμμετρικοποιητή* και *αντισυμμετρικοποιητή*, αντίστοιχα.

Για κάθε $f \in \mathcal{T}^k(V)$ και για κάθε $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ οι τελεστές αυτοί ορίζονται από τους τύπους:

$$(\mathcal{S}f)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma f(v_1, \dots, v_k),$$
$$(\mathcal{A}f)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn}(\sigma)) \sigma f(v_1, \dots, v_k).$$

Πρόταση 5.1.6. *Εάν $f \in \mathcal{T}^k(V)$, τότε*

i) $\mathcal{S}f \in \Sigma^k(V)$,

ii) $\mathcal{A}f \in \Lambda^k(V)$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το ii) και αφήνουμε το i) σαν άσκηση. Για $\tau \in S_k$,

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{A}f) &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \cdot \tau(\sigma f) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \cdot (\tau\sigma) f \\ (5.1) \quad &= \text{sgn}(\tau) \cdot \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\tau\sigma) \cdot (\tau\sigma) f \\ &= \text{sgn}(\tau) \cdot \mathcal{A}f. \end{aligned}$$

[5] Η σχέση αντισυμμετρίας γράφεται ισοδύναμα

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_k), \quad 1 \le i < j \le k.$$

□

Δίνουμε τώρα παραδείγματα συμμετρικοποίησης και αντισυμμετρικοποίησης τανυστή. Εφεξής όμως θα επικεντρωθούμε περισσότερο στους αντισυμμετρικούς τανυστές.

Παράδειγμα 5.1.7. Όταν $k = 2$, τότε $S_2 = \{(1\ 2), (2\ 1)\}$. Συνεπώς, αν $f : V^2 \to \mathbb{R}$, τότε

$$2(\mathcal{S}f)(v_1, v_2) = f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1),$$

ενώ

$$2(\mathcal{A}f)(v_1, v_2) = f(v_1, v_2) - f(v_2, v_1).$$

Συνεπώς, αν ο f ειναι συμμετρικός τότε

$$(\mathcal{S}f) = f, \quad (\mathcal{A}f) = 0,$$

ενώ αν ο f είναι αντισυμμετρικός,

$$(\mathcal{S}f) = 0, \quad (\mathcal{A}f) = f.$$

Ὀταν $k = 3$, τότε

$$S_3 = \{(1\ 2\ 3)\ , (1\ 3\ 2),\ (2\ 1\ 3),\ (2\ 3\ 1),\ (3\ 1\ 2),\ (3\ 2\ 1)\},$$

και τα πρόσημα των στοιχείων είναι αντίστοιχα $+, -, -, +, +, -$. Τότε,

$$\begin{aligned} 6(\mathcal{S}f)(v_1, v_2, v_3) &= f(v_1, v_2, v_3) + f(v_1, v_3, v_2) + f(v_2, v_1, v_3) \\ &\quad + f(v_2, v_3, v_1) + f(v_3, v_1, v_2) + f(v_3, v_2, v_1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 6(\mathcal{A}f)(v_1, v_2, v_3) &= f(v_1, v_2, v_3) - f(v_1, v_3, v_2) - f(v_2, v_1, v_3) \\ &\quad + f(v_2, v_3, v_1) + f(v_3, v_1, v_2) - f(v_3, v_2, v_1). \end{aligned}$$

Όταν ο f είναι συμμετρικός,

$$(\mathcal{S}f) = f, \quad (\mathcal{A}f) = 0,$$

ενώ αν ο f είναι εναλλασόμενος,

$$(\mathcal{S}f) = 0, \quad (\mathcal{A}f) = f.$$

Έχουμε την παρακάτω πρόταση που αφορά στον αντισυμμετρικοποιητή και στους αντισυμμετρικούς τανυστές.

Πρόταση 5.1.8. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) $f \in \Lambda^k(V) \implies \mathcal{A}(f) = f.$

β) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}.$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το α) και αφήνουμε το β) σαν άσκηση. Επειδή $f \in \Lambda^k(V)$, είναι $\sigma f = \mathrm{sgn}(\sigma) f$ και

$$\mathcal{A}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathrm{sgn}(\sigma) f = f.$$

□

5.1.5 Τανυστικό γινόμενο

Έστω $f \in \mathcal{T}^k(V)$, $g \in \mathcal{T}^l(V)$. Το *τανυστικό γινόμενο* $f \otimes g$ ορίζεται από τη σχέση

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = f(v_1, \ldots, v_k)g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$$

και είναι ένας $(k+l)$-τανυστής στον V.

Πρόταση 5.1.9. *Το τανυστικό γινόμενο ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

α)
$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

β)
$$f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h.$$

γ)
$$(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h.$$

δ)
$$(\lambda g) \otimes h = g \otimes (\lambda h) = \lambda(g \otimes h).$$

Παράδειγμα 5.1.10. Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$p(v, w) = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_i^*(v)e_j^*(w)\delta^{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}(e_i^* \otimes e_j^*)(v, w),$$

δηλαδή,

$$p = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}(e_i^* \otimes e_j^*).$$

Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι κάτι ανάλογο ισχύει για οποιονδήποτε τανυστή.

Πρόταση 5.1.11. *Αν* $\dim(V) = n$*, τότε* $\dim(\mathcal{T}^k(V)) = n^k$.

Απόδειξη. Έστω $e_1, \ldots, e_n$ βάση του V και $e_1^*, \ldots, e_n^*$ η αντίστοιχη βάση του V^*,

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Δείχνουμε ότι το σύνολο

$$e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*, \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$$

είναι βάση του $\mathcal{T}^k(V)$. Κατ΄ αρχάς βλέπουμε ότι

$$e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_l}) = \begin{cases} 1 & (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k) \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έστω τώρα $f \in \mathcal{T}^k(V)$, $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$, $v_i = \sum_{j=1}^n v^{ij} e_j$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_k) &= f\left(\sum_{j=1}^n v^{1j} e_j, \dots, \sum_{j=1}^n v^{nj} e_j\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^n v^{1j_1} \dots v^{kj_k} \cdot f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^n e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^* (v_1, \dots, v_k) \cdot f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}). \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$f = \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^n f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*.$$

Οι αριθμοί $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) := f_{j_1, \dots, j_k}$ ονομάζονται *συντεταγμένες* του f.

Γραμμική ανεξαρτησία: έστω $\lambda_{i_1, \dots, i_k}$ αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^* = 0.$$

Τότε,

$$\lambda_{j_1, \dots, j_k} = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^* (e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0.$$

□

5.1.6 Εξωτερικό (σφηνοειδές) γινόμενο

Το σύνολο

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \Lambda^k(V)$$

είναι υπόχωρος του

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{T}^k(V)$$

αλλά δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη του τανυστικού γινομένου. Ορίζουμε το *εξωτερικό ή σφηνοειδές γινόμενο* $\omega \wedge \theta$ δύο αντισυμμετρικών τανυστών $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\theta \in \Lambda^l(V)$ από τον τύπο

$$\omega \wedge \theta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathcal{A}(\omega \otimes \theta).$$

Αναλυτικά, για κάθε $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$,

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k, \dots, v_{k+l}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}(\sigma)) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \theta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Παράδειγμα 5.1.12. Όταν $f, g \in \Lambda^1(V)$ (δηλαδή είναι συνδιανύσματα), τότε

$$\begin{aligned}
(1/2)(f \wedge g)(v_1, v_2) &= \sum_{\sigma \in S_2} f(v_{\sigma(1)}) g(v_{\sigma(2)}) \\
&= f(v_1)g(v_2) - f(v_2)g(v_1) \\
&= \begin{vmatrix} f(v_1) & f(v_2) \\ g(v_1) & g(v_2) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.1.13. Θα δείξουμε ότι για $f \in \Lambda^2(V)$, $g \in \Lambda_1(V)$, ισχύει ο τύπος

$$(1/3)(f \wedge g)(v_1, v_2, v_3) = f(v_1, v_2)g(v_3) + f(v_2, v_3)g(v_1) + f(v_1, v_3)g(v_2).$$

Αν αρχικά $f \in \Lambda^2(V)$ και $g \in \Lambda^1(V)(= \mathcal{T}^1(V))$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(f \otimes g)(v_1, v_2, v_3) &= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) g(v_{\sigma(3)}) \\
&= f(v_1, v_2)g(v_3) - f(v_2, v_1)g(v_3) + f(v_2, v_3)g(v_1) \\
&\quad + f(v_3, v_1)g(v_2) - f(v_3, v_2)g(v_1) - f(v_1, v_3)g(v_2).
\end{aligned}$$

Αν τώρα $f \in A^2(V)$, είναι

$$f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1), \quad f(v_2, v_3) = -f(v_3, v_2), \quad f(v_1, v_3) = -f(v_3, v_1).$$

Παίρνουμε

$$\mathcal{A}(f \otimes g)(v_1, v_2, v_3) = 2(f(v_1, v_2)g(v_3) + f(v_2, v_3)g(v_1) + f(v_1, v_3)g(v_2))$$

και προκύπτει ο τύπος.

Πρόταση 5.1.14. *Έστω $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \Lambda^l(V)$, $\eta \in \Lambda^m(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:*

i) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \theta = \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta$.

ii) $\omega \wedge (\theta_1 + \theta_2) = \omega \wedge \theta_1 + \omega \wedge \theta_2$.

iii) $(\lambda\omega) \wedge \theta = \omega \wedge (\lambda\theta) = \lambda(\omega \wedge \theta)$.

iv) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega$.

v) $(\omega \wedge \theta) \wedge \eta = \omega \wedge (\theta \wedge \eta)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των i), i), iii), αφήνεται σαν άσκηση. Δεν θα αποδείξουμε το v) καθώς η απόδειξη είναι καθαρά τεχνική και μάλλον αποκλίνει του σκοπού του μαθήματος-οι ενδιαφερόμενοι/ες μπορούν να κοιτάξουν το [**?**], Proposition 3.25. Εδώ, θα αποδείξουμε μόνο το iv).

Ορίζουμε $\tau \in S_{k+l}$ να είναι η μετάταξη

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Για οποιαδήποτε $\sigma \in S_{k+l}$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\sigma(1) = \sigma\tau(l+1), \ldots, \sigma(k) = \sigma\tau(l+k),\\ \sigma(k+1) = \sigma\tau(1), \ldots, \sigma(k+l) = \sigma\tau(l).\end{aligned}$$

Τώρα, για $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(\omega \otimes \theta)(v_1, \ldots, v_{k+l})\\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}(\sigma))\ \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\theta(v_{\sigma(k+l)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})\\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}(\sigma))\ \omega(v_{\sigma\tau(l+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l+k)})\theta(v_{\sigma\tau(l)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l)})\\
&= \mathrm{sqn}(\tau) \cdot \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}(\sigma\tau))\ \theta(v_{\sigma\tau(l)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l)})\omega(v_{\sigma\tau(l+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l+k)})\\
&= \mathrm{sqn}(\tau)\mathcal{A}(\theta \otimes \omega)(v_1, \ldots, v_{k+l}).\end{aligned}$$

Από τη σχέση

$$\mathcal{A}(\omega \otimes \theta) = (\mathrm{sgn}(\tau) \cdot \mathcal{A}(\theta \otimes \omega),$$

προκύπτει τώρα το ζητούμενο πολλαπλασιάζοντας με $(k+l)!/(k!l!)$. □

Ορισμός 5.1.15. Ο χώρος $\Lambda(V)$ εφοδιασμένος με το σφηνοειδές γινόμενο καθίσταται διαβαθμισμένη άλγεβρα και ονομάζεται *εξωτερική άλγεβρα* ή *άλγεβρα Grassmann* των πολυσυνδιανυσμάτων του V.[6]

Πρόταση 5.1.16.

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι τα

$$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,$$

αποτελούν βάση του $\Lambda^k(V)$. Πράγματι, αν $\omega \in \Lambda^k(V)$, υπάρχουν αριθμοί $a_{i_1 \ldots i_k}$ ώστε

$$\omega = \sum_{i_1 \ldots i_k} a_{i_1 \ldots i_k} e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_k}$$

[6] Υπενθυμίζουμε ότι λέγοντας *άλγεβρα A υπεράνω ενός σώματος K*, εννοούμε έναν διανυσματικό χώρο εφοδιασμένο με ένα διγραμμικό γινόμενο. Η A λέγεται *διαβαθμισμένη* αν μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ άθροισμα

$$A = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} A_k$$

διανυσματικών χώρων A_k, $k = 0, 1, \ldots$ υπεράνω του K, τέτοιους ώστε το γινόμενο απεικονίζει τον $A_k \times A_l$ στον A_{k+l}. Κάθε στοιχείο της A είναι κατά μοναδικό τρόπο ένα πεπερασμένο άθροισμα

$$a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_m}, \quad 0 \ne a_{i_j} \in A_{i_j}.$$

Μία διαβαθμισμένη άλγεβρα λέγεται *αντιμεταθετική*, αν για κάθε $a \in A_k$, $b \in A_l$, είναι

$$ab = (-1)^{kl} ba.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\omega = \mathcal{A}(\omega) &= \sum_{i_1\dots i_k} a_{i_1\dots i_k}\mathcal{A}\left(e^*_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{i_k}\right)\\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}C_{i_1\dots i_k}e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_k},\end{aligned}$$

όπου $C_{i_1\dots i_k}$ αριθμητικές σταθερές.

Γραμμική ανεξαρτησία: έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $\lambda_{i_1\dots i_k}$, $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$, ώστε

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\lambda_{i_1\dots i_k}e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_k}=0.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}0 &= \left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\lambda_{i_1\dots i_k}e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_k}\right)(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\\ &= \left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\lambda_{i_1\dots i_k}k!\mathcal{A}(e^*_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{i_k})\right)(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\lambda_{i_1\dots i_k}k!\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)e^*_{i_1}(e_{j_1})\dots e^*_{i_k}(e_{j_k})\\ &= \lambda_{j_1\dots j_k}.\end{aligned}$$

□

Συνθήκη συμβολισμού

Εισάγουμε στο σημείο αυτό τον συμβολισμό πολυδεικτών:

$$I=(i_i,\dots,i_k)$$

και σε πολλές περιπτώσεις θα γράφουμε e_I και e^*_I αντί των $(e_{i_1},\dot{;}e_{i_k})$ και $e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_k}$, αντίστοιχα.

5.2 Διανυσματικά πεδία και διαφορικές μορφές

5.2.1 Εφαπτόμενος χώρος, διανυσματικά πεδία

Έστω $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $p\in A$ και το σύνολο

$$T_p(A)=\{(p,x):=x_p,\ x\in\mathbb{R}^n\}.$$

Ο $T_p(A)$ είναι ο *εφαπτόμενος χώρος του A στο p* και αποτελείται ακριβώς από όλα τα διανύσματα $x\in\mathbb{R}^n$ με αρχή το p. Ο $T_p(A)$ είναι διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό που ορίζονται αντίστοιχα ως εξής:

$$x_p+y_p=(x+y)_p,\ \forall\, x_p,y_p\in T_p(A)$$

και

$$\lambda \cdot x_p = (\lambda x)_p, \ \forall\, x_p \in T_p(A), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Η διάσταση του $T_p(A)$ είναι n: πράγματι, αν $v_1, \ldots, v_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε τα

$$(v_1)_p, \ldots, (v_n)_p$$

αποτελούν βάση του $T_p(A)$. Ειδικότερα, αν $e_1, \ldots, e_n$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε είθισται να γράφουμε

$$(e_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Κι αυτό γιατί, κάθε $X_p \in T_p(M)$ μπορεί να ειδωθεί σαν *παραγώγιση*[7] στο p: αν $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$, και $X_p = \sum_{i=1}^{p} X_i(\partial/\partial x_i)_p$, τότε

$$X_p f = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p.$$

Ένας άλλος τόπος να βλέπουμε ένα $X_p \in T_p(M)$ είναι ως το διάνυσμα ταχύτητας καμπύλης από το p: αν $c : I \to A$, $I = (-a, a)$, $c(0) = p$,

$$c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

τότε

$$X_p = \dot{c}(0) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p.$$

Καλούμε το σύνολο

$$T(A) = \bigcup_{p \in A} T_p(A)$$

εφαπτόμενη δέσμη του A. Ένα $\mathcal{C}^\infty$*διανυσματικό πεδίο* X είναι μία $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση

$$X : A \to T(A), \quad p \mapsto X_p \in T_p(A)$$

Επειδή δεν είμαστε αυτή τη στιγμή σε θέση να ορίσουμε επακριβώς την έννοια της $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνισης στο $T(A)$, μπορούμε να το σκεφτούμε ως εξής: εφ' όσον ο $T_p(A)$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ για κάθε p, ένα $\mathcal{C}^\infty$ διανυσματικό πεδίο X μπορεί να ειδωθεί και σαν μία $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση $X : A \to \mathbb{R}^n$. Αναλυτικά, αν

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

τότε η

$$A \ni p \mapsto (X_1(p), \ldots, X_n(p)) \in \mathbb{R}^n$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$. Με άλλα λόγια υπάρχει η ταύτιση

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv F = (X_1, \ldots, X_n)$$

[7] Για την ακριβεια, παραγώγιση στην κατεύθυνση του X_p.

Ο χώρος των $\mathcal{C}^\infty$ διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{X}(A)$ του είναι και ο ίδιο διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση

$$(X_1 + X_2)_p = (X_1)_p + (X_2)_p$$

και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό

$$(\lambda X)_p = \lambda \cdot X_p,$$

που ορίζονται κατά σημείο, για κάθε $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.2.1. Το

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

είναι ένα $\mathcal{C}^\infty$ διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$. Σε κάθε σημείο $p = (a, b)$ του $\mathbb{R}^2$ ορίζει ένα στοιχίο του εφαπτόμενου χώρου $T_p(\mathbb{R}^2)$. Λόγου χάρη, αν $p = (2, -3)$,

$$X_p = 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - 3\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p.$$

Από την άλλη, έστω $f(x, y) = x^2 - y^2$ που είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο $p = (2, -3)$. Τότε,

$$\begin{aligned} X_p f &= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p - 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p \\ &= 2 \cdot (2x)_p - 3 \cdot (-2y)_p \\ &= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -4. \end{aligned}$$

5.2.2 Διαφορικές μορφές

Για κάθε $p \in A$, ορίζεται ο $\Lambda^k(T_p(A))$. Έστω το σύνολο

$$\Lambda^k(A) = \bigcup_{p \in A} \Lambda^k(T_p(A)).$$

Μία $\mathcal{C}^\infty$ *k-διαφορική μορφή* είναι μία $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση

$$\omega : A \to \Lambda^k(A), \quad p \mapsto \omega_p = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k}(p)(e^*_{i_1})_p \wedge \ldots (e^*_{i_k})_p = \sum_I a_I(p) e^*_I(p).$$

Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων, η $\mathcal{C}^\infty$ διαφορισιμότητα νοείται ως αυτή των συναρτήσεων

$$A \ni p \mapsto a_{i_1 \ldots i_k}(p) = a_I(p) \in \mathbb{R}.$$

Όλες οι εύλογες πράξεις μεταξύ των μορφών ορίζονται κατά σημείο:

- Πρόσθεση:
$$(\omega + \theta)_p = \omega_p + \theta_p,$$
- Πολλαπλασιασμός με αριθμό:
$$(\lambda \omega)_p = \lambda \cdot \omega_p,$$
- Εξωτερικό γινόμενο:
$$(\omega \wedge \theta)_p = \omega_p \wedge \theta_p.$$

Το σύνολο των k-διαφορικών μορφών του A συμβολίζεται με $\Omega^k(A)$. Συμφωνούμε ότι το σύνολο $\Omega^0(A)$ είναι το σύνολο των $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}$. Το ευθύ άθροισμα

$$\Omega(A) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(A)$$

καλείται *άλγεβρα Grassmann* στο A.

Παράδειγμα 5.2.2. Η

$$\omega = x\ e_1^* + y\ e_2^*$$

είναι μία 1-διαφορική μορφή του $\mathbb{R}^2$. Σε κάθε σημείο $p = (a, b)$ του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζει ένα συνδιάνυσμα

$$\omega_p = ax\ (e_1^*)_p + b\ (e_2^*)_p.$$

Λόγου χάρη, αν $p = (2, -3)$, τότε

$$\omega_p = 2x\ (e_1^*)_p - 3\ (e_2^*)_p.$$

Η ω επίσης, ορίζει και μία $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση ως εξής: αν

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2),$$

τότε η

$$\omega(X) = xX_1 + yX_2$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση. Λ.χ. αν $X_1 = x, X_2 = y, \omega(X) = x^2 + y^2$.

Ας παρατηρήσουμε στο προηγούμενο παράσειγμα την 1-1 και επί αντιστοιχία του συνόλου Ω^1 των 1-μορφών ενός ανοικτού $A \subset \mathbb{R}^2$ με το σύνολο των διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{X}(A)$:

$$\Omega^1(A) \ni \omega = ae_1^* + b\ e_2^* \leftrightarrow X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(A).$$

Προφανώς η αντιστοιχία επεκτείνεται για κάθε n.

Παράδειγμα 5.2.3. Έστω $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ με τύπο

$$\omega = x\ e_1^* \wedge e_2^* + y\ e_1^* \wedge e_3^* + z\ e_2^* \wedge e_3^*.$$

Σε κάθε σημείο $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ η ω αντιστοιχίζει το πολυσυνδιάνυσμα

$$\omega_p = a\ (e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p + b\ (e_1^*)_p \wedge (e_3^*)_p + c\ (e_2^*)_p \wedge (e_3^*)_p.$$

Λόγου χάρη, αν $p = (0, 1, 2)$, τότε

$$\omega_p = \ (e_1^*)_p \wedge (e_3^*)_p + 2\ (e_2^*)_p \wedge (e_3^*)_p.$$

Τέλος, αν

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

και

$$Y = Y_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y} + Y_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

ορίζεται μία λεία συνάρτηση $\omega(X,Y)$ ώς εξής:

$$\begin{aligned}
\omega(X,Y) &= \omega\left(X_1\frac{\partial}{\partial x}+X_2\frac{\partial}{\partial y}+X_3\frac{\partial}{\partial z},\ Y_1\frac{\partial}{\partial x}+Y_2\frac{\partial}{\partial y}+Y_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= X_1Y_2\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)+X_1Y_3\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&\quad +X_2Y_1\omega\left(\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)++X_2Y_3\omega\left(\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&\quad +X_3Y_1\omega\left(\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)++X_3Y_2\omega\left(\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&= (X_1Y_2-X_2Y_1)x+(X_1Y_3-X_3Y_1)y+(X_2Y_3-X_3Y_2)z.
\end{aligned}$$

5.2.3 Εξωτερικό διαφορικό

Διαφορικό συνάρτησης

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση. Το *διαφορικό της* f είναι η 1-μορφή df στο A που ορίζεται κατά σημείο ως εξής:

$$(df)_p(v_p) = Df(p)(v_p), \quad \forall v_p \in T_p(A),$$

όπου βεβαίως $Df(p)$ είναι η παράγωγος της f στο p.

Για $i = 1,\dots,n$ έστω οι προβολές

$$A \ni x = (x_1,\dots,x_n) \to \pi_i(x) = x_i.$$

Είναι

$$(d\pi_i)_p(v_p) = v_i(p) \implies (d\pi_i)_p((e_j)_p) = \delta_{ij} = (e_i^*)_p(e_j)_p.$$

Στο εξής θα συμβολίζουμε

$$(d\pi_i)_p = (dx_i)_p$$

και έτσι θα γράφουμε μία k-μορφή ως

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}dx_{i_1}\wedge\dots dx_{i_k} = a_I dx_I.$$

Η παρακάτω πρόταση μας λέει ότι το διαφορικό συνάρτησης όπως ορίστηκε παραπάνω είναι ακριβώς το γνωστό μας από τον Λογισμό διαφορικό.

Πρόταση 5.2.4.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
(df)_p(v_p) = DF(p)(v_p) &= \nabla f(p)\cdot\sum_{i=1}^n v_i(p)(e_i)_p\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}_p v_i(p)\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}_p (dx_i)_p(v_p),
\end{aligned}$$

απ' όπου και προκύπτει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 5.2.5. Το διαφορικό της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

είναι

$$df = 2x\ dx + 2y\ dy + 2z\ dz.$$

Στην πράξη, το διαφορικό συνάρτησης ορίζει μία γραμμική απεικόνιση

$$d : \Omega^0(A) \ni f \mapsto df \in \Omega^1(A).$$

Θα δούμε αμέσως παρακάτω πως γενικεύεται αυτό για μορφές ανώτερης τάξης.

Εξωτερικό διαφορικό

Η γενίκευση του διαφορικού d δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.6. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής (το εξωτερικό διαφορικό)*

$$d : \Omega(A) \to \Omega(A)$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $d : \Omega^k(A) \to \Omega^{k+1}(A)$, $k = 0, 1, \ldots$.

β) Για κάθε $f \in \Omega^0(A)$, df είναι το διαφορικό συνάρτησης.

γ) Για κάθε $\omega \in \Omega^k(A)$, $\theta \in \Omega^l(A)$,

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k\ \omega \wedge d\theta.$$

δ) $d \circ d = d^2 = 0$.

Απόδειξη. Για $f \in \Omega^0(A)$ ορίζουμε το εξωτερικό διαφορικό να είναι το διαφορικό συνάρτησης. Για $k \geq 1$, έστω $\omega = \sum_I a_I dx_I$. Τότε,

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\ dx_j \right) \wedge dx_I \in \Omega^{k+1}(A).$$

Συνεπώς, εκ κατασκευής το d ικανοποιεί τα α), β). Έχουμε να δείξουμε το γ), το δ) και τη μοναδικότητα. Λόγω γραμμικότητας, η σχέση γ) αρκεί να δειχθεί στην περίπτωση όπου $\omega = f\ dx_I$ και $\theta = g\ dx_J$. Πράγματι, τότε

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \theta) &= d(fg\ dx_I \wedge dx_J) \\
&= \sum \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}\ dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} g\ dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} f\ dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J.
\end{aligned}$$

Στο δεύτερο άθροισμα, μετακινώντας την 1-μορφή $(\partial g/\partial x_i)\ dx_i$ κατά μήκος της k-μορφής dx_I, προκύπτει ένας όρος $(-1)^k$ από την αντιμεταθετικότητα. Συνεπώς

$$\begin{aligned} d(\omega\wedge\theta) &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\wedge dx_I\wedge (g\ dx_J) + (-1)^k \sum (f\ dx_I)\wedge \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J \\ &= d\omega\wedge\theta + (-1)^k\, \omega\wedge d\theta. \end{aligned}$$

Ομοίως για το δ), η σχέση αρκεί να δειχθεί για $\omega = f\ dx_I$:

$$d^2(f\ dx_I) = d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\wedge dx_I\right) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j\wedge dx_i\wedge dx_I.$$

Στο άθροισμα, όταν $i = j$, τότε $dx_i\wedge dx_j = 0$. Όταν $i\neq j$, τότε το $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$ είναι συμμετρικό ως προς i, j, αλλά το $dx_i\wedge dx_j$ είναι αντισυμμετρικό ως προς i, j: οι όροι με $i\neq j$ αλληλοακυρώνονται.

Τέλος για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τελεστής $D : \Omega(A)\to\Omega(A)$ που να ικανοποιεί τα ακόλουθα:

β’) Για κάθε $f\in\Omega^0(A)$, Df είναι το διαφορικό συνάρτησης.

γ’) Για κάθε $\omega\in\Omega^k(A)$, $\theta\in\Omega^l(A)$,

$$D(\omega\wedge\theta) = D\omega\wedge\theta + (-1)^k\,\omega\wedge D\theta.$$

δ’) $D\circ D = D^2 = 0$.

Εφ′ όσον κάθε k-μορφή στο A είναι άθροισμα όρων όπως λ.χ. ο $f\ dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}$, από τη γραμμικότητα αρκεί να δείξουμε ότι $D = d$ για k-μορφές του τύπου αυτού. Από το β’), $Df = df$ για $f\in\Omega^0(A)$. Άρα, $Ddx_i = DDx_i = 0$ από το δ’). Με επαγωγή και με τη χρήση του γ’) προκύπτει

$$D(dx_I) = d(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}) = 0, \tag{5.2}$$

για όλα τα k και για κάθε πολυδείκτη I. Τέλος,

$$\begin{aligned} D(f\ dx_I) &= (Df)\wedge dx_I + f\ D(dx_I) \quad (\text{από το γ’)}) \\ &= (df)\wedge dx_I \quad (\text{απο το δ’) και την (5.2)}) \\ &= d(f dx_I) \quad (\text{από τον ορισμό του } d). \end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο: $D = d$ στο $\Omega(A)$. □

Παράδειγμα 5.2.7. Το εξωτερικό διαφορικό της $\omega = x\ dy\wedge dz + y\ dx\wedge dz$ είναι:

$$\begin{aligned} d\omega &= dx\wedge dy\wedge dz + dy\wedge dx\wedge dz \\ &= dx\wedge dy\wedge dz - dx\wedge dy\wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Σχόλιο 5.2.8. Εάν $\omega = d\theta$. Τότε $d\omega = d^2\theta = 0$.

Οπισθέλκυση (pullback) μορφών

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα και $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση $F : A \to B$. Για κάθε $p \in A$ ορίζεται η γραμμική απεικόνιση
$$(F_*)_p = F_{*,p} : T_p(A) \to T_{F(p)}(B)$$
που καλείται *εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση*, από τον τύπο

$$F_{*,p}(v_p) = (DF(p)(v_p))_{F(p)}, \quad v_p \in T_p(A).$$

Διαπιστώνεται απευθείας ότι η $F_{*,p}$ είναι γραμμική. Ουσιαστικά, η εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση απεικονίζει κάθε διάνυσμα v του $\mathbb{R}^n$ με αρχή το p στο διάνυσμα $DF(p)(v)$ του $\mathbb{R}^n$ με αρχή το $F(p)$. Με όρους παραγωγίσεων, έστω $f \in \mathcal{C}^\infty(F(p))$. Τότε

$$F_{*,p}(v_p)(f) = (DF(p)(v_p))_{F(p)}(f) = v_p(f \circ F).$$

Από την εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση $F_{*,p} : T_p(A) \to T_{F(p)}(B)$, επάγεται η δυϊκή της απεικόνιση

$$(F^*)_p = F^*_p : \Lambda^1(T_{F(p)}(B)) \to \Lambda^1(T_p(A)),$$

με τύπο
$$F^*_p(\omega_{F(p)})(v_p) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}(v_p)), \quad v_p \in T_p(A). \tag{5.3}$$
Από τις απεικονίσεις $(F^*)_p$ ορίζουμε απεικόνιση $F^* : \Omega^1(B) \to \Omega^1(A), \quad \omega \mapsto F^*\omega$ με τύπο που κατά σημείο δίνεται από τον τύπο (5.3). Η απεικόνιση F^* επεκτείνεται σε μία απεικόνιση

$$F^* : \Omega^k(B) \to \Omega^k(A)$$

που κατά σημείο δίνεται από την

$$F^*_p(\omega_{F(p)})\left((v_1)_p, \ldots, (v_k)_p\right) = \omega_{F(p)}\left(F_{*,p}((v_1)_p), \ldots, F_{*,p}((v_k)_p)\right), \quad (v_i)_p \in T_p(A),\ i = 1, \ldots, k. \tag{5.4}$$
Δηλαδή,
$$(F^*\omega)_p = F^*_p(\omega_{F(p)}).$$

Παράδειγμα 5.2.9. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$F(x, y) = (x + y,\ x - y,\ xy)$$

και οι μορφές

$$\omega = z\ dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^3), \quad \theta = x\ dz \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3), \quad \eta = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3).$$

Τότε

$$\begin{aligned} F^*\omega &= xy\ d(x+y) \\ &= xy\ (dx + dy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^*\theta &= (x+y)\ d(xy) \wedge d(x-y) \\ &= (x+y)\ (x\ dy + y\ dx) \wedge (dx - dy) \\ &= -(x+y)^2\ dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Τέλος, $F^*\eta = 0$.

Πρόταση 5.2.10. *Ισχύουν τα ακόλουθα, για $F : A \to B$ όπως παραπάνω και για $\omega_1, \omega_2, \omega, \theta \in \Omega^k(B)$ και $g \in \Omega^0(B)$:*

α)
$$F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2.$$

β)
$$F^*(\omega \wedge \theta) = F^*\omega \wedge F^*\theta.$$

γ)
$$F^*(g\omega) = F^*g \wedge F^*\omega = (g \circ F)(F^*\omega).$$

δ)
$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των α), β) και γ) προκύπτουν απευθείας από τους ορισμούς και αφήνονται στον/ην αναγνώστη/τρια. Δείχνουμε την δ) για d διαφορικό συνάρτησης h: απο τη μια μεριά,

$$dh = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}\, dx_i \implies F^*dh = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} \circ F\, dF_i$$

και από την άλλη

$$d(F^*h) = d(hoF) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h \circ F}{\partial x_i}\, dx_i$$

και το από τον Κανόνα της Αλυσίδας παίρνουμε το αποτέλεσμα. Η γενική περίπτωση αφήνεται τώρα σαν άσκηση. □

Πόρισμα 5.2.11. *Για $F = (F_1, \ldots, F_m) : A \to B$ όπως παραπάνω,*

$$F^*(dx_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Απόδειξη. Είναι
$$F^*dx_i = d(x_i \circ F) = dF_i.$$

□

Λήμμα 5.2.12. *Έστω διανυσματικός χώρος V με $\dim(V) = n$ και $\omega \in \Lambda^n(V)$. Τότε, για κάθε $v_1, \ldots, v_n \in V$, $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$, $i = 1, \ldots, n$, είναι*

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(e_1, \ldots, e_n),$$

όπου τα $e_1, \ldots, e_n$ αποτελούν βάση του V.

Απόδειξη. Ας είναι κατ' αρχάς $\omega = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$. Τότε,

$$\begin{aligned} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*(v_1, \ldots, v_n) &= \mathcal{A}(e_1 * \otimes \cdots \otimes e_n^*)(v_1, \ldots, v_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) e_1^*(v_{\sigma(1)}) \ldots e_n^*(v_{\sigma(n)}) \\ &= \det(e_i^*(v_j)) \\ &= \det(a_{ij}). \end{aligned}$$

Προκύπτει τώρα το συμπέρασμα εφ' όσον κάθε $\omega \in \Lambda^n(V)$ γράφεται ως

$$\omega = \omega(e_1, \ldots, e_n)\; e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*.$$

□

Πρόταση 5.2.13. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά και $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση $F : A \to B$. Αν $\omega \in \Omega^n(B)$, τότε*

$$(F^*\omega)_p = (\det(DF(p)))\, \omega_{F(p)}, \quad p \in A.$$

Απόδειξη. Έστω

$$\omega = g\; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Τότε

$$F^*\omega = (g \circ F)\; F^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
(F^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n))_p((v_1)_p, \ldots, (v_n)_p) &= \\
(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_{F(p)}\, (F_{*,p}(v_1)_p, \ldots, F_{*,p}(v_n)_p) &= \\
(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_{F(p)} \left((DF(p)(v_1)_p)_{F(p)}, \ldots, (DF(p)(v_n)_p)_{F(p)}\right) &= \\
(\det(DF(p)))\, (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_{F(p)} \left((v_1)_{F(p)}, \ldots, (v_n)_{F(p)}\right),
\end{aligned}$$

με την τελευταία σχέση να προκύπτει από το Λήμμα 5.2.12. Προκύπτει τώρα το συμπέρασμα. □

5.3 Ασκήσεις

1. Έστω V διανυσματικός χώρος, $e_1, \ldots, e_n$ βάση του και $e_1^*, \ldots, e_n^*$ βάση του V^*. Έστω ότι ο $G = (g_ij) \in M_{n\times n}$ είναι $n \times n$ πίνακας. Ορίζουμε $f : V \times V \to \mathbb{R}$ με τύπο

   $$f(v, w) = \sum_{1 \le i,j \le n} g_{ij} v_i w_j,$$

   όπου $v = \sum v_i e_i$, $w = \sum w_i e_i$. Περιγράψτε την f μέσω τανυστικών γινομένων $e_i^* \otimes e_j^*$. Κατόπιν γενικεύστε για $f \in \mathcal{T}^k(V)$.

2. Έστω $f \in \mathcal{T}^3(V)$. Γράψτε αναλυτικά τύπο για την $\mathcal{A}(f)(v_1, v_2, v_3)$, $v_i \in V$, $i = 1, 2, 3$.

3. Αποδείξτε ότι για κάθε f, g, h τανυστές, είναι

   $$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

4. Αποδείξτε την Πρόταση 5.1.6 ii).

5. Αποδείξτε την Πρόταση 5.1.8 β).

6. Αποδείξτε ότι για την μετάταξη τ της απόδειξης της Πρότασης 5.1.14, ισχύει $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^{kl}$.

7. Αποδείξτε ότι εάν $\omega \in \Lambda^k(V)$, k άρτιος, τότε $\omega \wedge \omega = 0$.

8. Υπολογίστε το διαφορικό της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \|x\|$.

9. Έστω $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ Αν $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, τότε δώστε ακριβή τύπο για το

$$(\omega \wedge \theta)(X, Y, Z).$$

(Υπόδειξη. Ενδεχομένως να σας είναι βολικό να γράψετε X_1, X_2, X_3 αντί X, Y, Z και κατόπιν να εφαρμόσετε (κατά σημείο) τον τύπο

$$(\omega \wedge \theta)(X_1, X_2, X_3) = 3\mathcal{A}(\omega \otimes \theta)(1, 2, 3) = 3 \sum_{\sigma \in S_3} \omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})\theta(X_{\sigma(3)}).)$$

10. Υπολογιστε αναλυτικά το $d\omega$, όπου

$$\omega = f\ dx + g\ dy + h\ dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3).$$

11. Έστω $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\omega = z\ dx - dz$$

και $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$,

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Υπολογίστε το $\omega(X)$ και το $d\omega$.

12. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(x, y) = (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2).$$

α) Υπολογίστε τον Ιακωβιανό πίνακα $DF(p)$, για το τυχαίο $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

β) Έστω

$$X_p = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \in T_p(\mathbb{R}^2).$$

Βρείτε το $F_{*,p}(X_p)$. (Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον $DF(p)$, βρείτε πρώτα τα

$$F_{*,p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \quad F_{*,p}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p.)$$

13. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 5.2.10.

14. Σε κάθε σημείο $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, ορίζουμε μία διγραμμική μορφή ως εξής: αν

$$a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3) \in T_p(\mathbb{R}^3),$$

τότε

$$\omega_p(a, b) = p_3 \det \begin{pmatrix} a^1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι η ω είναι αντισυμμέτρική και εκφράστε την ως προς την κανονική βάση $dx_i \wedge dx_j$, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$.

(Απάντηση: $\omega_p = p_3 dx_1 \wedge dx_2$.)

15. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό πολικών συντεταγμένων $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Εκφράστε το στοιχείο εμβαδού $dx \wedge dy$ του $\mathbb{R}^2$ ως προς r, θ.

16. Έστω οι εξής μορφές του $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2 + \omega_3\, dx_3, \\ \theta &= \theta_1\, dx_2 \wedge dx_3 + \theta_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \theta_3\, dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Απλοποιήστε κατά το περισσότερο δυνατόν την έκφραση του σφηνοειδούς γινομένου $\omega \wedge \theta$.

17. Έστω η $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(x, y, z) = (xy, e^z)$$

και οι μορφές του $\mathbb{R}^3$ με τύπους

$$\omega = x\, dx - z\, dy, \quad \theta = z\, dx \wedge dy.$$

Υπολογίστε τις $F^*\omega$, $F^*\theta$.

18. Έστω η 2-μορφή του $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dy + z\, dx \wedge dy$$

και τα διανυσματικά πεδία

$$X = x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y}.$$

Υπολογίστε το $\omega(X, Y)$.

Κεφάλαιο 6

Το Θεώρημα του Stokes

6.1 Το Λήμμα Poincaré

6.1.1 Κλειστές και ακριβείς μορφές

Μια k-μορφή ω καλείται *κλειστή* αν $d\omega = 0$, ενώ καλείται *ακριβής* αν υπάρχει $(k-1)$-μορφή θ τέτοια ώστε $\omega = d\theta$. Μία ακριβής μορφή είναι κλειστή. Το αντίστροφο είναι αυτο που θα μας απασχολήσει στην ενότητα αυτή.

Παράδειγμα 6.1.1. Έστω ω μια 1-μορφή στον $\mathbb{R}^2$:

$$\omega = P(x,y)\;dx + Q(x,y)\;dy.$$

Είναι

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\;dx \wedge dy,$$

άρα, η ω είναι κλειστή αν και μόνο αν

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Η κλειστότητα της ω είναι ταυτόσημη με τη συντηρητικότητα του πεδίου

$$F(x,y) = (P(x,y),\; Q(x,y))$$

στον $\mathbb{R}^2$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα του Green, για $D \subset \mathbb{R}^2$ χωρίο με (προσνατολισμένο θετικά) σύνορο γ μία απλή κλειστή καμπύλη γ με αρκετή διαφορισιμότητα, έχουμε

$$\int_\gamma F(x,y)\cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\;dxdy = 0.$$

Στην αναζήτηση μιας 0-μορφής θ για την οποία ισχύει $\omega = d\theta$, παρατηρούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη λύσης του συστήματος ΜΔΕ[1]

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = Q.$$

Η συζήτηση στο προηγούμενο παράδειγμα μας οδηγεί στην απλούστερη μορφή του Λήμματος Poincaré:

[1] Θυμηθείτε ότι αν αυτό το σύστημα έχει λύση, η διαφορική εξίσωση $\omega = 0$ είναι *πλήρης*.

Πρόταση 6.1.2. *Μία 1-μορφή του $\mathbb{R}^2$ είναι κλειστή αν και μόνο αν είναι ακριβής.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν $\omega = P\,dx + Q\,dy$ και $d\omega = 0$, θέτουμε

$$\theta(x,y) = \int_a^x P(t,y)\,dt + \int_b^y Q(a,s)\,ds,$$

όπου $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = P(x,y),$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\,dt + Q(a,y)\\ &= \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t,y)\,dt + Q(a,y)\\ &= Q(x,y) - Q(a,y) + Q(a,y) = Q(x,y).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Προφανές. □

Το ότι ισχύει το Λήμμα Poincaré για τις 1-μορφές του $\mathbb{R}^2$ οφείλεται σε μία *τοπολογική* ιδιότητα του $\mathbb{R}^2$, την γενική μορφή της οποίας θα εξετάσουμε παρακάτω. Προς το παρόν, παραθέτουμε ένα παράδειγμα χωρίου του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο το Λήμμα Poincaré δεν ισχύει.

Παράδειγμα 6.1.3. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $\omega \in \Omega^1(A)$ όπου

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Πράξεις βεβαιώνουν ότι η ω είναι κλειστή. Όμως, *δεν είναι ακριβής*: πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\theta \in \Omega^0(A)$ τέτοια ώστε $\omega = d\theta$, τότε θα ήταν η

$$\theta(x,y) = \int_a^x P(t,y)\,dt + \int_b^y Q(a,s)\,ds + c,$$

όπου $(a,b) \in A$ και c σταθερά. Όμως, η θ δεν είναι συνεχής στον άξονα των y.

Το πρόβλημα στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν η ύπαρξη της οπής στην αρχή του A. Παρακάτω, εισάγουμε μία ευρεία κατηγορία συνόλων που ικανοποιούν μία συγκεκριμένη τοπολογική ιδιότητα έτσι ώστε παθογένειες όπως του προηγούμενου παραδείγματος παύουν να υφίστανται.

6.1.2 Συσταλτά σύνολα

Ορισμός 6.1.4. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $p_0 \in A$. Λέμε ότι το A είναι *συσταλτό ως προς το* p_0 (contractible) αν υπάρχει μία $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση

$$\begin{aligned}&H : M = A \times \mathbb{R} \to A\\ &(p,t) \mapsto H(p,t),\end{aligned}$$

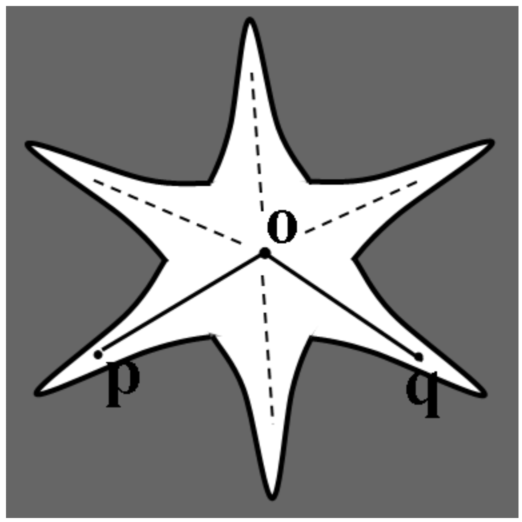
τέτοια ώστε $H(p,0) = p_0$ και $H(p,1) = p$ για κάθε $p \in A$.[2]

[2]Με όρους Αλγεβρικής Τοπολογίας, η απεικόνιση H καλείται *ομοτοπία* και ένα συσταλτό σύνολο καλείται και *ομοτοπικό με το 0*.

Ένα παράδειγμα συσταλτού συνόλου είναι η μοναδιαία μπάλλα $\{x \in \mathbb{R}^n \ \|x\| < 1\}$ που είναι συσταλτή ως προς την αρχή: η απεικόνιση H δίνεται από τον τύπο

$$H(x,t) = tx.$$

Πρακτικά, ένα σύνολο είναι συσταλτό ως προς σημείο του p_0 αν μπορούμε να συρρικνώσουμε το σύνολο στο p_0 με $\mathcal{C}^\infty$ τρόπο.



Αστρόσχημο σύνολο στον $\mathbb{R}^2$ ως προς O: κάθε σημείο του ενώνεται με το O με ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Άλλα παραδείγματα συσταλτών συνόλων είναι τα *αστρόσχημα σύνολα:* ένα σύνολο S λέγεται *αστρόσχημο ως προς σημείο του* p_0, αν κάθε σημείο του S συνδέεται με το p_0 με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Η H τότε έχει τύπο

$$H(p,t) = p_0 + tp, \quad p \in S.$$

Η H είναι καλώς ορισμένη, αφού για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε σταθερό $p \in S$, η εικόνα $H(p,t)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[p_0 \ p]$ που λόγω του αστρόσχημου, κείται εξ ολοκλήρου στο S.

Το αντίθετο όμως δεν συμβαίνει: ενδέχεται να υπάρχει ένα συσταλτό σύνολο ως προς σημείο του που δεν ειναι αστρόχημο ως προς αυτό το σημείο. Φανταστείτε λόγου χάρη ένα μη κυρτό σύνολο με πάρα πολύ καλό σύνορο: τότε υπάρχει σημείο του ως προς το οποίο είναι συσταλτό αλλά δεν είναι αστρόσχημο. (Κάνετε ένα σχήμα!)

6.1.3 Το Λήμμα Poincaré

Θεώρημα 6.1.5. *(**Λήμμα Poincaré**) Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο συσταλτό ως προς σημείο του p_0 τότε κάθε k-κλειστή μορφή του είναι ακριβής.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο προτάσεις:

Πρόταση 6.1.6. *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο, $M = A \times \mathbb{R}$ και $\varpi \in \Omega^k(M)$, τότε υπάρχει $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ και $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ τέτοιες ώστε*

$$\varpi = \omega_1 + dt \wedge \eta.$$

Απόδειξη. Έστω (x,t) οι συντεταγμένες του M, $x=(x_1,\dots,x_n)\in A$. Τότε αν $\varpi\in\Omega^k(M)$,

$$\varpi=\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le n}\varpi_{i_1\dots i_k}\,dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_k},$$

με τα $y_{i_1},\dots,y_{i_k}$ να παίρνουν τιμές από τα $x_1,\dots,x_n,t$. Η ϖ λοιπόν γράφεται ως το αθροισμα δύο μορφών: η μία είναι η ω_1 που δεν περιέχει τον όρο dt σε κανέναν αθροιστικό της όρο και η άλλη είναι τέτοια ώστε περιέχει το dt σε κάθε αθροιστικό της όρο. Έτσι το dt βγαίνει κοινός παράγοντας από τη δεύτερη μορφή και η απόδειξη τελείωσε. □

Παράδειγμα 6.1.7. Έστω $A=\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες (x,y) και $M=A\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες (x,y,t). Κάθε 1-μορφή γράφεται

$$\begin{aligned}\varpi &= P(x,y,t)\,dx+Q(x,y,t)\,dy+R(x,y,t)\,dt\\ &= (P(x,y,t)\,dx+Q(x,y,t)\,dy)+dt\wedge R(x,y,t).\end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν,

$$\omega_1=P(x,y,t)\,dx+Q(x,y,t)\in\Omega^1(M)\,dy,\quad \eta=R(x,y,t)\in\Omega^0(M).$$

Τώρα, κάθε 2-μορφή γράφεται

$$\begin{aligned}\varpi &= P(x,y,t)\,dx\wedge dy+Q(x,y,t)\,dx\wedge dt+R(x,y,t)\,dy\wedge dt\\ &= P(x,y,t)\,dx\wedge dy+dt\wedge(-Q(x,y,t)\,dx-R(x,y,t)\,dy)\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς εδώ:

$$\omega_1=P(x,y,t)\,dx\wedge dy\in\Omega^2(M),\quad \eta=-Q(x,y,t)\,dx-R(x,y,t)\,dy\in\Omega^1(M).$$

Τέλος, στην περίπτωση των 3-μορφών είναι

$$\varpi=f(x,y,t)\,dx\wedge dy\wedge dt=dt\wedge f(x,y,t)\,dx\wedge dy$$

και άρα $\omega_1=0\in\Omega^3(M)$, $\eta=f(x,y,t)\,dx\wedge dy\in\Omega^2(M)$.

Έστω πάλι A και M όπως παραπάνω και για κάθε $t\in\mathbb{R}$ θεωρούμε την ένθεση $\iota_t:A\to M$ με τύπο

$$\iota_t(p)=(p,t).$$

Η απεικόνιση αυτή, όπως δηλώνει και το όνομά της, παριστάνει τη φυσιολογική ένθεση του A στο t-επίπεδο του $M=A\times\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6.1.8. Αν $A=[a,b]$, τότε το είναι η άπειρη κατακόρυφη λωρίδα $\{(x,t):\ x\in[a,b]\}$ και

$$\iota_{t_0}(A)=\{(x,t):\ x\in[a,b],\ t=t_0\},$$

δηλαδή, το $[a,b]$ μεταφερμένο σε ύψος t_0.

Έστω τώρα $p\in A$ και

$$(e_i)_p=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\quad i=1,\dots n$$

η κανονική βάση του $T_p(A)$ και

$$e_t = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t$$

η κανονική βάση του $T_t(\mathbb{R})$. Τότε το σύνολο

$$\{(e_1)_{(p,t)}, \ldots, (e_n)_{(p,t)}, e_{(p,t)}\}$$

είναι η κανονική βάση του $T_{(p,t)}(M)$. Εφ΄ όσον τώρα

$$(D\iota_t)(p) = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times 1} \end{pmatrix}_p,$$

έχουμε ότι

$$((\iota_t)_*(e_i)_p)_{(p,t)} = ((D\iota_t)(p))_{(p,t)} = (e_i)_{(p,t)}.$$

Συνεπώς αν

$$X_p = \sum_{i=1}^n f_i(p)\ (e_i)_p \in T_p(A),$$

τότε το

$$(\iota_t)_{p,*}(X_p) = \sum_{i=1}^n f_i(p)\ (e_i)_{(p,t)},$$

είναι ένα διάνυσμα του $T_{(p,t)}(M)$ του οποίου οι συντελεστές δεν εξαρτώνται από το t αλλά μόνο από το p. Από την άλλη,

$$((\iota_t)^*(dx_i))_p = \sum_{j=1}^p \frac{\partial(\iota_t)_i}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p = (dx_i)_{(p,t)}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ενώ

$$((\iota_t)^*(dt))_p = \sum_{j=1}^p \frac{\partial(\iota_t)_{n+1}}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p = \sum_{j=1}^p \frac{\partial t}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p = 0.$$

Άρα, αν $\varpi \in \Omega^k(M)$, η $(\iota_t)^*\varpi$ θα είναι μία μορφή του $\Omega^k(A)$ του οποίου στις συντεταγμένες συναρτήσεις η μεταβλητή t θα είναι σταθερή.

Παράδειγμα 6.1.9. Έστω $\iota_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\iota_0(x,y) = (x,y,0)$. Αν

$$\varpi = P(x,y,t)\ dx + Q(x,y,t)\ dy + R(x,y,t)\ dt \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),$$

τότε

$$(\iota_0)^*\varpi = P(x,y,0)\ dx + Q(x,y,0)\ dy.$$

Ομοίως, αν

$$\varpi = P(x,y,t)\ dx\wedge dy + Q(x,y,t)\ dx\wedge dt + R(x,y,t)\ dy\wedge dt \in \Omega^2(\mathbb{R}^3),$$

τότε

$$(\iota_0)^*\varpi = P(x,y,0)\ dx\wedge dy.$$

Τέλος, αν

$$\varpi = f(x,y,t)\ dx\wedge dy\wedge dt \in \Omega^3(\mathbb{R}^3),$$

τότε

$$(\iota_0)^*\varpi = 0.$$

Ορίζουμε τώρα μία απεικόνιση $I : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ ως εξής: αν $\varpi \in \Omega^k(M)$, τότε για κάθε $p \in A$ και $(v_1)_p, \ldots, (v_{k-1})_p \in T_p(A)$,

$$(I\varpi)_p\left((v_1)_p, \ldots, (v_{k-1})_p\right) = \int_0^1 \eta_{(p,t)}\left(((\iota_t)_*(v_1)_p)_{(p,t)}, \ldots, ((\iota_t)_*(v_{k-1})_p)_{(p,t)}\right)\, dt$$

όπου η είναι η μορφή της Πρότασης 6.1.6. Αναλυτικά, για $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq n$,

$$(I\varpi)_p\left((e_{i_1})_p, \ldots, (e_{i_{k-1}})_p\right) = \int_0^1 \eta_{(p,t)}\left(((\iota_t)_*(e_{i_1})_p)_{(p,t)}, \ldots, ((\iota_t)_*(e_{i_{k-1}})_p)_{(p,t)}\right)\, dt$$

και έτσι οι συντεταγμένες της μορφής $I\varpi$ είναι οι

$$(I\varpi)_{i_1\ldots i_{k-1}} = \int_0^1 \eta_{i_1\ldots i_{k-1}}\, dt.$$

Σχόλιο 6.1.10. Για τις μορφές ϖ του Παραδείγματος 6.1.7 έχουμε:

1. Αν $\varpi = P(x,y,t)\, dx + Q(x,y,t)\, dy + R(x,y,t)\, dt$, τότε $\eta = R(x,y,t)$ και
$$I\varpi = \int_0^1 R(x,y,t)\, dt.$$

2. Αν $\varpi = P(x,y,t)\, dx \wedge dy + Q(x,y,t)\, dx \wedge dt + R(x,y,t)\, dy \wedge dt$, τότε
$$\eta = -Q(x,y,t)\, dx - R(x,y,t)\, dy$$
και
$$I\varpi = -\left(\int_0^1 Q(x,y,t)\, dt\right)\, dx - \left(\int_0^1 R(x,y,t)\, dt\right)\, dy.$$

3. Αν $\varpi = f(x,y,t)\, dx \wedge dy \wedge dt$, τότε $\eta = f(x,y,t)\, dx \wedge dy$, και
$$I\varpi = \left(\int_0^1 f(x,y,t)\, dt\right)\, dx \wedge dy.$$

Πρόταση 6.1.11.
$$(\iota_1)^*\varpi - (\iota_0)^*\varpi = d(I(\varpi)) + I(d\varpi).$$

Απόδειξη. Λόγω της (προφανούς) γραμμικότητας του I, αρκεί να περιοριστούμε σε δύο περιπτώσεις:

α) $\varpi = f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Τότε
$$d\varpi = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \theta,$$
όπου θ είναι μία μορφή που δεν έχει πουθενα τον όρο dt. Κατά συνέπεια $I(\varpi) = 0$ λόγω του ορισμού της I και της Πρότασης 6.1.6. Επιπλέον, στην ολοκλήρωση $I(d\varpi)$ μετράει μόνο η αριστερή μορφή:
$$\begin{aligned} I(d\varpi) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\, dt\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \left(f(p,1) - f(p,0)\right)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= (\iota_1)^*\varpi - (\iota_0)^*\varpi. \end{aligned}$$

β) $\varpi = f\ dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$. Τότε

$$(\iota_i)^*\varpi = (\iota_0)^*\varpi = 0$$

και από την άλλη,

$$\begin{aligned} d\varpi &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\ dx_\alpha \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &= dt \wedge \left(-\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\ dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$I(d\varpi) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\ dt \right)\ dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

και

$$\begin{aligned} d(I(\varpi)) &= d\left[\left(\int_0^1 f\ dt \right)\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \right)\ dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

και η απόδειξη τελείωσε.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5. Αφού το A είναι συσταλτό,

$$\begin{aligned} H \circ \iota_1 &= \text{id}. \\ H \circ \iota_0 &= p_0,\ \text{σταθερά}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \omega = (H \circ \iota_1)^*\omega = (\iota_1)^*(H^*\omega) = (\iota_1)^*\varpi, \\ 0 = (H \circ \iota_0)^*\omega = (\iota_0)^*(H^*\omega) = (\iota_0)^*\varpi. \end{aligned}$$

Τώρα, αν $d\omega = 0$, παίρνουμε $d\varpi = H^*(d\omega)$ και από την Πρόταση 6.1.11,

$$\omega = (\iota_1)^*\omega = d(I(\varpi)).$$

Η τελευταία σχέση ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.2 Το Θεώρημα του Stokes

6.2.1 Ολοκλήρωση σε αλυσίδες

Έστω $k \geq 0$ και $A \subset \mathbb{R}^n$. Μια απεικόνιση $\gamma : [0,1]^k \to A$ λέγεται *k-κύβος* αν $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$, δηλαδή είναι $\mathcal{C}^\infty(B)$ για κάποιο ανοικτό $B \supset [0,1]^k$. Συμφωνούμε ότι $[0,1]^0 = \{0\}$. Επίσης παρατηρούμε ότι ενας 0-κύβος είναι σημείο του A, ενώ ένας 1-κύβος είναι μία λεία καμπύλη στο A.

Αν γ είναι k-κύβος, $k > 0$, ορίζουμε την i-κάτω πλευρά $\lambda_i^0\gamma$ του γ να είναι ο $k-1$ κύβος με τύπο

$$\lambda_i^0\gamma(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \gamma(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_k).$$

Επίσης, η i-άνω πλευρά $\lambda_i^0\gamma$ του γ είναι ο $k-1$ κύβος με τύπο

$$\lambda_i^1\gamma(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \gamma(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_k).$$

Πρόταση 6.2.1. *Αν $1 \leq i < j \leq k$ τότε $\lambda_i^\epsilon\lambda_i^\delta = \lambda_{j-1}^\delta\lambda_i^\epsilon$.*

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς,

$$\begin{aligned}(\lambda_i^\epsilon\lambda_i^\delta\gamma)(x_1,\ldots,x_{k-2}) &= \lambda_i^\epsilon(\lambda_i^\delta\gamma(x_1,\ldots,x_{k-2}))\\ &= \lambda_i^\epsilon\gamma(x_1,\ldots,x_{j-1},\delta,x_{j+1},\ldots,x_{k-2})\\ &= \gamma(x_1,\ldots,x_{i-1},\epsilon,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},\delta,x_{j+1},\ldots,x_{k-2}).\end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned}(\lambda_{j-1}^\delta\lambda_i^\epsilon\gamma)(x_1,\ldots,x_{k-2}) &= \lambda_{j-1}^\delta(\lambda_i^\epsilon\gamma(x_1,\ldots,x_{k-2}))\\ &= \lambda_{j-1}^\delta\gamma(x_1,\ldots,x_{i-1},\epsilon,x_{i+1},\ldots,x_{k-2})\\ &= \gamma(x_1,\ldots,x_{i-1},\epsilon,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},\delta,x_{j+1},\ldots,x_{k-2}).\end{aligned}$$

□

Για $k \geq 0$, έστω $Q_k(A)$ η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από k-κύβους:

$$Q_k(A) = \left\{ \sum_{i\in I,\ \text{πεπερασμένο}} a_i\gamma_i,\ a_i \in \mathbb{Z},\ \gamma_i\ k-\text{κύβοι} \right\}.$$

Για $k < 0$ συμφωνούμε ότι $Q_k(A) = 0$. Κάθε στοιχείο $c = \sum a_i\gamma_i$ της $Q_k(A)$ λέγεται k-*αλυσίδα* του A.

Αν γ είναι k-κύβος, τότε η $(k-1)$-αλυσίδα

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left(\lambda_i^0\gamma - \lambda_i^1\gamma\right),$$

λέγεται *σύνορο* του γ.

Επεκτείνουμε τώρα γραμμικά τον ∂ σε έναν τελεστή

$$\partial : Q_k(A) \to Q_{k-1}(A)$$

από τη σχέση:

$$\partial c = \partial\left(\sum a_i\gamma_i\right) = \sum a_i\partial\gamma_i.$$

Λήμμα 6.2.2.

$$\partial\circ\partial = 0.$$

Απόδειξη. Έστω γ τυχαίος k-κύβος. Τότε,

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\gamma) &= \partial\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma\right)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\left[\lambda_j^0\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma\right)\right)-\lambda_j^1\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma\right)\right)\right]\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\left[\lambda_j^0\lambda_i^0\gamma-\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma-\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^1\gamma\right]\\
&= \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\lambda_j^0\lambda_i^0\gamma+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\lambda_j^1\lambda_i^1\gamma\\
&\quad -\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}(\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma).
\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}(\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma) &= \sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}(\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma)\\
&\quad+\sum_{1\le j<i\le k-1}(-1)^{i+j}(\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma)\\
&= \sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}(\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma)\\
&\quad-\sum_{1\le j<i\le k-1}(-1)^{j+i-1}(\lambda_{i-1}^0\lambda_j^1\gamma+\lambda_{i-1}^0\lambda_j^0\gamma)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\lambda_j^\epsilon\lambda_i^\epsilon\gamma &= \sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\lambda_j^\epsilon\lambda_i^\epsilon\gamma+\sum_{1\le j<i\le k-1}(-1)^{i+j}\lambda_j^\epsilon\lambda_i^\epsilon\gamma\\
&= \sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\lambda_j^\epsilon\lambda_i^\epsilon\gamma-\sum_{1\le j<i\le k-1}(-1)^{j+i-1}\lambda_j^\epsilon\lambda_i^\epsilon\gamma\\
&= 0,\quad \epsilon=0,1.
\end{aligned}$$

□

Μια k-αλυσίδα γ λέγεται *κύκλος* αν $\partial\gamma=0$ ενώ λέγεται k-*σύνορο* αν υπάρχει $\delta\in Q_{k+1}(A)$ τέτοια ώστε $\partial\delta=\gamma$.

Έστω τώρα $\omega\in\Omega^k(V)$, $V\supset[0,1]^k$, ανοικτό. Υπάρχει $f:V\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\omega=f\;dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k.$$

Τότε
$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$
Αν τώρα $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\omega \in \Omega^k(A)$, ορίζουμε για κάθε k-κύβο
$$\int_\gamma \omega = \int_{[0,1]^k} \gamma^* \omega.$$
Για $k = 0$ ορίζουμε $\int_\gamma \omega = \omega(\gamma(0))$ αφού τότε η ω ειναι μία $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση του A στο $\mathbb{R}$ και $\gamma : \{0\} \to A$. Επεκτείνοντας τώρα γραμμικά, ορίζουμε έναν ομομορφισμό ομάδων
$$\int : Q_k(A) \to \mathbb{R}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i \to \int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^m a_i \int_\gamma \omega,$$
που ορίζει το ολοκλήρωμα πάνω σε k-αλυσίδες $\gamma = \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i$. Εδώ, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Τα παρακάτω παραδείγματα είναι ενδεικτικά.

Παράδειγμα 6.2.3. Έστω $\gamma : [0,1] \to [a,b]$, $\gamma(t) = (b-a)t + a$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ και $\omega = f(x) \, dx$ μία 1-μορφή. Τότε,
$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega = \int_\gamma f(x) \, dx &= \int_{[0,1]} \gamma^* \omega \\ &= \int_{[0,1]} f((b-a)t + a) \cdot (b-a) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.2.4. Έστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, και
$$\omega = P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy$$
μία 1-μορφή. Τότε,
$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega = \int_\gamma P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy &= \int_{[0,1]} \gamma^* \omega \\ &= \int_{[0,1]} \big(P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) \big) \, dt, \end{aligned}$$
δηλαδή το γνωστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β' είδους).

Παράδειγμα 6.2.5. Έστω $\gamma : [0,1]^2 \to a \subset \mathbb{R}^3$,
$$\gamma(u,v) = (x(u,v), \; y(u,v), \; z(u,v)),$$
και
$$\omega = P(x,y,z) \, dz \wedge dx + Q(x,y,z) \, dy \wedge dz + R(x,y,z) \, dx \wedge dy$$
μία 2-μορφή. Τότε, επειδή
$$\begin{aligned} \gamma^* dx &= x_u \, du + x_v \, dv, \\ \gamma^* dy &= y_u \, du + y_v \, dv, \\ \gamma^* dz &= z_u \, du + z_v \, dv, \end{aligned}$$

είναι

$$\gamma^*(dz \wedge dx) = \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right| \; du \wedge dv,$$

$$\gamma^*(dy \wedge dz) = \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| \; du \wedge dv,$$

$$\gamma^*(dx \wedge dy) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \; du \wedge dv.$$

Εν τέλει, βρίσκουμε ότι

$$\int_\gamma \omega \;\;=\;\; \iint_{[0,1]^2} \left[P(\gamma(u,v)) \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right| + Q(\gamma(u,v)) \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| + R(\gamma(u,v)) \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right| \right] \; du \wedge dv,$$

δηλαδή το γνωστό επιφανειακό ολοκλήρωμα (β' είδους).

6.2.2 Το Θεώρημα του Stokes

Θεώρημα 6.2.6. *(**Stokes**) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο. Τότε για κάθε μορφή $\omega \in \Omega^{k-1}(A)$ και για κάθε αλυσίδα $\gamma \in Q_k(A)$ ισχύει*

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $n = k$, το A είναι μία ανοικτή περιοχή του $[0,1]^k$ και $\gamma = I^k$ είναι ο ταυτοτικός k-κύβος:

$$I^k(x) = x, \quad x \in [0,1]^k.$$

Στην περίπτωση αυτή, η μορφή ω είναι ένας γραμμικός συνδυασμός $(k-1)$-μορφών του τύπου

$$f \; dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k, \quad 1 \le i \le k.$$

Ο συμβολισμός $\widehat{dx_i}$ υποδηλώνει ότι ο όρος dx_i λείπει από την i-θέση. Λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος, αρκει να αποδείξουμε το θεώρημα για μορφές του παραπάνω τύπου. Για $\epsilon = 0, 1$ και για $1 \le j \le k$ έχουμε

$$(\lambda_j^\epsilon I^k)^*(dx_j) = d\left(\pi_j \circ \lambda_j^\epsilon I^k\right) = 0,$$

με την $\pi_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ να είναι η προβολή στην j-συντεταγμένη. Και αυτό γιατί, η $\pi_j \circ \lambda_j^\epsilon I^k$ είναι η σταθερή συνάρτηση ϵ. Συνεπώς,

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^\epsilon I^k)^*(f \; dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k)$$

$$= \begin{cases} 0 & j \ne i, \\ \int_{[0,1]^k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \epsilon, x_{i+1}, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k & j = i. \end{cases}$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial I^k} f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\int_{[0,1]^{k-1}} \left(\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k \right) (f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) \right) \\
&= (-1)^i \int_{[0,1]^k} \left(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k) \right) dx_1 \ldots dx_k.
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα του Fubini και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\int_{I^k} d\left(f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \right) &= \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_1 \ldots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_k)\ dx_i \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k) \right. \\
&\quad \left. -\ f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k) \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k)\ dx_1 \ldots dx_k \\
&\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k)\ dx_1 \ldots dx_k.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega.
$$

Στη γενική περίπτωση τώρα που ο γ είναι ένας οποιοσδήποτε κύβος σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\gamma} \omega &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k \right)^* \omega \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k \right)^* (\gamma^* \omega) \\
&= \int_{\partial I^k} \gamma^* \omega.
\end{aligned}
$$

Και αυτό διότι,

$$
\lambda_j^\epsilon \gamma = \gamma \circ \lambda_j^\epsilon I^k, \quad \epsilon = 0, 1,\ 1 \leq j \leq k.
$$

Συνεπώς,

$$
\int_\gamma d\omega = \int_{[0,1]^k} \gamma^*(d\omega) = \int_{I^k} \gamma^*(d\omega) = \int_{I^k} d\left(\gamma^* \omega \right) = \int_{\partial I^k} \gamma^* \omega = \int_{\partial\gamma} \omega.
$$

Λόγω γραμμικότητας, προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα και για τις k-αλυσίδες.

$\square$

6.3 Ασκήσεις

1. Αν $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, τότε είναι ακριβής.

2. Έστω ω, θ κλειστές μορφές σε ένα $A \subset \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι και η $\omega \wedge \theta$ είναι κλειστή. Αν επιπλέον μία από τις ω, θ είναι ακριβής, τότε αποδείξτε ότι και η $\omega \wedge \theta$ είναι ακριβής.

3. Έστω ω μια 1-μορφή στο ανοικτό $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μία $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$. Αν η $f\omega$ είναι κλειστή, τότε δείξτε ότι $\omega \wedge d\omega = 0$.

4. Αποδείξτε ότι η n-μορφή του $\mathbb{R}^n$ με τύπο
$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$
είναι ακριβής.

5. Έστω $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, όπου
$$\omega = P(x,y,z)\ dy \wedge dz + Q(x,y,z)\ dz \wedge dx + R(x,y,z)\ dx \wedge dy.$$
   (α′) Δείξτε ότι αν η ω είναι κλειστή, τότε αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο
   $$\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)),$$
   είναι
   $$\mathrm{div}\mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = 0.$$
   (β′) Αν στο εξής θεωρήσουμε την ω κλειστή, τότε το Λήμμα Poincaré μας εξασφαλίζει την ύπαρξη $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$,
   $$\theta = \theta_1\ dx_1 + \theta_2\ dx_2 + \theta_3\ dx_3,$$
   ώστε $\omega = d\theta$. Δείξτε ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το εξής σύστημα ΜΔΕ:
   $$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_3}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z} &= P, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x} &= Q, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= R. \end{aligned}$$
   (γ′) Θέστε όπου $z = t$ από την απόδειξη του Λήμματος Poincaré υπολογίστε επακριβώς την θ.

6. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα των Επικαμπυλίων Ολοκληρωμάτων: εάν γ καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ με παραμέτρηση
$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in [a,b],$$
και $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ είναι λείο διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^n$, τότε αν $\mathbf{F} = \nabla f$ για κάποια λεία συνάρτηση f, ισχύει ότι
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$
(Υπόδειξη. Πάρτε $\omega = f$.)

7. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να αποδείξετε το Θεώρημα του Green: εάν D είναι επίπεδο χωρίο με σύνορο ∂D, και P, Q είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις του D, τότε

$$\int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ dxdy.$$

Βιβλιογραφία

[1] Κ. Αθανασόπουλος: *Ανάλυση Πολλών Μεταβλητών.* Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 1992.

[2] J.R. Munkres: *Analysis on manifolds.* Addison-Wesley Publ. Co. Redwood City, 1991.

[3] M. Spivak: *Calculus on Manifolds.* W.A. Benjamin Inc, New York, 1965.

[4] J. Shurman: *Multivariable Calculus.* Reed College online notes.

[5] L.W. Tu: *An introduction to manifolds.* Springer Science, 2011.