ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινο ΕΞΑΜΗΝΟ 2019–20

ΜΕΜ233-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΑΝΑΚΛΑΣΕΩΝ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Καλούμε *υπερεπίπεδο του* $\mathbb{R}^n$ κάθε σύνολο της μορφής

$$W_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = d,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R}\}.$$

Εάν $d = 0$, το W_0 είναι $(n-1)$-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Η *ανάκλαση στο* W_d δίνεται από τον τύπο

$$R(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2(d - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}))\mathbf{a}.$$

Αποδείξτε με διανυσματικές μεθόδους τον τύπο αυτόν. Υπενθυμίζεται ότι η προβολή $pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ διανύσματος $\mathbf{x}$ σε διάνυσμα $\mathbf{a}$ δίνεται από τη σχέση

$$pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}.$$

Δείξτε επίσης ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα $J(R) = -1$, δηλαδή, κάθα ανάκλαση σε υπερεπίπεδο αντιστρέφει τον προσανατολισμό. (Υπόδειξη για το τελευταίο: είναι

$$J(R) = \begin{vmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1a_2 & \dots & -2a_1a_n \\ -2a_2a_1 & 1-2a_2^2 & \dots & -2a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_na_1 & \dots & \dots & 1-2a_n^2 \end{vmatrix}.$$

Χρησιμοποιήστε ιδιότητες οριζουσών.)

Θεώρημα 1. *Κάθε ισομετρία του* $\mathbb{R}^n$ *μπορεί να γραφεί ως σύνθεση το πολύ* $n+1$ *ανακλάσεων.*

Απόδειξη. (*Με επαγωγή στη διάσταση*). Έστω $n = 1$. Οι ισομετρίες του $\mathbb{R}$ είναι της μορφής

$$x + d \quad \text{ή} \quad -x + d,\ d \in \mathbb{R}.$$

Η $x + d$ είναι η σύνθεση $R_{d/4} \circ R_{-d/4}$ των ανακλάσεων

$$R_{d/4}(x) = -x + d/2 \quad \text{και} \quad R_{-d/4}(x) = -x + d/2.$$

Η δε $-x + d$ είναι απλώς η $R_{d/2}$.

Για τυχούσα ισομετρία f στις μεγαλύτερες διαστάσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι σταθεροποιεί την αρχή και ότι για $k = 2, \dots, n-1$ ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Είναι

$$\|f(\mathbf{e}_n)\| = \|f(\mathbf{e}_n) - f(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{e}_n - \mathbf{0}\| = 1.$$

Άρα, υπάρχει ανάκλαση R σε κάποιο υπερεπίπεδο από την αρχή, ώστε η $g = R \circ f$ είναι ισομετρία που σταθεροποιεί τα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_n$. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα $L = [\mathbf{0}\mathbf{e}_n]$:

$$s(t) = t\mathbf{e}_n, \quad t \in [0,1],$$

που συνδέει τα $\mathbf{0}$ και $\mathbf{e}_n$. Τότε

$$\|g(t\mathbf{e}_n)\| = \|g(t\mathbf{e}_n) - g(\mathbf{0})\| = \|t\mathbf{e}_n - \mathbf{0}\| = t$$

και επειδή η g απεικονίζει το L στον εαυτό του και $t > o$ έχουμε ότι $g(t\mathbf{e}_n) = t\mathbf{e}_n$ για κάθε $t \in [0,1]$. Έστω τώρα το υπερεπίπεδο

$$W = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n-1\},$$

το οποίο είναι ορθογώνιο στο L. Εάν $\mathbf{x} \in W$,

$$g(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{e}_n) = g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_n = 0,$$

άρα $g(W) = W$. Γενικότερα, εάν $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$,

$$\|\mathbf{y}\| = \|g(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad \text{και} \quad \|\mathbf{y} - y\mathbf{e}_n\|^2 = \|\mathbf{x} - t\mathbf{e}_n\|^2,\ t \in [0,1].$$

Άρα, $y_n = x_n$. Βάσει αυτού, θεωρούμε την g σαν απεικόνιση $W \to W$,

$$g(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \implies y_n = x_n$$

και ορίζουμε

$$g^*(x_1, \dots, x_{n-1}) = (y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Ταυτίζουμε το W με το R^{n-1} και τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$g^* = R_1^* \circ \dots \circ R_k^*, \quad k \le n-1,$$

όπου οι R_i^* είναι ανακλάσεις σε υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^{n-1}$. Κάθε R_j^* έχει εξίσωση

$$R_j^*(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* - 2(\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{a}_j)\mathbf{a}_j,$$

όπου $\mathbf{x}^* = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathbf{a}_j = (a_1, \dots, a_{n-1})$, $\|\mathbf{a}_j\| = 1$. Ορίζουμε τώρα τις ανακλάσεις R_j του $\mathbb{R}^n$ από τις σχέσεις

$$R_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a}_j = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0).$$

Κάθε R_j διατηρεί την n-συντεταγμένη και έτσι οι πρώτες $n-1$ συντεταγμένες του

$$R_1 \circ \dots \circ R_k(x_1, \dots, x_n)$$

ταυτίζονται με τις $n-1$ πρώτες συντεταγμένες του

$$R_1^* \circ \dots \circ R_k^*(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Άρα, $g = R_1 \circ \dots \circ R_k$ και συνεπώς $f = R \circ g$. $\square$

Σχόλιο. Το Θεώρημα Ανακλάσεων μας επιτρέπει να γράφουμε

$$E(n) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, e_n) = E^+(n) \,\dot{\cup}\, E^-(n),$$

όπου το σύνολο $E^+(n)$ είναι το σύνολο των ευθέων ισομετριών του $\mathbb{R}^n$, (δηλαδή, ισομετρίες που αναλύονται σε σύνθεση αρτίου αριθμού ανακλάσεων) και $E^-(n)$ είναι το σύνολο των μή ευθέων ανακλάσεων (εδώ, ο αριθμός των ανακλάσεων είναι περιττός).