

Εισαγωγή στην Γεωμετρία

Πάρης Πάμφιλος
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκέμβριος 2000

Περιεχόμενα

1	Η Γεωμετρία γενικά	1
1.1	Χώρος, Σχήμα, Μετασχηματισμός	1
1.2	Γεωμετρία	1
1.3	Συνθετική μέθοδος	1
1.4	Αναλυτική μέθοδος	2
1.5	Σχόλια	2
2	Πραγματικοί αριθμοί	3
2.1	Οι πραγματικοί αριθμοί	3
3	Το \mathbb{R}^2 και το Εσωτερικό Γινόμενο	5
3.1	Το Ευκλείδειο επίπεδο	5
3.2	Το \mathbb{R}^2	5
3.3	Το εσωτερικό γινόμενο	5
3.4	Γωνίες	6
3.5	Ορθογώνιοι πίνακες	7
3.6	Στροφές	8
3.7	Ανακλάσεις	9
3.8	Προβολή	9
3.9	Εμβαδόν	10
4	Μετρικές έννοιες	13
4.1	Απόσταση, μήκος, γωνία	13
4.2	Όμοια τρίγωνα	14
5	Ευθεία	19
5.1	Εξίσωση ευθείας	19
5.2	Σύστημα δύο ευθειών	19
5.3	Κάθετη κατεύθυνση	20
5.4	Λόγος	21
5.5	Θεώρημα Θαλή	22
5.6	Σημασία της $f(x, y)$	29
5.7	Θεμελιώδεις κατασκευές	31
6	Κύκλος	37
6.1	Η εξίσωση του κύκλου	37
6.2	Τομή με ευθεία	38
6.3	Δύναμεις ως προς κύκλον	38

6.4	Ριζικός άξων δύο κύκλων	39
6.5	Επίκεντρος και Εγγεγραμμένη γωνία	42
6.6	Κύκλος δια τριών σημείων	45
6.7	Εγγράψιμα εις κύκλον τετράπλευρα	47
6.8	Σημείον του Miquel	49
6.9	Κύκλοι εγγεγραμμένοι εις τρίγωνον	50
6.10	Πρόβλημα του Fagnano	53
6.11	Απολλώνιος κύκλος	54
6.12	Ευθεία και κύκλος του Euler	54
6.13	Σημείον του Fermat	58
6.14	Δέσμες κύκλων	59
6.15	Ορθογωνιότητα κύκλων, δεσμών	64
7	Ισομετρίες του επιπέδου	67
7.1	Κατοπτρισμοί, Μεταφορές, Στροφές	67
7.2	Η καθολικότητα των ανακλάσεων	68
7.3	Ισομετρία	68
7.4	Ιδιότητα ισομετρίας	69
7.5	Ισα σχήματα	70
7.6	Ολισθανάκλαση	71
7.7	Πλαχοστρώσεις	74
8	Ομοιοθεσία	83
8.1	Ορισμός ομοιοθεσίας	83
9	Αντιστροφή	89
9.1	Ορισμός αντιστροφής	89
9.2	Εφαρμογές της αντιστροφής	93
9.3	Προβλήματα του Απολλώνιου	97
9.4	Πολικότητα	101

Κεφάλαιο 1

Η Γεωμετρία γενικά

1.1 Χώρος, Σχήμα, Μετασχηματισμός

Από την γενικώτατη σκοπιά, ο (Γεωμετρικός) **Χώρος** είναι ένα μη κενό σύνολο X . Το X μπορεί να είναι πεπερασμένο, άπειρο, συνεχές ή διακριτό. Τα στοιχεία του λέγονται **Σημεία** και τα υποσύνολά του **Σχήματα**. **Μετασχηματισμό** του X λέμε μιά 1-1 και επί απεικόνιση του X στον εαυτό του $\phi : X \rightarrow X$. Στην Γεωμετρία οι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για να μετατοπίζουμε, με κάποια έννοια, σχήματα στον χώρο. Οι μαθηματικοί, αντί να εξετάζουν μετασχηματισμούς που περιορίζονται στα σημεία ενός σχήματος $\Sigma \subset X$ και μόνον, κατέλληξαν να θεωρούν μετασχηματισμούς ολόκληρου του X στον εαυτό του, οι οποίοι συμπαρασύρουν και το Σ σε ένα άλλο σχήμα Σ' .

1.2 Γεωμετρία

Ο σύγχρονος τρόπος αντίληψης της γεωμετρίας που φαίνεται να έχει επικρατήσει, θεωρεί ότι μία **Γεωμετρία** καθορίζεται από ένα βασικό σύνολο X (τον χώρο) και ένα σύνολο Γ , μετασχηματισμών του X . Αντικείμενο της **Γεωμετρίας** είναι ο ορισμός και η μελέτη ιδιοτήτων των σχημάτων Σ του X , οι οποίες παραμένουν **αναλλοίωτες** ως προς τους μετασχηματισμούς $\phi \in \Gamma$. Τούτο με την έννοια ότι εάν το σχήμα Σ έχει την ιδιότητα A και $\phi \in \Gamma$, τότε και το σχήμα $\Sigma' = \phi(\Sigma)$ έχει την ιδιότητα A . Παράδειγμα τέτοιας ιδιότητας είναι λ.χ. το μήκος d ευθυγράμμου τμήματος Σ στο Ευκλείδειο επίπεδο X . Εάν μετατοπίσουμε το Σ σε άλλη θέση στο χώρο, δηλ. θεωρήσουμε το $\Sigma' = \phi(\Sigma)$, όπου $\phi : X \rightarrow X$, ένας μετασχηματισμός μεταφοράς (θα τον δούμε παρακάτω), τότε το μήκος του Σ' είναι πάλι d .

1.3 Συνθετική μέθοδος

Η συνθετική μέθοδος ήταν ιστορικά η πρώτη μέθοδος ανάπτυξης της Γεωμετρίας (Ευκλείδης 300 π.Χ.). Κατά την μέθοδο αυτή διατυπώνονται κάποια **αξιώματα**, τα οποία περιγράφουν απλούστατες ιδιότητες του χώρου X και ορισμένων υποσυνόλων του (ευθείες). Πρόσθετα αξιώματα καθορίζουν το σύνολο των μετασχηματισμών Γ .

Κατά την μέθοδο αυτή τα πάντα ανάγονται λογικά στην αλήθεια των αξιωμάτων. Η υφή του συνόλου X παραμένει αδιευκρίνιστη. Το X μπορεί να είναι οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο, αρκεί αυτό να ικανοποιεί τα αξιώματα που τέθηκαν στην αρχή. Τα αξιώματα είναι αποδεκτά χωρίς απόδειξη π.χ. ότι για δύο διαφορετικά σημεία A, B , υπάρχει ευθεία ϵ που τα περιέχει.

Μ' αυτόν τον τρόπο η Γεωμετρία παίρνει την μορφή ενός παιχνιδιού, σαν το σκάκι. Τα αξιώματα είναι οι απαράβατοι κανόνες του παιχνιδιού, οι δε προκύπτουσες προτάσεις, ιδιότητες, θεωρήματα, μπορεί να πει κανείς, ότι αντιστοιχούν στις διάφορες δυνατές συγκεκριμένες παρτίδες σκακιού που μπορούν να προκύψουν.

1.4 Αναλυτική μέθοδος

Η αναλυτική μέθοδος αναπτύχθηκε πολύ αργότερα από την συνθετική (Καρτέσιος 1596-1650). Σ' αυτήν ο χώρος X περιγράφεται με σαφήνεια και ταυτίζεται με ένα σύνολο μαθηματικών αντικειμένων. Π.χ. το Ευκλείδειο Επίπεδο ταυτίζεται με το σύνολο \mathbb{R}^2 . Τα διάφορα σχήματα, όπως λ.χ. οι ευθείες, περιγράφονται ως σύνολα που ικανοποιούν μαθηματικές σχέσεις και οι μετασχηματισμοί, δίδονται από συγκεκριμένους τύπους. Οι ορισμοί και οι ιδιότητες των σχημάτων ανάγονται σε αριθμητικές σχέσεις και επομένως η αλήθειά τους ανάγεται στην αλήθεια των στοιχειωδών ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών. Εδώ τα πάντα είναι προτάσεις. Τα αξιώματα φαίνονται ν' απουσιάζουν. Τούτο είναι μόνο φαινομενικό. Τα αξιώματα κρύβονται, σ' αυτήν την περίπτωση, στο μοντέλο. Π.χ. για το \mathbb{R}^2 τα αντίστοιχα αξιώματα είναι αυτά του \mathbb{R} , τα οποία συνεπάγονται τα αξιώματα του Ευκλείδειου επιπέδου.

1.5 Σχόλια

Η γενικώτατη αντίληψη της γεωμετρίας, που περιγράφεται στο 1.2, αναφέρεται ως Erlanger Programm και οφείλεται στον Felix Klein (1849-1925). Κατ' αυτήν, το σύνολο των μετασχηματισμών Γ είναι μιά υποομάδα της ομάδας $\text{Aut}(X)$, όλων των δυνατών μετασχηματισμών του X . Έτσι μιά Γεωμετρία ταυτίζεται με ένα ζεύγος (X, Γ) . Το ζεύγος αυτό μπορεί να ορισθεί ή βάσει αξιωμάτων (συνθετική μέθοδος) ή ως ζεύγος μαθηματικών αντικειμένων (αναλυτική μέθοδος, μοντέλο).

Από τα προτερήματα της συνθετικής μεθόδου είναι η γενικότητα και η αφαιρετική δύναμη των συλλογισμών. Η μελέτη επικεντρώνεται στις σχέσεις και αδιαφορεί για την υφή των αντικειμένων. Κάθε πρόταση που αποδεικνύεται γίνεται εργαλείο για ν' αποδειχθούν νέες προτάσεις, ακόμη πιό σύνθετες. Η δύναμη της αναλυτικής μεθόδου είναι η δυνατότητα που έχει να διατυπώνει τα προβλήματα σε μιά ενιαία γλώσσα και να προσφέρει τυποποιημένες διαδικασίες επίλυσής τους. Στην πράξη καταφεύγομε σε συνδυασμό των δύο μεθόδων. Αν μπορούμε να λύσουμε το δοθέν πρόβλημα συνθετικά, το προτιμάμε, διότι παίρνομε καλύτερη αίσθηση της θέσης του στην θεωρία. Αν δεν μπορούμε να το λύσουμε συνθετικά, τότε καταφεύγομε σε υπολογισμούς και κατόπιν προσπαθούμε να μεταφράσουμε την πορεία λύσης και στην συνθετική της μορφή.

Σε τελευταία ανάλυση και οι δύο μέθοδοι είναι συνθετικές. Απλώς στην αναλυτική ξεκινάμε από πιο κάτω δηλ. από πιό θεμελιώδεις έννοιες απ' ότι στην συνθετική. Στα Μαθηματικά (και όχι μόνο) τα πάντα εξαρτώνται από το που ξεκινάς. Μιά μικρή αλλαγή στα αξιώματα οδηγεί σε τελείως διαφορετικούς δρόμους ή αδιέξοδα.

Το σχήμα παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην Γεωμετρία. Όχι μόνον ως αντίθετο του ά-σχημου. Τις σημειώσεις αυτές προσπάθησα να εμπλουτίσω με όσο το δυνατόν περισσότερα σχήματα. Όλα τα σχήματα κατασκευάστηκαν με το πρόγραμμα **Isoptikon**, το οποίο αναπτύχθηκε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης και διατίθεται ελεύθερα στο διαδίκτυο, στην διεύθυνση: <http://www.math.uoc.gr/~pamfilis/isoptik2.zip>. Παροτρύνω τον αναγνώστη να πάρει και να χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα και να γευθεί την ιδιαίτερη αίσθηση και χαρά που δίδει η εντρύφηση στην αρμονία των γεωμετρικών σχημάτων.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Οι πραγματικοί αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν αποτέλεσμα διαδοχικών κατασκευών συστημάτων ολοένα πιο συνθέτων αριθμών. Κατ' αρχήν είναι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Κατόπιν οι ακέραιοι $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. (Οι αρχαίοι έλληνες αγνοούσαν το 0 και τους αρνητικούς). Μετά οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}$. Τέλος οι πραγματικοί αριθμοί \mathbb{R} , που προκύπτουν ως όρια ακολουθιών ρητών αριθμών. Τα όρια αυτά υποδηλώνονται ήδη από τους ίδιους τους ρητούς αριθμούς, αν τους γράψουμε σε δεκαδική μορφή. π.χ. $1/13 = 0.076923076923\dots$. Ως γνωστόν, στους ρητούς, από ένα σημείο και πέρα εμφανίζεται περιοδικότητα των ψηφίων της δεκαδικής τους ανάπτυξης (στο προηγούμενο η περίοδος είναι 076923). Μήκος της περιόδου λέμε το πλήθος των ψηφίων της περιόδου. Στο παράδειγμα λ.χ. το μήκος περιόδου είναι 6. Οι άρρητοι αριθμοί, οι οποίοι μαζί με τους ρητούς συναποτελούν τους πραγματικούς, χαρακτηρίζονται από την μη-περιοδικότητα στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. π.χ. ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος με 100 πρώτα δεκαδικά ψηφία 1.4142135623730950488016887242096980785696718753376948073176679737990732478462107038850387534327641573... . Όσο κι αν συνεχίσουμε το ανάπτυγμα δεν θα διαπιστώσουμε ποτέ περιοδικότητα.

Αρκετές από τις αδυναμίες του αξιωματικού συστήματος που προτείνει ο Ευκλείδης, οφείλονται στο γεγονός ότι οι αρχαίοι έλληνες γνώριζαν μεν τους πραγματικούς αριθμούς, δεν είχαν όμως πλήρη αντίληψη της δομής τους. Τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως αυτά συμπληρώθηκαν σχετικά πρόσφατα, εξασφαλίζουν απλούστατες αντιστοιχίες των σημείων μιάς ευθείας με το \mathbb{R} . Οι βασικές ιδιότητες στις οποίες στηριζόμαστε όταν χρησιμοποιούμε τους πραγματικούς αριθμούς είναι αυτές της αλγεβρικής δομής του, δηλ. των πράξεων (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός), ως προς τις οποίες το \mathbb{R} είναι ένα Σώμα, της διάταξης, που το καθιστά πλήρως διατεταγμένο σώμα και της πληρότητας. Η τελευταία ιδιότητα σημαίνει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει ένα οριακό σημείο. Επι πλέον συνεπάγεται το λεγόμενο Αρχιμήδειο (287-212 π.Χ.) αξίωμα: $\forall \varepsilon > 0$, και $\forall \alpha > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \varepsilon > \alpha$. Ας δούμε δύο προτάσεις, που εξασφαλίζουν ρητές προσεγγίσεις ενός αρρήτου μέ όση ακρίβεια θέλομε.

Πρόταση 2.1.1 Για κάθε άρρητο $\alpha > 0$, και κάθε φυσικό $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ρητός p/q , $q \leq n$ με την ιδιότητα: $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$.

Η πρόταση αποδεικνύεται με την αρχή του περιστέρωνα: Αν τοποθετήσεις $(n+1)$ αντικείμενα σε n κουτιά, θα πρέπει τουλάχιστον σ' ένα κουτί να βάλεις περισσότερα από ένα αντικείμενα.

Τα αντικείμενα είναι οι αριθμοί $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{(n+1)\alpha\}$. Η αγγύλη $\{x\}$ παριστά το δεκαδικό μέρος του αριθμού x που είναι ένας αριθμός $|\{x\}| < 1$. Τα n το πλήθος 'κουτιά' είναι τα διαστήματα $[0, 1/n], [1/n, 2/n], [2/n, 3/n], \dots, [(n-1)/n, 1]$. Θα υπάρχουν λοιπόν τουλάχιστον δύο αριθμοί λ.χ. $\{i_1\alpha\}, \{i_2\alpha\}$, οι οποίοι θα πέφτουν στο ίδιο κουτί, (χωρίς να συμπίπτουν με το άκρο κάποιου κουτιού καθότι ο α είναι άρρητος) άρα θα απέχουν απόσταση $|\{i_1\alpha\} - \{i_2\alpha\}| < 1/n \Rightarrow |(i_1 - i_2)\alpha - p| < 1/n$, για κάποιον ακέραιο p , που δίνει το ζητούμενο με $q = i_1 - i_2 < n$.

Πρόταση 2.1.2 Dirichlet (1805-1859) Για κάθε άρρητο a υπάρχουν άπειροι ρητοί p/q , με την ιδιότητα $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη πρόταση. Ξεκινάμε μ' ένα αυθαίρετο n_1 και ευρίσκουμε p_1/q_1 που ικανοποιεί την πρόταση 2.1.1. Κατά το Αρχιμήδειο αξίωμα, θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_2 \cdot |\alpha - \frac{p_1}{q_1}| > 1$. Εφαρμόζοντας πάλι την 2.1.1, ευρίσκουμε p_2/q_2 που ικανοποιεί την πρόταση: $|\alpha - \frac{p_2}{q_2}| < \frac{1}{q_2 n_2} \leq \frac{1}{n_2} < |\alpha - \frac{p_1}{q_1}|$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία με ένα n_3 τέτοιο ώστε $n_3 \cdot |\alpha - \frac{p_2}{q_2}| > 1$ κ.ο.κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 2.1

Πρόβλημα 2.1.1 Δείξε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Δείξε γενικότερα ότι ο \sqrt{n} είναι άρρητος, για κάθε πρώτο ακέραιο n .

Πρόβλημα 2.1.2 Δείξε ότι ο αριθμός $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ είναι άρρητος.

Πρόβλημα 2.1.3 Δείξε ότι αν για τον άρρητο a , υπάρχουν δύο ακέραιοι θετικοί $i_1 > i_2$, έτσι ώστε να ισχύει: $|\{i_1\alpha\} - \{i_2\alpha\}| < 1/n$, τότε υπάρχει και ένας ακέραιος θετικός p τέτοιος ώστε $|(i_1 - i_2)\alpha - p| < 1/n$.

Πρόβλημα 2.1.4 Λογάριασε την περίοδο των ρητών $1/n$, για $n = 2, \dots, 19$.

Πρόβλημα 2.1.5 Δείξε ότι το μήκος περιόδου ενός (αναγώγου) ρητού m/n , είναι μικρότερο του n .

Πρόβλημα 2.1.6 Βρες όλους τους ρητούς p/q των οποίων η περίοδος είναι μονοψήφια.

Πρόβλημα 2.1.7 (Εργασία) Βρες για ποιούς φυσικούς n το μήκος περιόδου του $1/n$ είναι $n - 1$ (π.χ. τέτοια είναι τα 17, 19, 23). Εξέτασε αν πρέπει ο n να είναι κατ' ανάγκη πρώτος (όμως το $1/13$ έχει περίοδο μήκους 6).

Κεφάλαιο 3

Το \mathbb{R}^2 και το Εσωτερικό Γινόμενο

3.1 Το Ευκλείδειο επίπεδο

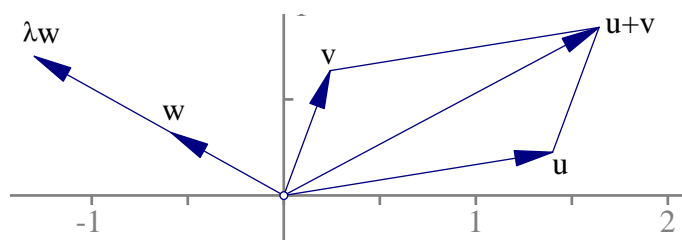
Το Ευκλείδειο Επίπεδο ταυτίζεται με το \mathbb{R}^2 και η γεωμετρία προκύπτει απλά από την δομή του \mathbb{R}^2 , του οποίου οι ιδιότητες στηρίζονται στην δομή του \mathbb{R} . Τα απλούστερα σχήματα όπως λ.χ. οι ευθείες και οι κύκλοι, ορίζονται από εξισώσεις. Οι ιδιότητες των σχημάτων ανάγονται σε ιδιότητες των εξισώσεων και επομένως σε ιδιότητες (αξιώματα) των πραγματικών αριθμών.

3.2 Το \mathbb{R}^2

Η βασική δομή του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ είναι αυτή του **Διανυσματικού χώρου**, με πράξεις την πρόσθεση (διανυσμάτων) και τον πολλαπλασιασμό (διανύσματος) με πραγματικό αριθμό:

$$\bar{u} = (x, y), \bar{v} = (x', y'), \quad \bar{u} + \bar{v} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad (3.1)$$

$$\lambda \cdot \bar{u} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y). \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.1: Πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό

3.3 Το εσωτερικό γινόμενο

Από την αλγεβρική δομή του \mathbb{R} , το \mathbb{R}^2 κληρονομεί και μίαν άλλην έννοια, το **εσωτερικό γινόμενο**

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy', \quad (3.3)$$

που ανάγει το μέτρο διανύσματος, το μέτρο γωνίας και το εμβαδόν παραλληλογράμμου σε έναν κοινό παρονομαστή. Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ιδιότητες:

$$\text{Συμμετρία} : \quad \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle, \quad (3.4)$$

$$\text{Διγραμμικότητα} : \langle \lambda \cdot \bar{u} + \mu \cdot \bar{u}', \bar{v} \rangle = \lambda \cdot \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \mu \cdot \langle \bar{u}', \bar{v} \rangle, \quad (3.5)$$

$$\langle \bar{u}, \lambda \cdot \bar{v} + \mu \cdot \bar{v}' \rangle = \lambda \cdot \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \mu \cdot \langle \bar{u}, \bar{v}' \rangle,$$

$$\text{Θετικά ορισμένον} : \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = x^2 + y^2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Τέλος, έχουμε μια σημαντική ανισότητα για το μέτρο $\|\bar{u}\|$ του \bar{u}

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.7)$$

Πρόταση 3.3.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz) $\forall \bar{u}, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|, \quad (3.8)$$

όπου η ισότητα ισχύει τότε και μόνον, όταν τα \bar{u}, \bar{v} είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλ. υπάρχουν λ, μ , όχι και τα δύο 0, έτσι ώστε $\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} = 0$.

Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται αμέσως αναπτύσσοντας το $\langle \bar{u} + \lambda \cdot \bar{v}, \bar{u} + \lambda \cdot \bar{v} \rangle$ ως προς λ : $\lambda^2 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - 2\lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$. Για να ισχύει αυτό για κάθε λ , θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου, ως προς λ , να είναι μη-θετική, που ισοδυναμεί με το ζητούμενο. Αν ένα εκ των \bar{u}, \bar{v} μηδενίζεται τότε η ισότητα ισχύει στην μορφή $0=0$. Αν κανένα τους δεν μηδενίζεται και ισχύει η ισότητα, τότε θα έχουμε $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \pm \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$, από την οποία προκύπτει ότι $\langle \bar{u} + \lambda \cdot \bar{v}, \bar{u} + \lambda \cdot \bar{v} \rangle = (\|\bar{u}\| \pm \lambda \|\bar{v}\|)^2$. Αυτή, παίρνοντας $\lambda = \mp \|\bar{u}\| / \|\bar{v}\|$ δίνει $\langle \bar{u} + \lambda \cdot \bar{v}, \bar{u} + \lambda \cdot \bar{v} \rangle = 0$ που σημαίνει ότι $\bar{u} = -\lambda \bar{v}$.

Πρόταση 3.3.2 $\forall \bar{u}, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ ισχύει η ανισότητα

$$\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|. \quad (3.9)$$

Η ισότητα ισχύει τότε ακριβώς όταν τα \bar{u}, \bar{v} είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αυτή αποδεικνύεται αμέσως, υψώνοντας στο τετράγωνο την $\|\bar{u} + \bar{v}\|$ και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη. Το θέμα της ισότητας ανάγεται κι' αυτό στο αντίστοιχο της προηγούμενης πρότασης, υψώνοντας πάλι στο τετράγωνο.

Πρόταση 3.3.3 $\forall \bar{u}, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ ισχύει η ανισότητα

$$|\|\bar{u}\| - \|\bar{v}\|| \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|. \quad (3.10)$$

Η ισότητα ισχύει τότε ακριβώς όταν τα \bar{u}, \bar{v} είναι το ένα θετικό πολλαπλάσιο του άλλου.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη και γράφοντας $\|\bar{u}\| = \|\bar{u} - \bar{v} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u} - \bar{v}\| + \|\bar{v}\|$, έχουμε $\|\bar{u}\| - \|\bar{v}\| \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|$. Ανάλογα, ξεκινώντας από το \bar{v} παίρνουμε την $\|\bar{v}\| - \|\bar{u}\| \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|$. Συνδυάζοντας τις δύο παίρνουμε το ζητούμενο.

3.4 Γωνίες

Από την 3.8 έπεται ότι για $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$, ισχύει

$$-1 \leq \lambda = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \leq 1.$$

Άρα υπάρχει μία ακριβώς γωνία $\vartheta \in [0, \pi]$: $\text{συν}(\vartheta) = \lambda$. Την ϑ ονομάζουμε **μέτρο γωνίας** (σύντομα, γωνία) μεταξύ των διανυσμάτων \bar{u}, \bar{v} και γράφουμε $\vartheta = \angle(\bar{u}, \bar{v})$. Από τον ίδιο τον ορισμό λοιπόν, έχουμε ότι

$$\text{συν}(\angle(\bar{u}, \bar{v})) = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \Leftrightarrow \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \text{συν}(\angle(\bar{u}, \bar{v})). \quad (3.11)$$

Δύο γωνίες $\angle(\bar{u}, \bar{v}), \angle(\bar{u}', \bar{v}')$, θα τις θεωρούμε **ίσες** τότε και μόνον εάν έχουν ίσα συνημίτονα (βέβαια, σύμφωνα με τους ορισμούς μας επιτρέπουμε μόνο γωνίες που το μέτρο τους περιέχεται στο διάστημα $[0, \pi]$. Αργότερα θα διευρύνουμε τον αρχικό αυτόν ορισμό.). Επίσης θα τις θεωρούμε **παραπληρωματικές**, εάν έχουν αντίθετα συνημίτονα, ισοδύναμα: το άθροισμά τους είναι π . Το \bar{u} λέγεται **μοναδιαίο** όταν $\|\bar{u}\| = x^2 + y^2 = 1$. Τέλος, δύο διανύσματα θα λέγονται **κάθετα**, όταν η γωνία τους είναι $\pi/2$, με άλλα λόγια, όταν ισχύει

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0. \quad (3.12)$$

3.5 Ορθογώνιοι πίνακες

Με το εσωτερικό γινόμενο είναι στενά συνδεδεμένοι οι **ορθογώνιοι πίνακες**. Κατ' αρχήν θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ για να παραστήσουμε τον πίνακα και ταυτόχρονα τον μετασχηματισμό που ορίζει:

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \bar{u}' = A\bar{u}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Με $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ συμβολίζουμε τον μοναδιαίο πίνακα. Θα χρησιμοποιούμε επίσης τον πίνακα $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ καθώς και τον $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ο πρώτος παριστά την **στροφή** κατά $\pi/2$ περί την αρχήν των αξόνων και ο δεύτερος την **ανάκλαση** ως προς τον x -άξονα. Με $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ συμβολίζουμε τον **ανάστροφο** του πίνακα A και με $\det(A) = ad - bc$ την **ορίζουσά** του. Αμέσως βλέπουμε ότι ισχύει:

$$\langle A\bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, A^T\bar{v} \rangle, \quad \forall \bar{u}, \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.13)$$

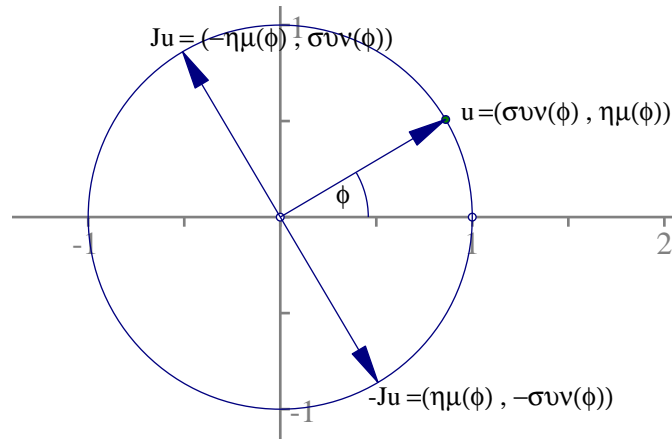
Ένας πίνακας λέγεται ορθογώνιος όταν ισχύει

$$AA^T = A^T A = I. \quad (3.14)$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς με τα στοιχεία του πίνακα A , βλέπουμε ότι η προηγούμενη είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τούτο ισοδυναμεί με το ότι οι γραμμές του πίνακα είναι διανύσματα μοναδιαία και ταυτόχρονα κάθετα μεταξύ τους. Οι ιδιότητες αυτές μας επιτρέπουν να περιγράψουμε πλήρως τους ορθογώνιους πίνακες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε το διάνυσμα της πρώτης γραμμής $\bar{u} = (a, b)$. Αυτό θα ορίζει ένα σημείο του μοναδιαίου κύκλου $(a, b) = (\text{συν}(\phi), \eta\mu(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Είναι προφανές ότι για το διάνυσμα της δεύτερης γραμμής δεν μένουν παρά δύο δυνατότητες $(c, d) = \pm(-\eta\mu(\phi), \text{συν}(\phi)) = \pm J\bar{u}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν:



Σχήμα 3.2: Οι γραμμές ορθογώνιου πίνακα

Πρόταση 3.5.1 Για κάθε ορθογώνιο πίνακα A , υπάρχει γωνία $\phi \in [0, 2\pi)$, έτσι ώστε ο A να έχει την μορφή

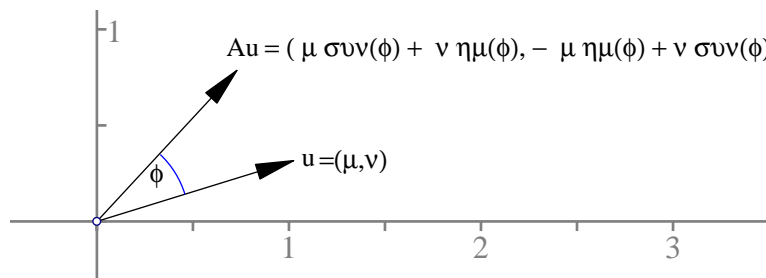
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{ή την μορφή} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Στην πρώτη περίπτωση $\det(A) = 1$ ενώ στην δεύτερη $\det(A) = -1$.

Πρόταση 3.5.2 Οι ορθογώνιοι πίνακες διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο $\langle A\bar{u}, A\bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$. Συνεπώς διατηρούν τα μήκη διανυσμάτων και την μεταξύ τους γωνία.

Πράγματι, κατά την 3.13 $\langle A\bar{u}, A\bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, A^T A\bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$. Τα υπόλοιπα είναι συνέπεια των ορισμών.

3.6 Στροφές

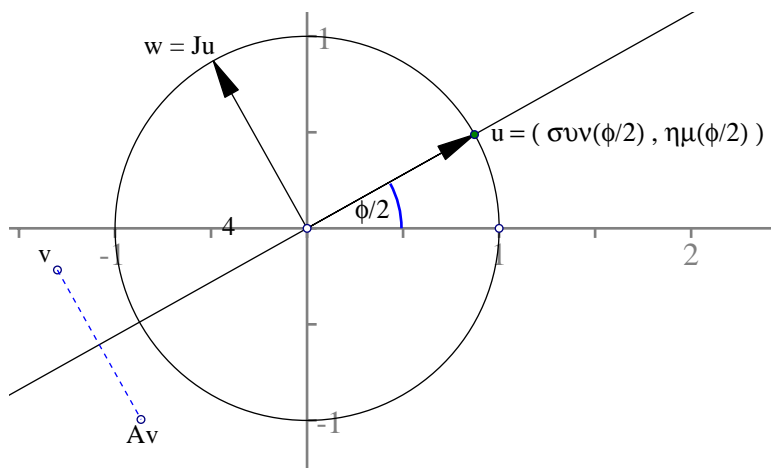
Σχήμα 3.3: Στροφή, $\det(A) = 1$

Ο μετασχηματισμός που παριστά ένας ορθογώνιος πίνακας A , δρα με διαφορετικό τρόπο πάνω στα διανύσματα, ανάλογα με την $\det(A) = \pm 1$. Εάν $\det(A) = 1$, τότε ο $A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ και γράφοντας το τυχόν διάνυσμα σε πολική μορφή, βλέπουμε, χρησιμοποιώντας απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\bar{u} = r(\cos(\theta), \sin(\theta)), \Leftrightarrow A\bar{u} = r(\cos(\theta - \phi), \sin(\theta - \phi)). \quad (3.15)$$

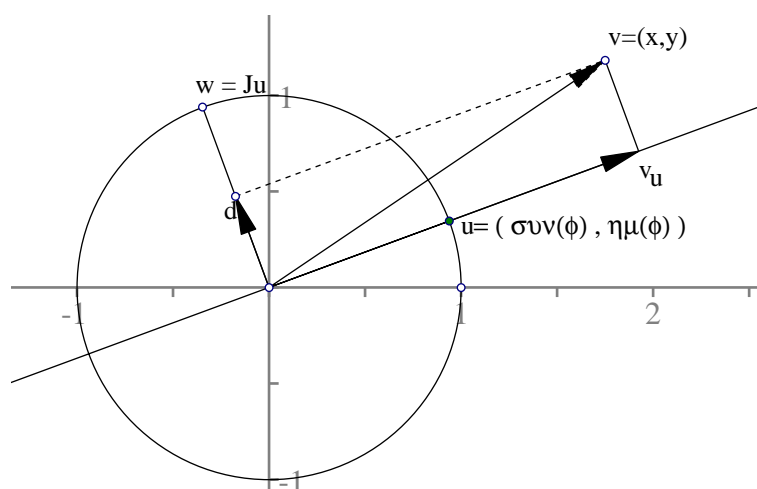
Τούτο σημαίνει ότι ο A στρέφει το τυχόν διάνυσμα \bar{u} περί το $\bar{0}$ κατά την γωνία $-\phi$, χωρίς να μεταβάλλει το μέτρο του. Για τούτο, ορθογώνιους πίνακες με ορίζουσα 1, τους ονομάζουμε **στροφές**.

3.7 Ανακλάσεις

Σχήμα 3.4: Ανάκλαση (ή κατοπτρισμός), $\det(A) = -1$

Εάν $\det(A) = -1$, τότε ο πίνακας έχει την μορφή $A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}$ και διαπιστώνουμε εύκολα (χρησιμοποιώντας πάλι απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες), ότι το διάνυσμα $\bar{u}_\phi = (\cos(\phi/2), \sin(\phi/2))$, παραμένει σταθερό: $A\bar{u}_\phi = \bar{u}_\phi$. Κατ' ανάγκην, επειδή ο A διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, άρα και τις γωνίες, το ορθογώνιο σ' αυτό μοναδιαίο διάνυσμα: $\bar{w} = (-\sin(\phi/2), \cos(\phi/2))$, θα ικανοποιεί $A\bar{w} = -\bar{w}$. (Άσκηση: Γιατί όχι $A\bar{w} = \bar{w}$;) Συνεπώς ο A , σ' αυτήν την περίπτωση στέλνει το τυχόν διάνυσμα $\bar{v} = x\bar{u}_\phi + y\bar{w}$, στο $A\bar{v} = x\bar{u}_\phi - y\bar{w}$, κατοπτρικό του \bar{v} ως προς την ευθεία που ορίζει το διάνυσμα \bar{u}_ϕ . Για τούτο, ορθογώνιους πίνακες με ορίζουσα -1 , τους ονομάζουμε **ανακλάσεις ή κατοπτρισμούς**.

3.8 Προβολή



Σχήμα 3.5: Προβολή διανύσματος σε ευθεία

Εκτός απ' αυτούς τους μετασχηματισμούς, το εσωτερικό γινόμενο εισάγει και την **προβολή** σε μιά ευθεία που ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{w} = (a, b)$. Πράγματι, από το

διάνυσμα αυτό ορίζεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} aa & ba \\ ab & bb \end{pmatrix}$ που έχει την ιδιότητα:

$$\bar{v} = (x, y) \Rightarrow A\bar{v} = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle \bar{w} = \|\bar{v}\| \sin(\phi) \bar{w}.$$

Όπου ϕ η γωνία των \bar{v}, \bar{w} . Φυσικά το ορθογώνιο $J\bar{w} = (-b, a)$ του \bar{w} , προβάλλεται στο $\bar{0}$.

Αν το διάνυσμα $\bar{u} \neq \bar{0}$, τότε ορίζεται το **μοναδιαίο** $\bar{e}_u = \bar{u} / \|\bar{u}\|$. Για ένα τυχόν άλλο διάνυσμα \bar{v} , το

$$\bar{v}_u = \langle \bar{v}, \bar{e}_u \rangle \bar{e}_u = \|\bar{v}\| \sin(\angle(\bar{u}, \bar{v})) \bar{e}_u, \quad (3.16)$$

λέγεται **προβολή** του \bar{v} στο \bar{u} και είναι ένα πολλαπλάσιο του \bar{u} . Από τον ορισμό του, έχουμε αμέσως ότι η διαφορά $\bar{d} = \bar{v} - \bar{v}_u$ θα ικανοποιεί:

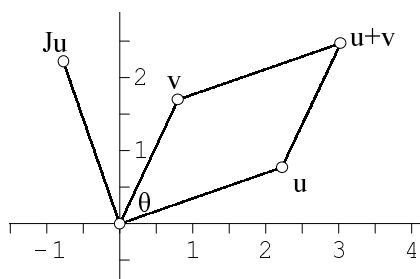
$$\bar{v} = \bar{v}_u + \bar{d} \Rightarrow \langle \bar{d}, \bar{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}_u, \bar{v}_u \rangle + \langle \bar{d}, \bar{d} \rangle. \quad (3.17)$$

Προκύπτει αμέσως ότι

$$\langle \bar{v}, \bar{d} \rangle = \langle \bar{d}, \bar{d} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - \langle \bar{v}_u, \bar{v}_u \rangle = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \eta\mu^2(\vartheta), \quad (3.18)$$

όπου $\vartheta = \angle(\bar{u}, \bar{v})$. Το $\bar{v}_u^\perp = \bar{d}$ ονομάζουμε **ορθογώνια συνιστώσα** του \bar{v} ως προς \bar{u} .

3.9 Εμβαδόν



Σχήμα 3.6: Παραλληλόγραμμα δύο διανυσμάτων, ο μετασχηματισμός J

Αν $P(\bar{u}, \bar{v})$ το παραλληλόγραμμα των $\bar{u} = (x, y)$, $\bar{v} = (x', y')$, τότε ορίζουμε το **εμβαδόν** $\varepsilon(P(\bar{u}, \bar{v}))$ του παραλληλογράμμου:

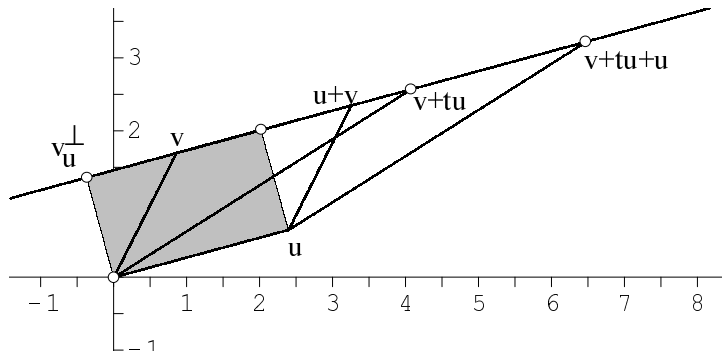
$$\varepsilon(P(\bar{u}, \bar{v})) = \left| \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \right|. \quad (3.19)$$

Συχνά την τελευταία ορίζουσα συμβολίζουμε με $\det(\bar{u}, \bar{v})$.

Πρόταση 3.9.1 Για κάθε πραγματικό αριθμό $t \in \mathbb{R}$ και $\vartheta = \angle(\bar{u}, \bar{v})$, ισχύει:

$$\varepsilon(P(\bar{u}, \bar{v} + t\bar{u})) = \varepsilon(P(\bar{u}, \bar{v})) = \varepsilon(P(\bar{u}, \bar{v}_u^\perp)) = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \eta\mu(\vartheta). \quad (3.20)$$

Τούτο σημαίνει ότι όλα τα παραλληλόγραμμα που ορίζονται για τις διάφορες τιμές του t έχουν το ίδιο εμβαδόν, ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (όταν $\vartheta = \pi/2$) με την ίδια βάση με το αρχικό.



Σχήμα 3.7: Εμβαδόν παραλληλογράμμου, παραλληλόγραμμο ίσων εμβαδών

Πράγματι, βασική ιδιότητα της ορίζουσας είναι ότι μπορούμε να προσθέσουμε στην πρώτη στήλη ένα πολλαπλάσιο της δεύτερης στήλης χωρίς να μεταβληθεί η τιμή της: $\det(\bar{u} + t\bar{v}, \bar{v}) = \det(\bar{u}, \bar{v})$. Τα υπόλοιπα συνάγονται με απλές πράξεις.

Η ορίζουσα και το εσωτερικό γινόμενο συνδέονται με τον μετασχηματισμό

$$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad J(x, y) = (-y, x).$$

Είναι προφανές ότι

$$x \cdot y' - x' \cdot y = \det(\bar{u}, \bar{v}) = \langle J\bar{u}, \bar{v} \rangle, \quad \text{Καθώς και ότι } \langle \bar{u}, J\bar{u} \rangle = 0. \quad (3.21)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3.9

Πρόβλημα 3.9.1 Δείξε την $\bar{u} = \bar{0} \Leftrightarrow \|\bar{u}\| = 0$.

Πρόβλημα 3.9.2 Συμπλήρωσε τις λεπτομέρειες σχετικά με την ισότητα, στην πρόταση 3.3.3.

Πρόβλημα 3.9.3 Δείξε επαγωγικά ότι $\|\bar{u}_1 + \dots + \bar{u}_k\| \leq \|\bar{u}_1\| + \dots + \|\bar{u}_k\|$.

Πρόβλημα 3.9.4 Δείξε την $\bar{u} = \bar{0} \Leftrightarrow \|\bar{u}\| = 0$.

Πρόβλημα 3.9.5 Δείξε ότι ένας πίνακας που ικανοποιεί την σχέση 3.14, έχει αυτόματα ορίζουσα ± 1 . Δείξε ακόμη ότι το γινόμενο ορθογωνίων πινάκων είναι πάλι ορθογώνιος πίνακας και ότι το γινόμενο στροφών $A(\varphi)$, $A(\varphi')$ είναι στροφή $A(\varphi + \varphi')$. Με $A(\varphi)$ εννοούμε εδώ τον πίνακα $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \sigma\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\varphi \end{pmatrix}$. Δείξε ανάλογα ότι το γινόμενο μιάς στροφής και μιάς ανάκλασης είναι ανάκλαση.

Πρόβλημα 3.9.6 Δείξε την ταυτότητα $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 - \|\bar{u} - \bar{v}\|^2)$. Συμπεράνε ότι ένας πίνακας που διατηρεί το μέτρο διανυσμάτων, διατηρεί και το εσωτερικό γινόμενο και είναι ορθογώνιος.

Πρόβλημα 3.9.7 Βρες όλους τους ορθογώνιους πίνακες A που ικανοποιούν $\det(A) = 1$ και $A^2 = I$. Δείξε ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας ανάκλασης ($\det(A) = -1$), ικανοποιεί $A^2 = I$. Περίγραψε το γεωμετρικό περιεχόμενο των προηγούμενων σχέσεων.

Πρόβλημα 3.9.8 **Πρόβλημα 3.9.9** Δείξε ότι αν το διάνυσμα \bar{v} είναι κάθετο στο \bar{u} και έχει το ίδιο μέτρο, τότε $\bar{v} = \pm J\bar{u}$.

Πρόβλημα 3.9.10 Δείξε την $\|\bar{u}\| = \|J\bar{u}\|$. Συμπεράνε: $|\det(\bar{u}, \bar{v})| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 3.9.11 Δείξε ότι εάν τα διανύσματα \bar{u} , \bar{v} , είναι κάθετα, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου τους (ορθογώνιο) ισούται με το γινόμενο των μέτρων $\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|$.

Κεφάλαιο 4

Μετρικές έννοιες

4.1 Απόσταση, μήκος, γωνία

Απόσταση $d(\bar{u}, \bar{v})$ δύο σημείων \bar{u}, \bar{v} λέγεται ο αριθμός

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \| \bar{u} - \bar{v} \| . \quad (4.1)$$

Πρόταση 4.1.1 (Τριγωνική ανισότητα) $\forall \bar{u}, \forall \bar{w}, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ ισχύουν η ανισότητες

$$d(\bar{u}, \bar{v}) \leq d(\bar{u}, \bar{w}) + d(\bar{w}, \bar{v}). \quad (4.2)$$

$$d(\bar{u}, \bar{v}) \geq |d(\bar{u}, \bar{w}) - d(\bar{w}, \bar{v})|. \quad (4.3)$$

Πράγματι οι ιδιότητες αυτές μεταφράζονται στις αντίστοιχες ανισότητες του προηγούμενου κεφαλαίου:

$$\| \bar{u} - \bar{v} \| \leq \| \bar{u} - \bar{w} \| + \| \bar{w} - \bar{v} \| ,$$

και

$$\| \bar{u} - \bar{v} \| \geq | \| \bar{u} - \bar{w} \| - \| \bar{w} - \bar{v} \| | ,$$

και δεν είναι άλλες από τις γνωστές ιδιότητες των μηκών των πλευρών τριγώνου με κορυφές τα $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την διαφορά τους.

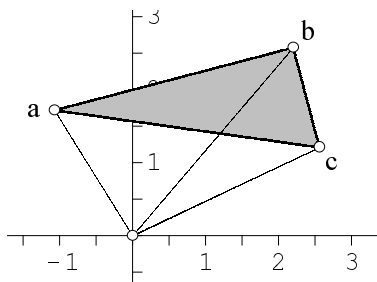
Θεωρούμε ότι ένα **τρίγωνο** ορίζεται από τις **κορυφές** του, δηλαδή τρία σημεία: $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. **Μήκος** μιάς πλευράς, π.χ. της uv ορίζουμε την απόσταση $d(\bar{u}, \bar{v}) = \| \bar{u} - \bar{v} \|$. Συχνά για το μήκος θα χρησιμοποιούμε και το σύμβολο $|uv| = d(\bar{u}, \bar{v})$. **Γωνία** σε μιά κορυφή, π.χ. την \bar{v} ορίζουμε την $\vartheta = \angle(\bar{u} - \bar{v}, \bar{w} - \bar{v})$.

Πρόταση 4.1.2 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Δοθέντων τριών σημείων $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ που σχηματίζουν τρίγωνο ορθογώνιο στο \bar{b} , το τετράγωνο του μήκους της υποτεινούς δηλ. πλευράς έναντι της ορθής γωνίας, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο άλλων πλευρών.

Πράγματι, σύμφωνα με τους ορισμούς μας, ορθή γωνία στο \bar{b} σημαίνει ότι $\langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{c} - \bar{b} \rangle = 0$. Αυτή, σύμφωνα με τις (3.4-3.6), συνεπάγεται αμέσως:

$$\langle \bar{a} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{c} \rangle = \langle \bar{a} - \bar{b} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{b} - \bar{c} \rangle = \langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} \rangle + \langle \bar{b} - \bar{c}, \bar{b} - \bar{c} \rangle ,$$

που σημαίνει ακριβώς το ζητούμενο $\| \bar{a} - \bar{c} \|^2 = \| \bar{a} - \bar{b} \|^2 + \| \bar{b} - \bar{c} \|^2$.



Σχήμα 4.1: Τρίγωνο τριών σημείων, Θεώρημα Πυθαγόρα

Πρόταση 4.1.3 (Θεώρημα συνημιτόνου) Δοθέντων τριών σημείων $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\|\bar{a} - \bar{c}\|^2 &= \|\bar{a} - \bar{b}\|^2 + \|\bar{c} - \bar{b}\|^2 - 2 \cdot \langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{c} - \bar{b} \rangle \\ &= \|\bar{a} - \bar{b}\|^2 + \|\bar{c} - \bar{b}\|^2 - 2 \cdot \text{συν}(\vartheta) \cdot \|\bar{a} - \bar{b}\| \cdot \|\bar{c} - \bar{b}\|,\end{aligned}$$

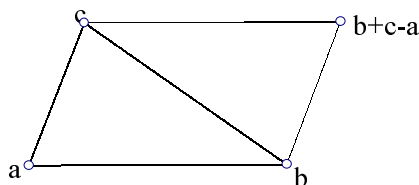
όπου $\vartheta = \angle(\bar{a} - \bar{b}, \bar{c} - \bar{b})$.

Η πρόταση, που είναι γενίκευση του θεωρήματος του Πυθαγόρα, αποδεικνύεται αμέσως χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και αναπτύσσοντας το $\|\bar{a} - \bar{c}\|^2 = \langle \bar{a} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{c} \rangle = \langle \bar{a} - \bar{b} + \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + \bar{b} - \bar{c} \rangle$.

4.2 Όμοια τρίγωνα

Πρόταση 4.2.1 Δύο τρίγωνα έχοντα τις πλευρές τους ίσες μίαν προς μίαν έχουν και τις γωνίες τους ίσες μίαν προς μίαν.

Πράγματι, αν α, β, γ συμβολίζουν τις γωνίες και a, b, c τα μήκη των απέναντι πλευρών του τριγώνου αντίστοιχα, τότε κατά την (4.1.3), θα έχουμε $\text{συν}(\alpha) = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc) = (b'^2 + c'^2 - a'^2)/(2b'c') = \text{συν}(\alpha')$. Και ανάλογα για τις άλλες γωνίες.



Σχήμα 4.2: Παραλληλόγραμμο, άθροισμα γωνιών τριγώνου

Γενικώτερα, δοθέντων τεσσάρων σημείων $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{c}$, λέμε ότι αυτά είναι κορυφές **παραλληλογράμμου** (ή ορίζουν παραλληλόγραμμο), όταν η διαφορά δύο εξ' αυτών ισούται (εκτός προσήμου) με την διαφορά των δύο άλλων π.χ. στο $\bar{a} - \bar{b} = \bar{d} - \bar{c}$. Αυτόματα τότε έχουμε ανάλογη σχέση και για τις άλλες διαφορές: $\bar{a} - \bar{d} = \bar{b} - \bar{c}$. Η επόμενη πρόταση είναι συνέπεια των ορισμών.

Πρόταση 4.2.2 Σε κάθε παραλληλόγραμμο, δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές και δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. Επίσης, τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται από μία διαγώνιο παραλληλογράμμου έχουν ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

Πρόταση 4.2.3 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, το άθροισμα των γωνιών του είναι 2 ορθές.

Πράγματι, αν οι κορυφές του τριγώνου είναι $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, τότε το $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c} - \bar{a}$ συμπληρώνει το τρίγωνο σε ένα παραλληλόγραμμο και κατά την προηγούμενη πρόταση $\alpha + \beta' (= \beta) + \gamma = 2\pi$.

Πρόταση 4.2.4 (Θεώρημα παραλληλογράμμου) Το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

Πράγματι, αν οι κορυφές του παραλληλογράμμου ορίζονται από τα σημεία $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, τότε λόγω παραλληλίας θα ισχύει $\bar{b} - \bar{a} = \bar{c} - \bar{d}$, $\bar{c} - \bar{b} = \bar{d} - \bar{a}$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα συνημιτόνου στις δύο διαγωνίους και προσθέτουμε τις ισότητες κατά μέλη

$$\begin{aligned}\|\bar{c} - \bar{a}\|^2 &= \|\bar{c} - \bar{b}\|^2 + \|\bar{b} - \bar{a}\|^2 - 2 \cdot \langle \bar{c} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} \rangle, \\ \|\bar{d} - \bar{b}\|^2 &= \|\bar{d} - \bar{c}\|^2 + \|\bar{c} - \bar{b}\|^2 - 2 \cdot \langle \bar{d} - \bar{c}, \bar{b} - \bar{c} \rangle.\end{aligned}$$

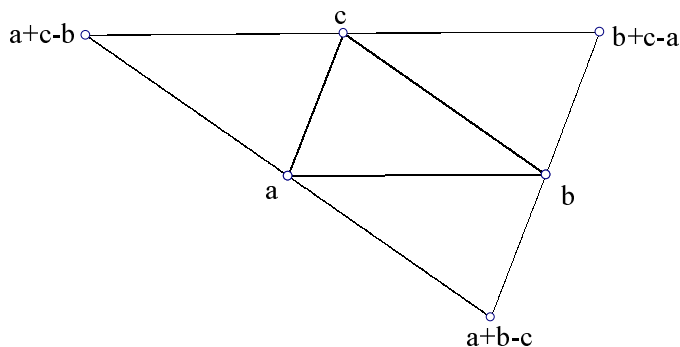
Τα εσωτερικά γινόμενα έχουν αντίθετα πρόσημα και αλληλοαναιρούνται κατά την πρόσθεση, εξ' ου και το ζητούμενο. Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε και το αντίστροφο.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $P(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{c})$, το ορίζουμε να είναι ίσο με $\varepsilon(P(\bar{b} - \bar{a}, \bar{c} - \bar{a}))$. Προφανώς η πρόταση 3.9.1 ισχύει και για τα γενικότερα αυτά πολύγωνα.

Πρόταση 4.2.5 (Θεώρημα ημιτόνων) Σε κάθε τρίγωνο με κορυφές $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, με γωνίες στις κορυφές αντίστοιχα α, β, γ , ισχύει

$$\frac{\|\bar{c} - \bar{b}\|}{\eta\mu(\alpha)} = \frac{\|\bar{a} - \bar{c}\|}{\eta\mu(\beta)} = \frac{\|\bar{b} - \bar{a}\|}{\eta\mu(\gamma)} = \lambda. \quad (4.4)$$

Αργότερα θα δούμε ότι το λ ισούται με την διάμετρο $2R$ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



Σχήμα 4.3: Θεώρημα ημιτόνων τριγώνου

Πράγματι, θεωρούμε τα διανύσματα $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c} - \bar{a}$, $\bar{e} = \bar{c} + \bar{a} - \bar{b}$, $\bar{f} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, τα οποία, μαζί με τις κορυφές του τριγώνου, συμπληρώνουν τρία παραλληλόγραμμα. Τα παραλληλόγραμμα αυτά έχουν, ανά δύο, κοινή βάση και εφαρμόζεται η πρόταση 3.9.1 :

$$\|\bar{b} - \bar{a}\| \|\bar{c} - \bar{b}\| \eta\mu(\beta) = \|\bar{c} - \bar{b}\| \|\bar{a} - \bar{c}\| \eta\mu(\gamma) = \|\bar{a} - \bar{c}\| \|\bar{b} - \bar{a}\| \eta\mu(\alpha).$$

Η απόδειξη προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη κάθε μία από τις τρεις αυτές ισότητες.

Άμεση συνέπεια είναι η εξής: Ας υποθέσουμε ότι δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με μήκη πλευρών x, y, z και x', y', z' αντίστοιχα, έχουν ίσες γωνίες $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ και $\gamma = \gamma'$, τότε από την προηγούμενη πρόταση, οι αντίστοιχες πλευρές τους θα είναι ανάλογες: $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$. Αντίστροφα, αν έχουν ανάλογες πλευρές, τότε εφαρμόζοντας την (4.1.3) βλέπουμε ότι έχουν ίσες γωνίες αντίστοιχα απέναντι των αναλόγων πλευρών.

Πρόταση 4.2.6 Δύο τρίγωνα με γωνίες ίσες μίαν προς μίαν, έχουν αντίστοιχες πλευρές ανάλογες. Αντίστροφα, αν δύο τρίγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές ανάλογες, τότε απέναντι αναλόγων πλευρών κείνται ίσες γωνίες. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια.

Πρόταση 4.2.7 Σε κάθε τρίγωνο απέναντι μεγαλύτερης πλευράς κείται μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα, απέναντι μεγαλύτερης γωνίας κείται μεγαλύτερη πλευρά.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μήκη πλευρών x, y, z και απέναντι γωνίες αντίστοιχα α, β, γ . Εάν $x > y$, τότε το συμπέρασμα συνάγεται από την $\frac{x}{\eta\mu(\alpha)} = \frac{y}{\eta\mu(\beta)}$. (4.2.5) Ανάλογα σκεφτόμαστε για γωνίες $\alpha > \beta$. Άμεση λογική συνέπεια της προηγούμενης είναι και η :

Πρόταση 4.2.8 Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε και μόνον τότε, όταν οι βασικές γωνίες του είναι ίσες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 4.2

Πρόβλημα 4.2.1 Δείξε ότι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο σημείων είναι συντομότερο από κάθε τεθλασμένη μεταξύ των ιδίων σημείων. Ως μήκος της τεθλασμένης θεωρούμε το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων που την αποτελούν.

Πρόβλημα 4.2.2 Εφαρμόζοντας το θεώρημα συνημιτόνου σε μιά από τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, δείξε ότι το συνημίτονο μιάς γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, διαφορετικής από την ορθή, ισούται με τον λόγο του μήκους της προσκειμένης πλευράς της γωνίας προς την υποτείνουσαν. Συμπεράνε ότι οι μη-ορθές γωνίες του τριγώνου είναι οξείες και έχουν ημίτονο ίσο με τον λόγο της απέναντι πλευράς προς την υποτείνουσαν.

Πρόβλημα 4.2.3 Δείξε το αντίστροφο του θεωρήματος του Πυθαγόρα. Δηλαδή, εάν στο τρίγωνο $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ ισχύει $\|\bar{a} - \bar{c}\|^2 = \|\bar{a} - \bar{b}\|^2 + \|\bar{b} - \bar{c}\|^2$, τότε η γωνία στο \bar{b} είναι ορθή.

Πρόβλημα 4.2.4 Δείξε ότι αν τα διανύσματα \bar{u}, \bar{v} έχουν το ίδιο μέτρο $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = h$, τότε τα διανύσματα $\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v}$ είναι κάθετα.

Πρόβλημα 4.2.5 Δείξε, χρησιμοποιώντας μοναδιαία διανύσματα και την (3.9.9), ότι αν δύο γωνίες έχουν κάθετες πλευρές, τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Πρόβλημα 4.2.6 Από το τρίγωνο με κορυφές $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, κατασκευάζουμε το τρίγωνο με κορυφές $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c} - \bar{a}, \bar{e} = \bar{c} + \bar{a} - \bar{b}, \bar{f} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, . Δείξε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα $\bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$, έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό και πλευρές διπλασίου μήκους. Δείξε επίσης ότι τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις κορυφές του και τις κορυφές του αρχικού τριγώνου έχουν ίσες γωνίες και ίσες πλευρές.

Πρόβλημα 4.2.7 Δείξε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών. Συμπεράνε ότι η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη εκάστης των εντός και απέναντι αυτής γωνιών.

Πρόβλημα 4.2.8 Ένα παραλληλόγραμμο λέγεται **ρόμβος** όταν όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Δείξε ότι σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοι είναι κάθετοι.

Πρόβλημα 4.2.9 Δείξε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν ίσες γωνίες και ίσες πλευρές αντίστοιχα.

Πρόβλημα 4.2.10 Δείξε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες πλευρές αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν ίσες γωνίες και ίσες πλευρές αντίστοιχα.

Σημειώνουμε ότι η πρόταση (4.2.1) και οι ασκήσεις (4.2.9), (4.2.10) υποβάλουν την έννοια της ισότητας δύο τριγώνων. Απο την ισότητα τριών στοιχείων του τριγώνου συμπεραίνουμε την ισότητα των γωνιών και των πλευρών του αντίστοιχα. Ωστόσο για ισότητα τριγώνων και γενικώτερα για ισότητα σχημάτων θα μιλήσουμε αργότερα, μετά την μελέτη ορισμένων μετασχηματισμών του \mathbb{R}^2 . Παρόμοια η πρόταση 4.2.6 υποβάλει την έννοια της ομοιότητας δύο τριγώνων με ίσες γωνίες. Και γι' αυτήν όμως θα μιλήσουμε μετά τα περί μετασχηματισμών.

Κεφάλαιο 5

Ευθεία

5.1 Εξίσωση ευθείας

Στο \mathbb{R}^2 η ευθεία ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $\bar{x} = (x, y)$ που πληρούν μία εξίσωση της μορφής:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \quad (5.1)$$

Προφανώς, η τριάδα αριθμών $(\alpha', \beta', \gamma')$ ορίζει την ίδια με την προηγούμενη ευθεία, τότε και μόνον, όταν

$$(\alpha', \beta', \gamma') = \lambda \cdot (\alpha, \beta, \gamma), \quad \lambda \neq 0. \quad (5.2)$$

5.2 Σύστημα δύο ευθειών

Δοθήσης μίας ακόμη ευθείας $\alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0$, τα κοινά σημεία των δύο ευθειών θα ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτοχρόνως. Θα είναι λοιπόν λύσεις του **συστήματος**:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0. \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Από την στοιχειώδη θεωρία γραμμικών συστημάτων, γνωρίζουμε ότι το σύστημα αυτό έχει μία ακριβώς λύση (οι ευθείες τέμνονται), τότε και μόνον, όταν η ορίζουσα

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \neq 0. \quad (5.4)$$

Ενώ αντίθετα, δεν έχει καμμία λύση όταν οι ευθείες είναι διαφορετικές και η ορίζουσα μη-δενίζεται, που σημαίνει ότι $\alpha' = \lambda\alpha, \beta' = \lambda\beta, \lambda \neq 0$. Τότε διαιρώντας την δεύτερη με το λ , βλέπουμε ότι ισχύει:

Πρόταση 5.2.1 Δύο διαφορετικές ευθείες ϵ και ϵ' είναι **παράλληλες** (δεν τέμνονται) τότε ακριβώς όταν μπορούν να γραφούν

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma' = 0, \quad \gamma \neq \gamma'. \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

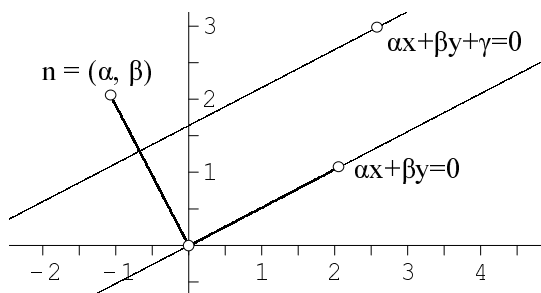
Συμπεραίνομε αμέσως τα επόμενα:

Πρόταση 5.2.2 Δύο διαφορετικές ευθείες ϵ και ϵ' ή έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο ή είναι παράλληλες (δεν τέμνονται).

Πρόταση 5.2.3 (Αξίωμα παραλλήλων) Δοθήσης ευθείας ϵ και σημείου $A(x_0, y_0)$ εκτός αυτής, υπάρχει μία ακριβώς παράλληλος ϵ' της ϵ , διά του A .

Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι οι ϵ και ϵ' έχουν την μορφή (5.5) με δεδομένα τα α, β, γ και άγνωστο το γ' , που καθορίζει ακριβώς την παράλληλο. Ευρίσκουμε την μία και μοναδική τιμή του γ' , αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του A στην εξίσωση: $\gamma' = -\alpha x_0 - \beta y_0$.

Πρόταση 5.2.4 Εάν ευθεία η τέμνει ευθεία ϵ σε ένα ακριβώς σημείο A , τότε θα τέμνει και κάθε παράλληλο ϵ' της ϵ .



Σχήμα 5.1: Παράλληλες ευθείες, σημασία των α, β

5.3 Κάθετη κατεύθυνση

Κατά την (5.5), οι ευθείες $ax + by + \gamma = 0$ ($\gamma \neq 0$), $ax + by = 0$, είναι παράλληλες. Η δεύτερη εξίσωση όμως φανερώνει την σημασία των συντελεστών α, β : Τα σημεία $\bar{u} = (x, y)$ αυτής της ευθείας ορίζουν διανύσματα κάθετα στο σταθερό διάνυσμα $\bar{n} = (\alpha, \beta)$. Μεταξύ αυτών είναι και το $J\bar{n}$ (3.21), το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει την **κοινή κατεύθυνση** των παραλλήλων ευθειών. Το διάνυσμα \bar{n} είναι ένα **κάθετο** προς την κατεύθυνση των ευθειών. Τούτο γενικεύεται αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις για δύο σημεία της ίδιας ευθείας: $ax + by + \gamma = 0$, $ax' + by' + \gamma = 0$. Βλέπουμε αμέσως ότι το διάνυσμα της διαφοράς τους ικανοποιεί:

$$\bar{u} - \bar{u}' = (x - x', y - y') \quad , \quad \bar{n} = (\alpha, \beta) \quad , \quad \langle \bar{u} - \bar{u}', \bar{n} \rangle = 0 \quad . \quad (5.6)$$

Άμεση συνέπεια αυτής είναι η **παραμετρική** παράσταση της ευθείας που δείχνει και την στενή σχέση της με τους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόταση 5.3.1 Δοθήσης ευθείας ϵ : $ax + by + \gamma = 0$, και σημείου $\bar{u}_0 = (x_0, y_0)$ αυτής, το σημείο $\bar{u} = (x, y)$ περιέχεται στην ευθεία αν και μόνον αν $\langle \bar{u}_0 - \bar{u}, \bar{n} \rangle = 0$, όπου $\bar{n} = (\alpha, \beta)$. Τούτο σημαίνει ότι τα σημεία της ευθείας ϵ συμπίπτουν με το σύνολο $\{\bar{u}_0 + t \cdot J\bar{n} : t \in \mathbb{R}\}$.

Από την πρόταση αυτή βλέπουμε ότι για δύο σημεία $\bar{u}_0 = (x_0, y_0)$, $\bar{u}_1 = (x_1, y_1)$, το σύνολο των σημείων

$$\bar{g}(t) = \bar{u}_0 + t \cdot (\bar{u}_1 - \bar{u}_0) = (1 - t) \cdot \bar{u}_0 + t \cdot \bar{u}_1 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad (5.7)$$

συμπίπτει με το σύνολο των σημείων της ευθείας $ax + by + \gamma = 0$, όπου $\bar{n} = (\alpha, \beta) = J(\bar{u}_1 - \bar{u}_0)$ και $\gamma = -\alpha x_0 - \beta y_0$. Προφανώς δε η ευθεία αυτή περιέχει τα $\bar{u}_0 = \bar{g}(0)$ και $\bar{u}_1 = \bar{g}(1)$. Αυτό αποδεικνύει την **ύπαρξη** της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία και η (5.2.2) συμπληρώνει το μονοσήμαντο στην επόμενη πρόταση, που κι' αυτή αποτελεί αξίωμα στην συνθετική μέθοδο:

Πρόταση 5.3.2 Δοθέντων δύο διαφορετικών σημείων $A(x', y')$ και $B(x'', y'')$, υπάρχει μία ακριβώς ευθεία που τα περιέχει.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε την συγγραμμικότητα είναι ο εξής: Τα δοθέντα σημεία (x', y') , (x'', y'') καθώς και το τρέχον σημείον (x, y) επί της ζητούμενης ευθείας (άγνωστα τα α, β, γ) θα ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &= 0, \\ \alpha x' + \beta y' + \gamma &= 0, \\ \alpha x'' + \beta y'' + \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Τούτο είναι ομογενές σύστημα με τρεις αγνώστους α, β, γ . Άρα θα έχει λύση, τότε ακριβώς όταν η ορίζουσα του συστήματος μηδενίζεται:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(y' - y'') + y(x'' - x') + (x'y'' - y'x'') = 0. \quad (5.9)$$

Την ύπαρξη της ευθείας εξασφαλίζουμε παίρνοντας $\alpha = y' - y''$, $\beta = x'' - x'$, $\gamma = x'y'' - y'x''$. Η προηγούμενη σχέση είναι αναγκαία και ικανή για να είναι τρία σημεία (x, y) , (x', y') , (x'', y'') **συνευθειακά** δηλ. να περιέχονται στην ίδια ευθεία. Αναδιατάσσοντας τους όρους βλέπουμε ότι αυτή γράφεται στην μορφή:

$$(x'y'' - y'x'') + (x''y - y''x) + (xy' - yx') = 0. \quad (5.10)$$

5.4 Λόγος

Στην παραμετρική παράσταση της ευθείας $\bar{g}(t) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$, για $t = 0, t = 1$ έχουμε τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, για $t = 1/2$ έχουμε το **μέσον**, για $t = 2$ έχουμε το διπλάσιο του $\bar{a}\bar{b}$, κτλ.. Η συνάρτηση $\bar{g}(t)$ τοποθετεί το σύνολο \mathbb{R} πάνω στο σύνολο των σημείων της ευθείας που ορίζεται από τα \bar{a}, \bar{b} , έτσι ώστε το διάστημα $[0,1]$ να απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $\bar{a}\bar{b}$. Γενικότερα, η απεικόνιση είναι τέτοια, ώστε το τυχόν διάστημα $[\alpha, \beta]$ πραγματικών αριθμών να απεικονίζονται στο **ευθύγραμμο τμήμα** $\bar{g}(\alpha)\bar{g}(\beta) = \bar{g}([\alpha, \beta]) \subset \varepsilon$. **Μήκος** του ευθυγράμμου τμήματος $\bar{a}\bar{b}$, λέμε την απόσταση $d(\bar{a}, \bar{b}) = \|\bar{b} - \bar{a}\|$. **Προσανατολισμένο λόγο** του σημείου $\bar{c} = \bar{g}(t) \neq \bar{b}$ της ευθείας ως προς τα \bar{a}, \bar{b} , λέμε τον λόγο $\langle \bar{a} - \bar{c}, \bar{b} - \bar{c} \rangle / \langle \bar{b} - \bar{c}, \bar{b} - \bar{c} \rangle = t/(t-1), t \neq 1$.

Πρόταση 5.4.1 Για κάθε αριθμό $k \neq 1$, υπάρχει ένα ακριβώς σημείο $\bar{c} = \bar{g}(t)$ της ευθείας δια των σημείων \bar{a}, \bar{b} του οποίου ο προσανατολισμένος λόγος ως προς τα \bar{a}, \bar{b} , είναι k .

Πράγματι, το μόνο σημείο στην ευθεία με την ιδιότητα αυτή είναι το $g(t) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$, με $t = k/(k-1)$.

Πρόταση 5.4.2 Παράλληλες μεταξύ παραλλήλων αποτέμνουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

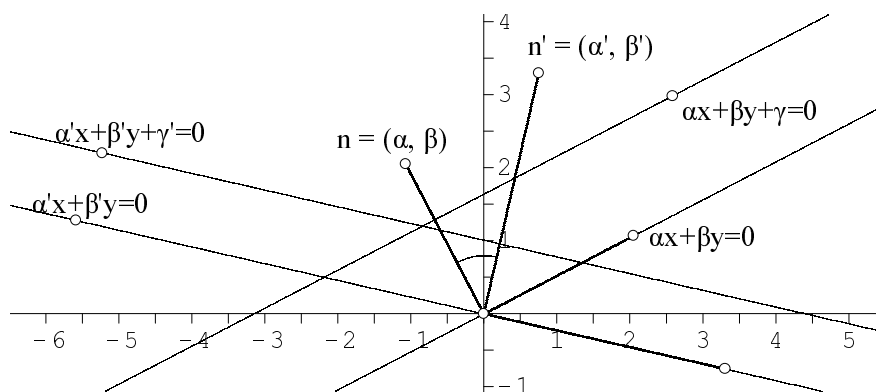
Πράγματι, βλέπουμε εύκολα ότι τα σημεία τομής αποτελούν κορυφές παραλληλογράμμου.

Γωνία δύο ευθειών $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ λέμε την μικρότερη του $\pi/2$ γωνία δύο καθέτων τους, όπως οι $\bar{n} = (\alpha, \beta)$ και $\bar{n}' = (\alpha', \beta')$. Κάθετες λέμε τις ευθείες όταν

$\langle \bar{n}, \bar{n}' \rangle = 0$. Από την προηγούμενη συζήτηση για τις παράλληλες ευθείες, αντικαθιστώντας το \bar{n} με το $J\bar{n}$, βλέπουμε ότι για σταθερά α, β και μεταβλητό γ , η εξίσωση

$$-\beta x + \alpha y + \gamma = 0,$$

παριστά οικογένεια παραλλήλων καθέτων προς την προηγούμενη $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Συμπεραίνουμε τις εξής προτάσεις:

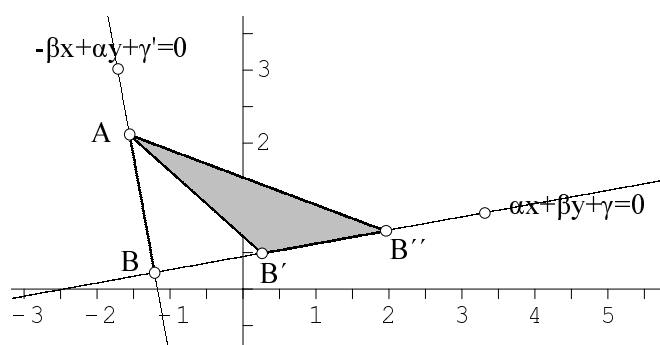


Σχήμα 5.2: Γωνία δύο ευθειών

Πρόταση 5.4.3 Για σταθερά a, β , όλες οι ευθείες της οικογένειας παραλλήλων $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (μεταβλητό γ) είναι κάθετες σε όλες τις ευθείες της οικογένειας $-\beta x + \alpha y + \gamma' = 0$ (μεταβλητό γ').

Πρόταση 5.4.4 Δύο διαφορετικές ευθείες, κάθετες σε μία τρίτη είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Πρόταση 5.4.5 Δοθήσης ευθείας ϵ και σημείου A , υπάρχει μία ακριβώς ευθεία ϵ' , κάθετος της ϵ διά του A .



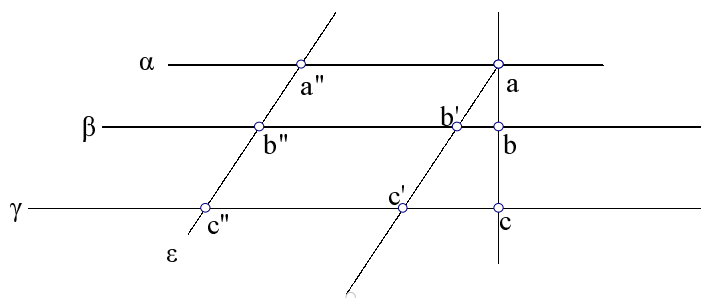
Σχήμα 5.3: Απόσταση σημείου A από ευθεία ϵ

5.5 Θεώρημα Θαλή

Από την προηγούμενη πρόταση, εξασφαλίζουμε ένα σημείο τομής B των ϵ και ϵ' . Η απόσταση $d(A, B)$ είναι η μικρότερη δυνατή (Πυθαγόρειο θεώρημα) μεταξύ όλων των αποστάσεων $d(A, B')$, όπου το B' διατρέχει την ϵ . Το B λέγεται **προβολή** ή **πόδας της καθέτου** από το A στην ϵ . Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $AB'B''$ και τις προηγούμενες δύο προτάσεις, βλέπουμε ότι ισχύουν οι επόμενες δύο:

Πρόταση 5.5.1 Έστω B ο πόδας της καθέτου από το σημείο $A(\bar{a}_0)$, επί την ευθείαν ϵ . Όσον περισσότερο απέχει το σημείον B' της ϵ από τον πόδα B , τόσο μεγαλύτερα είναι η απόσταση $d(A, B)$.

Πρόταση 5.5.2 Έστωσαν ϵ, ϵ' δύο παράλληλοι ευθείες. Καθώς το σημείο A κινείται επί της ϵ , η απόστασή του από την ϵ' δεν μεταβάλλεται αλλά παραμένει σταθερά ίση με λ . Το λ ονομάζεται απόσταση των δύο παραλλήλων.

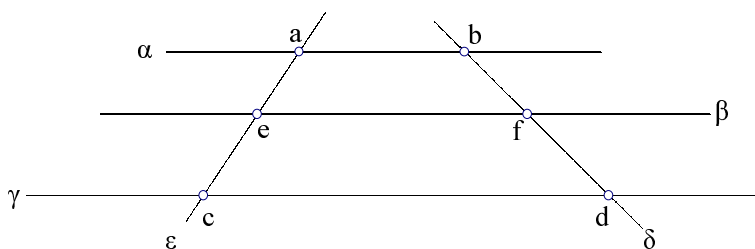


Σχήμα 5.4: Θεώρημα του Θαλή

Πρόταση 5.5.3 Θεώρημα Θαλή (600 π.Χ.) Έστωσαν α, β, γ τρεις παράλληλες ευθείες και ϵ τυχούσα τέμνουσα αυτών. Ο λόγος των τμημάτων της ϵ που αποτεμνουν οι παράλληλες είναι ανεξάρτητος της ϵ .

Έστω ότι $\bar{a}'', \bar{b}'', \bar{c}''$ είναι τα σημεία τομής της ϵ με τις τρεις ευθείες. Ας θεωρήσουμε μία ευθεία δ , κάθετο και στις τρεις (5.4.3) και τέμνουσα αυτές στα $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ αντίστοιχως. Από το \bar{a} ας φέρομε παράλληλο προς την ϵ , τέμνουσα τις α, β, γ αντίστοιχα στα σημεία $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$. Από τα παραλληλόγραμμα έχουμε $\|\bar{a}'' - \bar{b}''\| / \|\bar{b}'' - \bar{c}''\| = \|\bar{a} - \bar{b}'\| / \|\bar{b}' - \bar{c}'\| = \|\bar{a} - \bar{b}\| / \|\bar{b} - \bar{c}\|$. Η τελευταία, λόγω της ισότητας των γωνιών των τριγώνων (4.2.6). Ο τελευταίος λόγος όμως είναι ανεξάρτητος της ϵ .

Υπάρχει και ένα είδος αντιστρόφου που στηρίζεται στην (5.4.1):



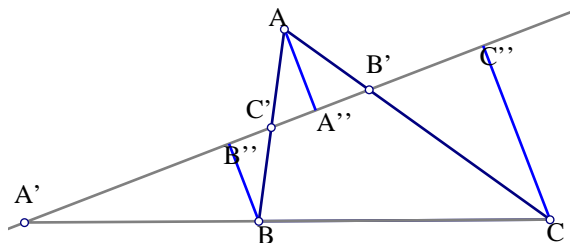
Σχήμα 5.5: Αντίστροφο θεωρήματος του Θαλή

Πρόταση 5.5.4 Έστωσαν α, γ δύο παράλληλες ευθείες και δ, ϵ τυχούσες τέμνουσες αυτών, στα σημεία $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, και \bar{d} αντίστοιχα. Εάν τα σημεία \bar{e}, \bar{f} είναι επί των δ, ϵ αντίστοιχα και χωρίζουν τα τμήματα $\bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{d}$, σε μέρη ανάλογα, τότε η ευθεία β , δια των \bar{e}, \bar{f} είναι παράλληλος προς τις α, γ .

Πράγματι, αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε φέρνοντας από το \bar{e} παράλληλο προς την α , θα τέμναμε την ϵ σε σημείο \bar{f}' , έτσι ώστε τα \bar{e}, \bar{f}' να τέμνουν τα τμήματα $\bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{d}$ σε μέρη ανάλογα. Τότε θα είχαμε δύο σημεία \bar{f}, \bar{f}' , που διαιρούν το $\bar{c}\bar{d}$ στον ίδιο λόγο, που είναι άτοπο.

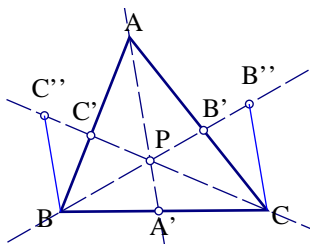
Πρόταση 5.5.5 (Θεώρημα του Μενελάου 100 μ.Χ.) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι τρία σημεία A', B', C' , επί των πλευρών (ή προεκτάσεων) BC, CA, AB , αντίστοιχα, του τριγώνου ABC είναι η:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \quad (5.11)$$



Σχήμα 5.6: θεώρημα του Μενελάου

Πράγματι, έστωσαν A'', B'', C'' , αντίστοιχα, οι προβολές των A, B, C , επί της ευθείας, εφ' ἧς υποθέτουμε κατ' αρχήν τα σημεία A, B, C . Θα δείξουμε ότι ισχύει η αναφερθήσα σχέση. Προς τούτο συγκρίνουμε τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα που δημιουργούνται (δες πρόταση 4.2.6): $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB''}{CC''}$, $\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC''}{AA''}$, $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA''}{BB''}$. Η σχέση προκύπτει αμέσως πολλαπλασιάζοντας τις τρεις ισότητες κατά μέλη και απλοποιώντας. Το αντίστροφο, είναι μιά λογική συνέπεια του ευθέως. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι τρία σημεία ικανοποιούν τις συνθήκες της πρότασης. Δείχνουμε ότι περιέχονται σε ευθεία. Προς τούτο θεωρούμε την ευθεία των δύο πρώτων $A'B'$ και δείχνουμε ότι και το τρίτο περιέχεται στην ευθεία αυτή. Πράγματι, αν η ευθεία αυτή τέμνει την AB στο D' , τότε, κατά το πρώτο μέρος της πρότασης, θα ισχύει: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{D'A}{D'B} = 1$. Όμως εξ' υποθέσεως ισχύει και η σχέση $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Άρα, εξισώνοντας και απλοποιώντας: $\frac{D'A}{D'B} = \frac{C'A}{C'B}$. Που σημαίνει ότι το D' ταυτίζεται με το C' .



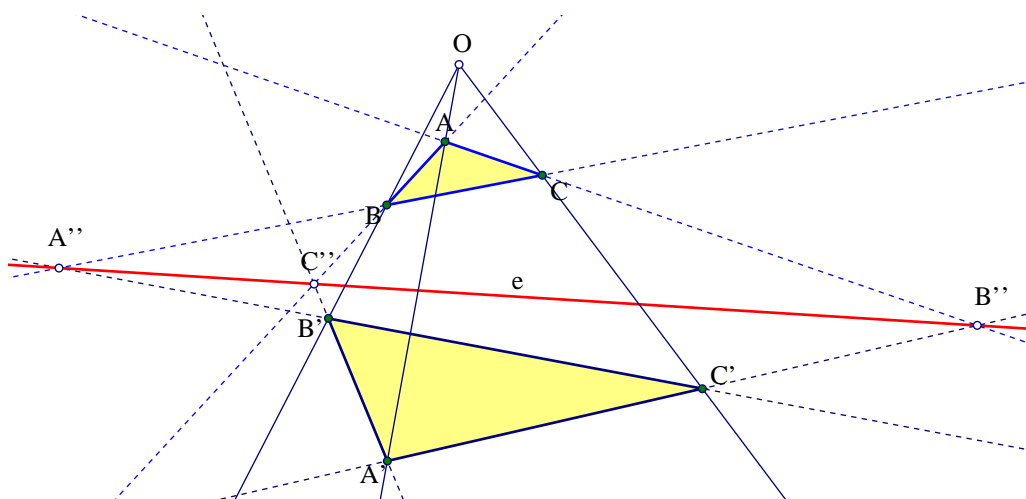
Σχήμα 5.7: θεώρημα του Ceva

Πρόταση 5.5.6 (Θεώρημα του Ceva 1683-1734) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για τρία σημεία A', B', C' , επί των πλευρών (ή προεκτάσεων) BC, CA, AB , αντίστοιχα, του τριγώνου ABC , έτσι ώστε οι ευθείες AA', BB', CC' , να διέρχονται από κοινό σημείο P , είναι η:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1. \quad (5.12)$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα ότι οι τρεις ευθείες AA', BB', CC' , διέρχονται από κοινό σημείο P και ας δείξουμε την σχέση. Φέρνουμε από τα B, C παράλληλες προς την AP και ορίζουμε τα σημεία C'', B'' (σχήμα 5.7). Από τα όμοια τρίγωνα PBC'', PCB'' έχουμε $\frac{A'B}{A'C} = -\frac{BC''}{CB''}$, ανάλογα $\frac{B'C}{B'A} = -\frac{CB''}{PA}$ και $\frac{C'A}{C'B} = -\frac{PA}{BC''}$. Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις κατά μέλη και απλοποιώντας παίρνουμε την ζητούμενη σχέση. Το αντίστροφο αποδεικνύεται πάλι με

την βοήθεια του ευθέως. Προς τούτο ας υποθέσουμε ότι τα τρία σημεία A', B', C' , επί των αντιστοίχων πλευρών του τριγώνου ικανοποιούν την σχέση και ας υποθέσουμε ότι οι δύο ευθείες AA', BB' , τέμνονται στο P . Έστω D' το σημείο τομής της PC με την τρίτη πλευρά. Δείχνουμε ότι τα D' και C' ταυτίζονται. Πράγματι, εξ' υποθέσεως θα ισχύει $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$. Εκ κατασκευής του D' θα ισχύει επίσης $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{D'A}{D'B} = -1$. Εξισώνοντας και απλοποιώντας έπεται ότι $\frac{D'A}{D'B} = \frac{C'A}{C'B}$, που σημαίνει ότι τα σημεία C' και D' ταυτίζονται.



Σχήμα 5.8: θεώρημα του Desarques

Πρόταση 5.5.7 (Θεώρημα του Desarques 1591-1661) Δοθέντων δύο τριγώνων ABC και $A'B'C'$, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Οι ευθείες που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές AA', BB', CC' , διέρχονται από κοινό σημείο O .
2. Τα σημεία τομής αντιστοίχων πλευρών $C'' = AB \cap A'B', A'' = BC \cap B'C', B'' = CA \cap C'A'$, περιέχονται επ' ευθείας e .

Δύο τρίγωνα που ικανοποιούν μία από τις προηγούμενες συνθήκες λέγονται **προοπτικά**. Το O λέγεται **κέντρο προοπτικότητας** και η ευθεία e **άξων προοπτικότητας**.

(1 \Rightarrow 2) Ας υποθέσουμε ότι οι AA', BB', CC' συντρέχουν στο σημείο O . Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου στα τρίγωνα: OAB με τέμνουσα την $A'B'$, OBC με τέμνουσα την $B'C'$, OCA με τέμνουσα την $A'C'$, αντιστοίχως:

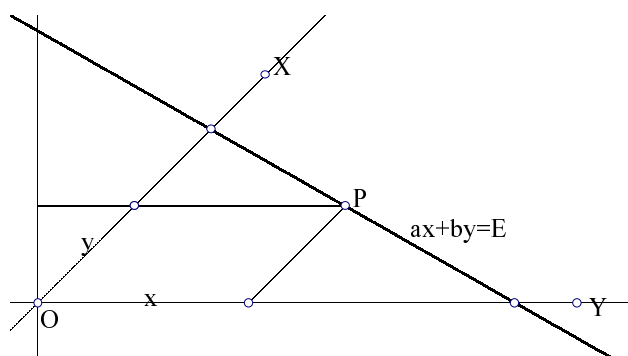
$$\frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{B'B}{B'O} \cdot \frac{A'O}{A'A} = 1, \quad \frac{A'A}{A'O} \cdot \frac{C'O}{C'C} \cdot \frac{B''C}{B''A} = 1, \quad \frac{B'O}{B'B} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{C'C}{C'O} = 1.$$

Πολλάπλασιάζοντας κατά μέλη τις ισότητες παίρνουμε: $\frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} = 1$, που σημαίνει ότι τα A'', B'', C'' είναι επ' ευθείας.

(2 \Rightarrow 1) Ας υποθέσουμε ότι τα A'', B'', C'' είναι επ' ευθείας. Τότε τα τρίγωνα $C''BB'$ και $B''CC'$ είναι προοπτικά ως προς A'' , άρα, κατά το προηγούμενο μέρος, τα O, A, A' περιέχονται στην ίδια ευθεία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5.5

Πρόβλημα 5.5.1 Έστω ότι $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $g(x, y) = \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$, είναι οι εξισώσεις δύο ευθειών ϵ, ϵ' , διά του σημείου A . Δείξε ότι η εξίσωση $\lambda f(x, y) + \mu g(x, y) = 0$, γιά μεταβαλλόμενα λ, μ , παριστά όλες τις ευθείες τις διερχόμενες διά του A (**Δέσμη ευθειών διά του A**). Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων B , των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ϵ, ϵ' είναι κ , είναι μία ευθεία a . Δείξε ότι η ίδια ευθεία είναι και γεωμετρικός τόπος των σημείων E , γιά τα οποία ο λόγος των παραλλήλων τμημάτων προς τις ϵ, ϵ' : $d(E, Z)/d(E, H) = \kappa$.

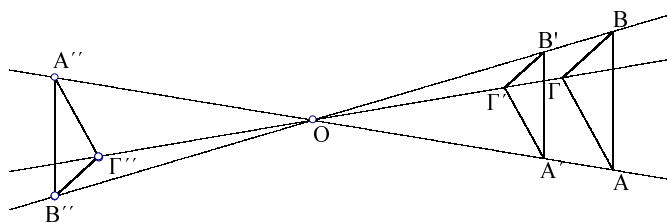


Σχήμα 5.9: Εξισώσεις ευθείας

Πρόβλημα 5.5.2 Δίδονται δύο ευθείες OX, OY και γιά κάθε σημείο P ορίζουμε το ζεύγος των συντεταγμένων ως προς τις ευθείες αυτές (x, y) φέρνοντας παράλληλες από το P 5.9. Δείξε ότι το σύνολο των σημείων P γιά τα οποία οι αντίστοιχες συντεταγμένες ικανοποιούν μίαν εξίσωση της μορφής $ax + by = E$ αποτελεί μίαν ευθείαν. Βρες την εξίσωση της ευθείας αυτής ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του οποίου ο x -άξονας συμπίπτει με τον OX .

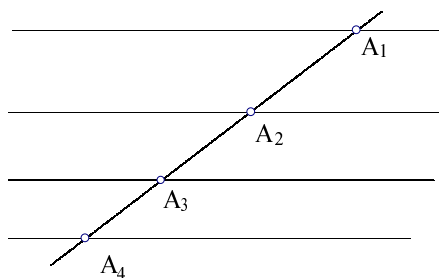
Πρόβλημα 5.5.3 Στο προηγούμενο σχήμα, βρες σημείο επί της ευθείας $ax + by = E$ του οποίου το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο των συντεταγμένων να έχει εμβαδόν ϵ .

Πρόβλημα 5.5.4 Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο O . Να αχθεί ευθεία από το O η οποία να χωρίζει το τρίγωνο σε δύο τμήματα ίσων εμβαδών. (Υπόδειξη: χρήση προηγούμενης ασκήσεως.)



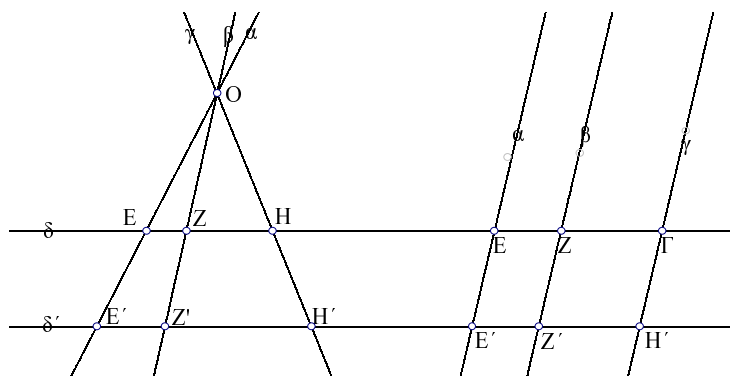
Σχήμα 5.10: Κέντρο ομοιοθεσίας δύο τριγώνων με παράλληλες πλευρές

Πρόβλημα 5.5.5 Δείξε ότι εάν δύο τρίγωνα $AB\Gamma, EZH$ έχουν αντίστοιχες πλευρές παράλληλες, τότε οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές τους με ίσες γωνίες διέρχονται από σημείο O . Σ' αυτήν την περίπτωση το O λέγεται **κέντρο ομοιοθεσίας των δύο τριγώνων**. Ο λόγος δύο παραλλήλων πλευρών λέγεται **λόγος ομοιοθεσίας** και θεωρείται **αρνητικός** αν οι φορές των πλευρών είναι αντίροπες. Έτσι στο 5.10ο λόγος ομοιοθεσίας των $AB\Gamma$ και $A''B''\Gamma''$ είναι αρνητικός.



Σχήμα 5.11: Τομές ευθείας από παράλληλες ευθείες

Πρόβλημα 5.5.6 Εάν ευθεία a τέμνεται από οικογένεια παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ σε αντίστοιχα σημεία A_1, A_2, \dots , τότε οι λόγοι των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|, \dots$ είναι ανεξάρτητοι της τέμνουσας a .



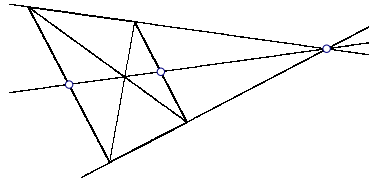
Σχήμα 5.12: Τομές παραλλήλων από δέσμη ευθειών

Πρόβλημα 5.5.7 Έστω ότι οι ευθείες a, β, γ διέρχονται από το σημείο O και η ευθεία δ τέμνει τις a, β, γ , στα E, Z, H αντιστοίχως. Δείξε ότι ο λόγος $|EZ|/|ZH|$ είναι ο ίδιος για όλες τις θέσεις της δ , μετατοπιζόμενης παράλληλα προς εαυτήν. Δείξε και το αντίστροφο: Εάν σε δύο παράλληλες ευθείες δ, δ' , τα σημεία τους E, Z, H και E', Z', H' ορίζουν τμήματα ανάλογα, τότε οι ευθείες EE', ZZ' και HH' , διέρχονται όλες από κοινό σημείο O ή είναι παράλληλες.

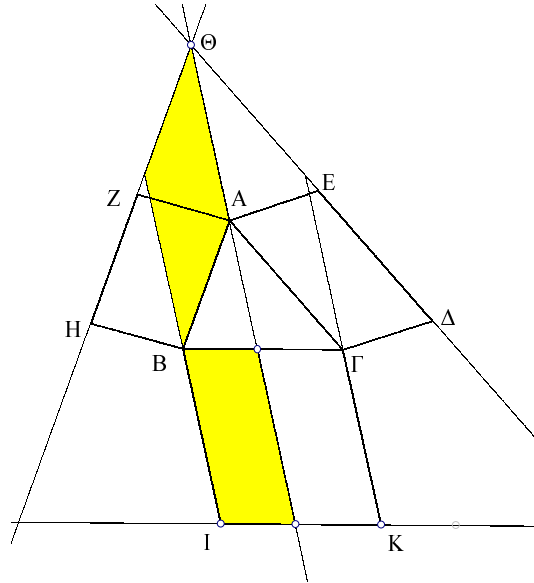
Πρόβλημα 5.5.8 Δείξε ότι μία παράλληλος προς την βάση τριγώνου τέμνει τις άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα. Αντίστροφα, αν μία ευθεία τέμνει δύο πλευρές τριγώνου σε μέρη ανάλογα, τότε είναι παράλληλος προς την βάση. Συμπεράνε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο και ήμισυ προς την τρίτη πλευρά.

Πρόβλημα 5.5.9 Τραπεζίο λέμε ένα τετράπλευρο που έχει δύο παράλληλες πλευρές. Δείξε ότι τά μέσα των μή παραλλήλων πλευρών τραπεζίου, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τις παράλληλες πλευρές του και μήκους ίσου με το ημίθροισμα των μηκών αυτών των πλευρών.

Πρόβλημα 5.5.10 Δείξε ότι τα μέσα των παραλλήλων πλευρών τραπεζίου και το σημείο τομής των διαγωνίων του, κείνται επ' ευθείας διερχομένης διά του κοινού σημείου των μη παραλλήλων πλευρών του.

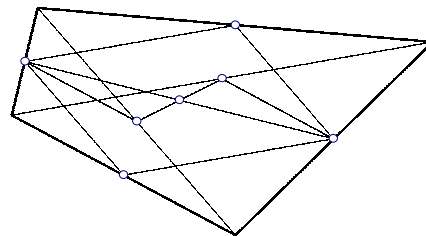


Σχήμα 5.13: Διάμεσος και διαγώνιοι τραπεζίου



Σχήμα 5.14: Θεώρημα του Πάππου, γενίκευση Πυθαγορείου

Πρόβλημα 5.5.11 (Θεώρημα του Πάππου, γενίκευση Πυθαγορείου Θ .) Εις τυχόν τρίγωνον $AB\Gamma$ και επί των πλευρών αυτού AB , $A\Gamma$, κατασκευάζομε παραλληλόγραμμα εξωτερικά του τριγώνου: $AZHB$ και $AED\Gamma$. Εστω ότι αι πλευραί ZH και $E\Delta$ προεκτεινόμεναι τέμνονται εις το Θ . Κατασκευάζομε παραλληλόγραμμα $B\Gamma KI$ επί της τρίτης πλευράς με μίαν πλευράν του, την BI , παράλληλη και ίση της ΘA . Τότε το άθροισμα των εμβαδών των $AZHB$ και $AED\Gamma$ ισούται με το εμβαδόν του $B\Gamma KI$.



Σχήμα 5.15: Παραλληλόγραμμα μέσων πλευρών, Θεώρημα Euler

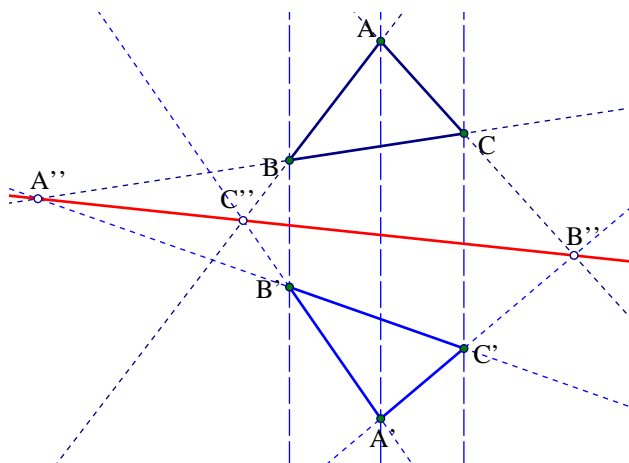
Πρόβλημα 5.5.12 Δείξε ότι σε τυχόν τετράπλευρο που ορίζεται από τα σημεία $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, τα μέσα των πλευρών του ορίζουν παραλληλόγραμμα του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο σημείο $\bar{\pi} = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})/4$. Δείξε ότι το σημείο αυτό είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από τα μέσα των διαγωνίων του αρχικού τετραπλεύρου.

Πρόβλημα 5.5.13 (Θεώρημα Euler) Εστω a, b, c, d τα μήκη των πλευρών τετραπλεύρου, e, f , τα μήκη των διαγωνίων του και k το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από

τα μέσα των διαγωνίων του. Δείξε ότι ισχύει

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 \cdot k^2. \quad (5.13)$$

Συμπέρανε ότι ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος (4.2.4): Εάν το άθροισμα των τετραγώνων πλευρών τετραπλεύρου ισούται με το άθροισμα τετραγώνων των διαγωνίων του, τότε είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 5.16: θεώρημα του Desargues, ειδική θέση

Πρόβλημα 5.5.14 Δείξε ότι το θεώρημα του Desargues ισχύει και όταν οι ευθείες AA' , BB' , CC' , που συνδέουν αντίστοιχες κορυφές των δύο τριγώνων είναι παράλληλες. (Υπόδειξη: $\frac{C''B}{C''A} = \frac{BB'}{AA'}$, $\frac{A''C}{A''B} = \frac{CC'}{BB'}$, $\frac{B''A}{B''C} = \frac{AA'}{CC'}$, πολλαπλασίασε κτλ.)

5.6 Σημασία της $f(x, y)$

Ας υποθέσουμε ότι η ϵ δίδεται από την $f(x, y) = ax + by + \gamma = 0$, με κάθετο $\bar{n} = (\alpha, \beta)$. Το σημείο $B(\bar{u})$ θα είναι επί της καθέτου $\bar{g}(t) = \bar{u}_0 + t \cdot \bar{n}$. Αντικαθιστώντας το $\bar{g}(t)$ στην εξίσωση, βρίσκουμε

$$t = -f(x_0, y_0) / \|\bar{n}\|^2, \quad \bar{u} = \bar{u}_0 + t \cdot \bar{n}, \quad \bar{u} - \bar{u}_0 = -\frac{f(x_0, y_0)}{\|\bar{n}\|^2} \cdot \bar{n}. \quad (5.14)$$

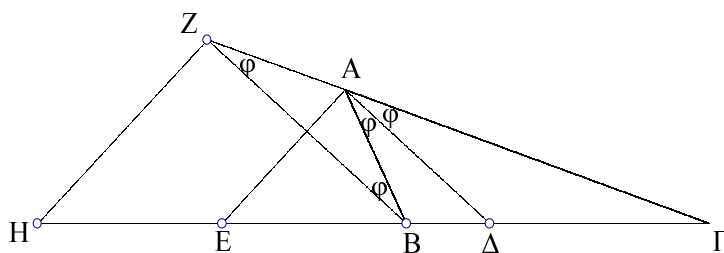
Οι προηγούμενες σχέσεις δηλώνουν την σημασία της συνάρτησης $f(x, y)$ που παριστά την ευθεία:

Πρόταση 5.6.1 Η συνάρτηση $f(x, y) = ax + by + \gamma$ που παριστά την ευθεία ϵ , δίδει $f(x, y) / \|\bar{n}\| = \pm(\text{απόσταση του } A \text{ από την } \epsilon)$. Το πρόσημο είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με το αν το (x, y) είναι προς την πλευρά της καθέτου $\bar{n} = (\alpha, \beta)$ ή την αντίθετη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο ευθείες τεμνόμενες ϵ , ϵ' , με αντίστοιχες εξισώσεις $f(x, y) = ax + by + \gamma = 0$, $g(x, y) = a'x + b'y + \gamma' = 0$. Κατά το (5.2), δεν βλάπτει την γενικότητα να υποθέσουμε επίσης ότι οι ευθείες είναι στην λεγόμενη **κανονική μορφή**, δηλ. οι κάθετοι $\bar{n} = (\alpha, \beta)$, $\bar{n}' = (\alpha', \beta')$ είναι μοναδιαίες. Τότε οι αριθμοί $f(x, y)$, $g(x, y)$ αποκτούν γεωμετρική σημασία για κάθε (x, y) που δεν περιέχεται σε καμμία εκ των δύο: Παριστούν τις αποστάσεις (με πρόσημο) από τις αντίστοιχες ευθείες. Συνέπεια αυτού είναι ότι η εξίσωση $f(x, y)^2 - g(x, y)^2 = (f(x, y) - g(x, y)) \cdot (f(x, y) + g(x, y)) = 0$, παριστά δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους, που δεν είναι άλλες από τις **διχοτόμους** της γωνίας των ϵ , ϵ' .

Πρόταση 5.6.2 Εάν ϵ, ϵ' είναι τεμνόμενες ευθείες με εξισώσεις $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $g(x, y) = \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0$, σε κανονική μορφή, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις δύο ευθείες δίδεται από την εξίσωση $f(x, y)^2 - g(x, y)^2 = 0$, και αποτελείται από δύο κάθετα τεμνόμενες ευθείες. Οι ευθείες αυτές είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ϵ, ϵ' .

Πράγματι, η τελευταία εξίσωση περιγράφει, όπως προείπαμε, την γεωμετρική ιδιότητα του σημείου, να ισαπέχει από τις δύο ευθείες. Το σύνολο όμως των σημείων που ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση δεν είναι παρά η ένωση των σημείων που ικανοποιούν τις εξισώσεις: $f(x, y) - g(x, y) = 0$ και $f(x, y) + g(x, y) = 0$, δηλαδή η ένωση των σημείων δύο ευθειών. Επίσης τα αντίστοιχα κάθετα των δύο ευθειών θα είναι $\bar{n} - \bar{n}'$ και $\bar{n} + \bar{n}'$, τα οποία επειδή είναι μοναδιαία, είναι κάθετα: $\langle \bar{n} - \bar{n}', \bar{n} + \bar{n}' \rangle = \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle - \langle \bar{n}', \bar{n}' \rangle = 1 - 1 = 0$. (4.2.4) Το ότι οι ευθείες αυτές είναι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ϵ, ϵ' , φαίνεται ως εξής. Έστω O το σημείο τομής των ϵ, ϵ' . Παίρνουμε ένα σημείο A πάνω σε μία απ' αυτές και φέρνουμε κάθετες AB, AB' στις ϵ, ϵ' . Τα ορθογώνια τρίγωνα ABO και $AB'O$ έχουν κοινή την BO και ίσες τις AB, AB' . Κατά το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουν και τις άλλες καθέτους τους ίσες άρα κατά την 4.2.1 θα έχουν και αντίστοιχα ίσες γωνίες.



Σχήμα 5.17: Εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος τριγώνου

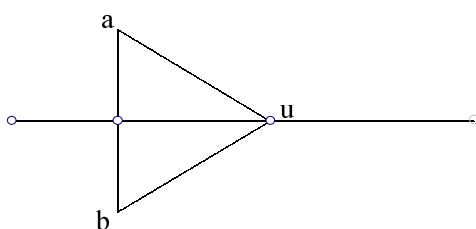
Πρόταση 5.6.3 Οι διχοτόμοι μιάς γωνίας A τριγώνου $AB\Gamma$, εσωτερική $A\Delta$ και εξωτερική AE , τεμνουν την απέναντι πλευρά $B\Gamma$ σε δύο σημεία Δ, E των οποίων ο προσανατολισμένος λόγος είναι αντίστοιχα $\mp c/b$ όπου a, b, c είναι αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB$. Επί πλέον η γωνία $\widehat{\Delta A E}$ είναι ορθή.

Πράγματι, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι οι διχοτόμοι στο A σχηματίζουν ορθή γωνία. Φέρνουμε από το B παράλληλη BZ της εσωτερικής διχοτόμου, που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Z . Το ABZ είναι ισοσκελές και κατά Θαλή, λόγω παραλληλίας των $A\Delta$ και ZB : ο λόγος $B\Delta/\Delta\Gamma$ θα είναι ίσος με τον AZ/AG που είναι ίσος με c/b . Αυτό αποδεικνύει την πρόταση για την εσωτερική διχοτόμο. Για την εξωτερική παρατηρούμε ότι η EA είναι εσωτερική διχοτόμος της \widehat{ZEB} και εφαρμόζουμε το προηγούμενο επιχείρημα. Τέλος ο ισχυρισμός για τον προσανατολισμένο λόγο προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

Πρόταση 5.6.4 Για δύο διαφορετικά σημεία $\bar{a} = (\alpha, \beta)$, $\bar{b} = (\gamma, \delta)$, του επιπέδου, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν απ' αυτά είναι μία ευθεία (μεσοκάθετος) με εξίσωση

$$2(\alpha - \gamma)x + 2(\beta - \delta)y - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) = 0.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσον $(\bar{a} + \bar{b})/2$ του ευθυγράμμου τμήματος και είναι κάθετος προς αυτό.



Σχήμα 5.18: Η μεσοκάθετος δύο σημείων

Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από τους συντελεστές της ευθείας. Ο προτελευταίος δι' αντικατάστασης των συντεταγμένων του μέσου σ αυτήν. Τέλος το ότι τα σημεία της ευθείας συμπίπτουν ακριβώς με τα σημεία του γεωμετρικού τόπου προκύπτει από την ισότητα των πλευρών των τριγώνων που σχηματίζονται από τα $\bar{a}, \bar{b}, (\bar{a} + \bar{b})/2, \bar{u}$.

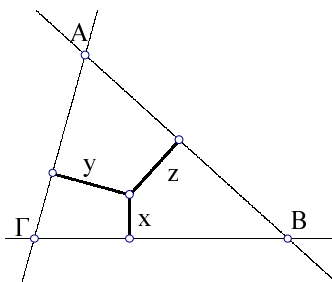
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5.6

Πρόβλημα 5.6.1 Δείξε ότι μία ευθεία ϵ , με εξίσωση $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, διαμερίζει το επίπεδο σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: το ϵ και τα ημιεπίπεδα $\epsilon^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$, $\epsilon^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$. Ξεκινώντας από ένα σημείο (x_0, y_0) επί της ευθείας, δείξε ότι τα σημεία $(x_0, y_0) \pm t \cdot (-\beta, \alpha)$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα $\forall t \neq 0$.

5.7 Θεμελιώδεις κατασκευές

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών και την παραμετρική παράσταση (5.7), βλέπουμε ότι επί ευθείας ϵ και από σημείου A αυτής και για δοθέντα πραγματικό αριθμό β , μπορούμε πάντοτε να ορίσουμε σημεία B, B' εκατέρωθεν αυτής, ούτως ώστε $d(A, B) = d(A, B') = \beta$. Επίσης, θεωρώντας σημείο \bar{u} επί ευθείας $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, και διαλέγοντας κατάλληλα α', β', γ' , μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθεία δια του \bar{u} που σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία $\omega \in (0, \pi/2)$, θέλομε. Αυτές οι **θεμελιώδεις κατασκευές** στηρίζονται εδώ στα αξιώματα των πραγματικών αριθμών. Στην συνθετική μέθοδο η δυνατότητα των θεμελιωδών αυτών κατασκευών διατυπώνεται με την μορφή αξιωμάτων. Επί πλέον υπεισέρχεται το πρόβλημα κατασκευασιμότητας με κανόνα και διαβήτη, (δυνατόν για ορισμένες γωνίες μόνον) που εξετάζομε σε άλλο κεφάλαιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5.7



Σχήμα 5.19: Τριγραμμικές συντεταγμένες

Πρόβλημα 5.7.1 Κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ορίζει τις λεγόμενες **τριγραμμικές συντεταγμένες** ως εξής: Σε κάθε σημείο P αντιστοιχούμε την τριάδα (x, y, z) των προσανατολισμένων αποστάσεων του P από τις πλευρές του τριγώνου (Σχήμα-5.19). Το x ορίζεται θετικό όταν το P είναι από την ίδια πλευρά της $B\Gamma$ που είναι και το A , διαφορετικά ορίζεται αρνητικό. Ανάλογες συμβάσεις ισχύουν και για τα y, z .

α) Δείξε ότι τα (x, y, z) , ως ορίστηκαν προηγουμένως, ικανοποιούν πάντοτε την

$$ax + by + cz = 2E,$$

όπου a, b, c τα μήκη των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A$ και AB αντιστοίχως, και E το εμβαδόν του τριγώνου.
β) Δείξε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2) συνδέονται με τις τριγραμμικές (x, y, z) μέσω των σχέσεων:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2E}(axA_1 + byB_1 + czC_1), \\ x_2 &= \frac{1}{2E}(axA_2 + byB_2 + czC_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

όπου $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2)$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των A, B, Γ αντιστοίχως.

Πρόβλημα 5.7.2 Δείξε ότι το εμβαδόν παραλληλογράμμου, παραγομένου από τα διανύσματα \bar{u}, \bar{v} , ισούται με το γινόμενο του μέτρου ενός εξ' αυτών λ.χ. $\|\bar{u}\|$ επί την απόσταση των παραλλήλων προς αυτό.

Πρόβλημα 5.7.3 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία στο A δοθέντος μέτρου a και δοθέντα μήκη προσκειμένων στο A πλευρών $d(A, \Gamma) = b, d(A, B) = c$.

Πρόβλημα 5.7.4 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά δοθέντος μήκους $a = d(B, \Gamma)$ και δοθείσες γωνίες στα B, Γ αντίστοιχα β και γ . Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι β, γ για να είναι δυνατή η κατασκευή;

Πρόβλημα 5.7.5 Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά δοθέντος μήκους $a = d(B, \Gamma)$ και γωνία στο A ίση με δοθήσαν ω .

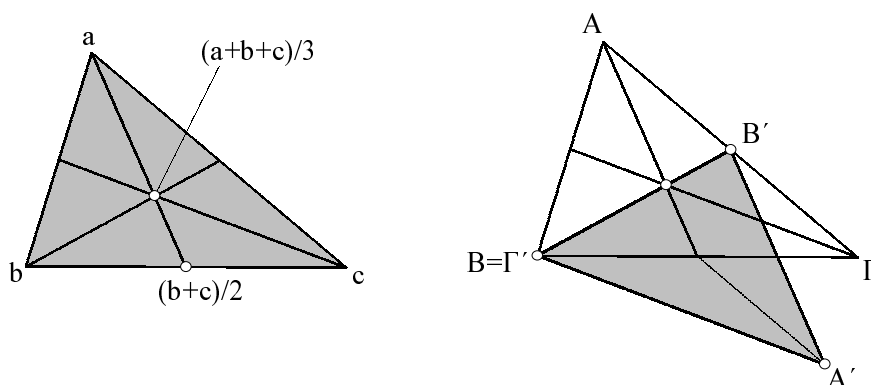
Πρόβλημα 5.7.6 Βρες ικανή και αναγκαία συνθήκη για τις συντεταγμένες τριών σημείων, ώστε αυτά να αποτελούν κορυφές τριγώνου (δες την 5.10).

Πρόβλημα 5.7.7 Με τα δεδομένα της (5.7), δείξε ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $d(\bar{g}(\alpha), \bar{g}(\beta)) = \lambda \cdot |\beta - \alpha|$, όπου $\lambda = d(\bar{a}, \bar{b})$.

Πρόβλημα 5.7.8 Δείξε ότι η διάμεσος προς την βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και κάθετος στο μέσον της βάσης. Δείξε και το αντίστροφο: εάν η διάμεσος είναι κάθετος στην απέναντι πλευρά τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 5.7.9 Δίδεται σημείο \bar{a} εκτός ευθείας ϵ και σταθερά λ . Για κάθε σημείο $\bar{g}(t)$ της ϵ (παραμετρική μορφή), θεωρούμε το $\bar{h}(t) = \bar{a} + \lambda \cdot (\bar{g}(t) - \bar{a})$. Δείξε ότι η $\bar{h}(t)$ είναι παραμετρική μορφή μιάς ευθείας ϵ' , παράλληλης προς την ϵ , έτσι ώστε ο λόγος $\|\bar{h}(t) - \bar{a}\| / \|\bar{g}(t) - \bar{a}\| = |\lambda|$, είναι σταθερός.

Πρόβλημα 5.7.10 Δείξε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που έχουν ίσες γωνίες στα A και A' και αντίστοιχες περικλείουσες πλευρές ανάλογες $|AB|/|A'B'| = |A\Gamma|/|A'\Gamma'| = \lambda$, έχουν όλες τις γωνίες τους αντίστοιχα ίσες.

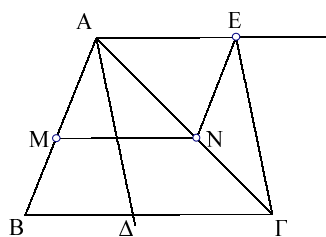


Σχήμα 5.20: Διάμεσοι τριγώνου, το τρίγωνο των διαμέσων

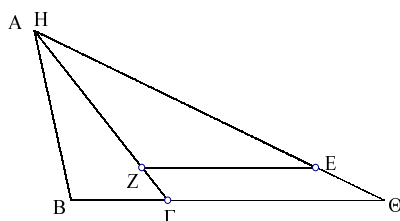
Πρόβλημα 5.7.11 Δείξε ότι για τρία σημεία $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ που ορίζουν κορυφές τριγώνου, το $\bar{\pi} = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})/3$ είναι και επί των τριών διαμέσων ταυτοχρόνως. Συμπεράνε ότι οι διάμεσοι τριγώνου τέμνονται σ' ένα σημείο που χωρίζει κάθε μιά σε λόγο 2:1.

Πρόβλημα 5.7.12 Δείξε ότι για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, υπάρχει άλλο τρίγωνο των διαμέσων $A'B'\Gamma'$, με πλευρές παράλληλες προς τις διαμέσους του $AB\Gamma$. Δείξε ότι οι διάμεσοι του $A'B'\Gamma'$ είναι παράλληλες και ίσες με τα $3/4$ των πλευρών του αρχικού τριγώνου.

Πρόβλημα 5.7.13 Δείξε ότι οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνονται σε σημείον που συμπίπτει με το μέσον και των δύο. Αντίστροφα, δείξε ότι αν τετράπλευρο έχει διαγώνιους που διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

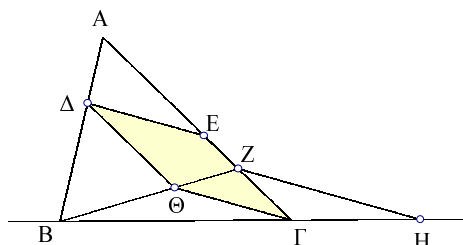
Σχήμα 5.21: $AM = NE$

Πρόβλημα 5.7.14 Να βρεθούν σημεία M, N αντιστοίχως επί των πλευρών AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$, έτσι ώστε τα AM και NG να έχουν ίσο μήκος.



Σχήμα 5.22: Μία γωνία ίση και μία παραπληρωματική

Πρόβλημα 5.7.15 Δίδονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEH που έχουν τις γωνίες στα A και H αντίστοιχα ίσες και τις γωνίες στα Z και Γ αντίστοιχα παραπληρωματικές. Δείξε ότι οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες: $|B\Gamma|/|ZE| = |AB|/|AE|$.



Σχήμα 5.23: Ισα τμήματα επί πλευρών

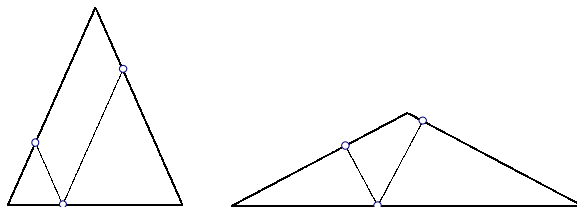
Πρόβλημα 5.7.16 Εις δοθέν τρίγωνον $AB\Gamma$ να αχθεί τέμνουσα ΔE , έτσι ώστε τα τμήματα $B\Delta$, ΔE και $E\Gamma$ να είναι ίσα. (Υπόδειξη: Επί της προεκτάσεως της $B\Gamma$, έστω H έτσι ώστε $|ZH| = |AZ| = |AB|$. Το $\Delta E\Gamma\Theta$ είναι ρόμβος.)

Πρόβλημα 5.7.17 Να κατασκευασθεί τρίγωνον $AB\Gamma$ από την γωνία του a και τα αθροίσματα των πλευρών $|AB| + |B\Gamma|$, $|A\Gamma| + |B\Gamma|$. (Υπόδειξη: Χρήση προηγούμενης άσκησης.)

Πρόβλημα 5.7.18 Εάν a, b, c, m_a συμβολίζουν αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ και το μήκος της διαμέσου από το A , τότε ισχύει (χρησιμοποίησε εσωτερικό γινόμενο).

$$b^2 + c^2 = 2 \cdot m_a^2 + \frac{a^2}{2}. \quad (5.16)$$

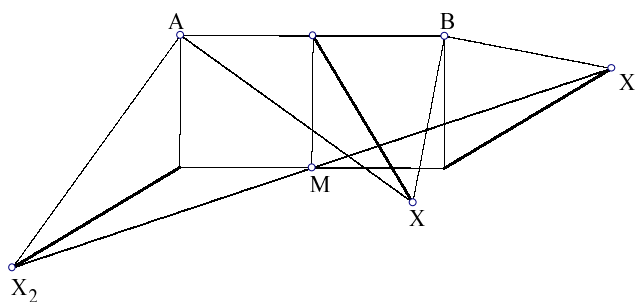
Πρόβλημα 5.7.19 Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο και E σημείο της βάσης του $B\Gamma$. Έστω ότι οι παράλληλες (κάθετες) προς τα σκέλη από το E , τέμνουν αυτά στα Z, H αντιστοίχως. Δείξε ότι $d(E, Z) + d(E, H)$ είναι σταθερό και ανεξάρτητο της θέσης του σημείου E . Όταν το E είναι στην προέκταση της βάσης, τότε η διαφορά $d(E, Z) - d(E, H)$ είναι σταθερά.



Σχήμα 5.24: Σημείο βάσης ισοσκελούς τριγώνου

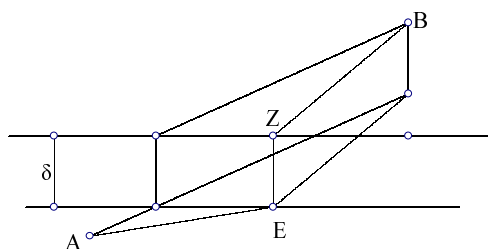
Πρόβλημα 5.7.20 Έστωσαν ϵ, ϵ' δύο ευθείες τεμνόμενες στο O . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου E , από το οποίο οι παράλληλες (κάθετες) προς τις ϵ, ϵ' , τις τέμνουν στα Z, H αντιστοίχως, έτσι ώστε $d(E, Z) + d(E, H)$ να είναι σταθερό.

Πρόβλημα 5.7.21 Δίδονται δύο σημεία A, B . Γιά κάθε σημείο X από την ίδια πάντα πλευρά της ευθείας AB , φέρνομε τις XB, XA και στρέφομε κατά $+\pi/2$ την BX περί το B στην BX_1



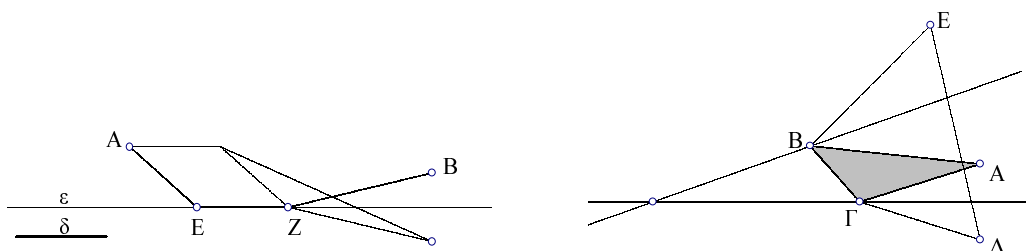
Σχήμα 5.25: Πρόβλημα του πειρατή

και την AX κατά $-\pi/2$ περί το A στην AX_2 . Δείξε ότι το μέσον M της X_1X_2 είναι ανεξάρτητο της θέσης του X . Στον χάρτη του πειρατή τα A, B ήταν κορυφές βουνών και στην θέση X ήταν ένας φοίνικας που κάποιοι κόψανε. Η διαδικασία όμως ήταν ανεξάρτητη της θέσης του φοίνικα.



Σχήμα 5.26: Γέφυρα μεταξύ δύο πόλεων

Πρόβλημα 5.7.22 Μεταξύ δύο πόλεων A, B , παρεμβάλλεται ποταμός με παράλληλες όχθες εύρους δ . Να κατασκευασθεί γέφυρα EZ , κάθετη στις όχθες, έτσι ώστε η τεθλασμένη $AEZB$ να είναι η ελαχίστου δυνατού μήκους.



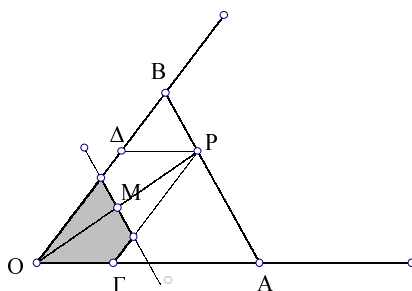
Σχήμα 5.27: Ελαχιστοποίηση $AEZB$

Τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου

Πρόβλημα 5.7.23 Δίδονται δύο σταθερά σημεία A, B και ευθύγραμμο τμήμα EZ σταθερού μήκους δ , κινούμενο επί της ευθείας ϵ . Να βρεθεί η θέση του στην ευθεία δ , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μήκος της τεθλασμένης $AEZB$.

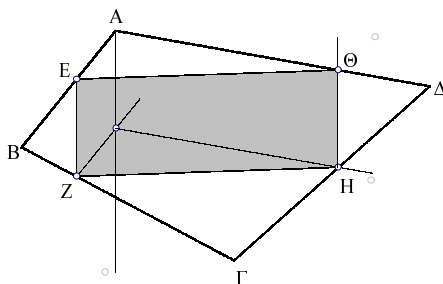
Πρόβλημα 5.7.24 Δίδονται δύο ευθείες ϵ, ϵ' και σημείον A . Τα σημεία B, Γ κινούνται επί των ϵ, ϵ' αντιστοίχως. Να βρεθεί η θέση τους, για την οποία το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει ελάχιστη περίμετρο.

Πρόβλημα 5.7.25 Δίδονται δύο ευθείες ϵ, ϵ' και σημείον A επί της ϵ . Να βρεθεί σημείον B επί της ϵ , έτσι ώστε η AB να ισούται με την απόσταση $B\Gamma$ του B από την ϵ' .



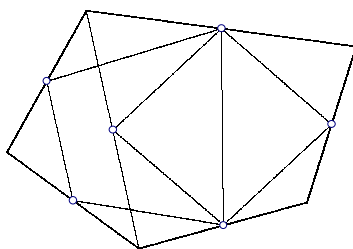
Σχήμα 5.28: Μέγιστο παραλληλόγραμμο ΟΓΡΔ

Πρόβλημα 5.7.26 Δίδονται ευθείες OX, OY και σημεία A, B επί αυτών αντιστοίχως. Δείξε γεωμετρικά ότι το μέσον P του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι εκείνο το σημείο του AB για το οποίο το παραλληλόγραμμο $OΓΡΔ$ έχει το μέγιστον δυνατόν εμβαδόν.



Σχήμα 5.29: Εγγεγραμμένο με πλευρά παράλληλη προς κατεύθυνση

Πρόβλημα 5.7.27 Δίδονται δύο σημεία E, Z επί δύο διαδοχικών πλευρών τετραπλεύρου. Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο $EZHΘ$ εγγεγραμμένο εις το $ABΓΔ$. Να βρεθούν θέσεις των E, Z έτσι ώστε το παραλληλόγραμμο να είναι ορθογώνιο και η EZ να έχει δοθήσαν κατεύθυνση.



Σχήμα 5.30: Κυρτό πολύγωνο περιττών πλευρών από τα μέσα των πλευρών του

Πρόβλημα 5.7.28 Κυρτό λέγεται ένα πολύγωνο το οποίο με κάθε δύο σημεία A, B , του εσωτερικού του, περιέχει και ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα AB στο εσωτερικό του. Δείξε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο με περιττό αριθμό πλευρών ορίζεται μονοσήμαντα από τα μέσα των πλευρών του.

Κεφάλαιο 6

Κύκλος

6.1 Η εξίσωση του κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\bar{c} = (p, q)$ και ακτίνα $r > 0$, ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων $\bar{u} = (x, y)$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

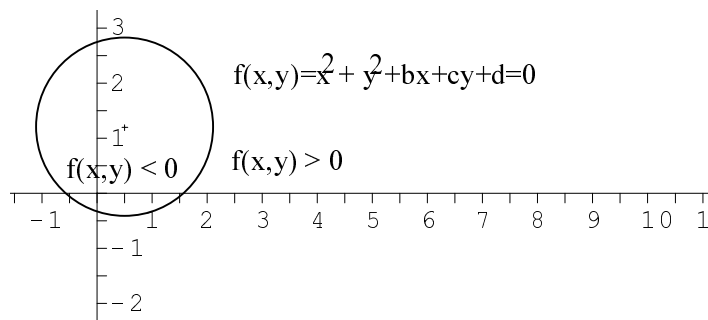
$$\| \bar{u} - \bar{c} \| = r \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0. \quad (6.1)$$

Εισάγοντας τις σταθερές $-2p = b/a$, $-2q = c/a$, $p^2 + q^2 - r^2 = d/a$, βλέπουμε ότι η εξίσωση παίρνει την γενική μορφή

$$a \cdot (x^2 + y^2) + b \cdot x + c \cdot y + d = 0. \quad (6.2)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γενικότερη της 6.1. Για $a = 0$ λ.χ. μεταπίπτει σε εξίσωση ευθείας. Για τυχόντες συντελεστές a, b, c, d η εξίσωση μπορεί να παριστά κύκλο, ευθεία ή να είναι αδύνατη π.χ. η $x^2 + y^2 + 1 = 0$ δεν ικανοποιείται από κανένα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Παρακάτω, θα εξετάσουμε τομές ευθειών και κύκλων και θα υποθέτουμε πάντα ότι $a = 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση, συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + bx + cy + d \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2}{4} - d\right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$



Σχήμα 6.1: Εξίσωση κύκλου, σημασία συντελεστών

Αυτή φανερώνει και την σημασία των συντελεστών. Κατ' αρχήν η εξίσωση παριστά κύκλο τότε και μόνον τότε, όταν ο σταθερός όρος είναι θετικός. Αν συμβαίνει αυτό, τότε ο όρος

αυτός είναι ίσος με το τετράγωνο της ακτίνας, το δε σημείο $\bar{k} = (-\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ είναι το κέντρο του κύκλου. Επίσης $f(x, y) > 0$ χαρακτηρίζει τα εκτός του κύκλου σημεία και $f(x, y) < 0$ τα εντός. Ο αριθμός $f(x, y)$ λέγεται **δύναμις** του σημείου (x, y) ως προς τον κύκλο.

6.2 Τομή με ευθεία

Τα σημεία τομής με ευθεία $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, ευρίσκονται λύνοντας το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0. \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

Προς τούτο λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς μία των μεταβλητών, αντικαθιστούμε στην δεύτερη και λύνουμε την προκύπτουσα τετραγωνική εξίσωση ως προς την απομένουσα μεταβλητή. Προφανώς θά έχουμε μία, δύο ή καμία λύση και επομένως την:

Πρόταση 6.2.1 *Κύκλος και ευθεία έχουν κανένα, ένα ή δύο κοινά σημεία.*

6.3 Δύναμις ως προς κύκλο

Ας διερευνήσουμε την τομή ενός κύκλου $f(x, y) = x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$, και μιάς ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\bar{u}_0 = (x_0, y_0)$, $\bar{g}(t) = \bar{u}_0 + t \cdot \bar{v}$, $\bar{v} = (p, q)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύκλου το $\bar{u} = (x, y)$ με την $\bar{g}(t)$ και κάνοντας πράξεις, βρίσκουμε την εξίσωση για το t , μέσω της οποίας προσδιορίζουμε τα σημεία τομής:

$$t^2 \cdot (p^2 + q^2) + 2t \cdot \left(p \left(x_0 + \frac{b}{2} \right) + q \left(y_0 + \frac{c}{2} \right) \right) + (x_0^2 + y_0^2 + bx_0 + cy_0 + d) = 0.$$

Δεν βλέπεται την γενικότητα να υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\bar{v} = (p, q)$, που καθορίζει την κατεύθυνση της ευθείας, είναι μοναδιαίου μήκους: $p^2 + q^2 = 1$. Επίσης παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος δεν είναι παρά η τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ που ορίζει την εξίσωση του κύκλου, υπολογισμένη στο (x_0, y_0) . Μ' αυτές λοιπόν τις προϋποθέσεις, η εξίσωση γράφεται:

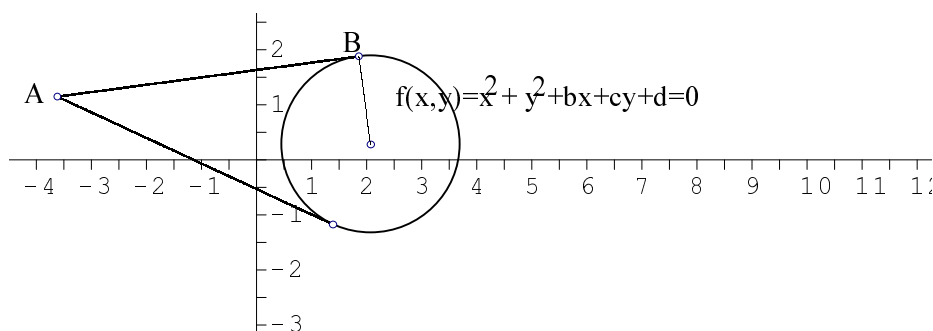
$$t^2 + 2t \cdot \left(p \left(x_0 + \frac{b}{2} \right) + q \left(y_0 + \frac{c}{2} \right) \right) + f(x_0, y_0) = 0. \quad (6.5)$$

Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου θα είναι ως γνωστόν $t_1 \cdot t_2 = f(x_0, y_0)$, που είναι παράσταση μη περιέχουσα την κατεύθυνση \bar{v} , άρα ανεξάρτητη αυτής. Όμως αν $\bar{a} = \bar{g}(t_1)$, $\bar{b} = \bar{g}(t_2)$ είναι τα σημεία τομής της ευθείας με τον κύκλο τότε οι ισότητες $\bar{a} - \bar{u}_0 = t_1 \cdot \bar{v}$, $\bar{b} - \bar{u}_0 = t_2 \cdot \bar{v}$, δείχνουν ότι τα t_1, t_2 , εκτός του προσήμου, είναι οι αποστάσεις του σημείου \bar{u}_0 από τα σημεία τομής. Έχουμε λοιπόν αποδείξει την:

Πρόταση 6.3.1 *Δοθέντος κύκλου ω και σημείου A , έστω ευθεία ϵ διερχόμενη από το A και τέμνουσα τον ω στα σημεία B, Γ . Τότε το γινόμενο των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma$ είναι ανεξάρτητο της κατεύθυνσης της ϵ και ισούται με την δύναμη του A ως προς τον ω .*

Ο κύκλος και η ευθεία **εφάπτονται**, δηλ. έχουν ένα κοινό σημείο, τότε ακριβώς όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου 6.5 είναι 0:

$$\begin{aligned} \left(p \left(x_0 + \frac{b}{2} \right) + q \left(y_0 + \frac{c}{2} \right) \right)^2 - f(x_0, y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \bar{v}, \bar{u}_0 - \bar{k} \rangle^2 - f(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$



Σχήμα 6.2: Δύο εφαπτόμενες από σημείο εκτός κύκλου

Πρόταση 6.3.2 Δοθέντος κύκλου ω κέντρου O και σημείου A εκτός αυτού, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες AB, AG του κύκλου διερχόμενες διά του A . Οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία επαφής B, G είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες και τα μήκη των εφαπτομένων είναι ίσα προς την τετραγωνική ρίζα της δύναμης του A ως προς τον ω .

Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από την 6.6. Για δοθέντα κύκλο, δηλ. τις σταθερές b, c, d και σημείο, δηλ. τα x_0, y_0 , η εξίσωση αυτή μπορεί να εκληφθεί ως εξίσωση με αγνώστους τους συντελεστές p, q που καθορίζουν την κατεύθυνση της ευθείας. Συνεπώς, α) η εξίσωση λύνεται, τότε ακριβώς όταν $f(x_0, y_0) > 0$, που σημαίνει ότι το σημείο είναι εξωτερικό του κύκλου και β) έχει δύο ακριβώς λύσεις (δεδομένου ότι περιοριστήκαμε σε μοναδιαίες διευθύνσεις: $p^2 + q^2 = 1$). Για τον δεύτερο ισχυρισμό της πρότασης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το (x_0, y_0) συμπίπτει με το σημείο επαφής, οπότε $f(x_0, y_0) = 0$ και συνεπώς ο μηδενισμός της διακρίνουσας συνεπάγεται την καθετότητα $\langle \vec{v}, \vec{u}_0 - \vec{k} \rangle = 0$. Ο τελευταίος ισχυρισμός της πρότασης προκύπτει απ' το γεγονός ότι για $t_1 = t_2 = t \Rightarrow t^2 = f(x_0, y_0)$.

6.4 Ριζικός άξων δύο κύκλων

Ας εξετάσουμε τώρα τα κοινά σημεία δύο κύκλων:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0, \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 + b'x + c'y + d' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με το προκύπτον δι' αντικατάστασης της δεύτερης εξίσωσης με την διαφορά της από την πρώτη, που είναι της μορφής (6.4):

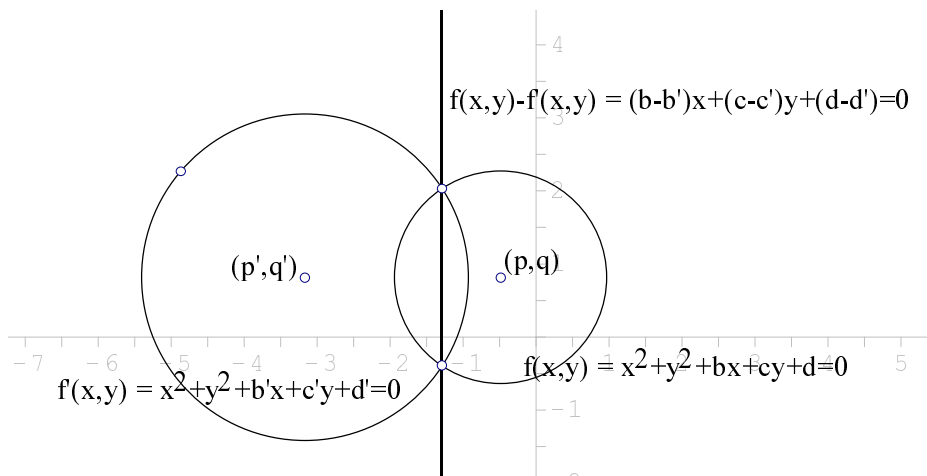
$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0, \\ h(x, y) &= (b - b')x + (c - c')y + (d - d') = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Τα κοινά σημεία των δύο αρχικών κύκλων θά είναι συνεπώς και κοινά σημεία της ευθείας $h(x, y) = 0$ και του κύκλου $f(x, y) = 0$. Η ευθεία $h(x, y)$ λέγεται **ριζικός άξων** των δύο κύκλων. Ισχύει λοιπόν:

Πρόταση 6.4.1 Δύο διαφορετικοί κύκλοι έχουν κανένα, ένα ή δύο κοινά σημεία. Τα κοινά αυτά σημεία περιέχονται στον ριζικό άξωνα των δύο κύκλων.

Πρόταση 6.4.2 Ο ριζικός άξων, έχει τις εξής ιδιότητες:

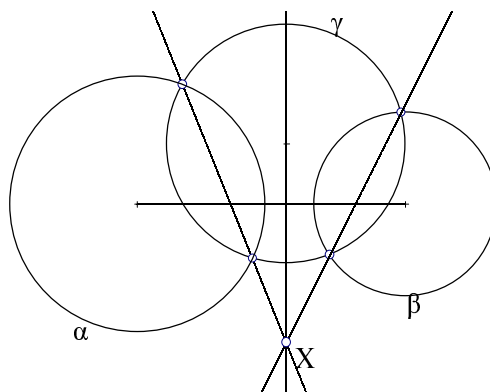
1. Υπάρχει τότε και μόνον όταν οι δύο κύκλοι δεν είναι συγκεντρικοί δηλ. δεν έχουν το ίδιο κέντρο.



Σχήμα 6.3: Ριζικός άξων δύο κύκλων

2. Είναι κάθετος στην διάκεντρο δηλ. την ευθεία διά των κέντρων, των δύο κύκλων.
3. Διέρχεται από τα κοινά σημεία των κύκλων.
4. Τα σημεία του ριζικού άξονος, εξωτερικά και των δύο κύκλων, χαρακτηρίζονται από το ότι έχουν ίσες εφαπτόμενες προς τους δύο κύκλους.

Το 1) προκύπτει από το γεγονός ότι $\bar{k} = (-\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$, $\bar{k}' = (-\frac{b'}{2}, -\frac{c'}{2})$ είναι τά κέντρα των κύκλων. Εάν λοιπόν οι κύκλοι είναι συγκεντρικοί, τότε οι δύο πρώτοι συντελεστές της $h(x, y)$ θα μηδενίζονται. Το 2) προκύπτει απ' το ότι η κάθετος της διακέντρου είναι ένα πολλαπλάσιο του διανύσματος $(b - b', c - c')$ και τα όσα είπαμε περί ευθειών. Το 3) είναι συνέπεια της ισοδυναμίας των δύο συστημάτων: 6.7 και του επομένου του. Τέλος το 4) προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμές των συναρτήσεων $f(x, y), g(x, y)$ για συγκεκριμένο (x, y) εκφράζουν την δύναμη του σημείου αυτού ως προς τους αντίστοιχους κύκλους. Αρκεί λοιπόν να εφαρμόσουμε την 6.3.2.

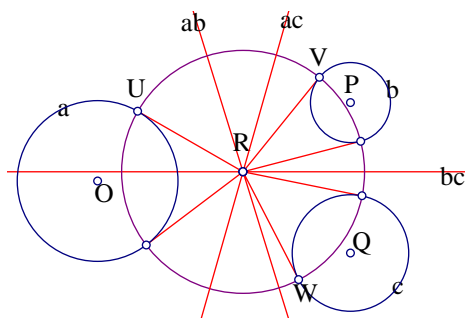


Σχήμα 6.4: Τυχών κύκλος τέμνων δύο άλλους

Πρόταση 6.4.3 Έστω κύκλος γ τέμνων δύο άλλους κύκλους α, β . Τότε οι κοινές χορδές των (α, γ) και (β, γ) ή είναι παράλληλοι ή τέμνονται επί του ριζικού άξονος των α, β .

Πράγματι, ας συμβολίζουμε με $\delta(X, \alpha)$ την δύναμη σημείου X ως προς κύκλον α . Εάν οι χορδές δεν είναι παράλληλοι, τότε το σημείο τομής τους X θα έχει την ίδια δύναμη ως προς α και γ (ως σημείο της κοινής χορδής XAB): $\delta(X, \alpha) = \delta(X, \gamma)$ και την ίδια δύναμη ως προς β και γ

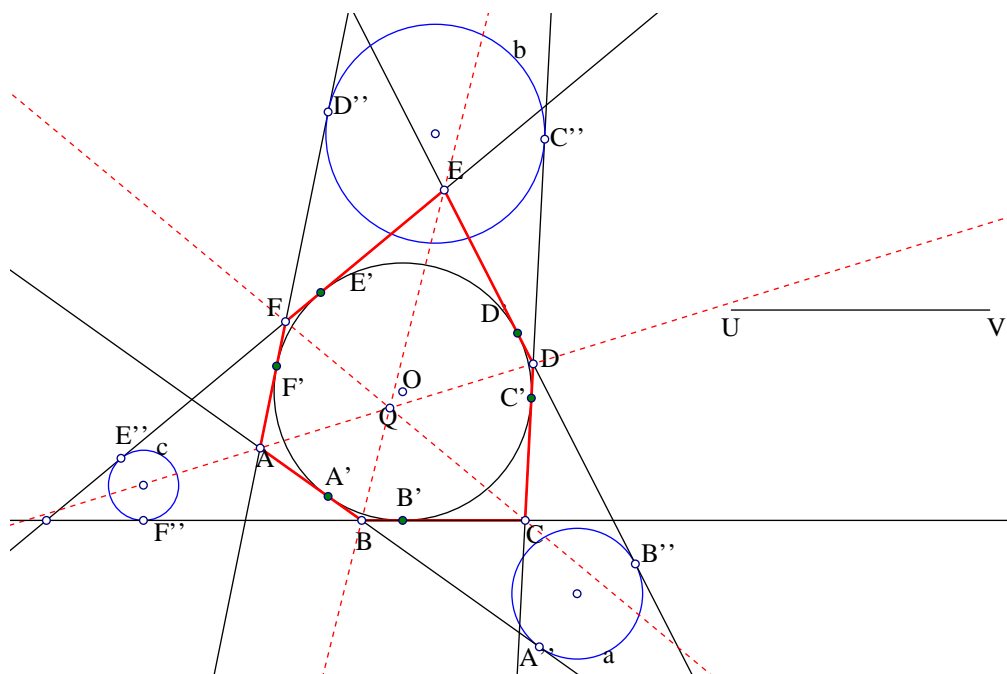
(ως κοινό σημείο της χορδής XEZ): $\delta(X,\beta) = \delta(X,\gamma)$. Συνάγεται για το X η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του ριζικού άξονα των α, β : $\delta(X,\alpha) = \delta(X,\beta)$.



Σχήμα 6.5: Ριζικό κέντρο τριών κύκλων

Πρόταση 6.4.4 Δοθέντων τριών κύκλων, των οποίων τα κέντρα δεν περιέχονται σε ευθεία, οι ριζικοί τους άξονες διέρχονται από σημείο που ονομάζεται ριζικό κέντρο των τριών κύκλων.

Πράγματι, έστω ab ο ριζικός άξονας των κύκλων a, b , και ανάλογα ac, bc , οι ριζικοί άξονες των κύκλων a, c , και b, c . Έστω ότι οι ab και ac τέμνονται στο R . Τότε οι εφαπτόμενες από το R στους κύκλους a, b , και a, c , θα είναι ίσες $|RU| = |RV|$ και $|RU| = |RW|$, άρα και $|RV| = |RW|$. Τούτο δείχνει ότι το R περιέχεται στον ριζικό άξονα bc , άρα και οι τρεις άξονες διέρχονται από το ίδιο σημείο R .



Σχήμα 6.6: Θεώρημα του Brianchon

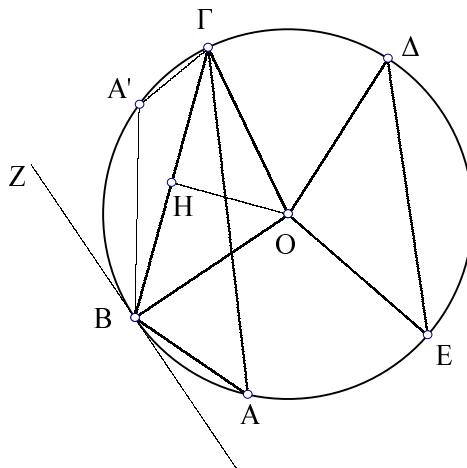
Πρόταση 6.4.5 (Θεώρημα του Brianchon 1783-1864) Εις παν εξάπλευρο $ABCDEF$ περιγεγραμμένο σε κύκλο οι ευθείες που ενώνουν απέναντι κορυφές του διέρχονται δια του αυτού σημείου Q .

Την απόδειξη στηρίζουμε στην προηγούμενη πρόταση. Αποδεικνύουμε ότι οι τρεις ευθείες που ενώνουν απέναντι κορυφές είναι ριζικοί άξονες τριών κατάλληλων κύκλων, τεμνόμενοι στο ριζικό κέντρο τους που συμπίπτει με το Q . Τους τρεις κύκλους κατασκευάζουμε ως εξής. Παίρνουμε αυθαίρετο μήκος $d = |UV|$, και ξεκινώντας από τα σημεία επαφής ορίζουμε τα σημεία (προς την πλευρά των σημείων τομής των εφαπτομένων) $|A'A''| = |B''D'| = |C'C''| = |D''F'| = |E'E''| = |F''B'| = d$. Κατασκευάζουμε κατόπιν τους τρεις κύκλους a, b, c , που εφάπτονται των απέναντι πλευρών των εξαγώνου στα A'', B'' και C'', D'' και E'', F'' αντιστοίχως. Η ευθεία AD είναι ριζικός άξονας των κύκλων a, b . Πράγματι, οι εφαπτόμενες προς αυτούς από το A είναι ίσες διότι $|AA'| = |AF'|$ και $|F'D''| = |A'A''| = d$. Ανάλογα και οι εφαπτόμενες από το D προς τους a, b , αντιστοίχως είναι ίσες. Έτσι τα A και D είναι επί του ριζικού άξονος των a, b . Ανάλογα δείχνουμε ότι τα E, B , είναι επί του ριζικού άξονος των a, c και τα C, F είναι επί του ριζικού άξονος των b, c .

6.5 Επίκεντρος και Εγγεγραμμένη γωνία

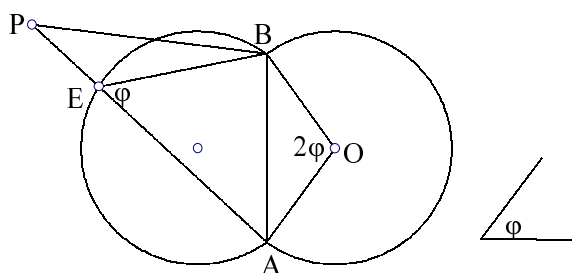
Πρόταση 6.5.1 Για τις χορδές $B\Gamma, \Delta E$, κύκλου ω , κέντρου O , ισχύουν τα εξής:

1. Χορδές ίσου μήκους $B\Gamma, \Delta E$ επί του κύκλου, ορίζουν αντίστοιχα ίσες επίκεντρος γωνίες $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Delta O E}$.
2. Εστω A τυχόν σημείο του κύκλου. Η εγγεγραμμένη γωνία στο A $\widehat{BA\Gamma}$ από την οποία φαίνεται η χορδή $B\Gamma$ είναι το ήμισυ της αντίστοιχης επίκεντρος που βαίνει στο ίδιο τόξο $\widehat{BO\Gamma}$.
3. Έστω A, A' σημεία των δύο διαφορετικών τόξων που ορίζει χορδή $B\Gamma$ του κύκλου. Οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες που βλέπουν την χορδή από τα A, A' είναι παραπληρωματικές.
4. Η γωνία που σχηματίζεται από χορδή $B\Gamma$ και εφαπτομένη στο άκρο της $\widehat{ZB\Gamma}$ είναι ίση με την εγγεγραμμένη $\widehat{BA\Gamma}$.



Σχήμα 6.7: Επίκεντρος και εγγεγραμμένη γωνία

Πράγματι, το 1) είναι άμεση συνέπεια του 4.2.1 αφού τα τρίγωνα $BO\Gamma$ και $\Delta O E$ θα έχουν αντίστοιχα ίσες πλευρές. Το 2) έπεται από το ότι η $\widehat{\Delta O E}$, ως εξωτερική του ισοσκελούς AOE είναι διπλάσια της $\widehat{AE\Delta}$. Η 3) είναι συνέπεια της 2), αφού οι αντίστοιχες επίκεντρος των γωνιών έχουν άθροισμα 2π . Τέλος η 4) προκύπτει φέρνοντας την διάμεσο OH και διχοτόμο

Σχήμα 6.8: Ο τόπος σημείων P που βλέπουν το AB υπό γωνίαν φ

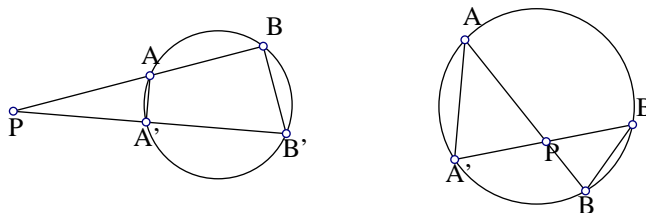
του $BO\Gamma$ που είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Η γωνία χορδής εφαπτομένης στο B , έχει τις πλευρές τις κάθετες προς τις πλευρές της \widehat{HOB} (4.2.5).

Πρόταση 6.5.2 Ο Γεωμετρικός τόπος Σ των σημείων P που έχουν την ιδιότητα να βλέπουν ευθύγραμμο τμήμα AB υπό σταθεράν γωνίαν φ , είναι η ένωση δύο ανοικτών (ήγουν μη περιεχόντων τα άκρα τους) τόξων κύκλων, που καθορίζονται πλήρως από το AB και την φ .

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\varphi < \pi/2$. Κατασκευάζουμε από τις δύο πλευρές του AB τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$, έτσι ώστε η γωνία στην κορυφή τους να είναι 2φ (5.7.5). Τα τόξα $A\Delta B$, $A\Delta'B$ των κύκλων με ακτίνα ΓA και $\Gamma'A$ αντίστοιχα, σύμφωνα με την 6.5.1, έχουν την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου. Το ότι κανένα άλλο σημείο του επιπέδου πλην των δύο αυτών τόξων δεν έχει την εν λόγω ιδιότητα αποδεικνύεται εύκολα. Εάν λ.χ. το P είναι εκτός των δύο κύκλων, τότε η PA θα τέμνει τον ένα εζ' αυτών σ' ένα σημείο E . Η γωνία $\phi = \widehat{AEB} > \widehat{APB}$ ως εξωτερική του τριγώνου PEB . Ανάλογα δείχνουμε και ότι κάθε εσωτερικό σημείο των δύο κύκλων δεν είναι σημείο του τόπου. Η περίπτωση $\varphi > \pi/2$ ανάγεται στην προηγούμενη ξεκινώντας με την $\varphi' = \pi - \varphi$. Τέλος η περίπτωση $\varphi = \pi/2$ προκύπτει απ' ευθείας από την 6.5.1:

Πρόταση 6.5.3 Ο Γεωμετρικός τόπος Σ των σημείων P που έχουν την ιδιότητα να βλέπουν ευθύγραμμο τμήμα AB υπό σταθεράν γωνίαν $\omega = \pi/2$, είναι ο κύκλος με διάμετρο AB .

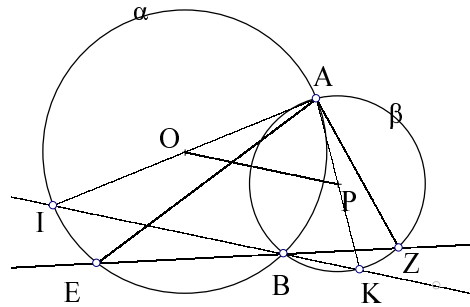
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.5



Σχήμα 6.9: Δύναμεις σημείου ως προς κύκλον

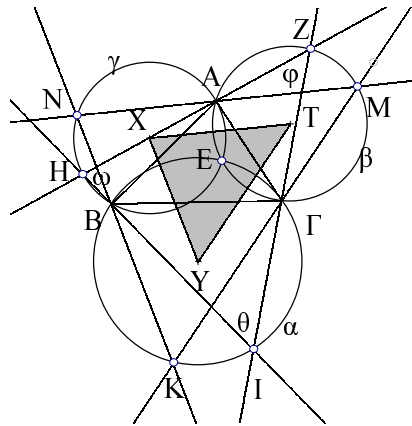
Πρόβλημα 6.5.1 (Γεωμετρική θεμελίωση της δύναμης) Θεώρησε P σημείο εκτός κύκλου a . Δείξε ότι για δύο τέμνουσες PAB και $PA'B'$, τα τρίγωνα PAA' , $PB'B$ είναι όμοια, άρα $|PA||PB| = |PA'||PB'|$. Δείξε το ανάλογο για σημείο P εντός του κύκλου.

Πρόβλημα 6.5.2 Στο προηγούμενο σχήμα 6.9, εάν δ συμβολίζει την δύναμη του P ως προς τον κύκλο a , δείξε ότι ισχύει: $|BB'| = \delta \frac{|AA'|}{|PA||PA'|}$.



Σχήμα 6.10: Γωνία οράσεως κοινής χορδής

Πρόβλημα 6.5.3 Δίδονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι α , β . Έστω AB η κοινή χορδή τους. Από το B φέρομε τυχούσα τέμνουσα EZ . Δείξε ότι όλα τα τρίγωνα AZE που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο έχουν τις ίδιες γωνίες. Ειδικά για την θέση IK της χορδής διά του B , η οποία είναι παράλληλη προς την διάκεντρο OP των κύκλων, δείξε ότι οι άλλες πλευρές διέρχονται από τα κέντρα O, P , το δε μήκος της χορδής είναι το μέγιστο δυνατόν και ίσο με το διπλάσιο της απόστασης των κέντρων.



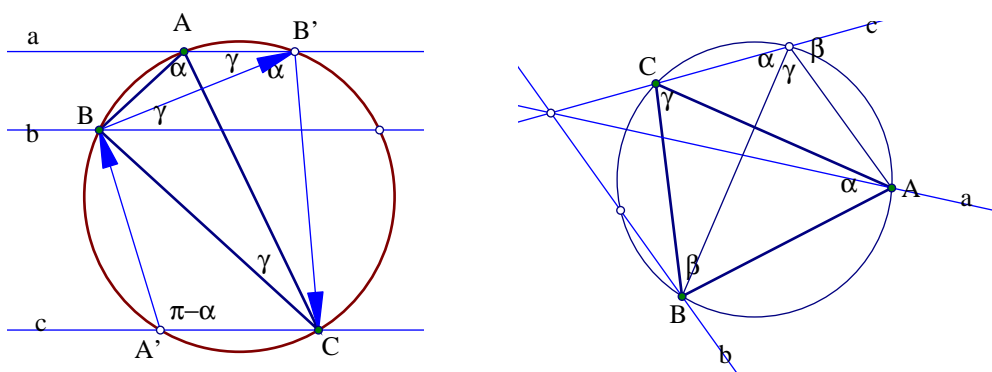
Σχήμα 6.11: Τρίγωνα δεδομένων γωνιών περιγεγραμμένα τριγώνου

Πρόβλημα 6.5.4 Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο E στο εσωτερικό του. Κατασκευάζονται οι τρεις κύκλοι α, β, γ που περνούν από δύο κορυφές του τριγώνου και το E αντιστοίχως. Από τυχόν σημείο I του κύκλου α , φέρομε την $I\Gamma$ που τέμνει τον β στο Z . Από το Z φέρομε την AZ που τέμνει τον γ στο H . Δείξε ότι:

1. Τα σημεία H, B και I είναι συνευθειακά.
2. Τα τρίγωνα IZH που σχηματίζονται κατ' αυτόν τον τρόπο, έχουν πάντα τις ίδιες γωνίες θ, φ, ω .
3. Οι γωνίες αυτές είναι ίσες με τις γωνίες του τριγώνου που σχηματίζεται από τα κέντρα Υ, Γ, X , των τριών κύκλων α, β, γ αντιστοίχως.
4. Υπάρχει μία θέση (KMN) των κορυφών του τριγώνου επί των α, β, γ αντιστοίχως, έτσι ώστε οι πλευρές του τριγώνου KMN να είναι παράλληλες και διπλάσιες το μήκος των πλευρών του ΥTX .
5. Οι ευθείες $K\Upsilon, MT, NX$, διέρχονται από το σημείο E .
6. Το τρίγωνο KMN έχει την μέγιστη δυνατή περίμετρο, μεταξύ όλων των τριγώνων IZH που κατασκευάζονται μ' αυτήν την μέθοδο.

Πρόβλημα 6.5.5 Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$, και τρίγωνο $X\Upsilon T$. Να περιγραφεί περί το $AB\Gamma$ τρίγωνο $I\Upsilon H$ με γωνίες ίσες με αυτές του $X\Upsilon T$ και μέγιστη δυνατή περίμετρο.

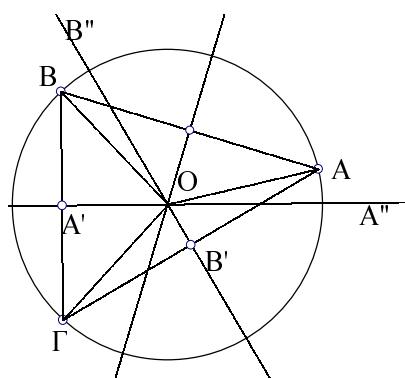
Πρόβλημα 6.5.6 Σε δοθέν τρίγωνο KMN , να εγγραφεί άλλο τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου οι γωνίες να είναι ίσες με δοθείσες α, β, γ και το οποίο να έχει την ελάχιστη δυνατή περίμετρο. (Υπόδειξη: Θεώρησε πρώτα τρίγωνο $A'B'T'$ με γωνίες ίσες προς αυτές του $AB\Gamma$ και κατασκεύασε περί αυτό τρίγωνο γωνιών ίσων προς αυτές του KMN και μεγίστης δυνατής περιμέτρου, έστω $X\Upsilon Z$. Συρρίκνωσε το $X\Upsilon Z$, και βρες την θέση του $AB\Gamma$.)



Σχήμα 6.12: Τρίγωνο με κορυφές επί ευθειών a, b, c

Πρόβλημα 6.5.7 Δίδονται τρεις ευθείες παράλληλες ή διερχόμενες δια του αυτού σημείου: a, b, c . Να κατασκευασθεί τρίγωνο όμοιο προς δοθέν ABC και έχον τις κορυφές του επί των τριών ευθειών.

6.6 Κύκλος δια τριών σημείων



Σχήμα 6.13: Κύκλος διερχόμενος από τρία σημεία, περιγεγραμμένος τριγώνου

Πρόταση 6.6.1 Από τρία σημεία του επιπέδου, μή κείμενα επ' ευθείας διέρχεται ένας και μόνον ένας κύκλος. Ισοδύναμα: Κάθε τρίγωνο έχει έναν ακριβώς περιγεγραμμένο (διερχόμενο από τις κορυφές του) κύκλο.

Πράγματι, τρία τέτοια σημεία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$. Έστω O το σημείο τομής των μεσοκαθέτων $A'A''$ της $B\Gamma$ και $B'B''$ της $A\Gamma$. Θα έχουμε $d(O, B) = d(O, \Gamma)$ και ανάλογα $d(O, \Gamma) = d(O, A)$, συνεπώς και $d(O, B) = d(O, A)$, άρα το O είναι και επί της μεσοκαθέτου

$\Gamma\Gamma''$ της AB . Το O λοιπόν ισαπέχει από τα A, B, Γ και είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Αυτή είναι μια τυπική συνθετική απόδειξη.

Το ίδιο πράγμα μπορούμε να αποδείξουμε και υπολογιστικά, χρησιμοποιώντας ένα τύπο όπως ο (5.8): Έστωσαν $(x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), (x, y)$, αντίστοιχα, οι συντεταγμένες των τριών σημείων A, B, Γ και του τρέχοντος σημείου X του ζητούμενου κύκλου. Οι συντεταγμένες αυτές, εφ' όσον τα σημεία περιέχονται σ' έναν κύκλο, θα ικανοποιούν την εξίσωσή του:

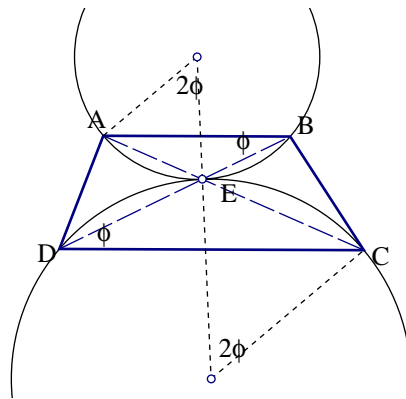
$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + bx + cy + d &= 0, \\ x'^2 + y'^2 + bx' + cy' + d &= 0, \\ x''^2 + y''^2 + bx'' + cy'' + d &= 0, \\ x'''^2 + y'''^2 + bx''' + cy''' + d &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Οι αριθμοί $1, b, c, d$ μπορούν να θεωρηθούν οι άγνωστοι του ομογενούς συστήματος, το οποίο, κατά την γραμμική άλγεβρα, έχει τότε ακριβώς λύση όταν η ορίζουσα του μηδενίζεται:

$$\det \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x'^2 + y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2 + y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2 + y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.10)$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, έχουμε την ζητούμενη εξίσωση (τα x', y', \dots κτλ. είναι γνωστά). Ας σημειώσουμε ότι η προϋπόθεση, τα τρία σημεία να μην είναι συνευθειακά, ισοδυναμεί με τον μη μηδενισμό (5.9) της κάτω δεξιά 3×3 υποορίζουσας, που στο ανάπτυγμα γίνεται ο συντελεστής του όρου $x^2 + y^2$. Ο μη μηδενισμός αυτού του όρου εξασφαλίζει ότι η εξίσωση παριστά πράγματι έναν κύκλο.

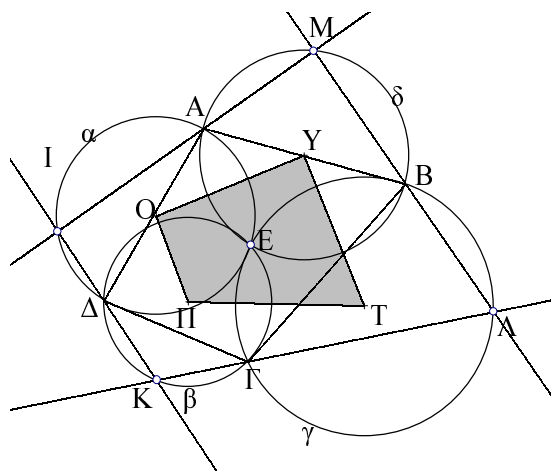
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.6



Σχήμα 6.14: Εφαπτόμενοι κύκλοι

Πρόβλημα 6.6.1 Έστω E το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου $ABCD$. Δείξε ότι οι κύκλοι που διέρχονται από τα άκρα των παραλλήλων πλευρών του και το σημείο E εφάπτονται μεταξύ τους.

Πρόβλημα 6.6.2 Δίδονται τυχόν κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E στο εσωτερικό του. Κατασκεύασε κύκλους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διερχόμενους από τα άκρα των πλευρών του και το E αντίστοιχα. Από τυχόν σημείο I του α , φέρε την $I\Delta$ τέμνουσα τον β στο K , από το K

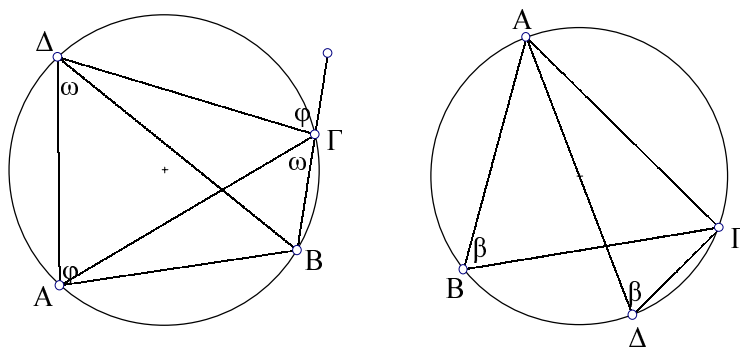


Σχήμα 6.15: Τετράπλευρο περιγεγραμμένο δοθέντος άλλου

την AK , τέμνουσα τον γ στο Λ , από το Λ την BL τέμνουσα τον δ στο M . Δείξε ότι τα MP είναι συνευθειακά. Διατύπωσε και απόδειξε για το $IKAM$ ιδιότητες ανάλογες αυτών του προηγούμενου προβλήματος. Δείξε ότι όλα τα τετράπλευρα $IKAM$ έχουν πλευρές ανάλογες προς το τετράπλευρο $OPIY$ των κέντρων των κύκλων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, αντιστοίχως. Γενίκευσε την πρόταση για τυχόν n -γωνο.

6.7 Εγγράφιμα εις κύκλον τετράπλευρα

Οι δύο μέθοδοι απόδειξης της προηγούμενης πρότασης φανερώνουν την διαφορά της συνθετικής και αναλυτικής μεθόδου σκέψης. Κατά κανόνα η πρώτη είναι πολύ πιό σύντομη και παραστατική. Η δεύτερη μέθοδος κρύβει συχνά το γεωμετρικό περιεχόμενο κάτω από αριθμητικές σχέσεις. Στην ανάπτυξη της θεωρίας προτιμάμε την πρώτη. Στην πράξη ωστόσο, π.χ. κατασκευή κυκλικού δρόμου που περνά από τρεις πόλεις με συγκεκριμένες συντεταγμένες $(x', y', \dots$ κτλ.), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την (6.10) (ή κάτι παρόμοιο). Η εξίσωση αυτή εκφράζει και την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι τέσσερα σημεία (με αντίστοιχες συντεταγμένες $(x, y), (x', y'), \dots$ κτλ.) στον ίδιο κύκλο. Τέσσερα τέτοια σημεία ορίζουν ένα **εγγεγραμμένο** (εννοείται σε κύκλο) τετράπλευρο. Από το (6.5.1) και έπεται αμέσως η πρόταση:



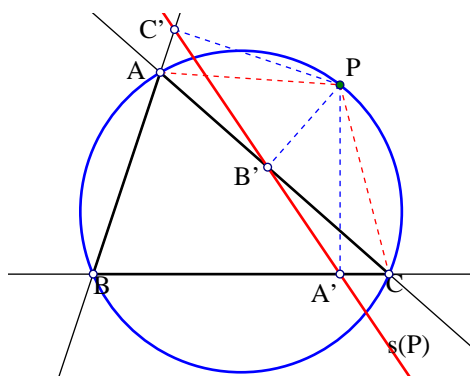
Σχήμα 6.16: Εγγεγραμμένο τετράπλευρο, θεώρημα ημιτόνου

Πρόταση 6.7.1 Παντός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Ισοδύναμα: κάθε γωνία του ισούται με την εξωτερική και απέναντι γωνία. Επίσης

κάθε πλευρά του οράται από τις μη προσκείμενες σ' αυτήν κορυφές υπό ίσες γωνίες. Αντίστροφα, αν τετράπλευρο έχει έστω και μία από τις προαναφερθήσες ιδιότητες, τότε είναι εγγράψιμο.

Πρόταση 6.7.2 Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ο λόγος της πλευράς προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας $b/\eta\mu(\beta) = 2R$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

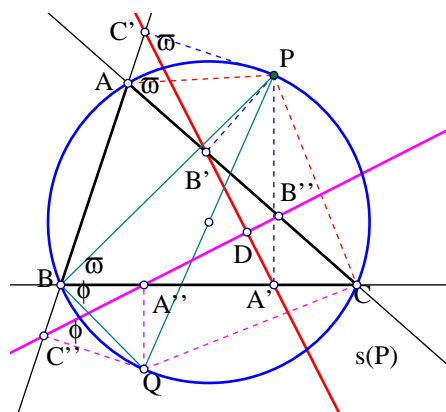
Στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομε από το A την διάμετρο $A\Delta$, τότε $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{AB\Gamma} = \beta$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε ότι $\eta\mu(\beta) = b/(2R)$, όπου $2R$ η διάμετρος του κύκλου. Τούτο είναι μιά ακόμη απόδειξη του 4.4, η οποία μάλιστα δίνει ακριβώς και τον κοινό λόγο των κλασμάτων.



Σχήμα 6.17: Ευθεία του Simson

Πρόταση 6.7.3 Για κάθε τρίγωνο ABC και σημείο P επί του περιγεγραμμένου κύκλου του, οι τρεις ορθογώνιες προβολές του σημείου στις πλευρές (ή τις προεκτάσεις τους) του τριγώνου κείνται επ' ευθείας $s(P)$, που ονομάζεται **ευθεία Simson** του σημείου P .

Ας ονομάσουμε A', B', C' τις προβολές του σημείου P . Πρέπει να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B'$ και $B'C'$ σχηματίζουν γωνία π στο σημείο B' . Πράγματι, $\widehat{PB'A'} = \pi - \widehat{A'CP}$, διότι το τετράπλευρο $A'B'PC$ είναι εγγράψιμο. Επίσης $\widehat{C'B'P} = \widehat{C'AP}$ διότι το τετράπλευρο $AB'PC'$ είναι εγγράψιμο. Τέλος $\widehat{C'AP} = \widehat{PCA'}$ διότι το τετράπλευρο $ABCP$ είναι εγγράψιμο. Συνάγεται λοιπόν ότι $\widehat{C'B'P} + \widehat{PB'A'} = \pi$.

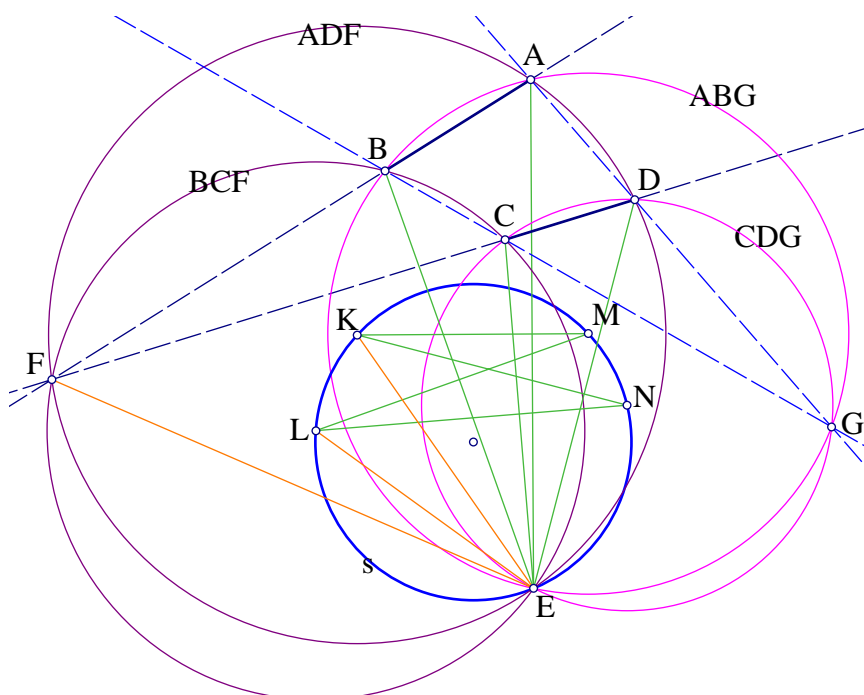


Σχήμα 6.18: Ευθείες Simson αντιδιαμετρικών σημείων

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.7

Πρόβλημα 6.7.1 Δείξε ότι οι ευθείες *Simson* δύο αντιδιαμετρικών σημείων P, Q είναι κάθετες μεταξύ τους. (Υπόδειξη : Δείξε (σχήμα 6.18) ότι το άθροισμα γωνιών $\widehat{BC''A''} + \widehat{AC'B'} = \pi/2$.)

6.8 Σημείον του Miquel



Σχήμα 6.19: Σημείον του Miquel

Πρόταση 6.8.1 Δίδονται δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και CD . Έστωσαν F και G τα σημεία τομής των AB, CD και AD, BC αντιστοίχως. Ισχύουν τα εξής:

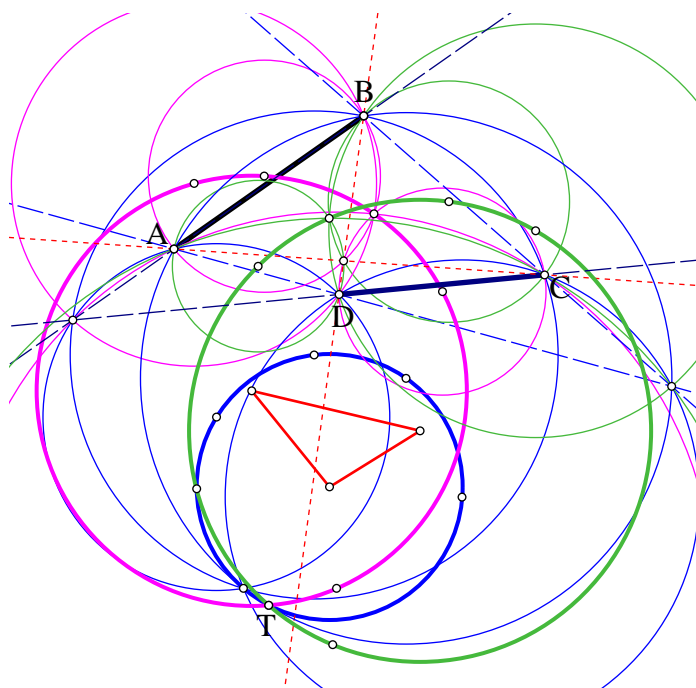
1. Οι κύκλοι ADF, BCF, ABG, CDG διέρχονται όλοι από κοινό σημείον E που λέγεται σημείον του Miquel των AB, CD .
2. Τα κέντρα K, L, M, N αυτών των κύκλων περιέχονται σε κύκλο s .
3. Το σημείον E περιέχεται και αυτό στον κύκλο s , που ονομάζεται κύκλος του Steiner των AB, CD .

Γιά το (1): Έστω E το άλλο σημείο τομής (εκτός του C) των κύκλων BCF, CDG . Τότε οι γωνίες $\widehat{FED}, \widehat{BAD}$ είναι παραπληρωματικές: $\widehat{FED} = \widehat{BEF} + \widehat{BEC} + \widehat{CED} = \widehat{BCF} + \widehat{BFC} + \widehat{CGD} = \widehat{ABC} + \widehat{CGD} = \pi - \widehat{BAD}$. Άρα και ο κύκλος ADF διέρχεται από το σημείο E . Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και ο κύκλος ABG διέρχεται από το E .

Γιά το (2): Στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η διάκεντρος δύο κύκλων είναι κάθετη στην κοινή τους χορδή. Έτσι η γωνία \widehat{KNL} έχει τις πλευρές τις κάθετες προς τις πλευρές της \widehat{CED} και συνεπώς ισούται μ' αυτήν. Όμως $\widehat{CED} = \widehat{CGD} = \widehat{BEA} = \widehat{KML}$. Συνεπώς τα τέσσερα σημεία K, L, M, N περιέχονται σε κύκλο s .

Γιά το (3): $\widehat{LEK} = \widehat{FEK} - \widehat{LEF} = (\pi - \frac{\widehat{FKE}}{2}) - (\pi - \frac{\widehat{FLE}}{2})$. Όμως για τις δύο τελευταίες γωνίες έχουμε: $\widehat{FK\bar{E}} = 2(\widehat{FA\bar{E}}) = 2(\widehat{FD\bar{E}}) = 2(\widehat{CG\bar{E}})$ και $\widehat{FL\bar{E}} = 2(\widehat{FB\bar{E}}) = 2(\widehat{FC\bar{E}}) = 2(\widehat{DG\bar{C}})$. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αναφερθέντα στην (1) : $\widehat{LEK} = \widehat{DGE} - \widehat{CGE} = \widehat{DGC} = \widehat{KML}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.8



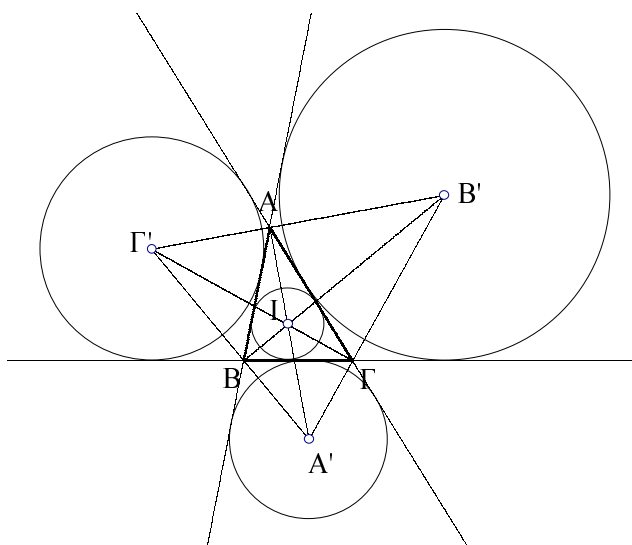
Σχήμα 6.20: Τρεις κύκλοι Steiner των A, B, C, D

Πρόβλημα 6.8.1 Δίδονται τέσσερα σημεία A, B, C, D . Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Miquel για όλες τις δυνατές αναδιατάξεις των σημείων αυτών, παίρνουμε αντίστοιχα (για κάθε διάταξη) τρεις κύκλους του Steiner (σχήμα 6.20). Οι κύκλοι αυτοί διέρχονται και οι τρεις από σταθερό σημείο T .

6.9 Κύκλοι εγγεγραμμένοι εις τρίγωνον

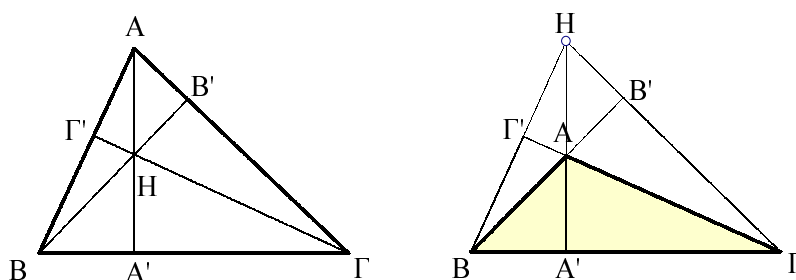
Πρόταση 6.9.1 Παντός τριγώνου $AB\Gamma$ οι εξωτερικές και εσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται ανά τρεις σε τέσσερα συνολικά σημεία I, A', B', Γ' , τα οποία είναι κέντρα κύκλων εφαπτομένων και στις τρεις πλευρές τριγώνου (ή τις προεκτάσεις τους). Οι τέσσερις αυτοί κύκλοι είναι οι μοναδικοί με την ιδιότητα αυτή. Τα τέσσερα αυτά σημεία είναι τα μοναδικά με την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές του τριγώνου (ή τις προεκτάσεις τους).

Ας θεωρήσουμε τις τρεις εσωτερικές διχοτόμους. Οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται ανάλογα. Έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων AA', BB' . Φέρνουμε από το I κάθετες ID, IE, IZ στις πλευρές του τριγώνου. Κατά την (5.6.2), $d(I, E) = d(I, Z)$, αφού το I ανήκει στην διχοτόμο AA' . Παρόμοια $d(I, Z) = d(I, \Delta)$ αφού το I ανήκει στην διχοτόμο BB' . Συνάγεται $d(I, E) = d(I, \Delta)$, άρα το I είναι και επί της διχοτόμου $\Gamma\Gamma'$. Και οι τρεις λοιπόν εσωτερικές



Σχήμα 6.21: Εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου, κύκλοι παρεγγεγραμμένοι

διχοτόμοι διέρχονται από το I . Ο κύκλος με κέντρο I και ακτίνα ID λέγεται **εγγεγραμμένος** του τριγώνου $AB\Gamma$. Οι κύκλοι με κέντρα στα A' , B' , Γ' και ακτίνες την απόσταση από τις πλευρές του τριγώνου λέγονται **παρεγγεγραμμένοι** κύκλοι του τριγώνου. Το ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου στα σημεία Δ , E , Z είναι συνέπεια τις καθετότητας των ID , IE , IZ στις αντίστοιχες πλευρές. Το μονοσήμαντο των τεσσαρων σημείων και των τεσσάρων κύκλων είναι πάλι συνέπεια της χαρακτηριστικής ιδιότητας των διχοτόμων, να περιέχουν αποκλειστικά σημεία ισαπέχοντα από τις πλευρές της γωνίας την οποίαν διχοτομούν. Συχνά οι τέσσερις προηγούμενοι κύκλοι αναφέρονται και ως **τρισεφαπτόμενοι** του τριγώνου.



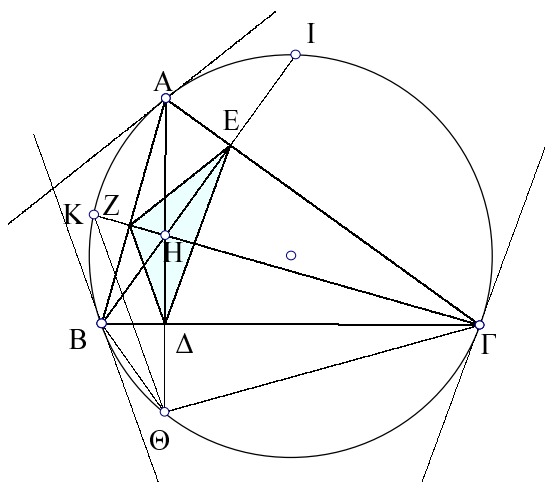
Σχήμα 6.22: Ορθόκεντρο τριγώνου, περίπτωση αμβλυγωνίου τριγώνου

Πρόταση 6.9.2 Παντός τριγώνου $AB\Gamma$ τα ύψη AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, διέρχονται από σημείο H λεγόμενο ορθόκεντρο του τριγώνου.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι τα ύψη BB' και $\Gamma\Gamma'$ τέμνονται στο H . Φέρνουμε την HA' κάθετο στην $B\Gamma$ και ενώνουμε το H με το A . Θα δείξουμε ότι τα A , H , A' είναι στην ίδια ευθεία. Ισοδύναμα: οι γωνίες $\varphi = \widehat{BHA'} = \widehat{AHB'} = \theta$. Όμως το τετράπλευρο $\Gamma B'HA'$, ως έχον απέναντι γωνίες ορθές είναι εγγράψιμο, άρα $\widehat{BHA'} = \widehat{A'\Gamma B'}$. Παρόμοια το τετράπλευρο $A\Gamma HB'$, ως έχον απέναντι γωνίες ορθές είναι εγγράψιμο, άρα $\widehat{A\Gamma B'} = \widehat{AHB'}$. Τέλος στο τετράπλευρο $B\Gamma B'\Gamma'$, οι κορυφές B' , Γ' βλέπουν την $B\Gamma$ υπό ορθές γωνίες άρα είναι εγγράψιμο και η γωνία του στο Γ ισούται με την εξωτερική στο Γ' : $\widehat{A\Gamma B'} = \widehat{A'\Gamma B'}$. Συνολικά λοιπόν

έχομε αυτό που ζητάμε: $\widehat{BHA'} = \widehat{AHB'}$.

Στην προηγούμενη απόδειξη υποθέσαμε σιωπηρά ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο. Εάν η γωνία στο A είναι αμβλεία, το H είναι εκτός του τριγώνου και τα B', Γ' ευρίσκονται επί των προεκτάσεων των αντιστοίχων πλευρών. Θεωρούμε τότε ότι τα δύο ύψη BB', ΓΓ' τέμνονται στο H, ενώνουμε τα A, H και φέρνουμε κάθετο στην BΓ από το A. Δείχνουμε πάλι ότι τα H, A, A' είναι στην ίδια ευθεία. Ισοδύναμα: H, A, A' είναι στην ίδια ευθεία. Το μόνο που αλλάζει είναι η διάταξη των A, A', H. Η απόδειξη και σ' αυτήν την περίπτωση είναι ίδια με την προηγούμενη.



Σχήμα 6.23: Ορθικό τρίγωνο

Πρόταση 6.9.3 (Ορθικό τρίγωνο) Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθόκεντρο H , οι πόδες των υψών ορίζουν το λεγόμενο **ορθικό** τρίγωνο ΔEZ του $AB\Gamma$. Το τρίγωνο αυτό έχει μεταξύ άλλων τις ιδιότητες:

1. Τα τρία τρίγωνα που αποτελεί από το $AB\Gamma$: AZE , $B\Delta Z$ και ΔGE έχουν τις ίδιες γωνίες με το $AB\Gamma$.
2. Τα ύψη του $AB\Gamma$ είναι διχοτόμοι του ορθικού ΔEZ .
3. Εάν α , β , γ είναι οι γωνίες του $AB\Gamma$, τότε απέναντι σ' αυτές το ορθικό σχηματίζει αντίστοιχα γωνίες: $\pi-2\alpha$, $\pi-2\beta$, $\pi-2\gamma$.
4. Οι προεκτάσεις των υψών του $AB\Gamma$ τέμνουν την περιγεγραμμένη περιφέρεια σε σημεία Θ , I , K , έτσι ώστε οι πλευρές του τριγώνου να είναι μεσοκάθετες αντίστοιχα των $H\Theta$, HI , HK .
5. Το τρίγωνο ΘIK έχει πλευρές παράλληλες και διπλάσιες του ορθικού.
6. Οι εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου στα A , B , Γ είναι παράλληλες των πλευρών του ορθικού.
7. Τα τέσσερα σημεία A , B , Γ , H , λαμβανόμενα ανά τρία ορίζουν 4 τρίγωνα των οποίων το ορθόκεντρο είναι το τέταρτο σημείο **ορθοκεντρική τετράδα**. Τα 4 αυτά τρίγωνα έχουν κοινό ποδικό τρίγωνο.
8. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων μιάς ορθοκεντρικής τετράδας έχουν την ίδια ακτίνα.

Πράγματι, το 1) προκύπτει από το ότι τα τετράπλευρα $EZB\Gamma$, $Z\Delta\Gamma A$ και $EAB\Delta$ είναι εγγράψιμα σε κύκλο. Τα 2) και 3) προκύπτουν διαβάζοντας τις γωνίες που σχηματίζονται στους πόδες των υψών. π.χ. στο Δ σχηματίζεται από κάθε μεριά η γωνία α (συνέπεια του 1). Για το 4) παρατηρούμε ότι η $\widehat{\Delta H\Gamma} = \widehat{\Delta\Theta\Gamma} = \beta$, λόγω των εγγραφίμων τετραπλεύρων

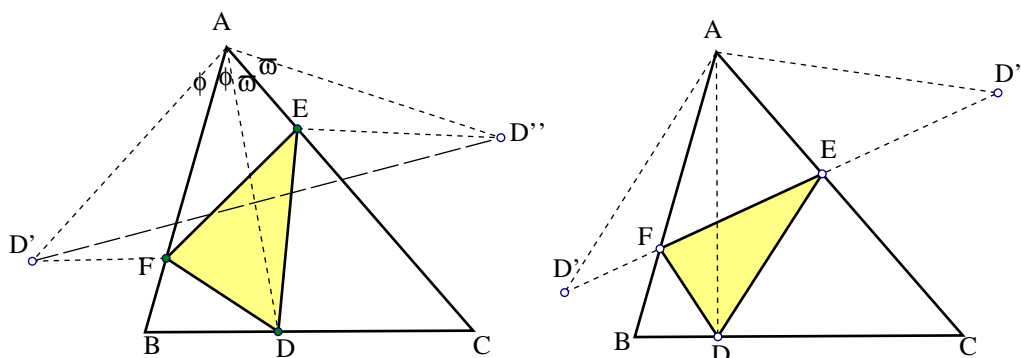
$B\Delta HZ$ και $AB\Theta\Gamma$. Το $H\Gamma\Theta$ είναι λοιπόν ισοσκελές άρα η $B\Gamma$ μεσοκάθετος της $H\Theta$. Το 5) είναι συνέπεια του 4), αφού λ.χ. η $Z\Delta$ ενώνει τα μέσα των πλευρών του $H\Gamma\Theta$ άρα είναι παράλληλη και το μισό της $K\Theta$. Το 6) προκύπτει από τα προηγούμενα π.χ. η γωνία στο Γ είναι β όπως και η $\widehat{\Delta E\Gamma}$. Το 7) είναι άμεση συνέπεια των ορισμών. Τέλος το 8) προκύπτει από το 4), διότι κατ' αυτό λ.χ. τα τρίγωνα $BH\Gamma$ και $B\Theta\Gamma$ έχουν αντίστοιχα ίσες πλευρές, άρα και ίσους περιγεγραμμένους κύκλους (άσκηση). Όμως ο περιγεγραμμένος του $B\Theta\Gamma$ είναι ο περιγεγραμμένος του αρχικού τριγώνου $AB\Gamma$.

6.10 Πρόβλημα του Fagnano

Το πρόβλημα του Fagnano (1682-1766) διατυπώνεται ως εξής:

Σε δοθέν οξυγώνιο τρίγωνο ABC , να εγγραφεί τρίγωνο DEF ελαχίστης περιμέτρου.

Την λύση του προβλήματος επιτυγχάνουμε ευκολότερα χωρίζοντάς το σε δύο μέρη: (α) Κατ' αρχήν υποθέτουμε ότι το εγγεγραμμένο DEF έχει επί της BC σταθερά την κορυφή του D και μεταβάλλει τις δύο άλλες κορυφές επί των αντιστοίχων πλευρών του τριγώνου ABC . Ευρίσκουμε λοιπόν το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου υπ' αυτόν τον περιορισμόν. Κατόπιν (β) μεταβάλλουμε το σημείο D και αναζητούμε εκείνο το τρίγωνο που έχει την ελάχιστη περίμετρο συνολικά.



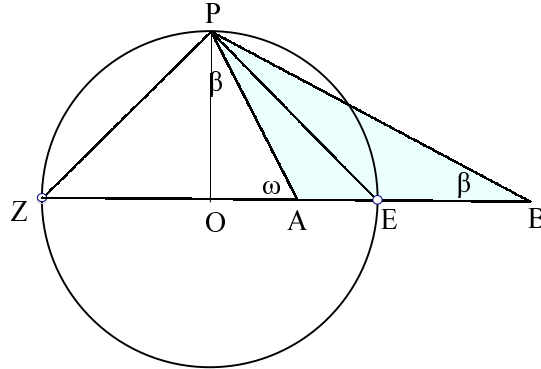
Σχήμα 6.24: Εγγεγραμμένο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου

(α) Θεωρούμε την θέση του D σταθερά και τα E, F , μεταβαλλόμενα επί των πλευρών του τριγώνου. Θεωρούμε επίσης τα συμμετρικά D', D'' , του D ως προς τις πλευρές του τριγώνου. Η προς ελαχιστοποίηση περίμετρος ισούται με το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $D'FED''$. Επίσης τα σημεία D', D'' είναι σταθερά, εξαρτώμενα μόνον από την θέση του D και όχι από τα E, F . Προφανώς η ελάχιστη δυνατή περίμετρος επιτυγχάνεται όταν τα σημεία D', F, E, D'' , είναι επ' ευθείας (όπως στο δεύτερο σχήμα). Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DD' είναι $f(D) = |AD|\cos(\alpha)$, όπου $\alpha = \phi + \omega = \widehat{BAC}$, η γωνία του τριγώνου στο A . Τούτο, διότι το τρίγωνο $D'AD''$ είναι ισοσκελές, έχοντας και τα δύο σκέλη ίσα με το ευθύγραμμο τμήμα AD , η δε γωνία του στο A είναι 2α . Συμπεραίνουμε ότι για την σταθερή αυτή θέση του D , η ελάχιστη περίμετρος επιτυγχάνεται όταν τα E, F , συμπίπτουν με τις τομές της $D'D''$ με τις πλευρές του τριγώνου και τότε το μήκος της περιμέτρου είναι $f(D)$.

(β) Στο δεύτερο μέρος αναζητούμε την θέση του D για την οποία η $f(D)$ γίνεται ελάχιστη. Τούτη όμως προφανώς είναι η προβολή του A στην BC .

Σκεφτόμενοι με τον ίδιο τρόπο και για τις άλλες κορυφές E, F , του τριγώνου DEF , συμπεραίνουμε ότι πρέπει να συμπίπτουν με τους πόδες των υψών του τριγώνου, άρα το ζητούμενο τρίγωνο θα συμπίπτει με το ορθικό του ABC και η ελάχιστη δυνατή περίμετρος θα είναι η περίμετρος του ορθικού τριγώνου.

6.11 Απολλώνιος κύκλος



Σχήμα 6.25: Απολλώνιος κύκλος

Πρόταση 6.11.1 (Απολλώνιος (247 π.Χ.) κύκλος) Δοθέντων δύο σημείων A, B και θετικού $k \neq 1$ ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P , γιά τα οποία ο λόγος $d(P, A)/d(P, B) = k$, είναι κύκλος ορθογώνιος στην ευθεία των A, B με διάμετρο τα δύο σημεία της προσανατολισμένου λόγου $\pm k$ ως προς τα A, B .

Η απόδειξη στηρίζεται στην 5.6.3. Πράγματι, αν P είναι σημείο του τόπου, τότε οι εξωτερική και εσωτερική διχοτόμος της γωνίας στο P του τριγώνου ABP , θα τέμνουν την απέναντι πλευρά στα σημεία E, Z , προσανατολισμένου λόγου $\mp k$, άρα γνωστά σημεία. Το P βλέπει το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα υπό ορθή γωνία, εξ' ου και το ζητούμενο. Κάθε σημείο του τόπου λοιπόν θα ανήκει σ' αυτόν τον κύκλο. Πράγματι, οι γωνίες $\widehat{BPO} = \widehat{OAP} = \omega$. Προκύπτει αμέσως ότι τα τρίγωνα AOP και OPB έχουν ίσες αντίστοιχες γωνίες, άρα η ακτίνα r του κύκλου θα ικανοποιεί $r^2 = d(O, B)d(O, A)$. Αυτό μας χρειάζεται για να δείξουμε το αντίστροφο: ότι κάθε σημείο του κύκλου είναι και σημείο του τόπου. Πράγματι, από την τελευταία σχέση προκύπτει και αντίστροφα ότι τα τρίγωνα AOP και OPB έχουν ίσες αντίστοιχες γωνίες. Απ' αυτό προκύπτει ότι $\widehat{APE} = \widehat{EPB} = \varphi$. Άρα οι PE, PZ είναι διχοτόμοι της \widehat{APB} και το 5.6.3 εφαρμόζεται και εξασφαλίζει ότι ο λόγος $d(P, A)/d(P, B) = k$.

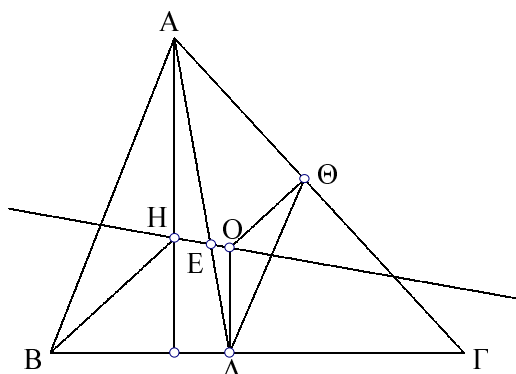
Κατά την 5.4.1, τα E, Z θα δίδονται από την εξίσωση της ευθείας δια των A, B $g(t) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$, για $t_1 = k/(k-1), t_2 = k/(k+1)$. Άρα το μέσον του EZ και κέντρο του κύκλου θα είναι

$$\bar{o} = \frac{1}{2}(g(t_1) + g(t_2)) = \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - 1}\right)\bar{a} + \frac{k^2}{k^2 - 1}\bar{b}. \quad (6.11)$$

6.12 Ευθεία και κύκλος του Euler

Πρόταση 6.12.1 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο τομής των διαμέσων G , ευρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου με το ορθόκεντρο H και το χωρίζει σε λόγο 1:2. Η ευθεία που ορίζουν τα O, H λέγεται ευθεία Euler του τριγώνου.

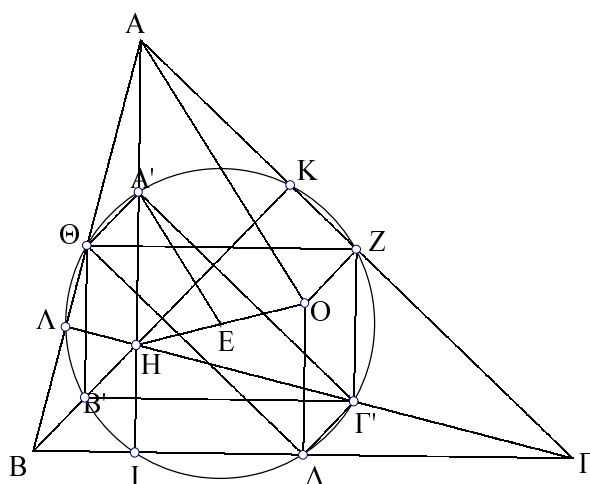
Πράγματι, ας θεωρήσουμε την διάμεσο $A\Delta$ και το μέσον Θ της $A\Gamma$. Τα τρίγωνα AHB και $O\Theta\Delta$ έχουν παράλληλες τις πλευρές τους, άρα ίσες γωνίες και ανάλογες πλευρές με λόγο λ . Επειδή η $\Theta\Delta$ είναι το μισό της AB , $\lambda=1/2$. Τούτο σημαίνει ότι το $O\Delta$ είναι παράλληλο και



Σχήμα 6.26: Ευθεία του Euler τριγώνου

το μισό του AH . Έστω E το σημείο τομής της $AΔ$ και HO . Τα τρίγωνα AEH , $OEΔ$ έχουν πάλι ίσες γωνίες άρα πλευρές ανάλογες με λόγο $= κ$. Επειδή όμως η AH είναι διπλάσια της $ΟΔ$ θα είναι $κ=2$. Συνάγεται ότι το E χωρίζει την διάμεσο σε λόγο $2:1$, άρα συμπίπτει με το σημείο τομής G των διαμέσων του τριγώνου.

- Πρόταση 6.12.2** 1. (Κύκλος του Euler 1707-1783) Παντός τριγώνου $ABΓ$ με ορθόκεντρο H , τα μέσα των πλευρών, οι πόδες των υψών και τα μέσα A' , B' , $Γ'$ αντιστοίχως, των HA , HB , $HΓ$ περιέχονται σε κύκλο. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **κύκλος του Euler** ή **κύκλος των εννέα σημείων**.
2. Το κέντρο E του κύκλου του Euler είναι το μέσον του HO , που ενώνει το ορθόκεντρο με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου.
3. Η ακτίνα EA' του κύκλου του Euler είναι παράλληλη και το ήμισυ της ακτίνας OA του περιγεγραμμένου κύκλου.



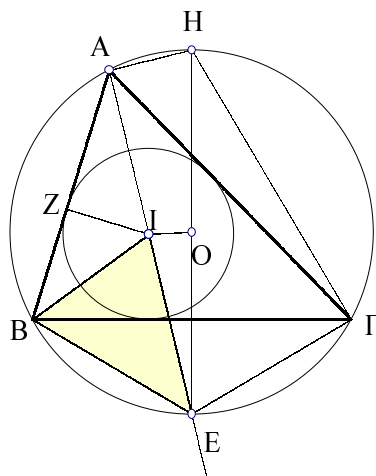
Σχήμα 6.27: Κύκλος του Euler τριγώνου

Χρησιμοποιούμε το προηγουμένως δειχθέν: το AH είναι διπλάσιο και παράλληλο του $ΟΔ$. $Δ$, Z , $Θ$ συμβολίζουν εδώ τα μέσα των πλευρών, I , K , $Λ$ τους πόδες των υψών του $ABΓ$. Το τετράπλευρο $ΘBΓ'Z$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τούτο διότι οι πλευρές του $ΘZ$ και $BΓ'$ είναι παράλληλες και μισού μήκους προς την $BΓ$, οι δε $ΘB'$, $ZΓ'$ είναι παράλληλες και

μισές το μήκος προς την ΑΗ. Ανάλογα και το τετράπλευρο ΘΑΓ'Δ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τα ορθογώνια αυτά παραλληλόγραμμο έχουν κοινή την διαγώνιο ΘΓ'. Άρα το κέντρο τους θα συμπίπτει με το μέσον Ε της ΘΓ' που ταυτόχρονα είναι μέσον των άλλων διαγωνίων ΘΓ' και Β'Ζ. Τα Θ, Β', Δ, Γ', Ζ και Α' είναι λοιπόν επί κύκλου με κέντρο Ε και διαμέτρους (διχοτομούμενες από το Ε) ΘΓ', Β'Ζ, Α'Δ. Το Α'ΗΔΟ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγωνιοί του διχοτομούνται, άρα το Ε είναι μέσον της ΟΗ. Τέλος το σημείο Κ βλέπει την διάμετρο Β'Ζ υπό ορθήν γωνίαν, παρόμοια το Ι βλέπει την Α'Δ και το Λ την ΘΓ' υπό ορθήν γωνίαν. Όλα λοιπόν αυτά τα σημεία ευρίσκονται στον ίδιο κύκλο με κέντρο Ε και ακτίνα ΕΑ'. Τούτη είναι παράλληλη και το ήμισυ της ΟΑ, που είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Πρόταση 6.12.3 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ο περιγεγραμμένος κύκλος διχοτομεί τα ευθύγραμμα τμήματα τα ενώνοντα το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου Η με τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων του κύκλων.

Πράγματι, τα κέντρα Η του εγγεγραμμένου και Θ, Ι, Κ των παρεγγεγραμμένων κύκλων σχηματίζουν μία ορθοκεντρική τετράδα 6.9.3, της οποίας το ΑΒΓ είναι το ποδικό τρίγωνο, ο δε περιγεγραμμένος του ΑΒΓ είναι ο κύκλος Euler του ΘΙΚ. Το συμπέρασμα συνάγεται από το ομώνυμο θεώρημα.



Σχήμα 6.28: Σχέση ακτίνων εγγεγραμμένου-περιγεγραμμένου

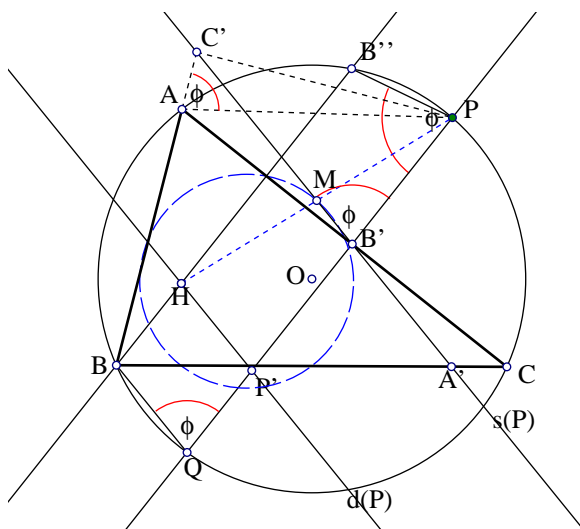
Πρόταση 6.12.4 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Ι το κέντρο του εγγεγραμμένου, Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου r, R αντίστοιχα οι ακτίνες των δύο κύκλων, Ζ το σημείο επαφής εγγεγραμμένου και πλευράς ΑΒ, Ε το σημείο τομής διχοτόμου στο Α και περιγεγραμμένου, Η το αντιδιαμετρικό του Ε. Ισχύουν τα εξής:

1. Οι γωνίες $\widehat{IBE} = \widehat{BIE}$ και το τρίγωνο ΙΒΕ είναι ισοσκελές.
2. Τα μήκη των ΒΕ και ΕΓ είναι ίσα.
3. Τα τρίγωνα ΑΖΙ και ΗΕΓ είναι ορθογώνια με ίσες γωνίες.
4. Για την απόσταση $d = d(I, O)$ των κέντρων των δύο κύκλων ισχύει $d^2 = R(R - 2r)$ Euler.
5. Η προηγούμενη σχέση είναι αναγκαία και ικανή για να είναι δύο κύκλοι αντίστοιχα εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος κάποιου τριγώνου.

6. Εάν δύο κύκλοι α, β , κέντρων I, O και ακτίνων r, R αντιστοιχώς, ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση, τότε για κάθε σημείο A της β , φέρνοντας εφαπτόμενες AB, AG προς την α , σχηματίζεται τρίγωνο που έχει τις α, β ως εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο αντίστοιχα.

Πράγματι, ας συμβολίζουμε α, β, γ τις γωνίες του τριγώνου στα A, B, Γ αντιστοιχώς. Το 1) προκύπτει μετρώντας τις γωνίες: $\widehat{EB\Delta} = \alpha/2, \widehat{IB\Delta} = \beta/2. \Rightarrow \widehat{IBE} = (\alpha+\beta)/2$. Το ίδιο προκύπτει και για την γωνία \widehat{BIE} μετρώντας τις γωνίες στο τρίγωνο ABI . Το 2) είναι άμεση συνέπεια του ότι η διχοτόμος της α , διχοτομεί στο E το τόξο $B\Gamma$. Το 3) προκύπτει πάλι απ' το ότι οι γωνίες των ορθογωνίων τριγώνων στο A και H αντιστοιχώς είναι $\alpha/2$. Το 4) προκύπτει από την δύναμη του I ως προς τον περιγεγραμμένο που είναι ίση με $d^2 - R^2 = -d(I, A)d(I, E)$. Τα τρίγωνα $AZI, E\Gamma H$, ως έχοντα ίσες γωνίες έχουν πλευρές ανάλογες $d(E, \Gamma)/2R = r/d(A, I) \Rightarrow d(I, A)d(I, E) = 2Rr$. Το αναγκαίο που αναφέρεται στο 5) προκύπτει από τα προηγούμενα. Το ικανό και το 6) αποδεικνύονται ταυτόχρονα. Πράγματι, αν οι δύο κύκλοι ικανοποιούν την σχέση του 4), τότε παίρνουμε κατ' αρχήν τυχόν σημείο A στον β και φέρομε δύο εφαπτόμενες AB, AG στον α . Χρησιμοποιώντας κατόπιν την σχέση ευρίσκομε ότι ο κύκλος α πρέπει να συμπίπτει με τον εγγεγραμμένο του $AB\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.12



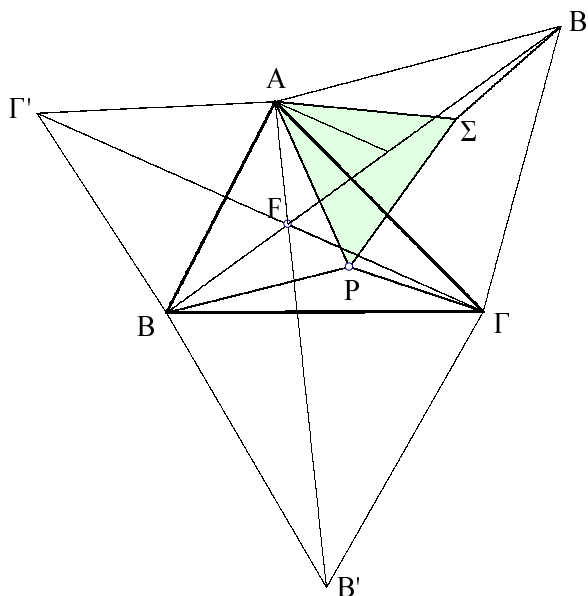
Σχήμα 6.29: Διπλάσια ευθεία Simson

Πρόβλημα 6.12.1 Έστω B'' το συμμετρικό του ορθοκέντρου H του τριγώνου ABC , ως προς την πλευρά AC (σχήμα 6.29). Έστω και P σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, $s(P)$ η αντίστοιχη ευθεία Simson του P και PQ παράλληλη προς την BB'' . Δείξε τα εξής:

1. Οι γωνίες $\widehat{BQP} = \widehat{C'AP} = \widehat{C'B'P} = \widehat{B'PB''}$.
2. Η ευθεία $d(P)$, συμμετρική της PB'' , (εξ' ανακλάσεως) ως προς την AC , είναι παράλληλη της $s(P)$.
3. Η ευθεία $d(P)$, διέρχεται από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC .
4. Το μέσον της HP περιέχεται στην ευθεία Simson $s(P)$ και στο κύκλο Euler του τριγώνου.

Η ευθεία $d(P)$ λέγεται διπλάσια ευθεία του Simson.

6.13 Σημείο του Fermat



Σχήμα 6.30: Σημείο του Fermat 1601-1665

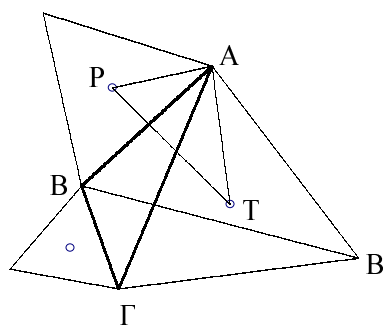
Πρόταση 6.13.1 Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Για κάθε σημείο P θεωρούμε το άθροισμα των αποστάσεων $\rho = |PA| + |PB| + |P\Gamma|$.

1. Το ρ γίνεται ελάχιστο στην θέση του σημείου F επί της BB' . Όπου AGB' ισόπλευρο, κατασκευαζόμενο επί της πλευράς AG .
2. Το F χαρακτηρίζεται από το ότι βλέπει τις πλευρές του τριγώνου υπό γωνίες 120° .
3. Η απόσταση $\rho_0 = |BB'|$ υλοποιεί το ελάχιστο της συνάρτησης ρ .
4. Τα ανάλογα κατασκευαζόμενα ισόπλευρα τρίγωνα επί των άλλων πλευρών $AB\Gamma'$ και $B\Gamma A'$ ορίζουν αντίστοιχες ευθείες $|AA'| = |BB'| = |\Gamma\Gamma'| = \rho_0$.
5. Οι ευθείες AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ διέρχονται από το F και σχηματίζουν σ' αυτό γωνίες 60° . Το F λέγεται σημείο Fermat του τριγώνου $AB\Gamma$.

Για την απόδειξη κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $AP\Sigma$. Έτσι πετυχαίνουμε το προς ελαχιστοποίηση άθροισμα ρ να πάρει την μορφή μήκους τεθλασμένης γραμμής: $\rho = |BP| + |P\Sigma| + |\Sigma B'|$. Το σημείο B' καθορίζεται μονοσήμαντα από το τρίγωνο $AB\Gamma$ και δεν εξαρτάται του P . Άρα το μήκος γίνεται ελάχιστο όταν η τεθλασμένη συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα BB' , οπότε το P και το Σ θα περιέχονται στην BB' . Το F καθορίζεται επί της BB' από την γωνία 60° που σχηματίζει μ' αυτήν. Τότε το $AFT\Gamma B'$ είναι εγγράψιμο, διότι τα B και Γ βλέπουν την AB' υπό γωνίαν 60° . Απ' αυτές τις παρατηρήσεις απορρέουν εύκολα όλοι οι ισχυρισμοί.

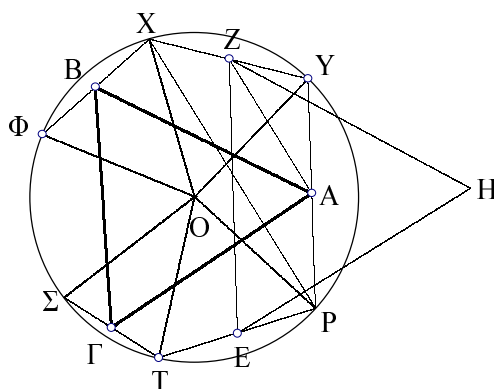
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.13

Πρόβλημα 6.13.1 Κατασκεύασε ισόπλευρα τρίγωνα εξωτερικά και επί των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε, ανάλογα με την πρόταση 6.13.1, ότι και στην περίπτωση αμβλυγωνίου τριγώνου οι ευθείες AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$ έχουν το ίδιο μήκος. Δείξε επίσης ότι τα κέντρα (βάρους)



Σχήμα 6.31: Τρίγωνο Ναπολέοντος

των ισοπλεύρων αυτών είναι κορυφές άλλου ισοπλεύρου τριγώνου (αναφέρεται ως τρίγωνο Ναπολέοντος). (Υπόδειξη: τα τρίγωνα APT και ABB' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $1/\sqrt{3}$.)



Σχήμα 6.32: Τρίγωνο μέσων τόξων

Πρόβλημα 6.13.2 Κατασκεύασε σε τυχόντα κύκλο τρία τόξα 60 μοιρών: $\Phi\Sigma$, TP , YX , σε τυχαία θέση. Θεώρησε τα μέσα A, B, Γ των μεταξύ τους χορδών PY , $X\Phi$, ΣT . Τούτα είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου. (Υπόδειξη: Αν E και Z τα μέσα των TP και XY (Σχήμα-6.32), το ισόπλευρο EZH έχει κέντρο το A , διότι $\widehat{AZY} = \widehat{PXY} = 30^\circ$. Εφάρμοσε το προηγούμενο.)

6.14 Δέσμες κύκλων

Δοθέντων δύο κύκλων

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0, \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 + b'x + c'y + d' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

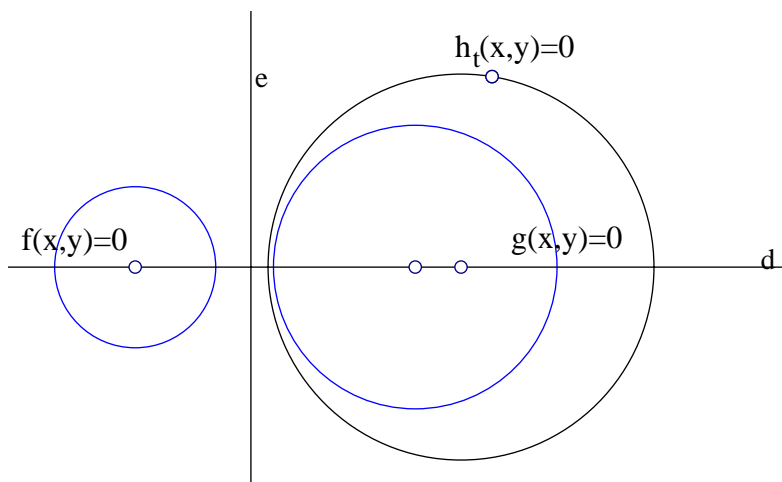
ονομάζομε **δέσμη** παραγόμενη από τους δύο κύκλους, όλους τους κύκλους της μορφής:

$$h_t(x, y) = (1-t)f(x, y) + tg(x, y) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (6.13)$$

Γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$, η προηγούμενη εξίσωση υπολογίζεται άμεσα:

$$h_t(x, y) = x^2 + y^2 + b(t)x + c(t)y + d(t) = 0,$$

όπου θέτω $b(t) = b + t(b' - b)$, $c(t) = c + t(c' - c)$, $d(t) = d + t(d' - d)$. Προφανώς η εξίσωση παριστάνει έναν κύκλο, που για $t = 0$ συμπίπτει με τον πρώτο κύκλο $f(x, y) = 0$ και για $t = 1$ συμπίπτει με τον δεύτερο $g(x, y) = 0$.



Σχήμα 6.33: Δέσμη κύκλων

Πρόταση 6.14.1 Για κάθε δέσμη κύκλων παραγόμενη από δύο μη-ομόκεντρους κύκλους ισχύουν τα εξής:

1. Από κάθε σημείο του επιπέδου περνά ένας ακριβώς κύκλος της δέσμης.
2. Ο ριζικός άξονας δύο τυχόντων κύκλων της δέσμης είναι πάντοτε η ίδια ευθεία e , που ονομάζουμε **ριζικό άξονα της δέσμης**.
3. Τα κέντρα των κύκλων της δέσμης περιέχονται σε ευθεία d , κάθετη στον κοινό ριζικό άξονα, που ονομάζουμε **ευθεία των κέντρων της δέσμης**.
4. Εάν τρεις κύκλοι έχουν, ανά ζεύγη, τον ίδιο ριζικό άξονα, τότε ο τρίτος ανήκει στην δέσμη των δύο άλλων.
5. Εάν δύο κύκλοι της δέσμης έχουν δύο κοινά σημεία A, B , τότε όλοι οι κύκλοι της δέσμης θα διέρχονται απ' αυτά τα σημεία. Εάν δύο κύκλοι της δέσμης εφάπτονται σε σημείο A , τότε όλα τα ζεύγη κύκλων της δέσμης θα εφάπτονται στο A . Εάν δύο κύκλοι της δέσμης δεν τέμνονται, τότε κανένα ζεύγος κύκλων της δέσμης δεν τέμνεται.

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια του ορισμού. Δοθέντος σημείου (x_0, y_0) ο κύκλος της δέσμης που περνά από το σημείο αυτό θα ικανοποιεί την εξίσωση $h_t(x_0, y_0) = 0$, που καθορίζει μονοσήμαντα το $t = f(x_0, y_0)/(f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0))$. Η μόνη προβληματική περίπτωση φαίνεται να είναι όταν $f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) = 0$, που σημαίνει ότι το σημείο ευρίσκεται στον ριζικό άξονα των δύο κύκλων. Θεωρούμε όμως και τον ριζικό άξονα σαν ένα ειδικό μέλος της δέσμης (για $t = \infty$) και έτσι η πρόταση παραμένει αληθής και σ' αυτήν την περίπτωση.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό δεν έχουμε παρά να πάρουμε δύο μέλη της δέσμης $h_u(x, y) = 0$, $h_v(x, y) = 0$, και να τα αφαιρέσουμε για να βρούμε την εξίσωση του ριζικού άξονα. Η αφαίρεση αυτή δίδει:

$$h_u(x, y) - h_v(x, y) = (u - v)[(b' - b)x + (c' - c)y + (d' - d)] = 0,$$

που για $u \neq v$ ορίζει πάντοτε την ίδια ευθεία.

Ο τρίτος ισχυρισμός προκύπτει από το γεγονός ότι το κέντρο του κύκλου $h_t(x, y) = 0$ είναι

το σημείο $-(b+t(b'-b), c+t(c'-c))/2$ που είναι η παραμετρική περιγραφή μιάς ευθείας με κατεύθυνση $((b'-b), (c'-c))$ που είναι κάθετη στον ριζικό άξονα.

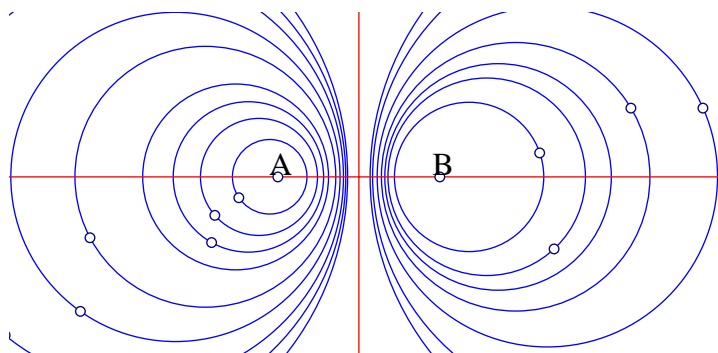
Ο τέταρτος ισχυρισμός προκύπτει απ' το ότι ο ριζικός άξονας και ένας ακόμη κύκλος της δέσμης καθορίζουν πλήρως την δέσμη. Πράγματι η εξίσωση του ριζικού άξονα $H(x, y) = 0$, προκύπτει σαν διαφορά των εξισώσεων δύο κύκλων της δέσμης $H(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$. Επομένως αν ξέρω την $H(x, y)$ και έναν κύκλο π.χ. τον $g(x, y) = 0$, λύνοντας την εξίσωση βρίσκω και τον άλλο κύκλο της δέσμης $f(x, y) = (H(x, y) + g(x, y)) = 0$.

Ο πέμπτος ισχυρισμός είναι εξ' ίσου προφανής. Αν το σημείο (x_0, y_0) ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, δηλαδή είναι στην τομή των κύκλων που παράγουν την δέσμη, τότε και κάθε μέλος της δέσμης $h_t(x, y) = 0$, θα ικανοποιεί $h_t(x_0, y_0) = (1-t)f(x_0, y_0) + tg(x_0, y_0) = 0$, δηλαδή θα διέρχεται από το ίδιο σημείο.

Πρόταση 6.14.2 Ένα σύνολο κύκλων Σ αποτελεί δέσμη τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει ευθεία e η οποία είναι ριζικός άξονας κάθε ζεύγους διαφορετικών κύκλων του συνόλου Σ .

Τούτο είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου (4), και δίνει ένα γεωμετρικό χαρακτηρισμό της δέσμης, ανεξάρτητο από την περιγραφή της με εξισώσεις.

Υπερβολική λέμε την δέσμη που παράγεται από δύο μη-τεμνόμενους κύκλους.



Σχήμα 6.34: Υπερβολική δέσμη κύκλων

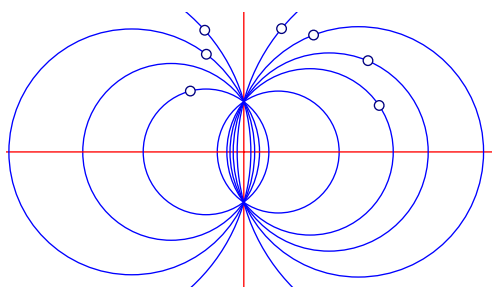
Πρόταση 6.14.3 Σε κάθε υπερβολική δέσμη υπάρχουν δύο σημεία $(A, B$ στο σχήμα 6.34), συμμετρικώς κείμενα εκατέρωθεν του κοινού ριζικού άξονος, τα οποία αντιστοιχούν σε κύκλους της δέσμης μηδενικής ακτίνας. Τα σημεία αυτά λέγονται **οριακά** σημεία της δέσμης.

Πράγματι από την εξίσωση 6.3 γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου $h_t(x, y) = 0$ της δέσμης, δίδεται από την:

$$r(t)^2 = \frac{b(t)^2 + c(t)^2}{4} - d(t).$$

Η πρόταση συνάγεται από το γεγονός ότι η εξίσωση $r(t)^2 = 0$ είναι δευτεροβάθμια ως προς t και έχει δύο λύσεις τότε ακριβώς όταν η δέσμη είναι υπερβολική. Προκύπτουν τότε δύο τιμές του t , t_1 και t_2 , που ορίζουν σημεία $-(b(t_1), c(t_1))/2$, $-(b(t_2), c(t_2))/2$, των οποίων το μέσον $-(b(t_1)+b(t_2), c(t_1)+c(t_2))/4$ περιέχεται στον ριζικό άξονα. Όλοι αυτοί οι ισχυρισμοί προκύπτουν άμεσα υπολογίζοντας, (α) την δευτεροβάθμια εξίσωση, (β) την διακρίνουσά της, (γ) το μέσον των λύσεων. Το πιο πολύπλοκο είναι η διακρίνουσα, αλλά μπορούμε να την αποφύγουμε σκεφτόμενοι ως εξής: Η τομή των δύο κύκλων, αν υπάρχει, θα είναι ταυτόχρονα

και τομή του ριζικού άξονά τους με έναν από αυτούς. Αρκεί λοιπόν να δούμε ποιά συνθήκη για τους συντελεστές, εξασφαλίζει την μη-τομή ενός απ' τους κύκλους με τον ριζικό τους άξονα και να διαπιστώσουμε ότι η συνθήκη αυτή συμπίπτει με την θετικότητα της διακρίνουσας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Ακόμη περισσότερο απλοποιείται το πρόβλημα αν υποθέσουμε ότι οι κύκλοι έχουν για κέντρα σημεία του x -άξονα: $(2b, 0)$, $(2b', 0)$, οπότε οι εξισώσεις τους απλοποιούνται στις $x^2 + y^2 - 2bx + d = 0$, $x^2 + y^2 - 2b'x + d' = 0$. Τότε ο ριζικός τους άξονας είναι $(b' - b)x + (d - d') = 0$. Αν τους τοποθετήσουμε έτσι ώστε ο άξονας αυτός να συμπίπτει με τον y -άξονα, τότε η εξίσωση αυτή θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με την $x = 0$, άρα θα πρέπει $d = d'$. Με αυτές τις προϋποθέσεις: (α) η δευτεροβάθμια εξίσωση παίρνει την απλούστατη μορφή: $r(t)^2 = (b + t(b' - b))^2 - d = t^2(b' - b)^2 + 2tb(b' - b) + b^2 - d = 0$. (β) Η διακρίνουσά της είναι $D = (b(b' - b))^2 - (b' - b)^2(b^2 - d) = d$, και είναι θετική (2 λύσεις) όταν ακριβώς $d > 0$. Απ' την άλλη μεριά ο πρώτος κύκλος δεν τέμνει τον ριζικό άξονα, όταν η ακτίνα του $\sqrt{(b^2 - d)}$, είναι μικρότερη από την απόσταση του κέντρου του από τον ριζικό άξονα που είναι ακριβώς $|b|$. Τούτο όμως συμβαίνει πάλι μόνον όταν $d > 0$. Η ύπαρξη λοιπόν των δύο οριακών σημείων και η υπερβολικότητα της δέσμης είναι πράγματα ισοδύναμα. (γ) Το μέσον (του ευθυγράμμου τμήματος) των δύο οριακών σημείων θα είναι $(b(t_1) + b(t_2), 0) = (2b + (t_1 + t_2)(b' - b), 0) = (0, 0)$. Το τελευταίο διότι το άθροισμα των δύο ριζών της εξίσωσης (α) είναι $-2b/(b' - b)$.



Σχήμα 6.35: Ελλειπτική δέσμη κύκλων

Ελλειπτική λέμε την δέσμη της οποίας όλοι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σημεία. Ο κοινός ριζικός άξονας των (ζευγών) κύκλων της δέσμης είναι η ευθεία που διέρχεται από τα κοινά σημεία της δέσμης. Κάθε κύκλος που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία ανήκει στην ελλειπτική δέσμη. Τα σημεία αυτά λέγονται **βάση** της δέσμης. Υπάρχει μία πολύ ενδιαφέρουσα ελλειπτική δέσμη συνδεδεμένη με ένα τρίγωνο.

Πρόταση 6.14.4 Παντός τριγώνου ABC , οι τρεις Απολλώνιοι κύκλοι περιέχονται σε μία ελλειπτική δέσμη. Η βάση αυτής της δέσμης αποτελείται από τα λεγόμενα **ισοδυναμικά** σημεία J, J' του τριγώνου. Η ευθεία των ισοδυναμικών σημείων διέρχεται από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

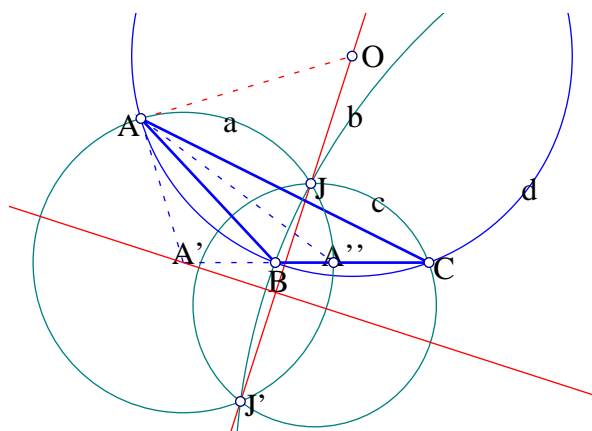
Πράγματι, ας ονομάσουμε τους Απολλώνιους κύκλους αντίστοιχα (E συμβολίζει το επίπεδο):

$$a = \{P \in E : |PB|/|PC| = |AB|/|AC|\},$$

$$b = \{P \in E : |PC|/|PA| = |BC|/|BA|\},$$

$$c = \{P \in E : |PA|/|PB| = |CA|/|CB|\}.$$

Κατ' αρχήν δύο από τους Απολλώνιους κύκλους τέμνονται, λ.χ. οι a, b . Πράγματι, στο σχήμα 6.36, $|A''C|/|A''A| < |BC|/|BA|$ και $|A'C|/|A'A| > |BC|/|BA|$. Συνεπώς το σημείο A'' του κύκλου a είναι εντός του κύκλου b , ενώ το κέντρο του a είναι εκτός του b . Άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται. Το σημείο τομής τους J θα έχει την ιδιότητα: $|JB|/|JC| = |AB|/|AC|$

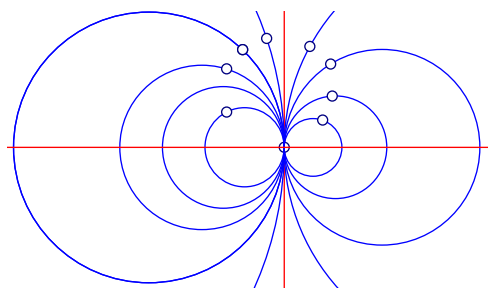


Σχήμα 6.36: Ισοδυναμικά σημεία τριγώνου

και $|JC|/|JA| = |BC|/|BA|$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη θα έχουμε $|JB|/|JA| = |BC|/|AC|$, που σημαίνει ότι το σημείο ανήκει και στον τρίτο κύκλο c .

Το ότι η οριζικός άξονας JJ' περιέχει το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου d , φαίνεται αμέσως από το ότι η $A'A$ είναι εφαπτόμενη του d άρα το O έχει δύναμη r^2 (r η ακτίνα του περιγεγραμμένου) ως προς τον κύκλο a και ανάλογα το ίδιο θα συμβαίνει και για τους άλλους Απολλώνιους κύκλους. Άρα το O έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους αυτούς, άρα περιέχεται στον ριζικό τους άξονα.

Υπάρχει πληθώρα προτάσεων που σχετίζονται με τα ισοδυναμικά σημεία. Μερικές απ' αυτές εξετάζουμε στις ασκήσεις. Οι προτάσεις αυτές ανήκουν ωστόσο, θεματικά, στο ευρύτερο κεφάλαιο της γεωμετρίας του τριγώνου.



Σχήμα 6.37: Παραβολική δέσμη κύκλων

Παραβολική λέμε την δέσμη της οποίας όλα τα ζεύγη κύκλων εφάπτονται σ' ένα σταθερό σημείο. Ο κοινός ριζικός άξονας είναι, σ' αυτήν την περίπτωση, η κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων της δέσμης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.14

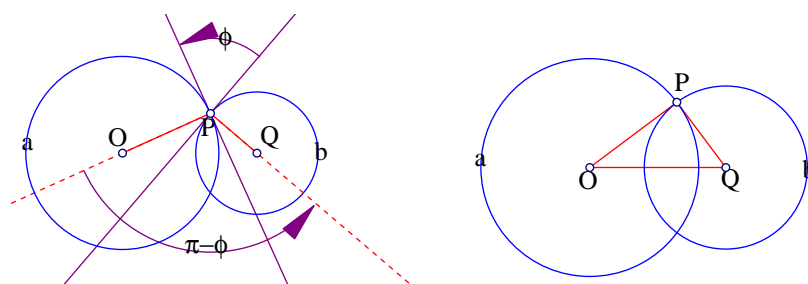
Πρόβλημα 6.14.1 Περιγράψε τους κύκλους της δέσμης που παράγεται από δύο ομόκεντρους κύκλους.

Πρόβλημα 6.14.2 Χρησιμοποίησε ως σύστημα συντεταγμένων το ορθογώνιο σύστημα που χρησιμοποίησα στην απόδειξη της πρότασης 6.14.3. Βρες την θέση των οριακών σημείων της υπερβολικής δέσμης, συναρτήσε, της απόστασης d των κέντρων και των ακτίνων r_1, r_2 , των δύο κύκλων που παράγουν την δέσμη.

Πρόβλημα 6.14.3 Δείξε ότι δύο οποιοδήποτε διαφορετικοί κύκλοι της δέσμης παράγουν την ίδια δέσμη με την αρχική.

6.15 Ορθογωνιότητα κύκλων, δεσμών

Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων λέγεται η γωνία των εφαπτομένων τους σ' ένα σημείο P τομής τους. Η γωνία αυτή είναι παραπληρωματική της γωνίας που σχηματίζουν οι δύο ακτίνες τους OP, QP , που συντρέχουν στο σημείο τομής τους. Επειδή το σχήμα των δύο τεμνομένων κύκλων είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία διάκεντρό τους OQ , δεν παίζει ρόλο ποιο από τα δύο σημεία τους θεωρούμε για τον καθορισμό της γωνίας. **Ορθογώνιος** ονομάζουμε δύο τεμνόμενους κύκλους, των οποίων οι ακτίνες τους στο σημείο τομής σχηματίζουν ορθή γωνία.



Σχήμα 6.38: Γωνία δύο κύκλων, ορθογώνιοι κύκλοι

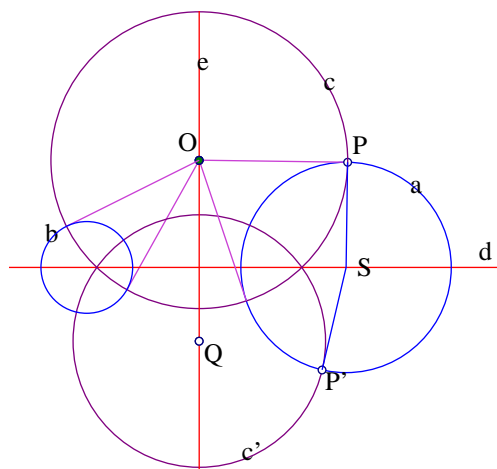
Πρόταση 6.15.1 Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Οι κύκλοι a, b , είναι ορθογώνιοι.
2. Το τρίγωνο OPQ των κέντρων τους και ενός σημείου τομής τους είναι ορθογώνιο στο σημείο τομής P .
3. Η δύναμις του a ως προς τον b ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του a .
4. Η ακτίνα OP είναι εφαπτόμενη του b στο σημείο τομής P .

Η απόδειξη ότι η μία ιδιότητα συνεπάγεται την επόμενη και η τελική την πρώτη είναι τετριμμένη και επαφίεται στον αναγνώστη. Άμεση συνέπεια των ορισμών είναι και η επόμενη πρόταση που οδηγεί σ' έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού μιάς δέσμης κύκλων.

Πρόταση 6.15.2 Έστω δέσμη κύκλων F παραγόμενη από δύο μη-συγκεντρικούς κύκλους a, b . Έστω e ο ριζικός άξονας της δέσμης. Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Για κάθε σημείο O του ριζικού άξονα της F υπάρχει ένας ακριβώς κύκλος OP ορθογώνιος προς όλους τους κύκλους της δέσμης.
2. Οι κύκλοι που ορίζονται κατ' αυτόν τον τρόπο αποτελούν μία νέα δέσμη F' που λέγεται η **ορθογώνια δέσμη** της F . Ο ριζικός άξονας της νέας δέσμης F' είναι η ευθεία των κέντρων της F .
3. Η ορθογώνια δέσμη της F' είναι η αρχική F .
4. Η ορθογώνια δέσμη F μιάς υπερβολικής F' είναι ελλειπτική, αντίστοιχα η ορθογώνια δέσμη μιάς ελλειπτικής είναι υπερβολική και η ορθογώνια παραβολικής είναι πάλι παραβολική.

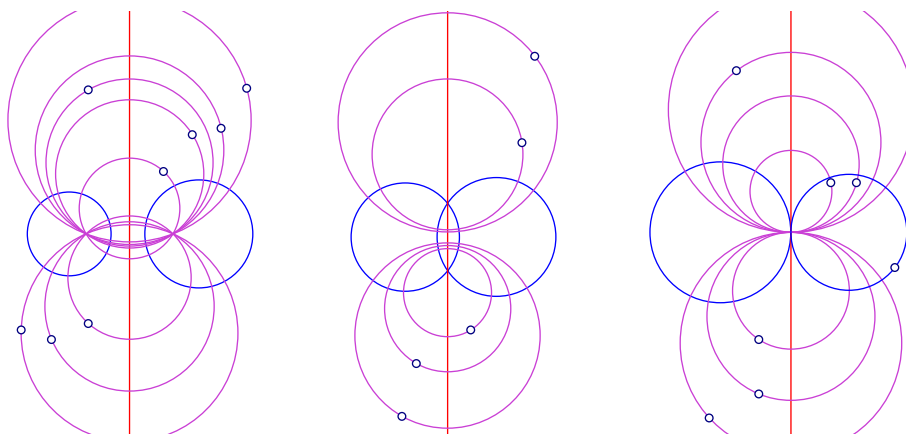


Σχήμα 6.39: Ορθογώνιες δέσμες

Γιά τον πρώτο ισχυρισμό, θεωρούμε την εφαπτόμενη OP προς έναν κύκλο a της δέσμης και τον κύκλο c με ακτίνα OP . Ο κύκλος αυτός είναι εκ κατασκευής ορθογώνιος προς τον a και επειδή το P , ως ανήκον στον ριζικό άξονα της δέσμης F έχει την ίδια δύναμη ως προς κάθε άλλο κύκλο b της δέσμης θα είναι ορθογώνιος και ως προς τον b .

Γιά τον δεύτερο ισχυρισμό, θεωρούμε έναν δεύτερο κύκλο c' , κατασκευασμένο όπως ο c και ορθογώνιος προς όλους τους κύκλους της δέσμης F . Ειδικά για τον a θα έχουμε ότι είναι ορθογώνιος ταυτόχρονα προς τον c και τον c' άρα ο άξονας d θα είναι ριζικός άξονας των κύκλων c, c' . Επομένως όλοι οι κύκλοι της νέας δέσμης F' θα έχουν κοινό ριζικό άξονα τον d . Τούτο όμως, σύμφωνα με την πρόταση 6.14.1(3ο), σημαίνει ότι οι κύκλοι αυτοί αποτελούν μία δέσμη F' . Τούτο αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό.

Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί είναι τετριμμένες συνέπειες των δύο πρώτων και επαφίονται στον αναγνώστη.

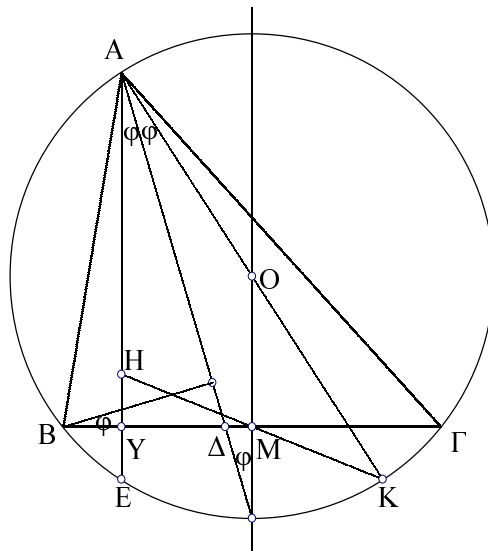


Σχήμα 6.40: Ορθογώνια υπερβολικής, ελλειπτικής, παραβολικής αντίστοιχα

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6.15

Πρόβλημα 6.15.1 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Υ, Δ, M αντίστοιχα ο πόδας του ύψους από το A , η τομή της $B\Gamma$ με την διχοτόμο της γωνίας a στο A , και το μέσον της $B\Gamma$. Δείξε τα εξής:

1. Έστωσαν E, K , αντίστοιχα τα σημεία τομής του περιγεγραμμένου κύκλου με την προ-

Σχήμα 6.41: Η γωνία β - γ

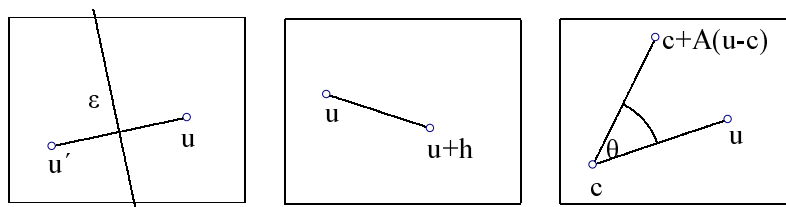
- έκταση του ύψους από το A και την διάμετρο από το A . Οι χορδές (και τα αντίστοιχα τόξα) BE και $K\Gamma$ είναι ίσες.
2. Η γωνία $\widehat{EAK} = 2\varphi = \beta - \gamma$.
 3. Η διχοτόμος $A\Delta$ διέρχεται από το μέσον της EK και διχοτομεί και την προηγούμενη γωνία.
 4. Τα σημεία H (ορθόκεντρο), M και K ευρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Κεφάλαιο 7

Ισομετρίες του επιπέδου

7.1 Κατοπτρισμοί, Μεταφορές, Στροφές

Οι μετασχηματισμοί της ευκλείδειας γεωμετρίας που μετατοπίζουν ένα σχήμα σε μιά άλλη θέση στο επίπεδο μπορούν να παρασταθούν σαν συνθέσεις **κατοπτρισμών ή ανακλάσεων** ως προς ευθεία. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γενικεύσεις των αντιστοιχών που συναντήσαμε στην δεύτερη παράγραφο. Ο κατοπτρισμός $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ καθορίζεται από μία ευθεία ε . Κατ' αυτόν, το σημείο $\bar{u} = (x, y)$ απεικονίζεται στο σημείο $\bar{u}' = (x', y')$, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα uu' να διχοτομείται κάθετα από την ε . Προφανώς ένας τέτοιος μετασχηματισμός αφήνει την ευθεία ε σταθερά κατά σημείον και εναλλάσσει τα δύο **ημιεπίπεδα** εκατέρωθεν της ε .



Σχήμα 7.1: Ανάκλαση, μεταφορά, στροφή

Αν $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ είναι η εξίσωση της ευθείας ε και $\bar{n} = (\alpha, \beta)$, τότε ο φ_ε δίδεται από τον τύπο:

$$\bar{u}' = \varphi_\varepsilon(\bar{u}) = \bar{u} - \frac{2 \cdot f(x, y)}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \bar{n}. \quad (7.1)$$

Ο μετασχηματισμός της **μεταφοράς** $\varphi_{\bar{h}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ καθορίζεται από ένα σταθερό διάνυσμα $\bar{h} = (k, l)$:

$$\varphi_{\bar{h}}(\bar{u}) = \bar{u} + \bar{h}. \quad (7.2)$$

Τέλος ο μετασχηματισμός της **στροφής** κατά γωνία ϑ περί το κέντρο \bar{c} , $\varphi_{\vartheta, \bar{c}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τον τύπο:

$$\varphi_{\vartheta, \bar{c}}(\bar{u}) = \bar{c} + A(\bar{u} - \bar{c}), \quad (7.3)$$

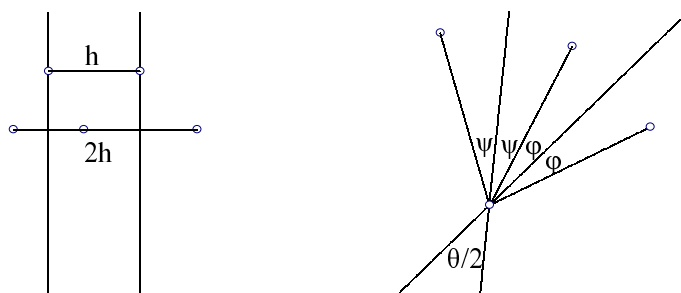
όπου A ο ορθογώνιος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

7.2 Η καθολικότητα των ανακλάσεων

Πρόταση 7.2.1 Κάθε μεταφορά $\varphi_{\bar{h}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ κατά διάνυσμα \bar{h} είναι σύνθεση $\varphi_{\bar{h}} = \varphi_{\epsilon} \circ \varphi_{\epsilon'}$ δύο κατοπτρισμών $\varphi_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon'}$ ως προς δύο ευθείες ϵ, ϵ' , που είναι κάθετες στο \bar{h} (άρα παράλληλες) και απέχουν $d = \|\bar{h}\|/2$.

Κάθε στροφή κατά γωνία θ περί το κέντρο \bar{c} , είναι σύνθεση $\varphi_{\theta, \bar{c}} = \varphi_{\epsilon} \circ \varphi_{\epsilon'}$ δύο κατοπτρισμών $\varphi_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon'}$ ως προς δύο ευθείες ϵ, ϵ' , που τέμνονται στο \bar{c} και σχηματίζουν γωνία $\theta/2$.



Σχήμα 7.2: μεταφορά, στροφή

Πράγματι, αρκεί κανείς να παρατηρήσει το αρχικό και το τελικό σημείο κατά τις δύο διαδοχικές ανακλάσεις για να διαπιστώσει ότι το αποτέλεσμα δεξιά και αριστερά της ισότητας είναι το ίδιο.

7.3 Ισομετρία

Ισομετρία του Ευκλείδειου επιπέδου λέμε έναν μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, που είναι σύνθεση πεπερασμένου πλήθους μετασχηματισμών $T = T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_n$, όπου κάθε ένας από τους T_k είναι ανάκλαση ή μεταφορά ή στροφή. Το ενδιαφέρον είναι ότι οι ισομετρίες του επιπέδου παρίστανται με έναν ενιαίο τρόπο:

$$\bar{u}' = T(\bar{u}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \text{ σύντομα: } \bar{u}' = A\bar{u} + D, \quad (7.5)$$

όπου $D = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ και ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Πρόταση 7.3.1 Κάθε ισομετρία του Ευκλείδειου επιπέδου γράφεται στην προηγούμενη μορφή (7.5). Αντίστροφα, κάθε μετασχηματισμός αυτής της μορφής (με A ορθογώνιο πίνακα), παριστά ισομετρία του Ευκλείδειου επιπέδου.

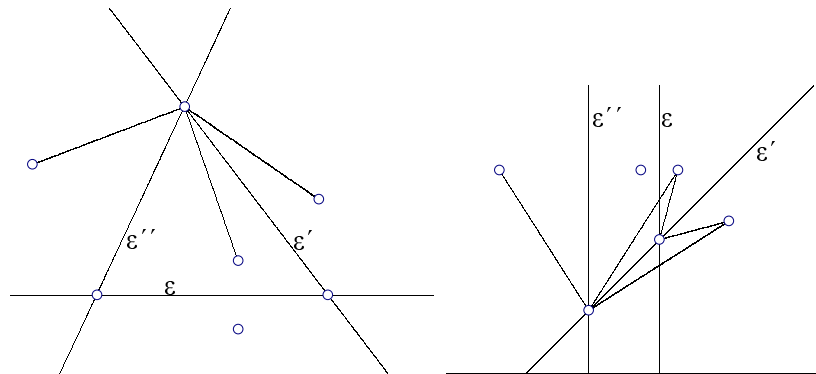
Για την απόδειξη του ευθέως πρέπει να δείξουμε δύο πράγματα: Πρώτα ότι κάθε μεμωμένη ανάκλαση, μεταφορά ή στροφή, γράφεται μ' αυτόν τον τρόπο. Κατόπιν πρέπει να δείξουμε ότι μία σύνθεση δύο τέτοιων μετασχηματισμών γράφεται πάλι με τον ίδιο τρόπο. Το πρώτο είναι ένας άμεσος υπολογισμός. Το δεύτερο προκύπτει από την παράσταση της σύνθεσης δύο μετασχηματισμών του τύπου (7.5).

$$\bar{u}' = A\bar{u} + D, \quad \bar{u}'' = A'\bar{u}' + D'. \quad (7.6)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη στην δεύτερη και πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες βρίσκουμε:

$$\bar{u}'' = A''\bar{u} + D'' \text{ όπου: } A'' = A'A, \quad D'' = A'D + D'. \quad (7.7)$$

Μένει να δείξουμε ότι ο πίνακας $A'A$ ικανοποιεί την απαίτηση της ορθογωνιότητας, το οποίο είναι ένας εύκολος λογαριασμός. Για το αντίστροφο, πρέπει να δείξουμε ότι κάθε μετασχηματισμός της μορφής 7.5, είναι σύνθεση ανακλάσεων, μεταφορών και στροφών. Όμως, ο γενικός μετασχηματισμός $\bar{u}' = A\bar{u} + D$ είναι σύνθεση των $\bar{u}' = A\bar{u}$ και $\bar{u}'' = \bar{u}' + D$, άρα, σύμφωνα με την ανάλυση της δευτέρας παραγράφου, σύνθεση μιάς στροφής ή ανάκλασης και μιάς μεταφοράς.



Σχήμα 7.3: Σύνθεση δύο στροφών, στροφής και μεταφοράς

Πρόταση 7.3.2 Η σύνθεση δύο στροφών είναι στροφή ή μεταφορά. Η σύνθεση στροφής και μεταφοράς ή μεταφοράς και στροφής είναι πάλι στροφή ή μεταφορά.

Για την απόδειξη στηριζόμαστε στο ότι α) κάθε στροφή ή μεταφορά γράφεται ως σύνθεση δύο ανακλάσεων, β) κάθε ανάκλαση f ικανοποιεί $f^2 = id$, όπου id συμβολίζει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Επι πλέον κατά την παράσταση της στροφής ή της μεταφοράς ως γινόμενου δύο ανακλάσεων, έχουμε την ελευθερία επιλογής του πρώτου “κατόπτρου” ώστε τούτο να διέρχεται απ’ όποιο σημείο του επιπέδου θέλουμε. Στην περίπτωση της σύνθεσης δύο στροφών, επιλέγουμε το δεύτερο κάτοπτρο ε της πρώτης στροφής να ταυτίζεται με το πρώτο κάτοπτρο της δεύτερης. Στην περίπτωση της σύνθεσης στροφής και μεταφοράς επιλέγουμε το δεύτερο κάτοπτρο της στροφής να συμπίπτει με το πρώτο κάτοπτρο της μεταφοράς. Και στις δύο περιπτώσεις η στροφή θα γράφεται ως γινόμενο των ανακλάσεων $\sigma_\varepsilon \circ \sigma_{\varepsilon'}$. Η δεύτερη στροφή (αντίστοιχα μεταφορά) θα γράφεται $\sigma_{\varepsilon''} \circ \sigma_\varepsilon$. Άρα και στις δύο περιπτώσεις η σύνθεση μετασχηματισμών θα είναι $\sigma_{\varepsilon''} \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_{\varepsilon'} \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\varepsilon''} \circ \sigma_{\varepsilon'}$, αφού $\sigma_\varepsilon \circ \sigma_\varepsilon = id$. Το δείχνει τον τρόπο της γεωμετρικής κατασκευής του νέου κέντρου και της νέας γωνίας στροφής. Υπάρχει η περίπτωση οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon''$ να είναι παράλληλες, οπότε προκύπτει μεταφορά. Παρόμοια ο αναγνώστης μπορεί να δει (άσκηση) ότι η σύνθεση μεταφοράς και στροφής είναι πάλι στροφή ή μεταφορά.

7.4 Ιδιότητα ισομετρίας

Πρόταση 7.4.1 Κάθε ισομετρία του Ευκλείδειου επιπέδου είναι σύνθεση μιάς, δύο ή το πολύ τριών ανακλάσεων.

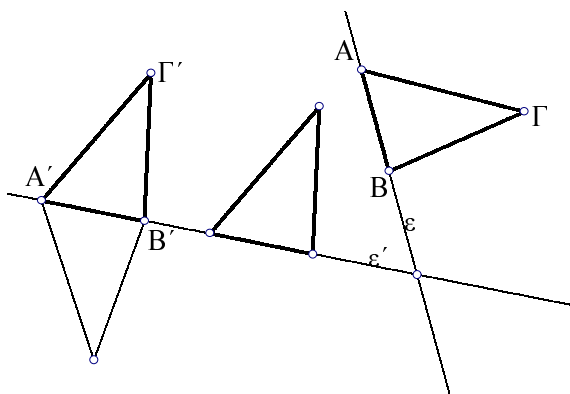
Πράγματι, τούτο είναι άμεση συνέπεια των δύο προηγούμενων προτάσεων. Γράφοντας την ισομετρία στην μορφή της 7.5, βλέπουμε ότι είναι πάντοτε σύνθεση στροφής ή ανάκλασης και μεταφοράς. Οι περισσότερες (4) ανακλάσεις υπεισέρχονται στην περίπτωση στροφής + μεταφοράς. Η προηγούμενη πρόταση όμως ανάγει τις τέσσερις ανακλάσεις σε δύο.

Πρόταση 7.4.2 Οι ισομετρίες διατηρούν τα μήκη και τις γωνίες. Τούτο με την έννοια ότι εάν $X' = f(X)$ παριστά την ισομετρία, και E, Z, H είναι τρία σημεία του επιπέδου, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα EZ και $f(E)f(Z)$ θα έχουν το ίδιο μήκος και η γωνία $\widehat{EZH} = f(E)\widehat{f(Z)f(H)}$.

Πράγματι η πρόταση είναι προφανής όταν η ισομετρία είναι ένας κατοπτρισμός. Αμέσως όμως τούτο σημαίνει ότι ισχύει για κάθε ισομετρία, αφού η τυχούσα ισομετρία θα είναι σύνθεση κατοπτρισμών.

7.5 Ισα σχήματα

Η προηγούμενη πρόταση οδηγεί στον ορισμό της ισότητας: Δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται **ίσα**, εάν υπάρχει ισομετρία f έτσι ώστε $f(\Sigma) = \Sigma'$. Επιπλέον τα τρίγωνα λέγονται **ομόρροπα** ίσα όταν η ισομετρία f είναι μεταφορά ή στροφή (σύνθεση αρτίου πλήθους ανακλάσεων). Στις άλλες περιπτώσεις (ανάκλαση, ολισθανάκλαση) λέμε ότι τα τρίγωνα είναι **αντίρροπα** ίσα.

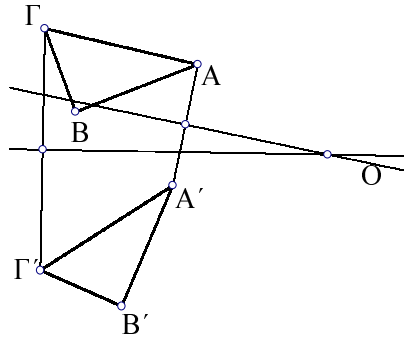


Σχήμα 7.4: Τρίγωνα με ίσες πλευρές είναι ίσα

Πρόταση 7.5.1 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$ με ίσες αντίστοιχες πλευρές $a = a', b = b', c = c'$ είναι ίσα.

Πράγματι, προεκτείνουμε τις πλευρές $AB, A'B'$ έως ότου τμηθούν στο σημείο O (Σχήμα-7.4). Κατόπιν στρέφουμε το $AB\Gamma$ περί το O κατά την γωνία φ που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon'$. Τέλος μεταφέρουμε παράλληλα το προκύπτον τρίγωνο μέχρι να συμπέσει με το $A'B'\Gamma'$. Ενδέχεται το $AB\Gamma$ κατά την στροφή να είναι από την άλλη μεριά της ε' . Τότε τα τρίγωνα είναι αντίρροπα ίσα, και χρειάζεται ένας κατοπτρισμός ως προς την ε . Όλοι οι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούμε είναι ισομετρίες. Υποβάλλοντας το $AB\Gamma$ στην σύνθεση αυτών των μετασχηματισμών το οδηγούμε να συμπέσει με το $A'B'\Gamma'$. Υπάρχουν διάφορες λεπτομέρειες που εύκολα μπορεί να δει ο αναγνώστης. Στην περίπτωση που οι $\varepsilon, \varepsilon'$ δεν τέμνονται (είναι παράλληλοι), δεν χρειάζεται η στροφή. Τότε μεταφέρουμε το $AB\Gamma$ ώστε να συμπίσουν οι πλευρές AB και $A'B'$. Η προηγούμενη πρόταση είναι επαναδιατύπωση της πρότασης 4.2.1. Τότε η ισότητα των πλευρών οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι και οι γωνίες είναι ίσες. Τώρα το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει μία ισομετρία f που μετατοπίζει το τρίγωνο ώστε να συμπέσει με το "ίσο" του. Οι κορυφές συμπίπτουν με αντίστοιχες κορυφές του δευτέρου τριγώνου και συνεπώς όλα τα παρελκόμενα, περιγεγραμμένοι κύκλοι, εγγεγραμμένοι κύκλοι, διχοτόμοι, διάμεσοι κτλ. συμπίπτουν και αυτά με τα αντίστοιχα του άλλου τριγώνου. Το ίδιο συμπέρασμα παίρνομε αν δύο τρίγωνα έχουν μίαν γωνία και τις προσκείμενες πλευρές

αντίστοιχα ίσες (δες το πρόβλημα 4.2.9) ή μία πλευρά και τις αντίστοιχες προσκείμενες ίσες (δες το πρόβλημα 4.2.10). Και στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε σαν λογική συνέπεια ότι τα τρίγωνα θα έχουν και ίσες πλευρές, οπότε εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση.



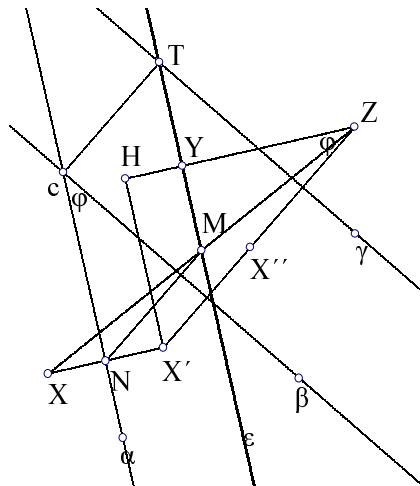
Σχήμα 7.5: Ομόρροπα ίσα τρίγωνα

Πρόταση 7.5.2 *Εάν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ είναι ομόρροπα ίσα, τότε οι μεσοκάθετοι των τμημάτων που ενώνουν αντίστοιχα ίσες γωνίες ή είναι παράλληλοι ή διέρχονται όλες από σημείο O .*

Πράγματι, εάν τα τρίγωνα είναι ομόρροπα ίσα, τότε το ένα προκύπτει απ' τ' άλλο μέσω στροφής ή μεταφοράς. Στην πρώτη περίπτωση οι εν λόγω μεσοκάθετοι, θα πρέπει να διέρχονται όλες από το κέντρο περιστροφής. Στην δεύτερη περίπτωση (της μεταφοράς), οι μεσοκάθετοι θα είναι παράλληλοι ως κάθετοι σε ίσα και παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα.

7.6 Ολισθανάκλαση

Από το γεγονός ότι κάθε ισομετρία γράφεται ως σύνθεση τριών το πολύ ανακλάσεων, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τον τρόπο που δρά πάνω στα σχήματα. Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή της απλής ανάκλασης. Η σύνθεση δύο ανακλάσεων είναι, όπως είδαμε, στροφή ή μεταφορά και οδηγεί σε ομόρροπα ίσα σχήματα. Για τις ισομετρίες που είναι συνθέσεις τριών ανακλάσεων αποφαίνεται η επόμενη πρόταση.



Σχήμα 7.6: Σύνθεση τριών ανακλάσεων: ολισθανάκλαση

Πρόταση 7.6.1 Κάθε σύνθεση $f = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ τριών ανακλάσεων, των οποίων τα κάτοπτρα δεν είναι και τα τρία παράλληλα και δεν διέρχονται και τα τρία από το ίδιο σημείο, παρίσταται ως σύνθεση $\sigma_\varepsilon \circ \sigma_{\bar{h}}$ μιάς ανάκλασης ως προς ευθείαν ε και μιάς μεταφοράς κατά διάνυσμα \bar{h} , παράλληλο της ε . Γιά τον λόγο αυτό οι ισομετρίες αυτές ονομάζονται **ολισθανακλάσεις**.

Γιά την απόδειξη ας υποθέσουμε την διάταξη των κατόπτρων α, β, γ , ως εις το . Τούτο δεν περιορίζει την γενικότητα, αφού, υποθέτωντας ότι τα δύο πρώτα κάτοπτρα τέμνονται στο c , μπορούμε να τα στρέψουμε, χωρίς να μεταβάλλουμε την μεταξύ τους γωνία έτσι ώστε η σύνθεση $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ να παραμένει η ίδια (στροφή περί το c). Έστω X τυχόν σημείο και $X' = \sigma_\alpha(X) = X'$, $X'' = \sigma_\beta(X')$, και τέλος $Z = f(X) = \sigma_\gamma(X'')$ η εικόνα του X μέσω της σύνθεσης των τριών ανακλάσεων. Στο τρίγωνο $XX'Z$, το μέσον N της XX' περιέχεται στην α . Επίσης το $X'Z$ έχει μήκος $2d$ όπου d η απόσταση των κατόπτρων β, γ . Συμπεραίνουμε ότι το μέσον M της XZ ορίζει τμήμα MN παράλληλο προς το $X'Z$ και μήκους d . Φέρνοντας λοιπόν κάθετο από το c (σημείο τομής των κατόπτρων α, β) προς την γ , σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $NMTc$ και βλέπουμε ότι το μέσον του τμήματος $Xf(X)$ περιέχεται στην ευθεία ε που ορίζεται από το T (σταθερό σημείο) και είναι παράλληλος της α . Από το Z φέρνουμε κάθετο ZY προς την ε και από το X' φέρνουμε κάθετο $X'H$ στην ZY . Το τρίγωνο $X'HZ$ είναι ορθογώνιο στο H , έχει γωνία ϕ στο Z και η υποτείνουσά του $X'Z$ έχει μήκος $2d$, άρα το μήκος της $X'H$ είναι σταθερό (ίσο με $2d \eta\mu(\phi)$) και η κατεύθυνσή της αυτή της α . Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει από το γεγονός ότι το ίδιο σημείο $Z = f(X)$ παίρνουμε μεταφέροντας παράλληλα το X κατά \bar{h} στο Y και κατόπιν κάνοντας ανάκλαση του Y ως προς την α . Ας σημειώσουμε ότι η περίπτωση όπου τα κάτοπτρα α, β, γ τέμνονται ανάγεται στην προηγούμενη, απλά διαλέγοντας αντί των α, β , νέα κάτοπτρα α', β' διά του c τα οποία να σχηματίζουν γωνία ϕ και το β' να είναι παράλληλο του γ . Επίσης η περίπτωση που οι α, β είναι παράλληλες τεμνόμενες από την γ , αποδεικνύεται ανάλογα.

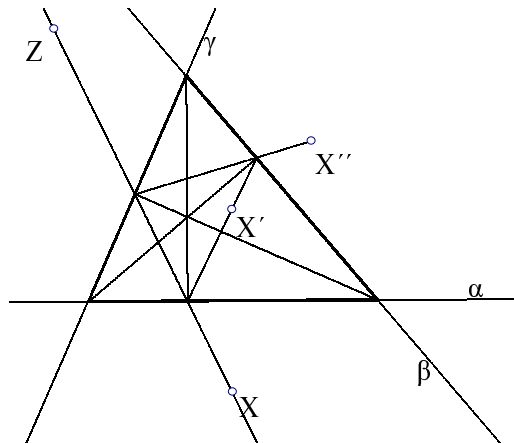
Οι επόμενες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες της προηγούμενης πρότασης και η απόδειξή τους επαφίεται στον αναγνώστη:

Πρόταση 7.6.2 Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης πρότασης, γιά κάθε ολισθανάκλαση $f = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ ισχύουν:

1. $f = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_{\bar{h}} = \sigma_{\bar{h}} \circ \sigma_\varepsilon$
2. Ο άξονας ε παραμένει κατά την ολισθανάκλαση σταθερός (αναλλοίωτος) ως σύνολο. Κάθε σημείο του μετατοπίζεται κατά \bar{h} σε ένα άλλο σημείο του ε .
3. Γιά κάθε σημείο X του επιπέδου, η προβολή του ευθυγράμμου τμήματος $Xf(X)$ έχει μήκος $\|\bar{h}\|$ και το μέσον του $Xf(X)$ περιέχεται στην ε .
4. Η σύνθεση $g = f \circ f = \sigma_{2\bar{h}}$, είναι μεταφορά κατά το διπλάσιο του \bar{h} .
5. Κάθε ισομετρία που δεν έχει σταθερά σημεία (δεν υπάρχουν σημεία $X : f(X) = X$), είναι ή μεταφορά ή ολισθανάκλαση. Εάν υπάρχει μία και μόνον ευθεία ε , αναλλοίωτος ως σύνολο κατά την ισομετρία, τότε τούτη είναι μιά ολισθανάκλαση.
6. Γιά κάθε ισομετρία της μορφής $\bar{u}' = A\bar{u} + D$ με ορίζουσα $\det(A) = -1$ η εξίσωση (ιδιοδιανύσματος) $A\bar{v} = \bar{v}$ έχει μη μηδενική λύση \bar{v} . Η ισομετρία είναι ανάκλαση ή ολισθανάκλαση με κάτοπτρο (άξονα) παράλληλο προς την ευθεία $\{\lambda\bar{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Επανερχόμαστε στην παρατήρηση που κάναμε στην αρχή της απόδειξης της 7.6.1. Στρέφοντας τα κάτοπτρα α, β περί το c χωρίς ν' αλλάξουμε την γωνία τους, δεν αλλάζουμε το συνολικό αποτέλεσμα της σύνθεσης $f = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$. Μπορούμε λοιπόν να φέρομε τα κάτοπτρα σε μία θέση έτσι ώστε οι τομές τους να σχηματίζουν οξυγώνιο (ή το πολύ ορθογώνιο)

τρίγωνο $AB\Gamma$. Το Γ έχει την θέση του c και η γωνία στο Γ είναι φ . Στο σχήμα φαίνονται οι θέσεις του τριγώνου $\tau(AB\Gamma)$ και των εξ' ανακλάσεως στις πλευρές του. Παρατηρούμε ότι κατά τις ανακλάσεις αυτές οι πλευρές του ποδικού ΔEZ "ξετυλίγονται" σε μιά ευθεία ε , που δεν είναι άλλη από τον άξονα της ολισθανάκλασης f . Την λέξη "ξετυλίγονται" εννοούμε ως εξής: Κατά την ανάκλαση του τ ως προς μίαν πλευράν του π.χ. την AB , η πλευρά του ποδικού ΔE ανακλάται σε ευθύγραμμο τμήμα που είναι προέκταση του ZE . Τούτο διότι η AB είναι (εξωτερική) διχοτόμος της γωνίας E του ποδικού. Παρακολουθώντας τις διαδοχικές ανακλάσεις του ποδικού στις πλευρές α, β, γ του τριγώνου, είναι εύκολο να δούμε ότι η κορυφή Z του ποδικού απεικονίζεται στην $Z' = f(Z)$ επί της ευθείας EZ που είναι πλευρά του ποδικού. Το ανάλογο συμβαίνει και με το σημείο E . Από τις ιδιότητες της 7.6.2, συμπεραίνουμε ότι η ε είναι ο άξονας της ολισθανάκλασης f και το διάνυσμα μεταφοράς συμπίπτει με το $\overline{ZZ'}$, του οποίου το μήκος είναι η περίμετρος του ποδικού. Το επόμενο σχήμα δείχνει ότι κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Ο άξονας ε συμπίπτει με την $\Gamma\Gamma'$ και το μήκος του είναι το διπλάσιο του ύψους από το Γ που μπορεί να θεωρηθεί το μήκος περιμέτρου του (εκφυλισμένου σε ένα ευθύγραμμο τμήμα) ποδικού του $AB\Gamma$. Την περίπτωση αμβλυγωνίου τριγώνου διαπραγματευόμαστε στις ασκήσεις. Αποδείξαμε λοιπόν:



Σχήμα 7.7: Σύνθεση ανακλάσεων ως προς πλευρές οξυγωνίου τριγώνου

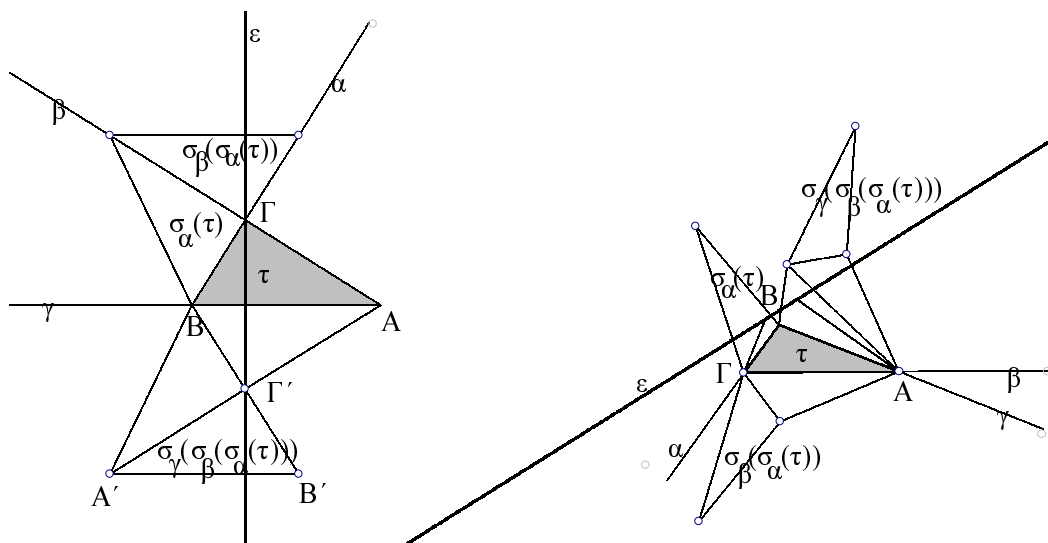
Πρόταση 7.6.3 Η σύνθεση $f = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ των ανακλάσεων ως προς τις πλευρές α, β, γ ενός οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ολισθανάκλαση, με άξονα την προέκταση μιάς πλευράς του ποδικού του και μήκος μεταφοράς την περίμετρο του ποδικού.

Ως εφαρμογή των όσων είπαμε περί ισομετριών ας εξετάσουμε τα σχήματα που παίρνομε από δοθέν τρίγωνο και τις ανακλάσεις αυτού στις πλευρές του. Κατ' αρχήν ένα τεχνικό λήμμα:

Πρόταση 7.6.4 Έστω ότι οι ισομετρίες f, g συμπίπτουν στα σημεία μιάς ευθείας ε : $f(x) = g(x) \forall x \in \varepsilon$, και έχουν την ίδια ορίζουσα. Τότε συμπίπτουν παντού. Ειδικά, για την ισομετρία f και τις ανακλάσεις $r_\varepsilon, r_{f(\varepsilon)}$, ως προς τις ευθείες ε και $f(\varepsilon)$ ισχύει

$$r_{f(\varepsilon)} \circ f \circ r_\varepsilon = f.$$

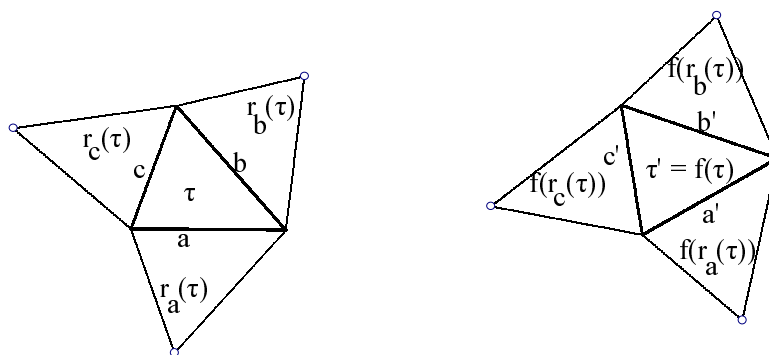
Πράγματι, η σύνθεση $h = g^{-1} \circ f$ θα ικανοποιεί $h(x) = x \forall x \in \varepsilon$, άρα θα είναι ή η ταυτοτική ή η ανάκλαση r_ε . Τούτο διότι κανένα άλλο είδος ισομετρίας δεν αφήνει μιά ευθεία σταθερά σημείο προς σημείο. Όμως η $h = r_\varepsilon$ συνεπάγεται $g \circ r_\varepsilon = f$ και συνεπώς οι g, f θα έχουν ορίζουσες διαφορετικών προσήμων. Κατ' ανάγκην λοιπόν $g = f$. Το ειδικό συμπέρασμα



Σχήμα 7.8: Σύνθεση ανακλάσεων ως προς πλευρές ορθογωνίου/αμβλυγωνίου τριγώνου

προκύπτει από το γεγονός ότι οι δύο ισομετρίες, δεξιά και αριστερά της ισότητας, συμπίπτουν στα σημεία της ε και η ορίζουσά τους έχει το ίδιο πρόσημο.

7.7 Πλακοστρώσεις

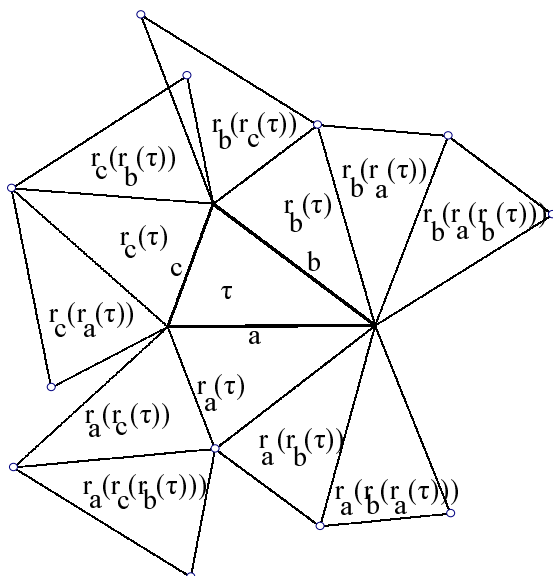


Σχήμα 7.9: Ανακλάσεις ως προς τις πλευρές ισομετρικού τριγώνου

Η προηγούμενη πρόταση δίνει τον τρόπο που προκύπτουν τα εξ' ανακλάσεως, στις αντίστοιχες πλευρές του, τρίγωνα ενός τριγώνου τ και τα αντίστοιχα ενός ισομετρικού του $\tau' = f(\tau)$.

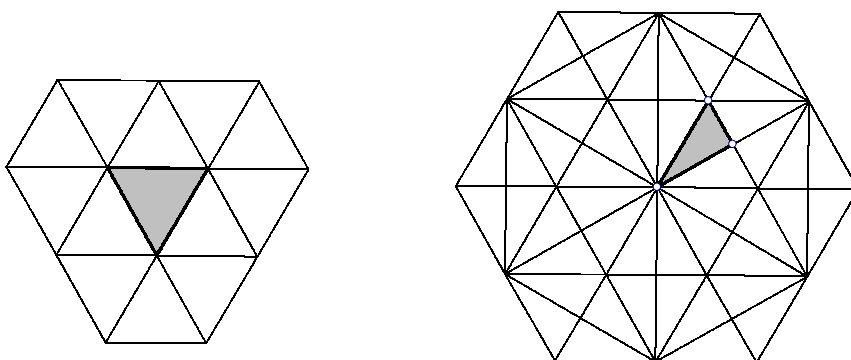
Χρησιμοποιώντας ένα αρχικό τρίγωνο τ και παίρνοντας τις ανακλάσεις του τ ως προς τις πλευρές του, τις ανακλάσεις των νέων τριγώνων τ' ως προς τις δικές τους πλευρές κ.ο.κ. δημιουργούμε μία κάλυψη όλου του επιπέδου με τριγωνικά πλακίδια. Το τυχόν τέτοιο πλακίδιο τ' θα είναι της μορφής $\tau' = f(\tau)$, όπου f είναι ισομετρία της μορφής: $f = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_n$ και κάθε r_k είναι μία ανάκλαση ως προς κάποια πλευρά του αρχικού τριγώνου. Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν ορισμένα ειδικά τρίγωνα, όπως το ισόπλευρο, που δημιουργούν "όμαλές" πλακοστρώσεις του επιπέδου, χωρίς δηλαδή οι τριγωνικές πλάκες να αλληλοκαλύπτονται ποτέ. Εν γένει, τα πλακίδια που προκύπτουν από τις διαδοχικές αυτές ανακλάσεις θα καλύπτουν όλο το επίπεδο πολλές φορές και θα αλληλοκαλύπτονται και τα ίδια. Πάντως τα εξ' ανακλάσεως προκύπτοντα τρίγωνα θα ακολουθούν τον προηγούμενο κανόνα. Αν $\tau' =$

$f(\tau)$ είναι κάποιο από τα τρίγωνα αυτά, τότε τα τρίγωνα που προκύπτουν από τις ανακλάσεις του τ στις διχές του πλευρές θα είναι αντίστοιχα $f(r_a(\tau)), f(r_b(\tau)), f(r_c(\tau))$ όπου a, b, c δηλώνουν τις ευθείες-φορείς των πλευρών του αρχικού τριγώνου τ και r_a, r_b, r_c συμβολίζουν τις αντίστοιχες ανακλάσεις.



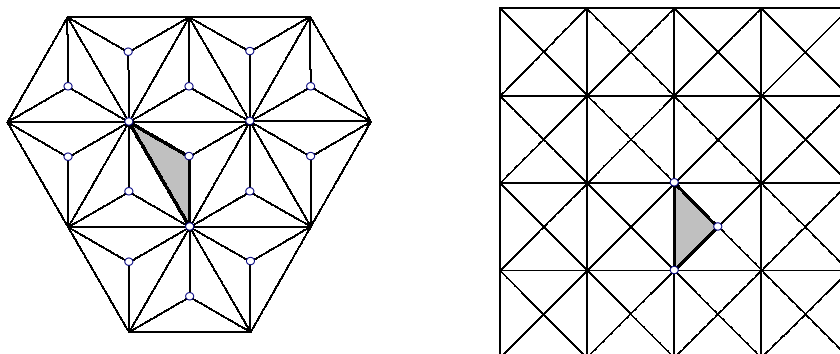
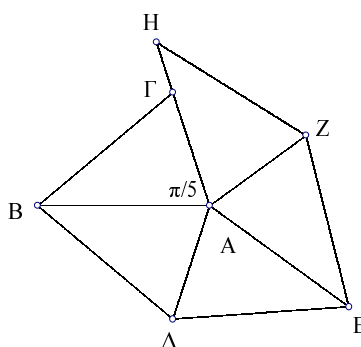
Σχήμα 7.10: Κάλυψη του επιπέδου με διαδοχικές ανακλάσεις του τ

Πρόταση 7.7.1 Θεωρούμε ένα τρίγωνο $\tau = AB\Gamma$ και την πλακόστρωση που προκύπτει από διαδοχικές ανακλάσεις του τ στις πλευρές του. Τούτη είναι ομαλή, δηλαδή η τομή των πλακιδίων είναι πάντοτε μιά κοινή πλευρά δύο γειτονικών τριγώνων, τότε και μόνον τότε όταν τα τρίγωνα έχουν γωνίες $\{60, 60, 60\}$, $\{30, 30, 120\}$, $\{30, 60, 90\}$ και $\{45, 45, 90\}$ μοιρών.



Σχήμα 7.11: Πλακοστρώσεις με τρίγωνα $\{60, 60, 60\}$, $\{30, 60, 90\}$

Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο απλές παρατηρήσεις: α) Για να γίνεται ομαλή πλακόστρωση, πρέπει οι γωνίες του τριγώνου α, β, γ να είναι της μορφής $\alpha = 2\pi/\mu, \beta = 2\pi/\nu, \gamma = 2\pi/\rho$, όπου μ, ν, ρ ακέραιοι μεγαλύτεροι του 2. Η δεύτερη αναγκαία συνθήκη ομαλής πλακόστρωσης βάζει επιπλέον περιορισμούς στα τρίγωνα που ικανοποιούν την προηγούμενη συνθήκη: β) Για ένα τρίγωνο που ικανοποιεί την α) και επιτρέπει ομαλή πλακόστρωση, εάν κάποιο από τα μ, ν, ρ είναι περιττό (π.χ το μ) τότε τα δύο άλλα πρέπει να είναι ίσα ($\nu = \rho$), δηλαδή το τρίγωνο να είναι ισοσκελές.

Σχήμα 7.12: Πλακοστρώσεις με τρίγωνα $\{30, 30, 120\}$, $\{45, 45, 90\}$ 

Σχήμα 7.13: Διαδοχικές ανακλάσεις ως προς πλευρές γωνίας τριγώνου

Και οι δύο αναγκαίες αυτές συνθήκες προκύπτουν αμέσως επιλέγοντας μία γωνία του τριγώνου, λ.χ. την A , και κάνοντας διαδοχικές ανακλάσεις μόνον ως προς τις πλευρές που περικλείουν την A . Αν είναι μ το πλήθος των πλακιδίων που χρειαζόμαστε για πλακοστρώσουμε την περιοχή του A , τότε θα πρέπει $\mu\alpha = 2\pi$, άρα $\alpha = 2\pi/\mu$. Τούτο αποδεικνύει το α). Το β) προκύπτει πάλι αμέσως από την παρατήρηση ότι για περιττό μ , το τελικό πλακάκι εφάπτεται του αρχικού, με διαφορετική πλευρά απ' αυτό. Άρα αν το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές στο A , τότε η πλακοστρώση δεν θα είναι ομαλή (δύο γειτονικά τρίγωνα δεν θα τέμνονται κατά κοινή πλευρά). Ας θεωρήσουμε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου που ικανοποιεί τις α) και β): $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow 2\pi/\mu + 2\pi/\nu + 2\pi/\rho = \pi \Rightarrow$ και διαιρώντας με το 2π :

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}. \quad (7.8)$$

Η απόδειξη προκύπτει λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς τους ακεραίους $\mu, \nu, \rho > 2$. Κατ' αρχήν ας υποθέσουμε ότι ο μ είναι ο μικρότερος από τους τρεις. Η 7.8 δίνει τότε

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 2}{2\mu} \leq \frac{2}{\mu} \Leftrightarrow \mu \leq 6. \quad (7.9)$$

Το μ λοιπόν μπορεί να πάρει τις τιμές 3, 4, 5 και 6. Εξετάζουμε κάθε μία χωριστά:

$$\mu = 6, \quad \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}, \quad \nu, \rho \geq 6.$$

Αμέσως βλέπουμε ότι $\nu = \rho = 6$ είναι μία λύση που αντιστοιχεί στο τρίγωνο $\{60, 60, 60\}$. Κάθε άλλη λύση ως προς ν, ρ , θα έδιδε $\nu, \rho > 6$, άρα $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} < \frac{1}{3}$, που είναι άτοπο. Άρα σ'

αυτήν την περίπτωση $\mu = \nu = \rho = 6$ είναι η μοναδική λύση.

$$\mu = 4, \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4}, \quad \nu, \rho \geq 4.$$

Πάλι βλέπομε ότι $\nu = \rho = 8$ είναι μιά λύση που αντιστοιχεί στο τρίγωνο $\{90, 45, 45\}$. Και πάλι κάθε λύση με $\nu, \rho > 8$, θα έδιδε $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} < \frac{1}{4}$, που είναι άτοπο. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση τα ν, ρ μπορούν να πάρουν εκτός της 8, μόνον τις τιμές 5, 6, 7. Για $\nu = 7 \Rightarrow \rho = 28/3$ που δεν είναι ακέραιος. Για $\nu = 5 \Rightarrow \rho = 20$, που αντιβαίνει στην β). Τέλος για $\nu = 6 \Rightarrow \rho = 12$, που δίνει το τρίγωνο $\{90, 60, 30\}$.

$$\mu = 5, \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} = \frac{3}{10}, \quad \nu, \rho \geq 5.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση αν $\nu, \rho > 7$, θα έχουμε $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10}$, που είναι άτοπο. Προκύπτει ότι το μικρότερο των ν, ρ θα παίρνει τις τιμές 5, 6, 7. Για $\nu = 5 \Rightarrow \rho = 10$, που αντιβαίνει στην β). Για $\nu = 6, 7$ έπεται ότι το ρ έχει αντίστοιχα τις τιμές $15/2$ και $70/11$ που δεν είναι καν ακέραιοι.

$$\mu = 3, \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{6}, \quad \nu, \rho \geq 3.$$

Και πάλι, σ' αυτήν την περίπτωση, για $\rho, \nu > 12$ θα έχουμε $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} < \frac{1}{6}$, που είναι άτοπο. Άρα αν ν το μικρότερο από τα ρ, ν , τούτο θα παίρνει τις τιμές $\{7, 8, 9, 10, 10, 12\}$. Αμέσως βλέπομε ότι οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (ν, ρ) είναι : $(7, 42), (8, 24), (9, 14), (10, 17), (11, 66/5)$ και $(12, 12)$, απ' τις οποίες μόνον η τελευταία είναι αποδεκτή (οι άλλες αντιβαίνουν στην β ή την α) και δίδει το τρίγωνο $\{120, 30, 30\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 7.7

Πρόβλημα 7.7.1 Προσδιόρισε όλες τις ισομετρίες που αφήνουν ένα δοθέν σημείο A σταθερό: $\varphi(A) = A$.

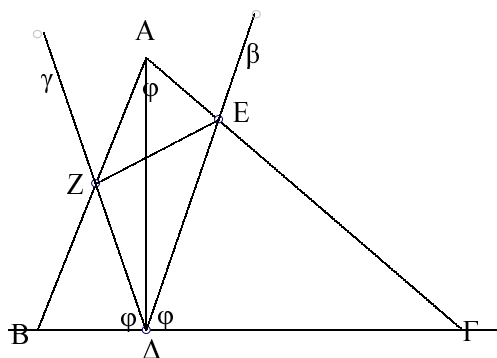
Πρόβλημα 7.7.2 Προσδιόρισε το είδος της ισομετρίας που προκύπτει από σύνθεση τριών ανακλάσεων σε ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Το ανάλογο πρόβλημα για τρεις ανακλάσεις ως προς ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 7.7.3 Βρες μιά ισομετρία που απεικονίζει δύο δοθέντα σημεία A, B σε δύο άλλα δοθέντα σημεία A', B' . Δείξε ότι το πρόβλημα λύνεται, τότε και μόνον τότε, όταν $d(A, B) = d(A', B')$. Βρες όλες τις ισομετρίες που απεικονίζουν το σύνολο $\{A, B\}$ στον εαυτό του.

Πρόβλημα 7.7.4 Δείξε ότι η σύνθεση μιάς μεταφοράς και μιάς στροφής είναι πάλι μιά στροφή ή μεταφορά.

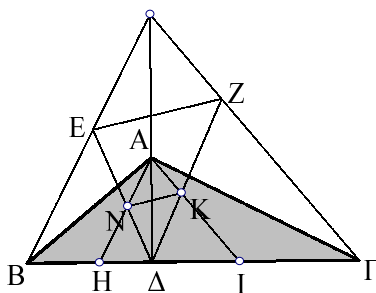
Πρόβλημα 7.7.5 Δείξε ότι για κάθε ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, και ευθεία ϵ , τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AA' , όπου $A \in \epsilon$ και $A' = f(A)$, περιέχονται σε μιά ευθεία και είναι διαφορετικά μεταξύ τους, εκτός της περίπτωσης που η ισομετρία είναι μιά στροφή κατά π (συμμετρία ως προς σημείο). Στην τελευταία περίπτωση τα εν λόγω μέσα συμπίπτουν με το κέντρο της στροφής (συμμετρίας).

Πρόβλημα 7.7.6 Δείξε ότι κάθε ολισθανάκλαση είναι σύνθεση μιάς στροφής κατά π και μιάς ανάκλασης.



Σχήμα 7.14: Ποδικά τρίγωνα σταθερής περιμέτρου

Πρόβλημα 7.7.7 Δίδεται ευθεία ϵ και σημείο A εκτός αυτής. Από το A φέρομε δύο ευθείες AB, AG , που τέμνουν την ϵ στα σημεία B, G , έτσι ώστε το τρίγωνο ABG να έχει στο A πάντοτε σταθερά γωνία ϕ . Δείξε ότι τα τρίγωνα ABG που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο έχουν αντίστοιχα ποδικά ΔEZ , των οποίων α) οι πλευρές $\Delta E, \Delta Z$ είναι πάνω σε δύο σταθερές ευθείες και β) τα ΔEZ έχουν όλα την ίδια περίμετρο.

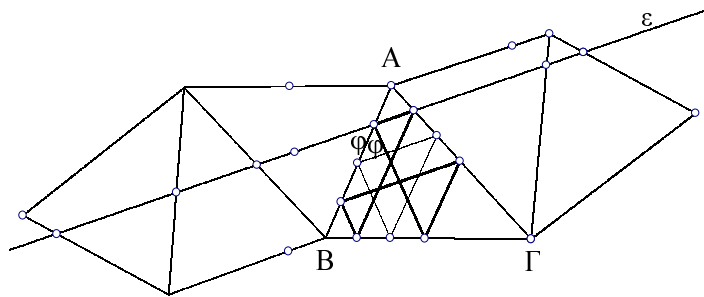


Σχήμα 7.15: Ποδικό τρίγωνο αμβλυγωνίου

Πρόβλημα 7.7.8 Έστω αμβλυγώνιο στο A τρίγωνο ABG και ΔEZ το ποδικό του. Από το A φέρε παραλλήλους προς τα ύψη και σχηματίσε το οξυγώνιο τρίγωνο AHI . Δείξε ότι το ποδικό ΔNK του AHI έχει τα N, K επί των $E\Delta$ και ΔZ αντίστοιχα και οι γωνίες του είναι ίσες με αυτές του ΔEZ . Δείξε ακόμη ότι ο λόγος της περιμέτρου του ΔNK προς αυτήν του ΔEZ είναι ίσος με την $\sigma\epsilon\phi^2(\alpha/2)$, όπου α η γωνία στο A .

Πρόβλημα 7.7.9 Με την βοήθεια των δύο τελευταίων προβλημάτων, μελέτησε την θέση του άξονα ολισθανάκλασης ενός αμβληγωνίου τριγώνου και βρες το μέγεθος της μεταφοράς του, συναρτήσε της περιμέτρου του ποδικού του τριγώνου.

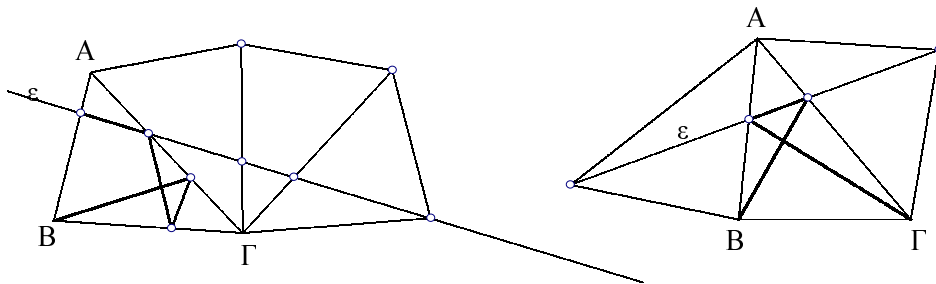
Πρόβλημα 7.7.10 Τροχιά μπιλιάρδου εντός τριγώνου ABG , λέμε μιά τεθλασμένη γραμμή, με κορυφές επί των πλευρών του τριγώνου και την ιδιότητα οι γωνίες της τεθλασμένης στις κορυφές αυτές να διχοτομούνται (εξωτερικά) από τις πλευρές του τριγώνου. Δείξε ότι κάνοντας διαδοχικές ανακλάσεις στις πλευρές του τριγώνου, μιά τέτοια τροχιά 'ανάπτυσται' σε μιά ευθεία ϵ . Τούτο με την έννοια ότι κατά τις ανακλάσεις, τα τμήματα της τεθλασμένης τοποθετούνται κατά μήκος μιάς σταθερής ευθείας ϵ . Η ϵ λέγεται ένα **ανάπτυγμα της τροχιάς**.



Σχήμα 7.16: Ανάπτυγμα τροχιάς μπιλιάρδου

Πρόβλημα 7.7.11 Δείξε ότι η μοναδική κλειστή τριγωνική τροχιά μπιλιάρδου ενός οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το ποδικό τρίγωνο του $AB\Gamma$. Υπόδειξη: Δείξε ότι ένα ανάπτυγμα μιάς τέτοιας τροχιάς είναι ευθεία ϵ αναλλοίωτη ως σύνολο, ως προς την ολισθανάκλαση $f = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$, που είναι σύνθεση ανακλάσεων στις πλευρές του τριγώνου.

Πρόβλημα 7.7.12 Δείξε ότι σ' ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο δεν υπάρχει γνήσια τριγωνική κλειστή τροχιά μπιλιάρδου.

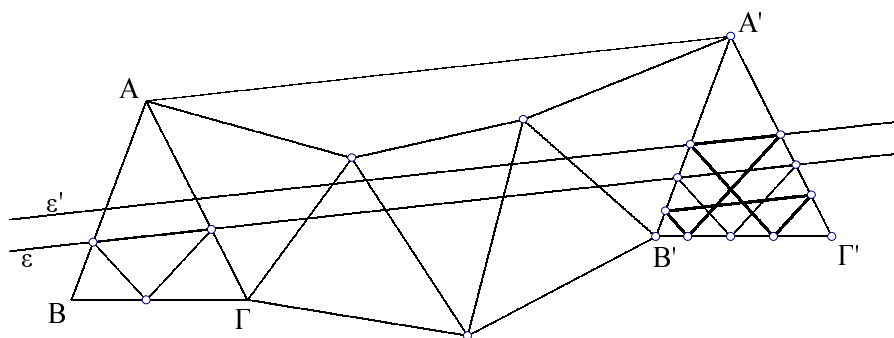


Σχήμα 7.17: Ιδιόμορφες τροχίες μπιλιάρδου

Πρόβλημα 7.7.13 Δείξε ότι σ' ένα τρίγωνο υπάρχουν τροχίες μπιλιάρδου οι οποίες διέρχονται από κορυφές του τριγώνου. Τέτοιες τροχίες λέγονται **ιδιόμορφες** και αντιστοιχούν σε αναπτύγματα που διέρχονται από κορυφές είτε του ίδιου του τριγώνου $AB\Gamma$ είτε κάποιου εξ' ανακλάσεως στις πλευρές του προκύπτοντος. Βρες αναγκαία και ικανή συνθήκη για το τρίγωνο $AB\Gamma$, έτσι ώστε να υπάρχει ιδιόμορφη τροχιά μπιλιάρδου, που ξεκινά από την κορυφή B και καταλήγει στην κορυφή Γ , μετά από δύο ανακλάσεις στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα.

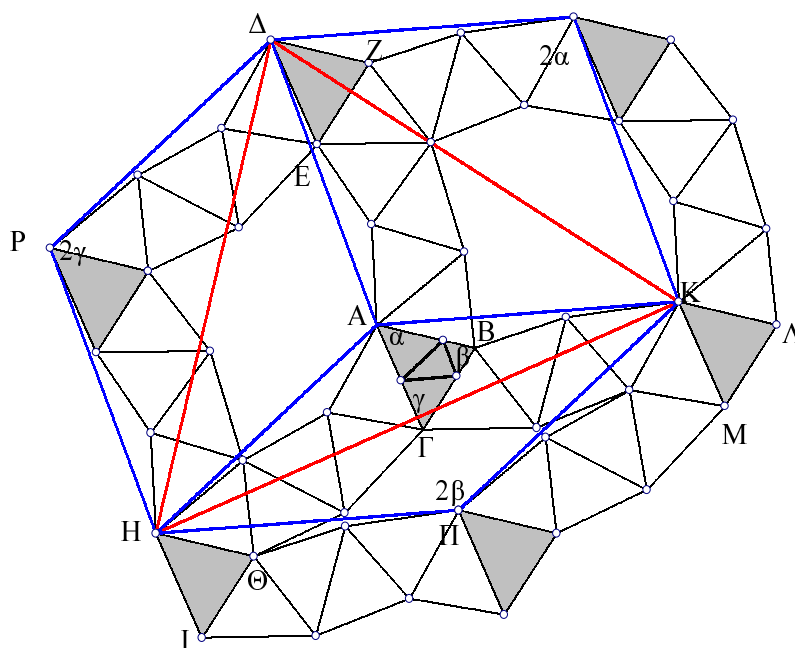
Πρόβλημα 7.7.14 Δείξε ότι υπάρχει επιλογή πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, έτσι ώστε υποβάλλοντάς το σε έξι διαδοχικές ανακλάσεις ως προς αυτές τις πλευρές, να παίρνει την θέση $A'B'\Gamma'$, που προκύπτει από παράλληλη μετατόπιση του $AB\Gamma$ κατά διάστημα $2\bar{h}$ όπου \bar{h} το διάστημα μεταφοράς ολισθανάκλασης που προκύπτει ως σύνθεση κατοπτρισμών στις πλευρές του τριγώνου. (Υπόδειξη: το γινόμενο μιάς ολισθανάκλασης με τον εαυτό της είναι μιά μεταφορά κατά το διπλάσιο της μετατόπισης της ολισθανάκλασης.)

Πρόβλημα 7.7.15 Χρησιμοποίησε το προηγούμενο συμπέρασμα, και μετατοπίζοντας κατά επαρκώς μικρό διάστημα τον άξονα ολισθανάκλασης ϵ , σε μιά παράλληλη θέση ϵ' , κατασκεύασε τροχιά μπιλιάρδου με ανάπτυγμα ϵ' . Δείξε ότι η τροχιά αυτή α) έχει πλευρές παράλληλες



Σχήμα 7.18: Κλειστές τροχιές μπιλιάρδου, περιόδου 2

προς τις πλευρές του ποδικού του $AB\Gamma$, β) σχηματίζει κλειστή τεθλασμένη τροχιά που έχει δύο κορυφές σε κάθε πλευρά του τριγώνου. Μιά τέτοια τροχιά ονομάζεται **περίοδου δύο**. Ανάλογα, μία κλειστή τροχιά μπιλιάρδου με n κορυφές σε κάθε πλευρά λέγεται **περίοδου n** .



Σχήμα 7.19: Ανακλαστικά πλέγματα τριγώνου

Πρόβλημα 7.7.16 Χρησιμοποιούμε τις τρεις μεταφορές του προηγούμενου προβλήματος, ως προς τις τρεις διαφορετικές ολισθανακλάσεις που γράφονται σαν σύνθεση ανακλάσεων στις πλευρές του τριγώνου. Έστω ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες α, β, γ , μετατοπίζεται κατ' αυτές στα τρίγωνα $\Delta EZ, \Theta HI, \text{ΚΛΜ}$. Δείξε ότι:

1. Τα τετράπλευρα $A\Delta PH$ και $A\text{ΚΠΗ}$ είναι ρόμβοι.
2. Οι προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετοι αντιστοίχως των πλευρών ΔH και ΚΗ .
3. Το A είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του $\Delta\text{ΗΚ}$.
4. Οι πλευρές του $\Delta\text{ΗΚ}$ είναι παράλληλες προς τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$ και οι γωνίες του είναι ίσες με αυτές του $AB\Gamma$.

5. Η γωνία στο A των $\triangle AP$ και $\triangle PH$ είναι αντίστοιχα γ και β .
6. Τα εξάγωνα που σχηματίζονται εντός των ρόμβων είναι συμμετρικά ως προς τις AP και AH αντίστοιχα.

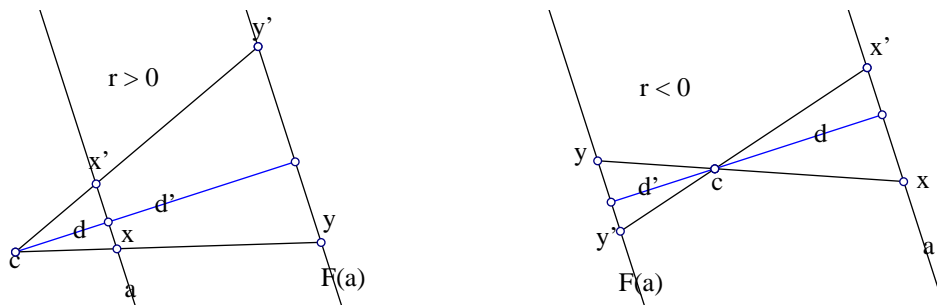
Κεφάλαιο 8

Ομοιοθεσία

8.1 Ορισμός ομοιοθεσίας

Ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο του επιπέδου $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, και λόγο r , $r \neq 0$, λέμε τον μετασχηματισμό $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, του επιπέδου στον εαυτό του που ορίζεται από τον τύπο:

$$F(\bar{x}) = \bar{y} = \bar{c} + r(\bar{x} - \bar{c}), \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (8.1)$$

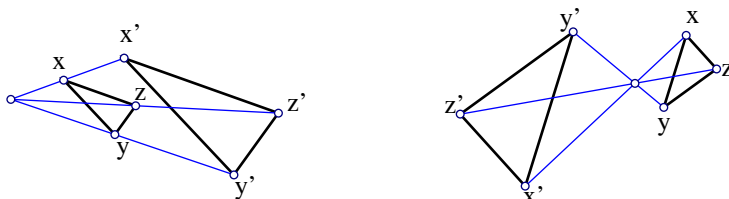


Σχήμα 8.1: Ομοιοθεσίες με $r > 0$ και $r < 0$

Παρατηρήσεις

- (1) Συχνά την ομοιοθεσία αυτή συμβολίζουμε με (c, r) .
- (2) Ένα σημείο x και η εικόνα του x' , μέσω της ομοιοθεσίας, λέγονται **ομοιόθετα** σημεία. Γενικότερα ένα σύνολο A και η εικόνα του A' , μέσω της ομοιοθεσίας λέγονται επίσης ομοιόθετα σύνολα ή σχήματα.
- (3) Ο τύπος 8.1 σημαίνει ότι η εικόνα \bar{y} του \bar{x} είναι πάνω στην ευθεία $\overline{c\bar{x}}$ και ο λόγος των αποστάσεων $d(\bar{c}, \bar{y})/d(\bar{c}, \bar{x}) = r$. Το πρόσημο του r καθορίζει αν τα $x, y = F(x)$, είναι από την ίδια μεριά ($r > 0$) ή εκατέρωθεν ($r < 0$) του κέντρου. Συχνά, όταν $r < 0$, μιλάμε για **αντιομοιοθεσία**.
- (4) Προφανώς ευθείες a διά του κέντρου διατηρούνται αναλλοίωτες κατά την ομοιοθεσία (απεικονίζονται στον εαυτό τους: $F(a) = a$).
- (5) Γενικότερα, μιά ευθεία a που δεν διέρχεται από το κέντρο c θα απεικονίζεται σε μιά ευθεία $F(a)$, παράλληλη της a και τέτοια ώστε ο λόγος των αποστάσεων d'/d των ευθειών από το c να είναι r . Τούτο προκύπτει άμεσα από το θεώρημα Θαλή, εφαρμόζοντάς το σε τρίγωνα της μορφής cax' και τις εικόνες τους cyy' .
- (6) Συνέπεια της προηγούμενης παρατήρησης είναι ότι ένα τρίγωνο xyz κατά την ομοιοθεσία θα απεικονίζεται σε ένα τρίγωνο $x'y'z'$ όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας r . Το

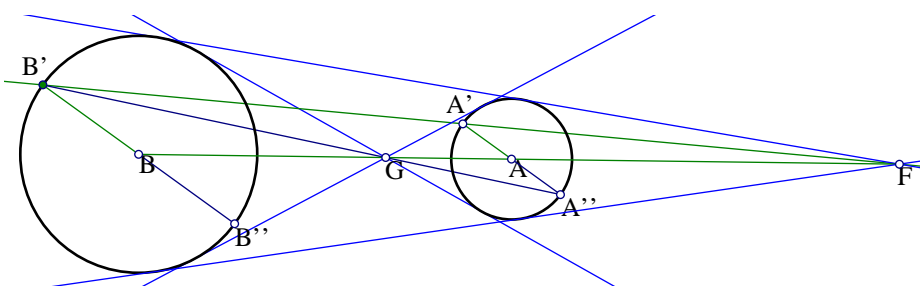
ίδιο συμβαίνει και με οποιοδήποτε πολύγωνο $xyz\dots$. Τούτο απεικονίζεται κατά την ομοιοθεσία σε πολύγωνο $x'y'z'\dots$ που έχει αντίστοιχα ίσες γωνίες και πλευρές ανάλογες με λόγο r .
 (7) Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και ο τυχόν κύκλος με ακτίνα R απεικονίζεται σε κύκλο με ακτίνα $|r|R$. Τα κέντρα p και p' , του κύκλου και της εικόνας του είναι ομοιόθετα.



Σχήμα 8.2: Τρίγωνο xyz και η εικόνα του $x'y'z'$

Πρόταση 8.1.1 Δοθέντων δύο διαφορετικών, κύκλων a και b , με κέντρα, αντίστοιχα, A και B και ακτίνες r, r' , ισχύουν τα εξής:

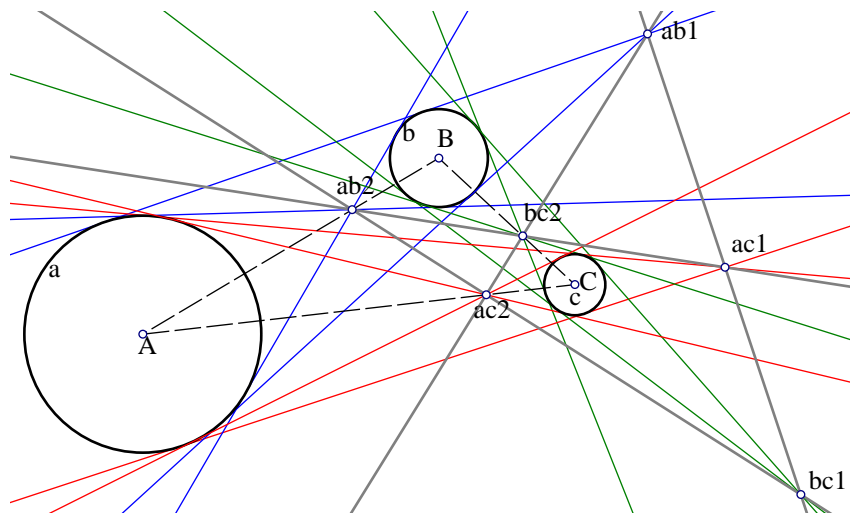
1. Δύο ομόρροπα παράλληλες ακτίνες τους AA', BB' ορίζουν με τα άκρα τους ευθείες που διέρχονται πάντοτε από σταθερό σημείο F .
2. Το σημείο F ευρίσκεται επί της διακέντρου ευθείας των κύκλων και συμπίπτει με το σημείο τομής των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων των κύκλων, εφ' όσον υπάρχουν τέτοιες.
3. Το ανάλογο ισχύει και για αντίρροπα παράλληλες ακτίνες AA', BB' . Τα άκρα τους ορίζουν ευθείες που διέρχονται πάντοτε από σταθερό σημείο G .
4. Το σημείο G ευρίσκεται επί της διακέντρου και συμπίπτει με το σημείο τομής των εσωτερικών κοινών εφαπτομένων των δύο κύκλων, εφ' όσον υπάρχουν τέτοιες.
5. Το σημείο F είναι κέντρο ομοιοθεσίας $(F, r'/r)$ που απεικονίζει τον κύκλο a στον b .
6. Το σημείο G είναι κέντρο ομοιοθεσίας $(G, -r'/r)$ που απεικονίζει τον κύκλο a στον b .
7. Οι δύο προηγούμενες ομοιοθεσίες είναι οι μοναδικές που απεικονίζουν τον ένα κύκλο στον άλλο. Τα σημεία F, G λέγονται κέντρα ομοιοθεσίας των δύο κύκλων.



Σχήμα 8.3: Κέντρα ομοιοθεσίας δύο κύκλων

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 8.3, οι παράλληλες $A'A'', B'B''$, ορίζουν όμοια τρίγωνα: FAA', FBB' , ομόρροπα όμοια με λόγο r/r' και GAA'', GBB'' , αντίρροπα όμοια με λόγο r/r' . Συνεπώς τα σημεία F, G , είναι τα σημεία (εξωτερικό-εσωτερικό) που διαιρούν το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο r/r' . Επομένως η θέση τους είναι ανεξάρτητη της κατεύθυνσης AA' . Απ' αυτό απορρέουν άμεσα όλοι οι ισχυρισμοί. Οι λεπτομέρειες επαφίονται στον αναγνώστη.

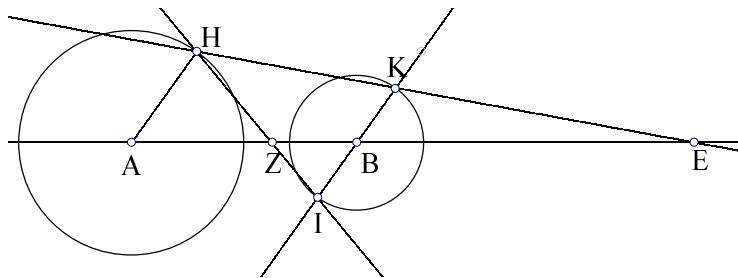
Πρόταση 8.1.2 Τρεις διαφορετικοί κύκλοι: a, b, c , κέντρων A, B, C και ακτίνων r, r', r'' , αντίστοιχα, λαμβανόμενοι ανά δύο ορίζουν έξι κέντρα ομοιοθεσίας. Τούτα περιέχονται ανά τρία σε τρεις ευθείες.



Σχήμα 8.4: Κέντρα ομοιοθεσίας τριών κύκλων, ανά δύο

Ας συμβολίζουμε με $ab1$, $ab2$, τα κέντρα ομοιοθεσίας των κύκλων a , b και ανάλογα με $ac1$, $ac2$, $bc1$, $bc2$ τα κέντρα ομοιοθεσίας των κύκλων a , c και b , c αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου (5.5.5), π.χ. για τα σημεία $ab1$, $bc1$, $ca1$, που περιέχονται στις (προεκτάσεις) πλευρές AB , BC , CA , αντίστοιχως. $\frac{ab1A}{ab1B} = \frac{r}{r'}$, $\frac{bc1B}{bc1C} = \frac{r'}{r''}$, $\frac{ca1C}{ca1A} = \frac{r''}{r}$. Από τις οποίες, πολλαπλασιάζοντάς τις κατά μέλη προκύπτει η ισότητα: $\frac{ab1A}{ab1B} \cdot \frac{bc1B}{bc1C} \cdot \frac{ca1C}{ca1A} = 1$, που δείχνει ότι τα τρία σημεία $ab1$, $bc1$, $ca1$, ευρίσκονται επ' ευθείας. Ανάλογα απλές είναι και οι αποδείξεις, ότι και οι υπόλοιποι συνδυασμοί των σημείων, ανά τρία, είναι επ' ευθείας.

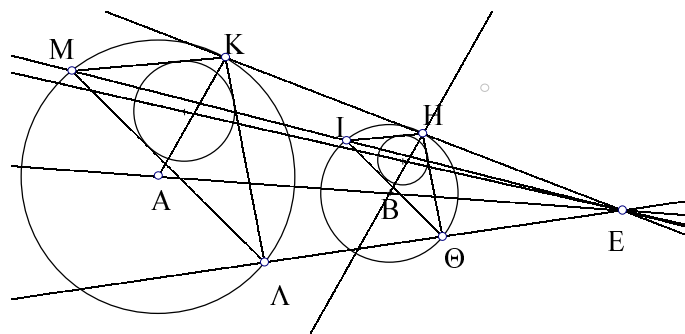
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 8.1



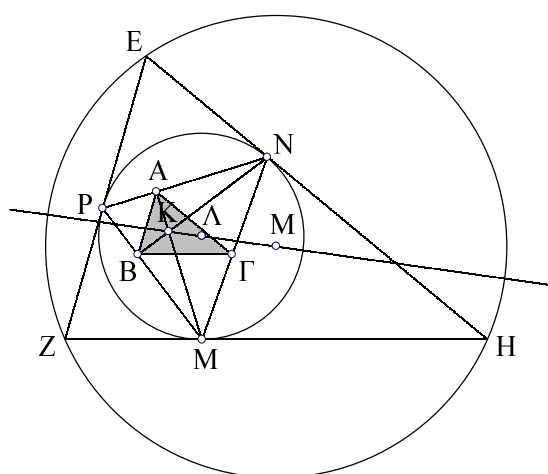
Σχήμα 8.5: Κέντρα ομοιοθεσίας δύο κύκλων

Πρόβλημα 8.1.1 Δείξε ότι κάθε ευθεία διερχομένη από ένα εκ των κέντρων ομοιοθεσίας δύο κύκλων και τέμνουσα αυτούς, ορίζει, μεταξύ άλλων, και δύο ακτίνες AK , BH (BI) που είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 8.1.2 Δείξε ότι εάν δύο τρίγωνα είναι ομοιάμετα (έχουν παράλληλες πλευρές, δεξ 5.5.5), τότε το κέντρο ομοιοθεσίας τους συμπίπτει με το κέντρο ομοιοθεσίας των περιγεγραμμένων κύκλων τους, καθώς επίσης και με το κέντρο ομοιοθεσίας των εγγεγραμμένων κύκλων τους. Συμπεράνε ότι η διάκεντρος των περιγεγραμμένων κύκλων και η διάκεντρος των εγγεγραμμένων κύκλων διέρχονται από το κέντρο ομοιοθεσίας των δύο τριγώνων.



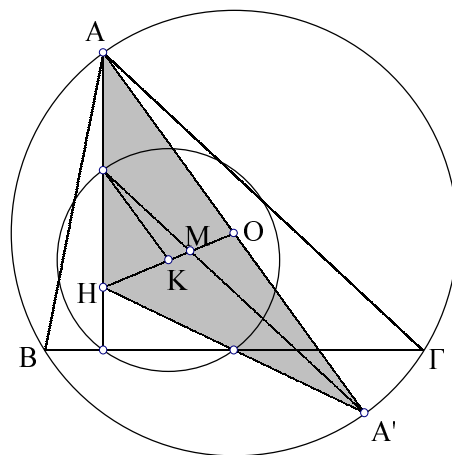
Σχήμα 8.6: Ομοιόθετα τρίγωνα



Σχήμα 8.7: Η διάκεντρος εγγεγραμμένου, περιγεγραμμένου

Πρόβλημα 8.1.3 Έστω MNP το τρίγωνο των σημείων επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου EZH . Δείξε ότι το ποδικό τρίγωνο του MNP έχει πλευρές παράλληλες προς αυτές του EZH . Δείξε ότι το κέντρο Λ του εγγεγραμμένου κύκλου, το κέντρο M του περιγεγραμμένου του τριγώνου EZH και το ορθόκεντρο K του MNP ευρίσκονται επ' ευθείας (είναι η ευθεία *Euler* του MNP). (Υπόδειξη: Τα $AB\Gamma$, EZH έχουν πλευρές παράλληλες. Τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων τους K , Λ περιέχονται σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο ομοιοθεσίας των δύο τριγώνων. Το Λ είναι ταυτόχρονα κέντρο της περιγεγραμμένης του $AB\Gamma$, άρα και το κέντρο της περιγεγραμμένης του EZH θα περιέχεται σ' αυτήν την ευθεία.)

Πρόβλημα 8.1.4 Δείξε ότι τα κέντρα ομοιοθεσίας O , του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$ και K του αντιστοίχου του κύκλου *Euler* είναι το ορθόκεντρο H και το σημείο τομής M των διαμέσων του.



Σχήμα 8.8: Κέντρα ομοιοθεσίας του περιγεγραμμένου , κύκλου Euler

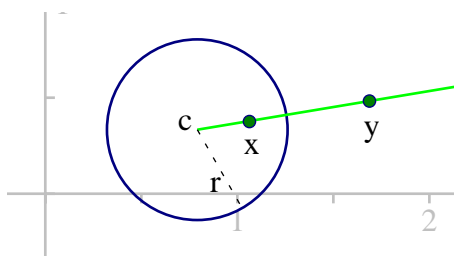
Κεφάλαιο 9

Αντιστροφή

9.1 Ορισμός αντιστροφής

Αντιστροφή με κέντρο το σημείο του επιπέδου $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, και δύναμη r^2 , $r \neq 0$, λέμε τον μετασχηματισμό $F : (\mathbb{R}^2 - \{\bar{c}\}) \rightarrow (\mathbb{R}^2 - \{\bar{c}\})$, του τρυπημένου επιπέδου στον εαυτό του που ορίζεται από τον τύπο:

$$F(\bar{x}) = \bar{y} = \bar{c} + r^2 \frac{\bar{x} - \bar{c}}{\|\bar{x} - \bar{c}\|^2}, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{c}\}. \quad (9.1)$$



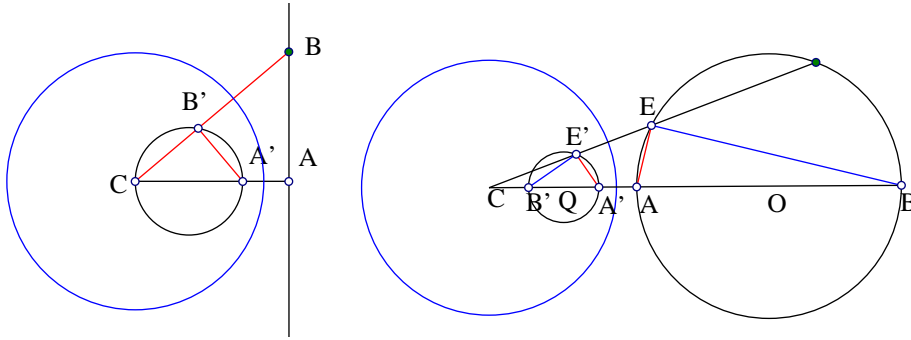
Σχήμα 9.1: Κύκλος αντιστροφής

Αν θεωρήσουμε τον κύκλο με κέντρο το \bar{c} και ακτίνα r , τότε ο τύπος 9.1 σημαίνει ότι η εικόνα \bar{y} του \bar{x} είναι πάνω στην ημιευθεία $\bar{c}\bar{x}$ και το γινόμενο των αποστάσεων $d(\bar{c}, \bar{x})d(\bar{c}, \bar{y}) = r^2$. Ο κύκλος αυτός λέγεται **κύκλος αντιστροφής** του μετασχηματισμού. Είναι σαφές ότι ο κύκλος αυτός καθορίζει πλήρως τον μετασχηματισμό και αντίστροφα, κάθε τέτοιος μετασχηματισμός ορίζει άμεσα τον κύκλο αντιστροφής. Προφανώς επαναλαμβάνοντας τον μετασχηματισμό για δεύτερη φορά επιστρέφουμε στο σημείο \bar{x} . Δηλαδή ισχύει $F^2 = I$, όπου I συμβολίζει την ταυτοτική απεικόνιση. Η επόμενη πρόταση παραθέτει τις βασικές ιδιότητες της αντιστροφής.

Πρόταση 9.1.1 Έστω F αντιστροφή κέντρου C και δύναμης r^2 . Ισχύουν τα εξής:

1. Τα σημεία του κύκλου αντιστροφής παραμένουν σταθερά κατά την αντιστροφή.
2. Ευθείες διά του κέντρου αντιστροφής παραμένουν αναλλοίωτες κατά την αντιστροφή (απεικονίζονται στον εαυτό τους).
3. Η εικόνα μιάς ευθείας που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής, μέσω της αντιστροφής, είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Αντίστροφα, η εικόνα ενός κύκλου που διέρχεται από κέντρο αντιστροφής είναι μιά ευθεία που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής.

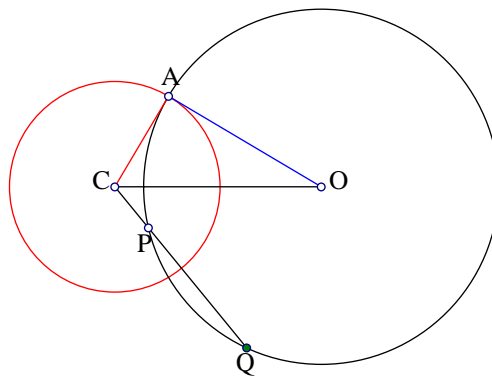
4. Η εικόνα ενός κύκλου που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής είναι κύκλος που επίσης δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής.



Σχήμα 9.2: Εικόνα ευθείας και κύκλου μέσω αντιστροφής

Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της αντιστροφής. Ας δούμε την εικόνα μιάς ευθείας που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Προς τούτο έστω A η προβολή του C στην ευθεία και B τυχόν σημείο της ευθείας. Έστωσαν $A' = F(A)$, $B' = F(B)$, οι εικόνες των δύο αυτών σημείων μέσω της αντιστροφής. Επειδή $|CA||CA'| = |CB||CB'| = r^2$, έπεται ότι τα σημεία A, A', B', B είναι κορυφές τετραπλεύρου εγγραψίμου εις κύκλον, άρα οι απέναντι γωνίες στα A και B' είναι ίσες, άρα το B' βλέπει το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα CA' υπό ορθήν γωνίαν, άρα περιέχεται στον κύκλο με διάμετρο CA' . Το ίδιο σχήμα και το ίδιο επιχείρημα δείχνούν ότι ο κύκλος $CA'B'$ απεικονίζεται στην ευθεία AB . Τούτο ολοκληρώνει την απόδειξη του τρίτου ισχυρισμού.

Γιά τον τέταρτο ισχυρισμό σκεφτόμαστε ανάλογα. Θεωρούμε κατ' αρχήν την διάκεντρο CO και τα σημεία A, B , στα οποία αυτή τέμνει τον δοθέντα κύκλο. Έστωσαν A', B', E' , τα αντίστροφα των A, B και του τυχόντος σημείου E του κύκλου. Λόγω των $|CA||CA'| = |CE||CE'| = r^2$, το $AA'E'E$ είναι εγγράψιμο εις κύκλον και λόγω των $|CB||CB'| = |CE||CE'| = r^2$, το $BB'E'E$ είναι επίσης εγγράψιμο εις κύκλον. Από το εγγράψιμο $AA'E'E$ έχουμε $\widehat{EAB} = \widehat{A'E'E}$ και από το $BB'E'E$ επίσης $\widehat{EBA} = \widehat{B'E'C}$. Άρα το E' βλέπει το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ υπό γωνίαν $\widehat{B'E'A'} = (\pi - \widehat{B'E'C} - \widehat{A'E'E})$ που είναι ορθή. Άρα το E' περιέχεται στον κύκλο με διάμετρο $A'B'$.



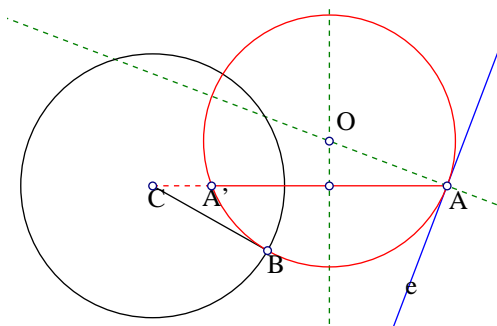
Σχήμα 9.3: Κύκλος ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής

Πρόταση 9.1.2 Έστω F αντιστροφή κέντρου C και δύναμης r^2 . Ισχύουν τα εξής:

1. Κάθε κύκλος που διέρχεται από δύο αντίστροφα σημεία $P, Q = F(P)$, παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή (απεικονίζεται στον εαυτό του) και είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο αντιστροφής.

2. Κάθε κύκλος v , ορθογώνιος προς τον κύκλο αντιστροφής a , παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή.
3. Κάθε κύκλος v , που παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής.

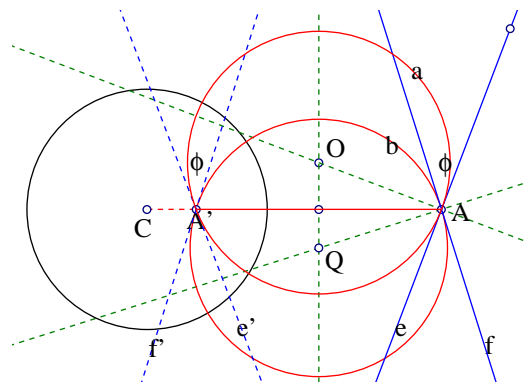
Η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού είναι απλούστατη. Κατ' αρχήν αντίστροφα σημεία υποχρεούνται το ένα εκτός και το άλλο εντός του κύκλου αντιστροφής. Άρα κάθε κύκλος που διέρχεται από δύο τέτοια σημεία θα τέμνει τον κύκλο αντιστροφής, έστω στο σημείο A . Τότε η $|CP||CQ| = |CA||CA| = r^2$, δείχνει ότι η CA είναι εφαπτόμενη του κύκλου διά των P, Q , δηλαδή ο κύκλος είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής. Αντίστροφα, αν ένας κύκλος είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής, τότε για οποιαδήποτε τέμνουσα CPQ θα ισχύει η προηγούμενη ισότητα: $|CP||CQ| = |CA||CA| = r^2$. Άρα ο κύκλος θα είναι αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή. Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί απορρέουν άμεσα απ' αυτές τις παρατηρήσεις.



Σχήμα 9.4: Κύκλος ορθογώνιος σε κύκλο, εφαπτόμενος σε ευθεία

Πρόταση 9.1.3 Υπάρχει ένας ακριβώς κύκλος ορθογώνιος προς δοθέντα κύκλο και εφαπτόμενος δοθήσης ευθείας e σε σημείο A αυτής.

Έστω F η αντιστροφή (C, r^2) ως προς τον δοθέντα κύκλο. Έστω $A' = F(A)$ το αντίστροφο του A . Ο προς κατασκευή κύκλος θα είναι ορθογώνιος στον δοθέντα άρα αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή ως προς αυτόν. Συνεπώς το αντίστροφο A' του A θα ικανοποιεί $|CA||CA'| = r^2$, άρα κατασκευάζεται επί της ευθείας CA . Το κέντρο του ζητούμενου θα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του $A'A$ και της καθέτου της e στο σημείο της A .



Σχήμα 9.5: Διατήρηση γωνιών από αντιστροφές

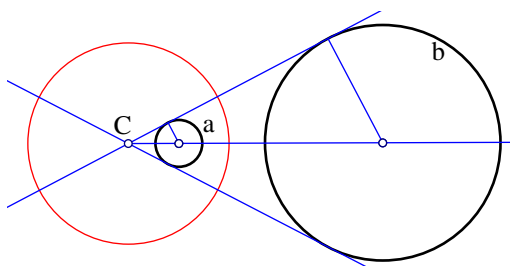
Πρόταση 9.1.4 Εάν δύο καμπύλες (ευθείες ή κύκλοι κατ' αρχήν) τέμνονται υπό γωνίαν ϕ , τότε και οι εικόνες τους μέσω της αντιστροφής θα τέμνονται υπό την ίδιαν γωνίαν ϕ . Την

ιδιότητα αυτή των αντιστροφών εκφράζουμε λέγοντας ότι οι αντιστροφές είναι σύμμορφες απεικονίσεις.

Η απόδειξη στηρίζεται στην παραδοχή ότι η γωνία δύο καμπυλών σ' ένα σημείο τομής τους A ορίζεται από την γωνία των εφαπτομένων τους στο σημείο αυτό. Επίσης στηρίζεται στο ότι υπάρχει απειρία καμπυλών διερχομένων από σημείο A και εφαπτομένων σε ευθεία διά του A . Εφαρμόζουμε λοιπόν την προηγούμενη πρόταση δύο φορές και κατασκευάζουμε δύο κύκλους a, b , ορθογώνιους στον κύκλο αντιστροφής ($F = (C, r^2)$), που εφάπτονται στο A των δύο ευθειών e και f αντίστοιχα. Κατά την αντιστροφή, οι κύκλοι αυτοί απεικονίζονται στον εαυτό τους και συνεπώς οι εφαπτόμενες των εικόνων τους στο A' είναι ευθείες e', f' , συμμετρικές των e, f ως προς την διάκεντρο OQ . Άρα οι εφαπτόμενες στην εικόνα A' του σημείου A έχουν την ίδια γωνία με τις εφαπτόμενες e, f στο σημείο A .

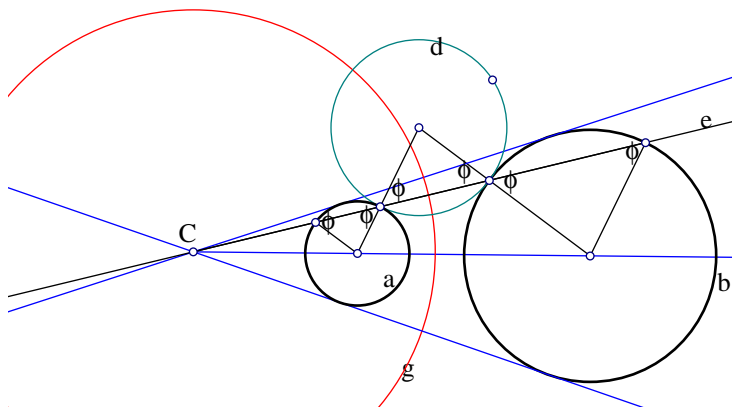
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 9.1

Πρόβλημα 9.1.1 Δίδεται κύκλος a και ευθεία b . Να βρεθεί αντιστροφή που απεικονίζει τον κύκλο στην ευθεία.



Σχήμα 9.6: Εφαπτόμενες κατά την αντιστροφή

Πρόβλημα 9.1.2 Δείξε ότι κατά την αντιστροφή ενός κύκλου a σ' έναν κύκλο b , οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων a, b διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής, άρα τούτο συμπίπτει με κέντρο ομοιοθεσίας των δύο κύκλων.

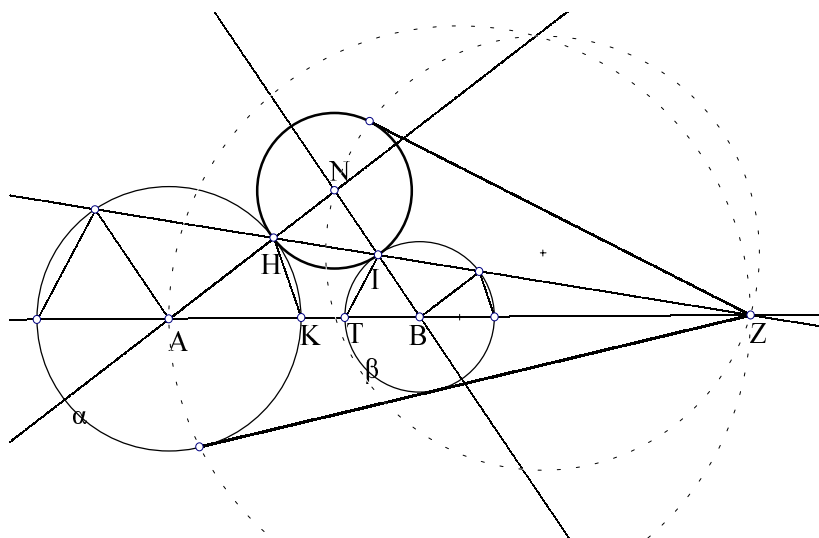


Σχήμα 9.7: Εφαπτόμενος κύκλος κατά την αντιστροφή

Πρόβλημα 9.1.3 Έστω κύκλος d εφαπτόμενος δύο άλλων κύκλων a, b . Δείξε ότι η ευθεία e που ενώνει τα σημεία επαφής διέρχεται από το κέντρο ομοιοθεσίας C των κύκλων a, b .

Δείξε επίσης ότι η αντιστροφή F που εναλλάσσει τους δύο κύκλους αφήνει τον εφαπτόμενο κύκλο d αναλλοίωτο, άρα τούτος είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής g της F .

Πρόβλημα 9.1.4 Δείξε το αντίστροφο του προηγούμενου. Εάν από κάποιο κέντρο ομοιοθεσίας δύο κύκλων α, β , με αντίστοιχα κέντρα A, B , αχθεί ευθεία τέμνουσα αυτούς αντίστοιχα στα σημεία H, I , έτσι ώστε οι ακτίνες AH, BI να μην είναι παράλληλες, τότε προεκτεινόμενες ορίζουν σημείο N , που είναι κέντρο κύκλου εφαπτομένου των α, β στα H και I .



Σχήμα 9.8: Κύκλος εφαπτόμενος σε δύο άλλους

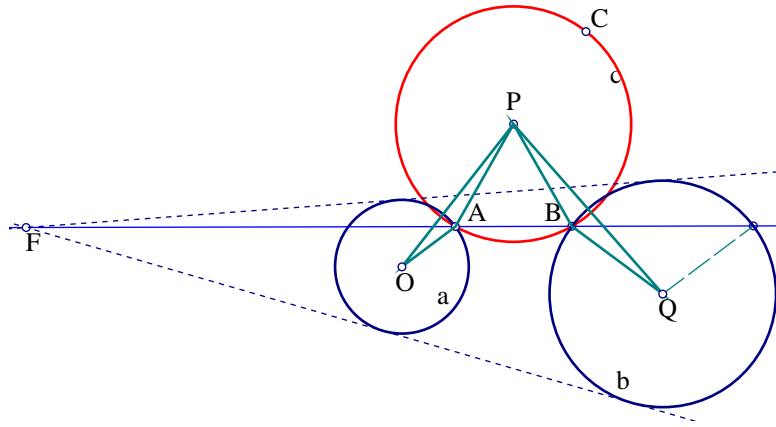
Πρόβλημα 9.1.5 Δείξε (σχήμα 9.8), ότι το τετράπλευρο $HITK$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Συμπεράνε ότι το γινόμενο $d(Z, H)d(Z, I)$ είναι σταθερό, ανεξάρτητο της τέμνουσας ZIH και ίσο με $d(Z, T)d(Z, K)$. Δείξε ακόμη ότι το γινόμενο αυτό ισούται με το γινόμενο των μηκών των εφαπτομένων προς τους δύο κύκλους που άγονται από το Z . Δείξε τέλος ότι το γινόμενο αυτό ισούται με το τετράγωνο της εφαπτομένης που άγεται από το Z στον κύκλο με κέντρο N και ακτίνα NH .

Πρόβλημα 9.1.6 Δίδονται δύο κύκλοι α, β . Να βρεθεί αντιστροφή που απεικονίζει τον ένα στον άλλο.

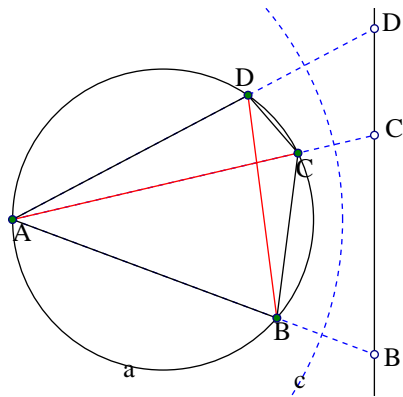
Πρόβλημα 9.1.7 Έστωσαν A, B , δύο σημεία τομής κύκλου c τέμνοντος δύο άλλους κύκλους α, β , υπό ίσας γωνίας. Δείξε ότι η ευθεία AB διέρχεται από το κέντρο ομοιοθεσίας F των δύο κύκλων α, β .

9.2 Εφαρμογές της αντιστροφής

Πρόταση 9.2.1 (Θεώρημα Πτολεμαίου 87-150 μ.Χ.) Τετράπλευρον εγγράφεται εις κύκλον τότε και μόνον τότε, όταν το γινόμενο των μηκών των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του (Σχήμα 9.10). $|AB||CD| + |BC||DA| = |AC||BD|$.



Σχήμα 9.9: Κύκλος τέμνων δύο άλλους υπό ίσας γωνίας

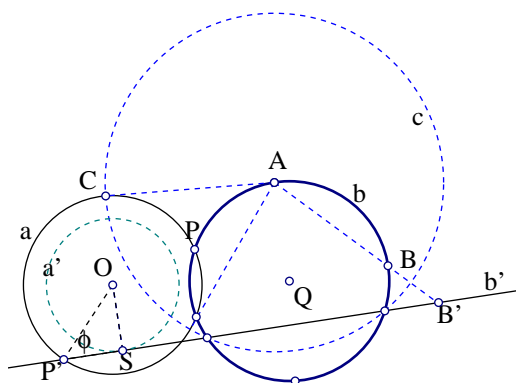


Σχήμα 9.10: Θεώρημα Πτολεμαίου

Ας υποθέσουμε ότι το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και ας εφαρμόσουμε το συμπέρασμα του προβλήματος 6.5.2. Προς τούτο κάνουμε αντιστροφή με κέντρο το A και ακτίνα οποιαδήποτε. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου μετασχηματίζεται σε ευθεία και οι άλλες κορυφές του τετραπλεύρου σε σημεία της ευθείας B', C', D' . Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις: $|B'C'| = \delta \frac{|BC|}{|AB||AC|}$, $|C'D'| = \delta \frac{|CD|}{|AC||AD|}$, $|B'D'| = \delta \frac{|BD|}{|AB||AD|}$. δ συμβολίζει εδώ το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου c . Εξισώνοντας $|B'C'| + |C'D'| = |B'D'|$ και αντικαθιστώντας με τα δεξιά μέλη των ισοτήτων παίρνουμε την σχέση. Ο συλλογισμός μπορεί να τροποποιηθεί και στην περίπτωση που κάποιο από τα σημεία B, C, D δεν περιέχεται στον κύκλο a . Τότε τα B', C', D' δεν θα περιέχονται σε ευθεία και θα ισχύει $|B'C'| + |C'D'| > |B'D'|$, από την οποία συνάγεται η $|AB||CD| + |BC||DA| > |AC||BD|$. Αυτό δείχνει μία γενικώτερη ανισότητα για τέσσερα σημεία μη κείμενα επί κύκλου και συνεπάγεται αμέσως το αντίστροφο. Δηλαδή, εάν ικανοποιείται η σχέση τότε τα τέσσερα σημεία θα κείνται επί κύκλου.

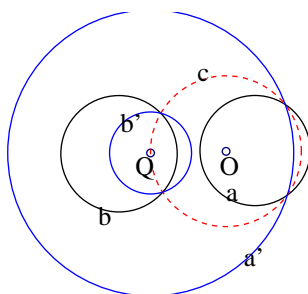
Πρόταση 9.2.2 *Να κατασκευασθεί κύκλος b διερχόμενος από δύο δοθέντα σημεία A, B και τέμνων δοθέντα κύκλον a υπό δοθήσαν γωνίαν ϕ .*

Χρησιμοποιώ την αντιστροφή για να ανάγω την κατασκευή σε ένα απλούστερο πρόβλημα. Πράγματι ας κάνουμε μιά αντιστροφή F με κέντρο ένα από τα δοθέντα σημεία, έστω το A και ακτίνα οποιαδήποτε (στο σχήμα 9.11 υποθέτω ότι το A είναι εξωτερικό του a και παίρνω ως ακτίνα αντιστροφής την εφαπτόμενη AC). Τότε ο κύκλος a παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή: $F(a) = a$. Ο ζητούμενος κύκλος, εφ' όσον υπάρχει θα αντιστρέφεται σε ευθεία b' διερχόμενη από το σημείο $B' = F(B)$. Λόγω της διατήρησης των γωνιών κατά την



Σχήμα 9.11: Κύκλος δια σημείων τέμνων υπό δοθήσαν γωνίαν

αντιστροφή, η ευθεία αυτή θα τέμνει την εικόνα $F(a)$ του κύκλου a κατά γωνία επίσης ϕ , άρα θα εφάπτεται γνωστού κύκλου a' με κέντρο O και ακτίνα $|OS| = |OP'| \sin(\phi)$. Προς επίλυση του προβλήματος, αρκεί λοιπόν να κατασκευάσω τις δύο εφαπτόμενες από το B' προς τον κύκλον a' και να αντιστρέψω αυτές τις εφαπτομένες μέσω της F για να βρώ τους δύο κύκλους-λύσεις του προβλήματος.



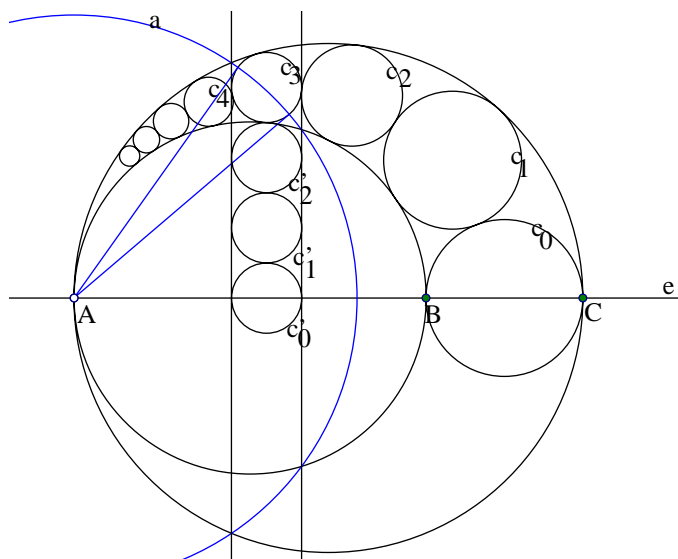
Σχήμα 9.12: Μετασχηματισμός σε ομόκεντρους κύκλους

Πρόταση 9.2.3 Δοθέντων δύο μη τεμνομένων κύκλων a, b , υπάρχει αντιστροφή F η οποία απεικονίζει τους κύκλους σε δύο ομόκεντρους $a' = F(a), b' = F(b)$.

Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε την υπερβολική δέσμη u , που παράγεται από τους δύο κύκλους. Έστωσαν O, Q τα οριακά σημεία της δέσμης. Ορίζουμε την αντιστροφή να έχει κέντρο το ένα απ' αυτά, λ.χ. το O και ακτίνα την απόσταση των δύο σημείων. Τότε η ορθογώνια δέσμη v της u που αποτελείται από όλους τους κύκλους που διέρχονται από τα σημεία O, Q , θα μετασχηματίζεται κατά την αντιστροφή στην δέσμη των ευθειών διά του Q και οι κύκλοι της δέσμης u , που είναι όλοι ορθογώνιοι στους κύκλους της δέσμης v θα μετασχηματίζονται σε συγκεντρικούς με κέντρο το σημείο Q .

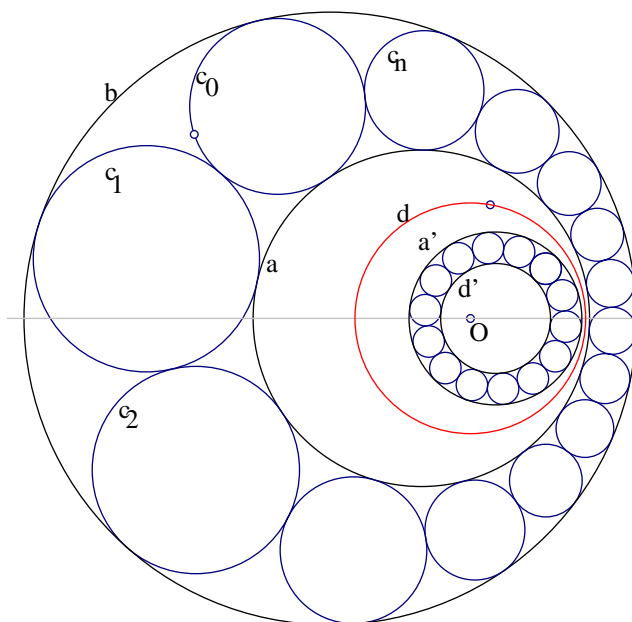
Πρόταση 9.2.4 Θεώρημα του Πάππου (Άρβυλος) (περί το 350 μ.Χ.) Για την ακολουθία κύκλων όπως στο σχήμα 9.13, ισχύει ότι η απόσταση h_n του κέντρου του n -στού κύκλου από την ευθεία e και η διάμετρος d_n του ίδιου κύκλου πληρούν την εξίσωση: $h_n = nd_n$.

Αρκεί να εφαρμόσουμε αντιστροφή F με κέντρο το A και ακτίνα την εφαπτόμενη από το A προς τον n -στό κύκλο c_n . Τότε οι κύκλοι με διάμετρο AB και AC μετασχηματίζονται σε δύο παραλλήλους που εφάπτονται στον κύκλο c_n και οι προηγούμενοι κύκλοι c_{n-1}, c_{n-2}, \dots μετασχηματίζονται σε ίσους κύκλους, εφάπτομενους ανά δύο. Ο τύπος προκύπτει αμέσως



Σχήμα 9.13: Μετασχηματισμός σε ομόκεντρους κύκλους

λόγω της ισότητας των κύκλων c_n, c'_{n-1}, \dots , εκ των οποίων ο πρώτος είναι ο c_n και ο τελευταίος έχει το κέντρο του επί της AB .



Σχήμα 9.14: Αλυσίδες του Steiner

Πρόταση 9.2.5 Θεώρημα του Steiner (Αλυσίδες) (1796-1863) Ξεκινώντας από έναν κύκλο c_0 εφαιπτόμενο δύο μη τεμνομένων κύκλων a και b , κατασκευάζουμε αλυσίδα εφαιπτόμενων ανά δύο κύκλων c_0, c_1, \dots, c_n , όπως στο σχήμα 9.14. Εάν ο n -στός κύκλος της αλυσίδας εφάπτεται του αρχικού c_0 , τότε το ίδιο θα συμβαίνει για κάθε θέση του αρχικού κύκλου c_0 , εφαιπτόμενου των a, b .

Η εικόνα είναι εντυπωσιακή αλλά η απόδειξη απλούστατη. Αρκεί να εφαρμόσουμε στο όλο σχήμα μιάν αντιστροφή που απεικονίζει τους δύο κύκλους a, b , σε δύο ομόκεντρους a', b' ,

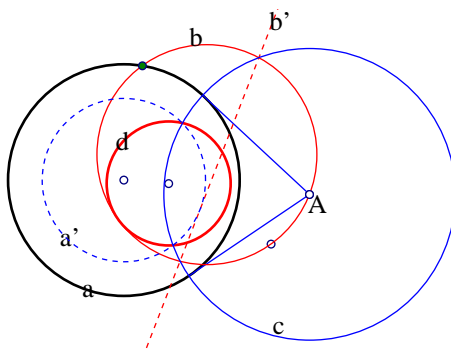
(δες πρόταση 9.2.3). Τότε η αλυσίδα των κύκλων c_0, c_1, \dots, c_n , μετασχηματίζεται κατά την αντιστροφή σε μία αλυσίδα ίσων κύκλων που εφάπτονται ανά δύο μεταξύ τους καθώς και των a', b' . Προφανώς δε η σχέση επαφής δεν εξαρτάται από την θέση του c_0 μεταξύ των δύο κύκλων a και b .

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 9.2

Πρόβλημα 9.2.1 Βρες για ποιές σχετικές θέσεις των σημείων και ποιές γωνίες, το πρόβλημα της πρότασης 9.2.2 δέχεται δύο, μία ή καμμία λύση.

Πρόβλημα 9.2.2 Να κατασκευασθεί κύκλος διερχόμενος από δοθέν σημείον C και τέμνων δύο δοθέντας κύκλους a, b , υπό δοθήσαν γωνίαν ϕ . (Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε το πρόβλημα 9.1.7 και βρες επί της CF ένα ακόμη σημείο D , από το οποίο διέρχεται ο κύκλος. Ανάγαγε τότε στο πρόβλημα της πρότασης 9.2.2).

Πρόβλημα 9.2.3 Δείξε ότι για αλυσίδα κύκλων c_0, c_1, \dots, c_n , όπως αυτή της πρότασης 9.2.5, η ιδιότητα ο τελευταίος κύκλος c_n να τέμνει τον αρχικό c_0 δεν εξαρτάται από την αρχική θέση του c_0 .



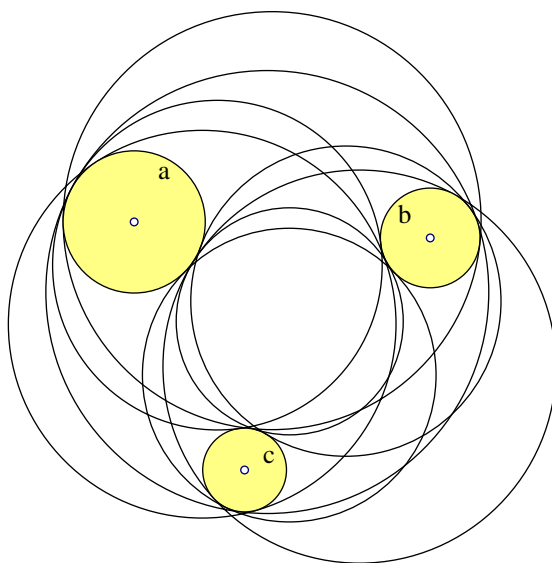
Σχήμα 9.15: Κύκλοι διερχόμενοι από σημείον A , τέμνοντες υπό γωνίαν ϕ

Πρόβλημα 9.2.4 Δείξε ότι οι κύκλοι b που διέρχονται από δοθέν σημείο A και τέμνουν δοθέντα κύκλο a υπό γωνίαν δοθήσαν γωνίαν ϕ , εφάπτονται ενός σταθερού κύκλου d . (Υπόδειξη: Κάνε αντιστροφή με κέντρο το A και ακτίνα οποιαδήποτε. Ο μεταβλητός κύκλος b αντιστρέφεται σε μίαν ευθείαν b' , που εφάπτεται ενός σταθερού κύκλου a' . Ο d είναι ο αντίστροφος του a' .)

Πρόβλημα 9.2.5 Δείξε ότι οι κύκλοι b που διέρχονται από δοθέν σημείο A και τέμνουν δοθήσαν ευθείαν a υπό γωνίαν δοθήσαν γωνίαν ϕ , εφάπτονται ενός σταθερού κύκλου d . (Υπόδειξη: Αναγωγή, μέσω αντιστροφής στο προηγούμενο πρόβλημα.)

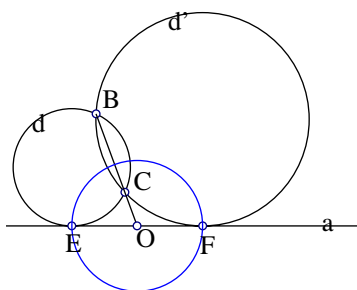
9.3 Προβλήματα του Απολλώνιου

Ο Απολλώνιος (247 π.Χ.) έθεσε και έλυσε το γενικό πρόβλημα κατασκευής κύκλου d εφαιπτομένου τριών άλλων. Το πρόβλημα, για κύκλους εξωτερικούς αλλήλων, δέχεται οκτώ λύσεις (σχήμα 9.16). Για ειδικές θέσεις των κύκλων προκύπτουν λιγώτερες λύσεις. Μπορεί κανείς να θεωρήσει τα σημεία ως κύκλους μηδενικής ακτίνας, τις δε ευθείες, ως κύκλους



Σχήμα 9.16: Πρόβλημα του Απολλώνιου

πολύ μεγάλης ακτίνας. Υπό το πρίσμα αυτό το πρόβλημα συμπεριλαμβάνει την αναζήτηση κύκλων λ.χ. που διέρχονται από δοθέν σημείο και εφάπτονται δύο δοθέντων κύκλων ή κύκλου και ευθείας κ.τ.λ. Τα προβλήματα αυτά, στην πλειονότητά τους, απλουστεύονται σημαντικά υποβάλλοντας τα δεδομένα τους σε αντιστροφή. Παραθέτω μιά σειρά ειδικών περιπτώσεων, συνοδεύοντάς τις με υποδείξεις.

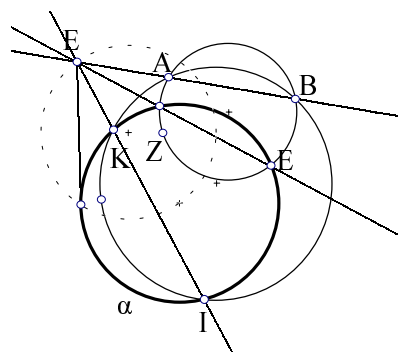


Σχήμα 9.17: Διέλευση από A, B και επαφή με ευθεία

Πρόβλημα 9.3.1 Να κατασκευασθεί κύκλος d που διέρχεται από δοθέντα σημεία A, B και εφάπτεται δοθείσης ευθείας a . (Υπόδειξη: Το σημείο τομής O , της a με την AB έχει την ιδιότητα $|OA||OB| = |OE|^2$, όπου E το σημείο επαφής του ζητούμενου κύκλου με την a . Ευρίσκεται λοιπόν η θέση E . Δύο λύσεις εν γένει.)

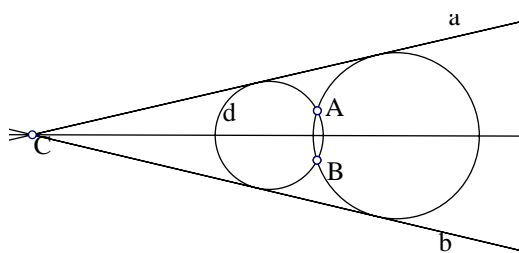
Πρόβλημα 9.3.2 Έστωσαν κύκλος a και σημεία A, B . Δείξε ότι κάθε κύκλος διερχόμενος διά των A, B και τέμνων τον a , ορίζει κοινή χορδή μ' αυτόν, η οποία διέρχεται από σταθερόν σημείο E της ευθείας AB . (Υπόδειξη: Θεώρησε τυχούσα τέμνουσα EZH και δείξε ότι γιά κάθε άλλον κύκλο τα E, I, K είναι συνευθειακά. Το E είναι το ριζικό κέντρο του a και όλων των ζευγών κύκλων που διέρχονται από το A, B .)

Πρόβλημα 9.3.3 Δίδεται κύκλος a και δύο σημεία A, B . Κατασκεύασε κύκλο β , εφαπτόμενο του a και διερχόμενο δια των A, B . (Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε το προηγούμενο. Εκτός των A, B και το E ευρίσκεται από τα δεδομένα. Από το E φέρομε τις εφαπτόμενες στον a . Ο



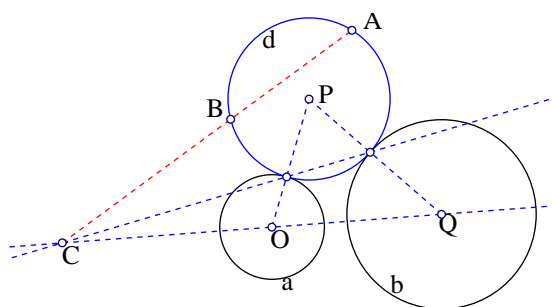
Σχήμα 9.18: Κύκλος διερχόμενος από δύο σημεία, τέμνων τον α

ζητούμενος κύκλος θα διέρχεται, εκτός των A, B , και από τα σημεία επαφής. Άλλη μέθοδος: Αντιστροφή ως προς οποιοδήποτε σημείο του δοθέντος κύκλου και αναγωγή στο πρόβλημα 9.3.1.)



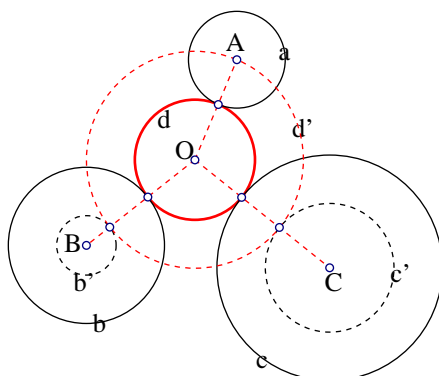
Σχήμα 9.19: Διέλευση από A και επαφή με ευθείες

Πρόβλημα 9.3.4 Να κατασκευασθεί κύκλος d που διέρχεται από δοθέν σημείο A και εφάπτεται δοθέντων ευθειών a, b . (Υπόδειξη: Το συμμετρικό B του A ως προς την διχοτόμο των a, b , πρέπει να περιέχεται στον ζητούμενο κύκλο. Βρίσκουμε λοιπόν το B και ανάγουμε το πρόβλημα στο 9.3.1, της εύρεσης κύκλου, διερχομένου από τα A, B , και εφαπτομένου της μίας ευθείας a . Αυτόματα θα εφάπτεται και της άλλης b .)



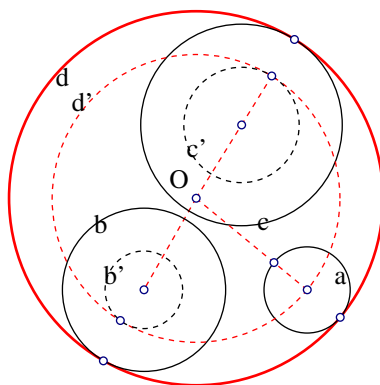
Σχήμα 9.20: Διέλευση από A και επαφή με κύκλους

Πρόβλημα 9.3.5 Να κατασκευασθεί κύκλος d που διέρχεται από δοθέν σημείο A και εφάπτεται δοθέντων κύκλων a, b . (Υπόδειξη: Η ευθεία δια των σημείων επαφής διέρχεται διά κέντρου ομοιοθεσίας C των δύο κύκλων (δες πρόβλημα 9.1.3). Ο ζητούμενος κύκλος παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή που εναλλάσσει τους δύο κύκλους. Άρα το $|CB||CA|$ είναι γνωστό και εξ' αυτού προσδιορίζεται το B . Ανάγεται λοιπόν το πρόβλημα στο πρόβλημα 9.3.3.)



Σχήμα 9.21: Κύκλος εφαπτόμενος τριών δοθέντων

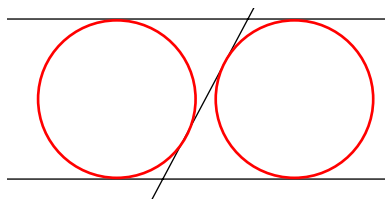
Πρόβλημα 9.3.6 Να κατασκευασθεί κύκλος d , εφαπτόμενος τριών δοθέντων κύκλων a , b , c . (Υπόδειξη: Έστω ότι οι κύκλοι είναι εξωτερικοί αλλήλων και έστω r_a , r_b , r_c οι ακτίνες τους. Έστω ότι η r_a είναι η μικρότερη απ' αυτές. Κατασκευάζουμε τους συγκεντρικούς b' , c' , των b , c , με ακτίνες $r_b - r_a$, $r_c - r_a$ αντιστοίχως. Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση κύκλου d' , διερχομένου διά του σημείου A και εφαπτομένου δύο άλλων κύκλων b' , c' .)



Σχήμα 9.22: Κύκλος εφαπτόμενος τριών δοθέντων

Πρέπει να σημειώσω την σχετικά μεγάλη ποικιλία ειδικών περιπτώσεων που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα προβλήματα που προηγήθηκαν. Πολλές από τις κατασκευές που προτείνονται πρέπει να τροποποιηθούν για να γίνει εφικτή η ανεύρεση όλων των λύσεων του προβλήματος. Για παράδειγμα, η υπόδειξη για το τελευταίο πρόβλημα οδηγεί σε κύκλο εφαπτόμενο των τριών, έτσι ώστε αυτοί να ευρίσκονται στο εξωτερικό του. Υπάρχει όμως, εν γένει, και κύκλος εφαπτόμενος των τριών και περιέχων τους τρεις (σχήμα 9.22), καθώς και άλλες περιπτώσεις που ο ζητούμενος περιέχει 1 ή 2 κύκλους στο εσωτερικό του και τους υπόλοιπους στο εξωτερικό του. Για την ανεύρεση και αυτών των λύσεων, πρέπει να επαναλάβουμε την διαδικασία αναγωγής σε απλούστερο, τροποποιώντας πάντοτε την μέθοδο, αύξησης ή ελάττωσης των ακτίνων.

Εκτός αυτών των περιπτώσεων, πρέπει να εξετάσουμε και περιπτώσεις που ένας ή περισσότεροι κύκλοι αντικαθίστανται με ευθείες. Π.χ. μιά ειδική περίπτωση είναι αυτή των τριών ευθειών και της κατασκευής των κύκλων που εφάπτονται και στις τρεις. Για γενική θέση των ευθειών, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την κατασκευή του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου (δες παράγραφο 6.9). Για ειδικές θέσεις των ευθειών προκύπτουν λιγότερες λύσεις (δες επόμενο σχήμα). Από τις 8 λύσεις της γενικώτατης περίπτωσης, απομένουν σ' αυτήν μόνο δύο και μάλιστα οι κύκλοι είναι ίσοι. Ειδική διερεύνηση

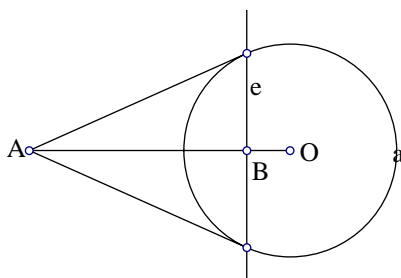


Σχήμα 9.23: Κύκλος εφαπτόμενος τριών δοθέντων ευθειών (ειδική περίπτωση)

χρειάζονται και οι περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχει καμμία λύση. Π.χ. τρεις παράλληλες ευθείες ή ευθείες που διέρχονται από κοινό σημείο, δεν δέχονται κανένα κύκλο ταυτόχρονα εφαπτόμενο και στις τρεις.

Η διεξοδική ανάλυση και κατασκευή όλων των περιπτώσεων του προβλήματος του Απολλωνίου, θα μπορούσε να αποτελέσει μία ευχάριστη και διδακτική εργασία, για τον αναγνώστη, που παρακολούθησε, μέχρις αυτού του σημείου, τις γενικές γραμμές του θέματος.

9.4 Πολικότητα



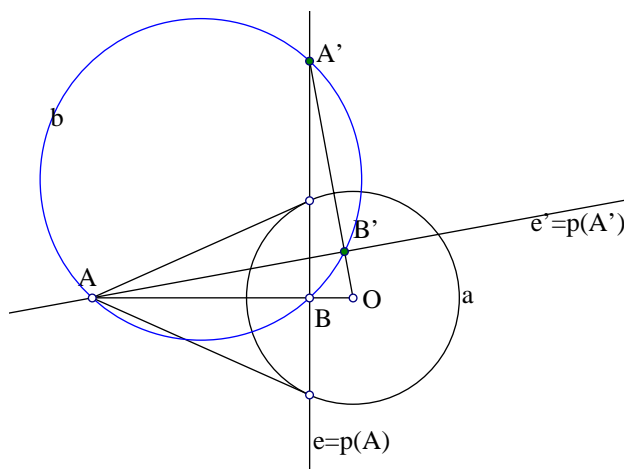
Σχήμα 9.24: Πολική ευθεία, πόλος ευθείας ως προς κύκλον

Δοθέντος κύκλου a με κέντρο O και σημείου A , **πολική** του σημείου, ως προς τον κύκλο a , λέμε την ευθεία $e = p(A)$ που διέρχεται από το αντίστροφο B του A ως προς τον κύκλο και είναι κάθετη στην AO . Το σημείο A λέγεται **πόλος** της ευθείας e ως προς τον κύκλο. Προφανώς, κάθε ευθεία που δεν διέρχεται από το O είναι πολική κάποιου σημείου A . Τον πόλο $A = P(e)$ μιάς ευθείας e ευρίσκουμε προβάλλοντας το κέντρο του κύκλου a στην ευθεία, στο σημείο B και παίρνοντας το αντίστροφο A του B ως προς τον κύκλο. Προφανώς επίσης, αν το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου, τότε η πολική του συμπίπτει με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων από το A . Τέλος αν το σημείο A περιέχεται στον κύκλο a , τότε η πολική του είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο A και αντίστροφα, αν η ευθεία a είναι εφαπτόμενη στον κύκλο, τότε ο πόλος της είναι το σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.

Η αντιστοίχιση σε κάθε σημείο (διάφορο του O) της πολικής ευθείας και σε κάθε ευθεία (μη διερχόμενη δια του O) του πόλου λέμε ότι ορίζει την έννοια του πολικού δυϊσμού ή **πολικότητα** μεταξύ ευθειών και σημείων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως θα δούμε παρακάτω, θεωρήματα που αφορούν σε ιδιότητες σημείων, αντιστοιχούν, μέσω αυτού του δυϊσμού, σε θεωρήματα που αφορούν σε ιδιότητες ευθειών και αντίστροφα.

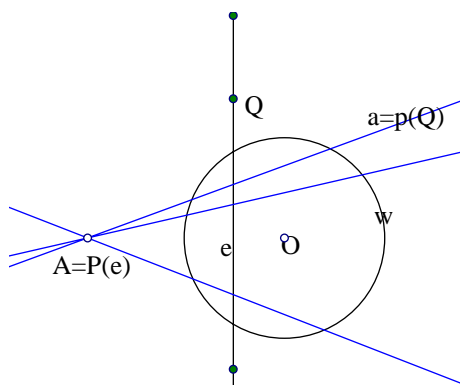
Πρόταση 9.4.1 (Βασική ιδιότητα πολικότητας) *Αν σημείο A' περιέχεται στην πολική $e = p(A)$ σημείου A , τότε και το A περιέχεται στην πολική του $e' = p(A')$.*

Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε τον κύκλο b που διέρχεται από τα A, B, A' . Τούτος, ως διερχόμενος από δύο αντίστροφα σημεία A, B θα παραμένει αναλλοίωτος κατά την αντι-



Σχήμα 9.25: Πολική ευθεία, πόλος ευθείας ως προς κύκλον

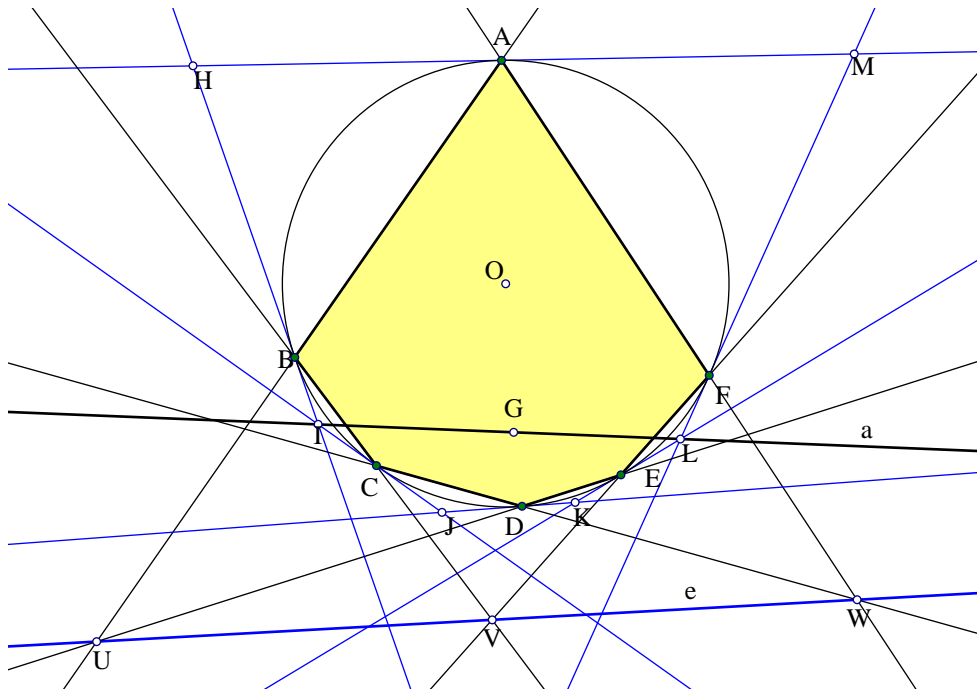
στροφή ως προς a . Έτσι το αντίστροφο B' του A' θα περιέχεται στον κύκλο b και συνεπώς θα βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα AA' υπό την ίδιαν γωνίαν που το βλέπει και το B , δηλαδή ορθή. Άρα η AB' θα είναι η πολική του A' και θα περιέχει το A . Άμεση συνέπεια της πρότασης αυτής είναι η επόμενη:

Σχήμα 9.26: Πολικές σημείων Q μιάς ευθείας

Πρόταση 9.4.2 Έστω κύκλος w κέντρου O . θεωρούμε την πολικότητα ως προς αυτόν τον κύκλο. Δοθείσης ευθείας e , οι πολικές $a = p(Q)$, των σημείων της ευθείας διέρχονται διά του πόλου $A = P(e)$, της ευθείας. Δοθέντος σημείου A οι πόλοι των ευθειών που διέρχονται διά του A περιέχονται στην πολική $e = p(A)$ του A .

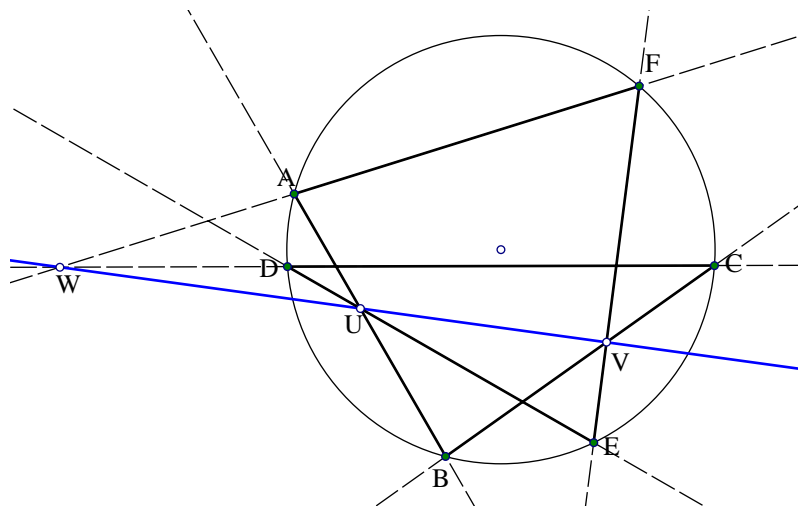
Πρόταση 9.4.3 Σε κάθε εξαγώνου $ABCDEF$ εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι απέναντι πλευρές του τέμνονται σε σημεία U, V, W , περιεχόμενα σε ευθεία e . Η e ονομάζεται ευθεία *Pascal* του εγγεγραμμένου εξαγώνου.

Θεωρούμε τις πολικές των κορυφών του εξαγώνου, ως προς τον κύκλο τον οποίο το εξαγώνου είναι εγγεγραμμένο. Οι πολικές αυτές ευθείες ορίζουν ένα νέο εξαγώνου $H I J K L M$, το οποίο εφάπτεται του κύκλου στις κορυφές του αρχικού εξαγώνου (σχήμα 9.27). Κατά το θεώρημα Brianchon, οι ευθείες που ενώνουν απέναντι κορυφές του νέου αυτού εξαγώνου διέρχονται διά κοινού σημείου G . Έστω $e = p(G)$ η πολική του G . Κατά την προηγούμενη πρόταση, οι πόλοι όλων των ευθειών διά του G θα περιέχονται στην ευθεία e . Ο πόλος της ευθείας



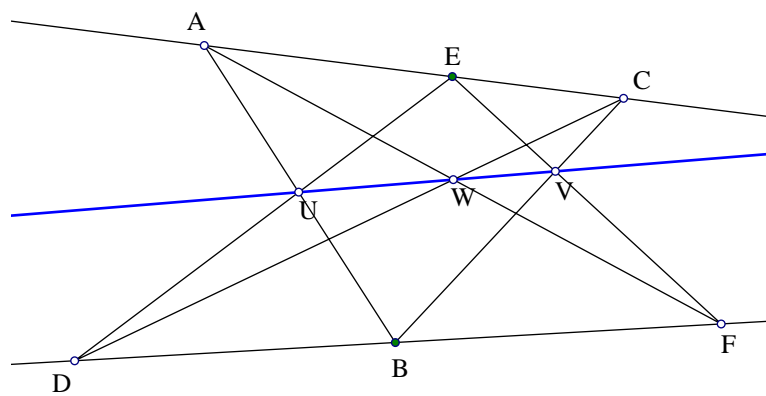
Σχήμα 9.27: Ευθεία Pascal εγγεγραμμένου εξαγώνου

EF , που είναι το σημείο L , περιέχεται στην ευθεία IL , άρα η EF θα περιέχει και τον πόλο της ευθείας IL που είναι ένα σημείο V της e . Με τον ίδιο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι και η BC θα περιέχει το V . Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι οι ευθείες AB, DE και CD, FA τέμνονται επί της e .



Σχήμα 9.28: Μυστικό εξάγραμμο του Pascal

Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύεται γενικότερα για οποιοδήποτε εξαγώνο ή **εξάγραμμο** $ABCDEF$, εγγεγραμμένο σε κωνική τομή. Η γενικότερη περίπτωση αυτή αναφέρεται ως Μυστικό εξάγραμμο του Pascal (1623-1662). Το εξάγραμμο είναι μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή. Στην περίπτωση που η κωνική είναι εκφυλισμένη σε δύο τεμνόμενες ευθείες, το ανάλογο θεώρημα οφείλεται στον Πάππο. Η αντιμετώπιση της γενικότερης πρότασης (για εξάγραμμο εγγεγραμμένα σε κωνικές τομές) απαιτεί την μελέτη του λεγόμενου διπλού λόγου και εντάσσεται στην περιοχή της προβολικής γεωμετρίας.



Σχήμα 9.29: θεώρημα του Πάππου