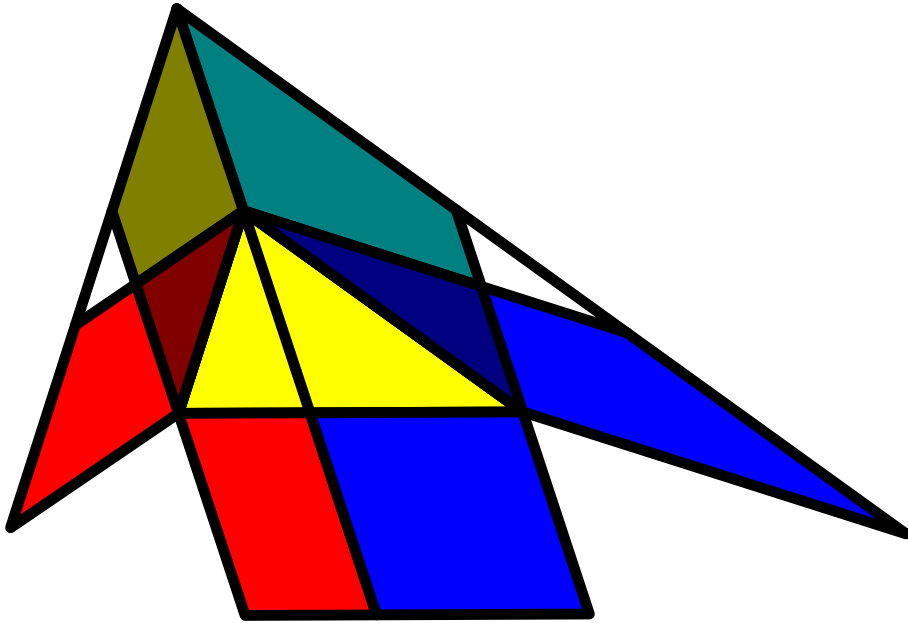


Πάρις Πάμφιλος



Γεωμετρικόν







Στον Κώστα, τον Μιχάλη, τον Ιάσονα, τον Οδυσσέα



Αι επιστήμαι χωρίς την φιλολογίαν κατανώσιν εις των  
βαναύσων τεχνών την ταπεινότητα...

---

*Αδαμάντιος Κοραΐς, Προλεγόμενα, Πηλουτάρχου Δ'*

Δέξου ποιος είσαι.

Το ποίημα

μην το καταποντίζεις στα βαθιά πλατάνια  
θρέψε το με το χώμα και το βράχο που έχεις.  
Τα περισσότερα -  
σκάψε στον ίδιο τόπο να τα βρεις.

---

*Γιώργος Σεφέρης, Τρία κρυφά ποιήματα*

Το ανά χείρας βιβλίο προέκυψε από επεξεργασία σημειώσεων παραδόσεων των μαθημάτων *Γεωμετρία, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Η Γεωμετρία στο Σχολείο* και *Γεωμετρία και Υπολογιστές* που, κατ' επανάληψη έδωσα κατά τη διάρκεια της τελευταίας εικοσαεπενταετίας στο πανεπιστήμιο Κρήτης. Αν και το βιβλίο προορίζεται για το σχολείο, το υλικό που διαπραγματεύεται είναι πολύ περισσότερο από αυτό που είναι δυνατόν να διδαχθεί στις τάξεις. Η ύλη ωστόσο εκτίθεται σταδιακά από τα απλά και εύκολα στα πιο σύνθετα και δύσκολα θέματα. Έτσι, στα αρχικά κεφάλαια αποφεύγω ακόμη και τη χρήση αρνητικών αριθμών, καθώς και τη χρήση της έννοιας του μετασχηματισμού, ώστε το βιβλίο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τις πρώτες τάξεις του γυμνασίου.

Το βιβλίο, όπως έχει διαμορφωθεί, συντάσσεται με τη φιλοσοφία του να υπάρχει ένα σύγγραμμα για κάθε σχολικό μάθημα. Το βιβλίο της Γεωμετρίας, το βιβλίο της Φυσικής, το βιβλίο της Χημείας κ.λπ., το οποίο να καλύπτει την ύλη των αντιστοιχών μαθημάτων σε όλες τις τάξεις. Αν όχι για το μαθητή, τουλάχιστον για τον καθηγητή. Και για τους δύο ωστόσο το βιβλίο να προσφέρει μια στέρεα και πλήρη υποδομή, στην οποία να μπορούν να προστρέχουν για μελέτη, εμπέδωση, αλλά και προεκτάσεις. Είναι αξιοσημείωτο το ότι, ενώ στη ξένη βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα εκδόσεων βιβλίων που αναπτύσσουν την ευκλείδεια Γεωμετρία λαμβάνοντας υπόψη τις εξελίξεις από τον Ευκλείδη και πέρα, εδώ, στην κοιτίδα της Γεωμετρίας υπάρχει ένα κενό. Ελπίζω, μεταξύ των άλλων το βιβλίο να καλύψει και αυτό το κενό στην ελληνική βιβλιογραφία.

Στα μαθήματα που προτείνω δεν προχωρώ σε δομική ανάπτυξη αλλά σε μια λίγο-πολύ παραδοσιακή, συνθετική μέθοδο, που αποσκοπεί στην εξοικείωση με τις βασικές έννοιες και μια πρώτη επαφή με τα σχήματα και τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτά. Μια δομική ανάπτυξη θα τόνιζε ιδιαίτερα τα αξιώματα και τις δομές, αλγεβρικές και αναλυτικές, που υπόκεινται σε όλο αυτό το υλικό. Τα Μαθηματικά έχουν πλέον οριστικά περάσει από την τέχνη των υπολογισμών στην ανακάλυψη και διερεύνηση δομών. Ο δρόμος όμως αυτός, που αποτελεί εξέλιξη μακροχρόνια, δεν μου φαίνεται καλός για το ξεκίνημα και την εισαγωγή στη Γεωμετρία, τις έννοιες που την απασχολούν, τα σχήματα

και τα προβλήματα στα οποία αυτά οδηγούν. Θεωρώ ότι ο μαθητής πρέπει πρώτα να έχει εμπειρίες, προσλαμβάνουσες παραστάσεις με τον απλούστερο δυνατό τρόπο χωρίς την παρεμβολή των αφηρημένων δομών, που κατά τη γνώμη μου, στο αρχικό στάδιο, θα δυσκόλευαν την προσέγγισή του στο υλικό.

Έτσι, απλά για να έχει ο αναγνώστης ένα σημείο αναφοράς, βάζω ορισμένες αρχές στα αξιώματα και προχωρώ γρήγορα στις λογικές συνέπειές τους, ώστε να γίνει η συνάντηση με τα κάπως πιο σύνθετα και ενδιαφέροντα σχήματα όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Μέσα στα αξιώματα φιλοξενούνται πολύ βασικές ιδιότητες μερικές από τις οποίες θα μπορούσαν κιόλας να αποδειχθούν και να μην τεθούν ως αξιώματα. Αυτό όμως θα είχε ως συνέπεια μια κάπως πιο εκτεταμένη συζήτηση τετριμμένων συνεπειών και συμπερασμάτων, που κρίνω ότι γίνεται ανιαρή για το μαθητή και μπορεί να τον απωθήσει από το μάθημα.

Η συζήτηση των αρχών και η λεπτομερής καταγραφή των απλούστερων από αυτές, από τις οποίες συνάγονται όλες οι υπόλοιπες, είναι έργο ύστερης σοφίας και πρέπει να γίνεται μετά, αφού κανείς αγαπήσει το υλικό. Πρώτα όμως πρέπει να δει πιο είναι αυτό το υλικό, να ξεκινήσει από την πράξη και σιγά-σιγά, ανάλογα με το ενδιαφέρον του και τις δυνατότητές του να προχωρήσει στη θεωρία. Έχει λοιπόν αυτό το βιβλίο το χαρακτήρα της εισαγωγής, της πρώτης επαφής με μια περιοχή γνώσης που έχει πολλά επίπεδα.

Νομίζω ότι ο καθηγητής μπορεί να χρησιμοποιεί το βιβλίο ως αναφορά και χάρτη της ύλης της Γεωμετρίας για όλες τις τάξεις που διδάσκεται το μάθημα. Το επί μέρους μάθημα για κάθε τάξη, ως διαδρομή σχεδιασμένη και οργανωμένη λεπτομερώς στο χάρτη, μπορεί και πρέπει να υποστηρίζεται και με συνοδά βοηθήματα παιδαγωγικού χαρακτήρα (πρακτικές ασκήσεις, πρόσθετες ασκήσεις, ασκήσεις σχεδιασμού και εμπέδωσης των εννοιών, φύλλα εργασίας, λογισμικά, κ.λπ.). Στο βιβλίο περιέχονται πολλές (πάνω από 1400) ασκήσεις, πολλές με τη λύση τους ή υποδειξεις και με θέματα συναφή με την παράγραφο στην οποία εμφανίζονται. Συχνά επίσης υπάρχουν και ασκήσεις που σχετίζονται με τις προηγούμενες παραγράφους, ώστε να δίδεται αφορμή για μια δεύτερη ανάγνωση.

Η βαθύτερη επιθυμία μου είναι να επανέλθει η Γεωμετρία στο σχολείο, στη θέση που της αξίζει. Και τούτο διότι η Γεωμετρία, με τα σχήματά της, που είναι κίνητρο και μέγιστη βοήθεια στην επαγωγική σκέψη, προσφέρει πολλά και χειροπιαστά παιδαγωγικά ευεργετήματα. Θα αναφέρω τέσσερα κύρια.

Το πρώτο είναι η συνειδητοποίηση ότι υπάρχουν πράγματα μπροστά σου που δεν τα βλέπεις. Υπάρχουν απλά πράγματα, απλές σχέσεις εκτεθειμένες σε κοινή θέα, παρόλα αυτά αθέατες, αρχικά, αρχίζουν να φανερώνονται με κόπο και μόχθο. Οξύνεται λοιπόν η προσοχή και η παρατηρητικότητα. Σε οποιοδήποτε αναρωτηθεί «μήπως μου ξεφεύγει κάτι;» η απάντηση είναι παντού και πάντοτε, «πολλά». Το να μην το θέτεις ή να το αποφεύγεις ή να απαντάς πρόχειρα στο προηγούμενο ερώτημα είναι εντελώς έξω από την παιδαγωγική της Γεωμετρίας.

Το δεύτερο είναι η παντοδυναμία της λεπτομέρειας, δηλαδή της ακρίβειας της σκέψης. Το να παράγεις έργο σημαίνει να ασχοληθείς με λεπτομέρειες. Στη Γεωμετρία αυτό υλοποιείται με τις ασκήσεις. Οι προθέσεις, τα οράματα, οι γενικότητες, είναι κενές περιεχομένου όταν δεν είναι απόσταγμα του οίνου των λεπτομερειών. Οι γενικότητες είναι χαρακτηριστικό της ρητορείας, της τέχνης των λόγων. Δεν είναι ασύνδετα φαινόμενα η εξαφάνιση της γεωμετρίας από τα σχολεία και η επικράτηση της ρητορικής και της πολιτικολογίας.

Το τρίτο και μέγιστο είναι αυτή η ουσία της σκέψης, αλλά και του χαρακτήρα του ανθρώπου, η συνέπεια. Τα Μαθηματικά και πιο παραστατικά και παιδαγωγικά, λόγω των σχημάτων, η Γεωμετρία, είναι ο μεγάλος δάσκαλος της συνέπειας. Ξεκινάς από ορισμένες αρχές (αξιώματα) και κτίζεις, πρακτικά επ' άπειρον, χωρίς ποτέ να παρεκκλίνεις από αυτές και τους απλούς κανόνες της λογικής. Έτσι το έργο είναι πάντοτε προσθετικό. Όλο κάτι προστίθεται σε ένα οικοδόμημα απόλυτου κύρους, που δεν έχει τίποτε να κάνει με τις προχειρότητες και τα προϊόντα κανόνων που αλλάζουν κάθε τόσο. Συχνά ο άνθρωπος, για να ικανοποιήσει τις επιθυμίες του, αλλάζει αυθαίρετα τους κανόνες του παιχνιδιού. Δημιουργεί έτσι μια κουλτούρα στην οποία είναι άλλοτε θύτης, όταν αυθαιρετεί ο ίδιος, και άλλοτε θύμα, όταν πλήττεται από αλλότριες αυθαιρεσίες. Παράγεται έτσι ένα έργο, άλλοτε προσθετικό, άλλοτε αρνητικό, αναιρετικό του προηγθέντος έργου. Αυτή είναι η ευρέως διαδεδομένη κουλτούρα της μη-σκέψης, γιατί η σκέψη σχεδόν ταυτίζεται με το Μαθηματικό πρότυπο, την ανακάλυψη το σεβασμό και την τήρηση κανόνων.

Το τέταρτο και εξαιρετικά κρίσιμο είναι η γνωριμία με το γενικότατο πρόβλημα της γνώσης, την



ισορροπία ανάμεσα στην ποσότητα και την ποιότητα. Καθώς χτίζουμε τη γνώση στη Γεωμετρία, αποκτούμε με ιδιαίτερη ένταση και ενάργεια την αίσθηση της ενότητας, της απειρίας των σχέσεων των διαφόρων μερών και περιοχών της. Προκύπτει εκεί ένα ζήτημα προσέγγισης, ένα ζήτημα ψυχολογίας και φιλοσοφίας. Πως προσεγγίζεις αυτή την ολότητα, το σώμα γνώσεων; Το θέμα είναι κρίσιμο και τίθεται από τη νεαρή ηλικία. Μια σωστή ή λάθος στάση θεμελιώνει την εξέλιξη του μαθητή σε όλη του τη ζωή. Ένα μεγάλο μέρος της αποτυχίας στη γνώση οφείλεται στην παρανόηση για τη φύση της.

Αν δούμε την καθιερωμένη πρακτική, θα διαπιστώσουμε ότι η επικρατούσα στάση μοιάζει με αυτή του κυνηγού. Στοχεύεις τη γλώσσα, την ιστορία, τη φυσική, τη χημεία κ.λπ., μαθαίνεις τα περάσματα, τα κρίσιμα σημεία και πυροβολείς. Δυστυχώς όμως οι γνώσεις δεν είναι μπεκάτσες. Οποιοδήποτε γνωστικό αντικείμενο και αν θεωρήσουμε, δεν αποτελείται από μεμονωμένα στοιχεία. Δεν είναι ένα κοπάδι από πολλά συνηθισμένα, μαζί με κάποια σπάνια και κάποια εξωτικά, πουλιά. Είναι ένα σώμα σφιχτά δεμένο, συνεχές και συνεκτικό, που δέχεται ένα και μόνο τρόπο προσέγγισης, μέσω του συναισθήματος.

Δεν μπορείς να μάθεις κάτι που δεν το προσεγγίζεις με γνήσιο θετικό συναισθημα. Μοιάζει το γνωστικό αντικείμενο με το μουσικό όργανο και, όπως δεν μπορείς να «μάθεις» 10 μουσικά όργανα ταυτοχρόνως, έτσι δεν μπορείς να «μάθεις» και 10 γνωστικά αντικείμενα και μάλιστα, συχνά σε μια μάταιη προσπάθεια, να τα μάθεις ταυτόχρονα. Τα 10 όργανα μπορείς να τα «ψάξεις», να τα βγάλεις απ' τα κουτιά τους, να τα περιεργαστείς, να δοκιμάσεις τους ήχους τους. Πρέπει όμως να διαλέξεις και να εμβαθύνεις, να ασχοληθείς εντατικά με ένα, να εντρυφήσεις. Αυτή είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του σκεπτόμενου ανθρώπου. Μπορεί να εντρυφά, να βυθίζεται στο γνωστικό του αντικείμενο, όπως ο βιρτουόζος του μουσικού οργάνου βυθίζεται στη μουσική του και έτσι, μουσικός, όργανο και μουσική γίνονται ένα.

Αν θέλαμε να ορίσουμε τους γενικότατους στόχους της παιδείας, αυτός θα ήταν από τους πρώτους. Η ικανότητα της εντρυφήσης. Αυτή, παρόλο που αναπτύσσεται με μια νοητική διαδικασία, έχει βάση συναισθηματική. Ο δάσκαλος, στην καθημερινή πρακτική της τάξης, στο δημοτικό, στο γυμνάσιο, στο πανεπιστήμιο, συναντά ξανά και ξανά το ίδιο στερεότυπο πρόβλημα. Η αποτυχία του μαθητή δεν οφείλεται στην έλλειψη νοητικών δυνάμεων. Οφείλεται στην ελλιπή έως ανύπαρκτη συναισθηματική βάση για το αντικείμενο της μελέτης του. Η αποτυχία του δασκάλου δεν οφείλεται στο τι είπε και τι παρέλειψε, δεν οφείλεται στο αν κάλυψε την ύλη ή όχι. Οφείλεται στο ότι δεν αναγνώρισε τη σημασία της συναισθηματικής βάσης, δεν την ανέδειξε, δεν την καλλιέργησε.

Από αυτές λοιπόν τις ιδέες εμφορούμενος, προχωρώ στην πρότασή μου προσφέροντας την υποδομή για την οργάνωση μαθημάτων, απλών, όσο γίνεται πιο πολύ και όσο επιτρέπει το αντικείμενο. Εύχομαι ο καθηγητής, αλλά και ο φιλόπονος μαθητής, να διαβάσει το βιβλίο με την ίδια ευχαρίστηση και ακόμη περισσότερη από όση προσωπικά είχα την τύχη να απολαύσω επεξεργαζόμενος επί μακρό χρόνο το εξαίρετο υλικό. Το υλικό άριστο, διαχρονικό. Οι ατέλειες και τα λάθη δικά μου. Ευχαριστώ ιδιαίτερα τις συναδέλφους Γεωργία Αθανασάκη, Ιωάννα Γκαζάνη καθώς και το συνάδελφο Μανόλη Κατσοπρινάκη για πλήθος σφαλμάτων και βελτιώσεων που μου επεσήμαναν. Ευχαριστώ επίσης και το Δημήτρη Κοντοκόστα για τις πολυάριθμες παρεμβάσεις του στα πρώτα κεφάλαια του βιβλίου, καθώς και τους επιμελητές της εκδόσεως Ιωάννη Κωτσόπουλο και Ιωάννη Παπαδόγγονα, για την πολύτιμη βοήθειά τους στην εξάλειψη λαθών και την επισήμανση ατελειών στο κείμενο και τα σχήματα. Ευχαριστώ επίσης τους συναδέλφους Στυλιανό Νεγρεπόντη και Γεώργιο Στάμου για τα καλά τους λόγια και την ενθάρρυνση στο έργο μου και τον Αντώνη Τσολομούτη για τη δημιουργία της γραμματοσειράς «kerkis» που χρησιμοποιείται στο βιβλίο και τη βοήθειά του στο «latex». Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω το καταπληκτικό αυτό μελίσσι που λέγεται «Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης», που μου επέτρεψε να συμμετάσχω στο πρωτόγνωρο έργο που επιτελεί στα ελληνικά γράμματα.

Στο κείμενο έχω συμπεριλάβει όλες τις βιβλιογραφικές αναφορές που υπήρχαν εγκατεσπαρμένες στις σημειώσεις μου και χρησίμευαν για να ανατρέχω και συμπληρώνω το υλικό. Πιστεύω ότι θα είναι χρήσιμες και σε όσους θέλουν να εμβαθύνουν περισσότερο ή να κάνουν συγκρίσεις με άλλες πηγές. Πάντοτε έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να αναζητά κανείς και να συνομιλεί με πνεύματα εκλεκτά που προηγήθηκαν και δημιούργησαν πάνω στο υλικό της μελέτης του.

Κοιτάζοντας πίσω, στα χρόνια του σχολείου, που μυήθηκα στη Γεωμετρία από τους εκλεκτούς δασκάλους μου, όπως οι αείμνηστοι Παπαδημητρίου, Κανέλος [Kan76] και Μάγειρας, θέλω να σημειώσω, πως το βιβλίο δένει, ελπίζω επάξια, σε μια παράδοση που είχαμε, τότε, στον κλάδο και είχε καλλιεργηθεί μέσω της ισχυρής παρουσίας της Γεωμετρίας στη μέση εκπαίδευση. Πολλές ασκήσεις

του βιβλίου είναι από αυτές που γνώρισα στα συγγράμματα και τις σημειώσεις των δασκάλων που προανέφερα, καθώς και σε αυτά των Παπανικολάου [Παπ81], Ιωαννίδη [Ιωα68α], Πανάκη, Τσαούση [Τσα68β]. Αρκετές επίσης συνέλεξα από κλασικά συγγράμματα της Γεωμετρίας, όπως αυτά των Lalesco [Lal52], Legendre [Leg37], Lachlan [Lac93], Coxeter [Cox68], [CG67], Hadamard [Had05], το πασίγνωστο βιβλίο των Ιησουϊτών (F.G.M.) [M52], αλλά και άλλα, ων ουκ έστιν αριθμός.

Κλείνοντας τον πρόλογο θα αναφέρω, για τους ενδιαφερόμενους, ορισμένα βιβλία που περιέχουν ιστορικά θέματα για το αντικείμενο [Κατ13], [Cου80], [Ενε63], [Hea08], [Hea31], [Dan55], [Κνο93], [Boy91], [Coo40]. Κάποιες πρόσθετες αναφορές περιέχονται στις παλαιότερες σημειώσεις μου ([Πάμ89]).

Στη δεύτερη έκδοση του βιβλίου ο όγκος των σχημάτων και των ασκήσεων υπερδιπλασιάστηκε και προσετέθησαν θέματα, ώστε το βιβλίο να δίδει μια πληρέστερη εικόνα της σύγχρονης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η αύξηση του όγκου οδήγησε και στην παράλειψη του επιθέτου «έλασσον» της πρώτης έκδοσης. Εκτός από τις προσθήκες, έγιναν και πολυάριθμες διορθώσεις σφαλμάτων και αλλαγές ως προς τη διάρθρωση του υλικού αλλά και την επαναφορά των επιγραμμάτων, που είχαν παραληφθεί στην πρώτη έκδοση λόγω κάποιας εσφαλμένης επιφύλαξης για τον όγκο του βιβλίου. Ξεφυλλίζοντας την πρώτη έκδοση, ένιωσα ενοχή και το ισχυρό συναίσθημα ότι οι μικρές αυτές συνδέσεις με τις άλλες, μη μαθηματικές κατευθύνσεις του στοχασμού και τους δημιουργούς τους, είναι αναγκαίες και εξαιρετικά πολύτιμες για να πέφτουν θύματα τέτοιων επιφυλάξεων. Στις παλαιότερες σημειώσεις μου τις συνδέσεις αυτές συνήθιζα να τις παρεμβάλλω ακόμη και στη μέση μακροσκελών αποδείξεων ή μετά το τέλος μιας ωραίας απόδειξης. Είχα έτσι την αίσθηση ότι είμαι και 'γω μαθητής και μέλος της κοινότητας ενός αχρονικού και παγκόσμιου πανεπιστημίου, όπου μπορώ να ακούω, να ερωτώ, να συζητώ με τους σπουδαίους αυτούς δασκάλους όλων των περιοχών της γνώσης. Ίσως κάποιοι από τους αναγνώστες, τελικά, συγκρατήσουν στη μνήμη τους μερικά από τα πολλά σχήματα και κάποια από τα επιγράμματα. Είδος σχημάτων και αυτά εκείνης της «αθέατης γεωμετρίας» που λέει ο ποιητής.

---

## Κατάλογος Συμβόλων

---

$(AB\Gamma)$	Κύκλος διερχόμενος διά των σημείων $A, B, \Gamma$
$\kappa = (A, B, \Gamma, \Delta)$	Κύκλος διερχόμενος διά των σημείων $A, B, \Gamma, \Delta$
$X = (AB, \Gamma\Delta)$	Σημείο τομής $X$ των ευθειών $AB, \Gamma\Delta$
$(AB\Gamma\Delta)$	Διπλός λόγος $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B}$
$(A, B, \Gamma, \Delta)$	Αρμονική τετράδα συνευθειακών σημείων
$ AB $	Μήκος του $AB$
$\kappa(O, \rho)$	Κύκλος $\kappa$ κέντρου $O$ και ακτίνας $\rho$
$\kappa(O)$	Κύκλος $\kappa$ κέντρου $O$
$\kappa(\rho)$	Κύκλος $\kappa$ ακτίνας $\rho$
$O(\rho)$	Κύκλος κέντρου $O$ , ακτίνας $\rho$
$p(X)$ ή $p(X, \kappa)$ ή $p_\kappa(X)$	δύναμη σημείου $X$ ως προς κύκλο $\kappa$
$ AB\Gamma $	Μέτρο γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$
$O(A, B, \Gamma, \Delta)$	Δέσμη τεσσάρων ευθειών $OA, OB, OG, OD$
$Y = X(A, B)$	Το $Y$ είναι αρμονικό συζυγές του $X$ ως προς $A, B$
$\epsilon(AB\Gamma)$	Εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$
$\epsilon(AB\Gamma\dots)$	Εμβαδόν πολυγώνου $AB\Gamma\dots$
$\tau$	Ημιπερίμετρος τριγώνου
$\alpha, \beta, \gamma$	μέτρα των γωνιών τριγώνου $AB\Gamma$
$a, b, c$	μήκη πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$
$r, r_A, r_B, r_\Gamma$	ακτίνα εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου
$\frac{AB}{\Gamma\Delta}$	προσημασμένος λόγος τμημάτων ίδιας ευθείας
$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 0.61803398874989484820\dots$	Λόγος χρυσής τομής
$\mathbb{N}$	Σύνολο $\{1, 2, 3, \dots\}$ φυσικών αριθμών
$\mathbb{Z}$	Σύνολο ακεραίων (θετικών, αρνητικών, 0)
$\mathbb{Q}$	Σύνολο (σώμα) ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$	Σύνολο (σώμα) μιγαδικών αριθμών

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Οι βασικές έννοιες</b>	<b>1</b>
1.1	Αόριστες έννοιες, αξιώματα . . . . .	1
1.2	Ευθεία και ευθύγραμμο τμήμα . . . . .	3
1.3	Μήκος, απόσταση . . . . .	5
1.4	Γωνίες . . . . .	8
1.5	Γωνιών είδη . . . . .	11
1.6	Τρίγωνα . . . . .	13
1.7	Η ισότητα σχημάτων . . . . .	16
1.8	Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο . . . . .	18
1.9	Κριτήρια ισότητας τριγώνων . . . . .	20
1.10	Σχετικά μεγέθη γωνιών τριγώνου . . . . .	24
1.11	Η τριγωνική ανισότητα . . . . .	29
1.12	Η κάθετος από σημείο . . . . .	31
1.13	Η παράλληλος από σημείο . . . . .	33
1.14	Το άθροισμα γωνιών τριγώνου . . . . .	35
1.15	Το αξίωμα των παραλλήλων . . . . .	38
1.16	Συμμετρίες . . . . .	46
1.17	Λόγοι, αρμονικές τετράδες . . . . .	50
1.18	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Κύκλος και πολύγωνα</b>	<b>57</b>
2.1	Ο κύκλος, η διάμετρος, η χορδή . . . . .	57
2.2	Κύκλος και ευθεία . . . . .	61
2.3	Δύο κύκλοι . . . . .	64
2.4	Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη . . . . .	67
2.5	Παραλληλόγραμμα . . . . .	74
2.6	Τετράπλευρα . . . . .	77
2.7	Τα μέσα των πλευρών . . . . .	81
2.8	Οι διάμεσοι τριγώνου . . . . .	84
2.9	Το ορθογώνιο και το τετράγωνο . . . . .	88
2.10	Άλλα είδη τετραπλεύρων . . . . .	92
2.11	Πολύγωνα, κανονικά πολύγωνα . . . . .	95
2.12	Τόξα, επίκεντρες γωνίες . . . . .	101
2.13	Εγγεγραμμένες γωνίες . . . . .	104
2.14	Εγγεγραμμένα τετράπλευρα . . . . .	114
2.15	Περιγεγραμμένα τετράπλευρα . . . . .	119
2.16	Γεωμετρικοί τόποι . . . . .	121
2.17	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	124
<b>3</b>	<b>Εμβαδά, Θαλής, Πάππος, Πυθαγόρας</b>	<b>137</b>
3.1	Εμβαδόν πολυγώνων . . . . .	137
3.2	Το εμβαδόν του ορθογωνίου . . . . .	139
3.3	Εμβαδόν παραλληλογράμμου και τριγώνου . . . . .	142
3.4	Πυθαγόρας και Πάππος . . . . .	149

3.5	Όμοια ορθογώνια τρίγωνα . . . . .	156
3.6	Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . . .	162
3.7	Το θεώρημα του Θαλή . . . . .	168
3.8	Δέσμες ευθειών . . . . .	173
3.9	Όμοια τρίγωνα . . . . .	181
3.10	Όμοια πολύγωνα . . . . .	188
3.11	Θεωρήματα ημιτόνου και συνημιτόνου . . . . .	196
3.12	Stewart, διάμεσοι, διχοτόμοι, ύψη . . . . .	204
3.13	Αντιπαράλληλες, συμμετροδιάμεσοι . . . . .	211
3.14	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	216
<b>4</b>	<b>Η δύναμη του κύκλου</b> . . . . .	<b>237</b>
4.1	Δύναμη ως προς κύκλο . . . . .	237
4.2	Χρυσή τομή, κανονικό πεντάγωνο . . . . .	241
4.3	Ριζικός άξονας, ριζικό κέντρο . . . . .	245
4.4	Οι κύκλοι του Απολλώνιου . . . . .	249
4.5	Δέσμες κύκλων . . . . .	254
4.6	Ορθογώνιοι κύκλοι και δέσμες . . . . .	263
4.7	Κέντρα ομοιότητας δύο κύκλων . . . . .	269
4.8	Αντιστροφή . . . . .	275
4.9	Πολική και πόλος . . . . .	285
4.10	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	290
<b>5</b>	<b>Από τα κλασικά θεωρήματα</b> . . . . .	<b>315</b>
5.1	Παρεγγεγραμμένοι και έκκεντρα . . . . .	315
5.2	Ο Τύπος του Ήρωνα . . . . .	320
5.3	Κύκλος του Euler . . . . .	322
5.4	Θεώρημα του Feuerbach . . . . .	326
5.5	Θεώρημα του Euler . . . . .	328
5.6	Εφαπτόμενοι κύκλοι του Απολλώνιου . . . . .	333
5.7	Θεωρήματα Πτολεμαίου και Brahmagupta . . . . .	338
5.8	Οι ευθείες του Simson και του Steiner . . . . .	345
5.9	Σημείο του Miquel, ποδικό τρίγωνο . . . . .	349
5.10	Άρβηλος, αλυσίδες του Steiner . . . . .	356
5.11	Sangaku . . . . .	361
5.12	Θεωρήματα των Fermat και Fagnano . . . . .	365
5.13	Θεώρημα του Morley . . . . .	369
5.14	Προσημασμένος λόγος και απόσταση . . . . .	371
5.15	Διπλός λόγος, αρμονικές δέσμες . . . . .	378
5.16	Θεωρήματα του Μενελάου και του Ceva . . . . .	384
5.17	Το πλήρες τετράπλευρο . . . . .	393
5.18	Θεώρημα του Desargues . . . . .	399
5.19	Θεώρημα του Πάππου . . . . .	402
5.20	Θεωρήματα του Pascal και του Brianchon . . . . .	406
5.21	Πρόβλημα του Castillon, ομογραφικές σχέσεις . . . . .	413
5.22	Πρόβλημα του Malfatti . . . . .	420
5.23	Το τρίγωνο του Calabi . . . . .	423
5.24	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	426
<b>6</b>	<b>Κύκλου μέτρηση</b> . . . . .	<b>447</b>
6.1	Οι δυσκολίες, το όριο . . . . .	447
6.2	Ορισμός της περιμέτρου του κύκλου . . . . .	451
6.3	Ο αριθμός $\pi$ . . . . .	453
6.4	Το μήκος τόξου του κύκλου, ακτίνια . . . . .	455
6.5	Ορισμός του εμβαδού του κύκλου . . . . .	457

6.6	Το εμβαδόν κυκλικού τομέα . . . . .	461
6.7	Η ισοπεριμετρική ανισότητα . . . . .	465
6.8	Ανθυφαίρεση . . . . .	469
6.9	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	472
<b>7</b>	<b>Μετασχηματισμοί του επιπέδου</b>	<b>479</b>
7.1	Μετασχηματισμοί, ισομετρίες . . . . .	479
7.2	Κατοπτρισμοί ή ανακλάσεις . . . . .	482
7.3	Μεταφορές . . . . .	485
7.4	Στροφές . . . . .	491
7.5	Ισότητα . . . . .	496
7.6	Ομοιοθεσίες . . . . .	499
7.7	Ομοιότητες . . . . .	502
7.8	Αντιστροφές . . . . .	511
7.9	Το υπερβολικό επίπεδο . . . . .	513
7.10	Αρχιμήδειες πλακοστρώσεις . . . . .	523
7.11	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	531
<b>8</b>	<b>Ευθείες και επίπεδα στο χώρο</b>	<b>539</b>
8.1	Αξιώματα για το χώρο . . . . .	539
8.2	Παράλληλα επίπεδα . . . . .	544
8.3	Γωνίες στο χώρο . . . . .	546
8.4	Ασύμβατες ευθείες . . . . .	549
8.5	Ευθεία κάθετη σε επίπεδο . . . . .	550
8.6	Γωνία ευθείας και επιπέδου . . . . .	557
8.7	Θεώρημα του Θαλή στο χώρο . . . . .	558
8.8	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	562
<b>9</b>	<b>Στερεά</b>	<b>565</b>
9.1	Διέδρες γωνίες . . . . .	565
9.2	Τριέδρες γωνίες . . . . .	569
9.3	Πυραμίδες, πολυεδρικές γωνίες . . . . .	577
9.4	Τετράεδρα . . . . .	579
9.5	Κανονικές πυραμίδες . . . . .	582
9.6	Πολύεδρα, Πλατωνικά σώματα . . . . .	585
9.7	Πρίσματα . . . . .	589
9.8	Κύλινδρος . . . . .	593
9.9	Κώνος, κωνική επιφάνεια . . . . .	595
9.10	Κόλουρος κώνος, ανάπτυγμα κώνου . . . . .	599
9.11	Σφαίρα . . . . .	602
9.12	Σφαιρικά και περιγεγραμμένα πολύεδρα . . . . .	609
9.13	Άτρακτος, γωνία μεγίστων κύκλων . . . . .	611
9.14	Σφαιρικά τρίγωνα . . . . .	612
9.15	Η παραπληρωματική τριέδρος . . . . .	615
9.16	Αξονομετρική προβολή, ομοπαράλληλιες . . . . .	620
9.17	Προοπτική προβολή . . . . .	625
9.18	Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	628
<b>10</b>	<b>Εμβαδά στο χώρο, όγκοι</b>	<b>639</b>
10.1	Εμβαδά στο χώρο . . . . .	639
10.2	Εμβαδόν της σφαίρας . . . . .	645
10.3	Εμβαδόν σφαιρικών πολυγώνων . . . . .	648
10.4	Χαρακτηριστική του Euler . . . . .	651
10.5	Όγκοι . . . . .	653
10.6	Όγκοι πρισμάτων . . . . .	656

10.7 Όγκοι πυραμίδων . . . . .	659
10.8 Όγκοι κυλίνδρων . . . . .	665
10.9 Όγκοι κώνων . . . . .	666
10.10 Όγκος της σφαίρας . . . . .	668
10.11 Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	675
<b>11 Κωνικές τομές</b>	<b>681</b>
11.1 Κωνικές τομές . . . . .	681
11.2 Οι σφαίρες του Dandelin . . . . .	684
11.3 Διευθετούσες . . . . .	687
11.4 Γενικά χαρακτηριστικά κωνικών . . . . .	694
11.5 Η παραβολή . . . . .	702
11.6 Η έλλειψη . . . . .	709
11.7 Η υπερβολή . . . . .	718
11.8 Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου . . . . .	727
<b>12 Μετασχηματισμοί του χώρου</b>	<b>741</b>
12.1 Ισομετρίες του χώρου . . . . .	741
12.2 Κατοπτρισμοί του χώρου . . . . .	743
12.3 Μεταφορές του χώρου . . . . .	746
12.4 Στροφές του χώρου . . . . .	747
12.5 Η ισότητα στο χώρο . . . . .	750
12.6 Ομοιοθεσίες του χώρου . . . . .	756
12.7 Ομοιότητες του χώρου . . . . .	757
12.8 Αρχιμήδεια στερεά . . . . .	759
12.9 Επίλογος . . . . .	766
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>769</b>
<b>Ευρετήριο</b>	<b>781</b>
Ευρετήριο ελληνικών όρων . . . . .	781
Ευρετήριο ξενόγλωσσων όρων . . . . .	789





## 1.1 Αόριστες έννοιες, αξιώματα

Αυτό ισχύει ακόμη και για το ίδιο μας το εγώ: το αντιλαμβανόμαστε μόνον ως εκδήλωση, όχι ως κάτι που μπορεί να υπάρξει καθ' εαυτό.

*Thomas Mann, Schopenhauer*

Οι έννοιες, τουλάχιστον οι μαθηματικές, είναι σαν τις μορφές ύλης, που διασπώνται σε μέρη, αυτά σε άτομα που με τη σειρά τους διασπώνται στα στοιχειώδη σωματίδια κ.λπ. Στη γεωμετρία η διάσπαση σε ολοένα απλούστερες έννοιες καταλήγει στις λεγόμενες **αόριστες έννοιες**. Έννοιες που είναι τόσο απλές και οικείες από την εμπειρία μας, ώστε δεν μπορούμε να βρούμε πιο απλές με τη βοήθεια των οποίων να τις περιγράψουμε ([Hel76]). Τέτοιες έννοιες στην Γεωμετρία είναι το **σημείο**, το **επίπεδο**, ο **χώρος**, η **ευθεία**, η έννοια του σημείου **μεταξύ** δύο άλλων σημείων και η έννοια της **ισότητας** δύο **σχημάτων**.

Μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αυτές τις έννοιες βάσει των **ιδιοτήτων** τους ή **αξιωμάτων** που περιγράφουν κάποια χαρακτηριστικά τους και τα οποία *αποδεχόμεθα χωρίς απόδειξη*. Ξεκινάμε λοιπόν με τις αόριστες έννοιες. Περιγράφουμε τις βασικές ιδιότητες τους με αξιώματα και από 'κει και πέρα, συνδυάζοντας τις βασικές ιδιότητες με τη λογική, συμπεραίνουμε άλλες ιδιότητες, τα θεωρήματα ή προτάσεις και τα πορίσματα (άμεσες λογικές συνέπειες των θεωρημάτων). Τα μέχρι ενός σημείου αποδειχθέντα θεωρήματα μαζί με τα αξιώματα, χρησιμοποιούνται για να συμπεράνουμε νέες ιδιότητες, δηλαδή νέα θεωρήματα.

Με τον τρόπο αυτό χτίζουμε σιγά-σιγά ένα καλά οργανωμένο και δομημένο πνευματικό οικοδόμημα που συγκροτεί τη γνώση μας στην Γεωμετρία. Εάν σε κάποιο σημείο κάνουμε μια παραδοχή λ.χ.  $A = B$  και, στηριζόμενοι στη λογική, καταλήξουμε ότι αυτό οδηγεί σε αντίφαση προς κάποιο αξίωμα ή εν τω μεταξύ αποδειχθέν θεώρημα, τότε λέμε ότι η υπόθεσή μας οδηγεί σε άτοπο και είμαστε υποχρεωμένοι να δεχθούμε ότι ισχύει η λογική άρνηση της ιδιότητας (στο παράδειγμα  $A \neq B$ ). Η μέθοδος αυτή του συλλογισμού λέγεται **εις άτοπον απαγωγή** και χρησιμοποιείται κατά κόρον στην γεωμετρία.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία εξετάζει τις ιδιότητες σχημάτων στο χώρο και το επίπεδο και κυρίως αυτές που σχετίζονται με μετρήσεις. Ως **σχήμα** θεωρούμε οποιαδήποτε συλλογή σημείων του επιπέδου (επίπεδο σχήμα) ή του χώρου (σχήμα στο χώρο). Μετράμε μήκη, γωνίες και εμβαδά. Στο χώρο μετράμε και όγκους. Συνήθως το μάθημα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, που ονομάζεται **επιπεδομετρία**, εξετάζονται ιδιότητες σχημάτων του επιπέδου, όπως το τρίγωνο, το τετράγωνο, ο κύκλος κ.λπ. Στο δεύτερο μέρος, που ονομάζεται **στερεομετρία**, εξετάζονται ιδιότητες των σχημάτων του χώρου,

όπως η πυραμίδα, ο κύβος, ο κύλινδρος, η σφαίρα κ.λπ.

**Σχόλιο-1** Τα αξιώματα που θα επιλέξουμε, ως βασικές ιδιότητες και σημείο εκκίνησης της μελέτης μας, δεν είναι πραγματικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ορισμένα από αυτά είναι συνέπειες των άλλων. Επομένως, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με λιγότερα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά επαρκή για να αποδείξουμε όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες ως θεωρήματα. Αυτό ωστόσο θα είχε τη συνέπεια να χρονοτριβήσουμε σε πολύ απλές ιδιότητες, αποδεικνυόντάς τις και αυτές ως συνέπειες των λίγων αξιωμάτων μας.

Προτίμησα λοιπόν να ενσωματώσω κάποιες από αυτές τις ιδιότητες στα αξιώματα, με τη φιλοσοφία ότι η αποκάλυψη πιο κρυφών ιδιοτήτων δημιουργεί περισσότερο ενδιαφέρον από την επιβεβαίωση των προφανών. Για μια διαφορετική πορεία, όπου εξετάζεται λεπτομερώς το θέμα των αξιωμάτων, μπορεί κανείς να δει το πολύ γνωστό βιβλίο [Hil03] του Hilbert 1862-1943, που είναι αφιερωμένο εξ ολοκλήρου στη συζήτηση των αξιωμάτων, την ανεξαρτησία τους και τη μεταξύ τους μη-αντιφατικότητα. Από αυτό το βιβλίο προέρχονται και τα περισσότερα των αξιωμάτων της ευθείας που διατυπώνω παρακάτω. Αντικαθιστώ ωστόσο μερικά από αυτά με αξιώματα από το σύστημα του Birkhoff 1884-1944 ([Bir32]), που εξασφαλίζουν το ότι οι ευθείες είναι, στην ουσία, αντίγραφα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Ας σημειωθεί πάντως, ότι η θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορεί να γίνει και με πολύ λίγα αξιώματα. Ο Hilbert, στο προαναφερθέν βιβλίο του, καθώς και ο Cairns 1904-1982 ([Cai33]), δίδουν συστήματα με τέσσερα μόνον αξιώματα. Ο Bachmann 1909-1982 ([Bac73]) δίδει ένα σύστημα πέντε αξιωμάτων. Σε όλα αυτά τα συστήματα όμως υπεισέρχονται πιο σύνθετες μαθηματικές δομές (τοπολογικοί χώροι, μετασχηματισμοί, ομάδες κ.α.).

**Σχόλιο-2** Τα στοιχεία του Ευκλείδη (περίπου 325-265 π.Χ.) ([Hei85], [Hea08]) αρχίζουν με την παράθεση 23 ορισμών οι 4 πρώτοι εκ των οποίων και ο τελευταίος είναι οι εξής:

- (1) Σημείον ἔστιν, οὐ μέρος οὐθέν.
- (2) Γραμμὴ δε μήκος απλατές.
- (3) Γραμμῆς δε πέρατα σημεία.
- (4) Ευθεία γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις κείται.

... ..

- (23) Παράλληλοι εἰσὶν ευθείαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὐσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μῆδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αμέσως μετά τους 23 ορισμούς ακολουθούν τα **5 Αιτήματα**, που εμείς ονομάζουμε αξιώματα:

1. Ηιτήσθω ἀπὸ παντός σημείου ἐπὶ παν σημείον ευθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην ευθείαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' ευθείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλας εἶναι.
5. Καὶ ἐάν εἰς δύο ευθείας ευθεία ἐμπίπτουσα τὰς ἐνὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο ευθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αὐτῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Στους ορισμούς αυτούς περιέχονται, τόσο έννοιες που εμείς περιγράψαμε ως *ἀόριστες* (1,2,4), όσο και κανονικοί ορισμοί, όπως τους δίνουμε και σήμερα (3,23). Τα πέντε αξιώματα του Ευκλείδη δυστυχώς δεν επαρκούν για την απόδειξη όλων των προτάσεων που ακολουθούν στο βιβλίο του. Συχνά χρησιμοποιεί κάποιες ιδιότητες που δεν προκύπτουν από τα πέντε αυτά αξιώματα, που είναι όμως σωστές. Απλά χρειάζεται η προσθήκη και άλλων αξιωμάτων, ώστε να προκύψει αυτό που σήμερα λέμε *πλήρες σύστημα αξιωμάτων*, το οποίο είναι ικανό να στηρίξει τις αποδείξεις όλων των ιδιοτήτων των σχημάτων που ανακαλύπτουμε και να τις βάλει σε μια λογική σειρά ([You17, σ. 36]).

Σχετικά με το λίγο χρόνο που αναλύει ο Ευκλείδης στους ορισμούς και τα αξιώματα συμφωνώ, γιατί κατ' επανάληψιν έχω παρατηρήσει ότι όταν ο μαθητής πολιορκείται με διασαφήσεις και ανάλυση λεπτομερειών για έννοιες των οποίων έχει μια φυσική διαίσθηση, τότε αρχίζει να αμφιβάλλει και για αυτά που ήξερε και να μπερδεύεται περισσότερο, αντί να φωτίζεται. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή, ώστε

περισσότερο να ενισχυθεί η φυσική του διαίσθηση για αυτά που καταλαβαίνει με κάποιο τρόπο, παρά να αμφισβητηθεί η διαίσθησή του και οι προηγούμενες εμπειρικές γνώσεις του.

Ακολουθώντας λοιπόν τον Ευκλείδη, δεν θα σταθώ ιδιαίτερα στις αόριστες έννοιες και τα αξιώματα ([You17, σ. 165], [Log80]). Θα δώσω ένα σύστημα πλήρες, ικανό να στηρίξει όλες τις μετέπειτα προτάσεις μας και θεωρήματα. Εμπιστευόμενος, ωστόσο, τη διαίσθηση του αναγνώστη, δεν θα συζητήσω ιδιαίτερα τις αλληλεξαρτήσεις των αξιωμάτων αυτών και τις αόριστες έννοιες στις οποίες αυτά αναφέρονται.

## 1.2 Ευθεία και ευθύγραμμο τμήμα

Η ευθεία γραμμή είναι κατηγορημα του απείρου. Επίσης ο άνθρωπος που προαισθάνεται το άπειρο το αναπαράγει στα έργα του.

*Honore de Balzac, Η Ανθρώπινη Κωμωδία*

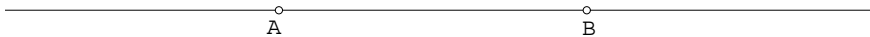
Το επίπεδο αποτελείται από **σημεία** που συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα  $A, B, \Gamma, \dots$  ή κεφαλαία με τόνους  $A', B', \Gamma', \dots$  ή κεφαλαία με δείκτες  $A_1, A_2, \dots$  κ.λπ. Το σημαντικότερο και ένα από τα πιο απλά σχήματα του επιπέδου είναι η **ευθεία** που συμβολίζουμε με μικρά γράμματα  $\varepsilon, \zeta, \eta, \dots$  ή

$\varepsilon$

Σχήμα 1.2.1: Ευθεία  $\varepsilon$

γράμματα με τόνους  $\varepsilon', \zeta', \dots$  ή γράμματα με δείκτες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  κ.λπ. Για τις ευθείες δεχόμαστε τις εξής αρχικές ιδιότητες (αξιώματα).

**Αξίωμα 1.2.1** Δύο διαφορετικά σημεία  $A, B$  ορίζουν μία ακριβώς ευθεία που συμβολίζουμε με  $AB$ .



Σχήμα 1.2.2: Ευθεία  $AB$

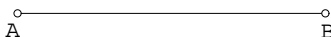
**Αξίωμα 1.2.2** Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία. Για κάθε ευθεία υπάρχουν άπειρα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε αυτήν. Για κάθε σημείο υπάρχουν άπειρες ευθείες που δεν διέρχονται από αυτό.

**Αξίωμα 1.2.3** Κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη που λέγονται **ημιεπίπεδα**, τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία με την ευθεία. Μία ευθεία που έχει δύο σημεία  $A$  και  $B$  σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας  $\varepsilon$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  (το πρώτο θεώρημα παρακάτω λέει ότι υπάρχει τότε ένα ακριβώς σημείο τομής της  $\varepsilon$  με την ευθεία  $AB$ ). Συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη **μεριά** της ευθείας, εννοώντας ένα από τα δύο ημιεπίπεδα αυτής.



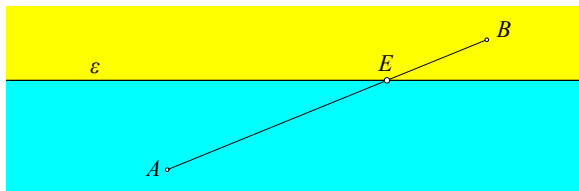
Σχήμα 1.2.3: Ημιεπίπεδα οριζόμενα από μία ευθεία

**Αξίωμα 1.2.4** Δύο σημεία  $A, B$  μιας ευθείας  $\varepsilon$  ορίζουν ένα **ευθύγραμμο τμήμα** που συμβολίζουμε επίσης με  $AB$ . Το  $AB$  αποτελείται από τα  $A, B$  καθώς και όλα τα σημεία που ευρίσκονται **μεταξύ** του  $A$  και του  $B$ . Τα  $A$  και  $B$  λέγονται **άκρα** του ευθυγράμμου τμήματος. Τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος, εκτός των άκρων, λέμε ότι αποτελούν το **εσωτερικό** του ευθυγράμμου τμήματος. Τα υπόλοιπα σημεία της ευθείας  $AB$ , εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , λέμε ότι αποτελούν το **εξωτερικό** του ευθυγράμμου τμήματος.



Σχήμα 1.2.4: Ευθύγραμμο τμήμα  $AB$

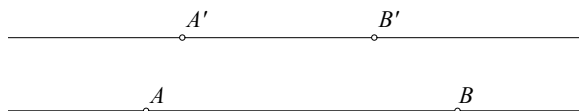
**Αξίωμα 1.2.5** Αν τα σημεία  $A$  και  $B$  ευρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας  $\varepsilon$ , τότε και όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Αν τα σημεία  $A$  και  $B$  ευρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας  $\varepsilon$ , τότε το σημείο τομής  $E$  της ευθείας  $\varepsilon$  και της ευθείας  $AB$  ευρίσκεται μεταξύ των  $A$  και  $B$ .



Σχήμα 1.2.5:  $A$  και  $B$  σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της  $\varepsilon$

**Σχόλιο-1** Στο Αξίωμα 1.2.4 η λέξη **μεταξύ** είναι αόριστη. Θα γίνει σαφής όμως στην επόμενη παράγραφο με τη βοήθεια της έννοιας του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος.

**Σχόλιο-2** Η χρήση του ίδιου συμβόλου  $AB$  για το ευθύγραμμο τμήμα καθώς και την ευθεία που ορίζεται από τα  $A$  και  $B$  δεν πρέπει να μας παραπλανά. Κάθε φορά η σημασία του συμβόλου θα προκύπτει από τα συμφραζόμενα. Συχνά θα γράφουμε για την ευθεία  $\varepsilon = AB$ , θεωρώντας ότι αυτό το σύμβολο αντιπροσωπεύει τη φράση **η ευθεία  $\varepsilon$  που ορίζεται από τα σημεία  $A$  και  $B$** . Συχνά επίσης θα θεωρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  καθορίζει μια **κατεύθυνση** επί της ευθείας  $AB$  και ότι το  $A$  είναι η **αρχή** και το  $B$  είναι το **πέρασ** (ή τέλος) του τμήματος  $AB$ .

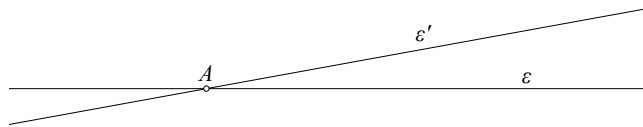


Σχήμα 1.2.6: Παράλληλες  $AB$  και  $A'B'$

**Παράλληλες** ονομάζουμε δύο ευθείες που δεν τέμνονται. Συχνά την ευθεία, στην οποία περιέχεται ένα ευθύγραμμο τμήμα, ονομάζουμε **φορέα** του ευθυγράμμου τμήματος. **Παράλληλα** λέμε δύο ευθύγραμμα τμήματα των οποίων οι φορείς είναι ευθείες παράλληλες. **Τέμνουσα** της ευθείας  $\varepsilon$  λέμε μία ευθεία  $\varepsilon'$ , διαφορετική της  $\varepsilon$ , που τέμνει την  $\varepsilon$ .

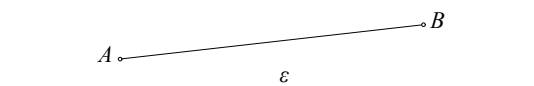
**Πρόταση 1.2.1** Δύο διαφορετικές ευθείες ή είναι παράλληλες ή τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

**Απόδειξη:** Στην Πρόταση 1.13.1 θα δούμε ότι υπάρχουν όντως παράλληλες ευθείες. Αν οι δύο ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  δεν τέμνονται, τότε είναι εξ ορισμού παράλληλες. Αν τέμνονται, τότε θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο  $A$ . Τούτο διότι, αν είχαν και δεύτερο σημείο τομής  $B$ , διαφορετικό του  $A$ , θα είχαμε δύο

Σχήμα 1.2.7: Τεμνόμενες ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$ 

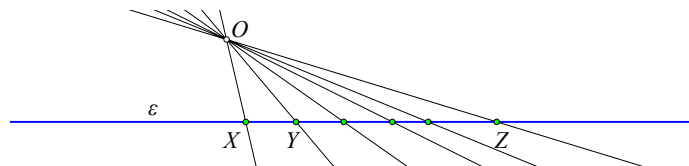
διαφορετικές ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  διερχόμενες από τα δύο σημεία  $A$  και  $B$ , που είναι αδύνατον διότι αντιφάσκει στο Αξίωμα 1.2.1, ο.ε.δ.

**Άσκηση 1.2.1** Δίδεται ευθεία  $\varepsilon$ . Δείξε ότι, αν το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  δεν τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$ , τότε τα σημεία  $A$  και  $B$  περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Σχήμα 1.2.8:  $A, B$  από την ίδια μεριά της  $\varepsilon$ 

*Υπόδειξη:* Χρήση της εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε ότι το  $AB$  δεν τέμνει την  $\varepsilon$  και τα  $A, B$  περιέχονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της  $\varepsilon$ . Τότε, κατά το Αξίωμα 1.2.5, το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  θα τέμνει την  $\varepsilon$  σε ένα σημείο  $E$ , αντιφάσκοντας στην υπόθεση.

**Άσκηση 1.2.2** Δείξε ότι για κάθε σημείο  $O$  του επιπέδου υπάρχουν άπειρες ευθείες διερχόμενες από αυτό.

Σχήμα 1.2.9: Απειρία ευθειών δια του  $O$ 

*Υπόδειξη:* Θεώρησε μία ευθεία  $\varepsilon$  που δεν διέρχεται από το  $O$ . Κατά το Αξίωμα 1.2.2, υπάρχει μία τέτοια ευθεία. Όρισε κατόπιν τις ευθείες  $OX, OY, \dots$  κ.λπ. που διέρχονται από το  $O$  και ένα σημείο αντίστοιχα  $X, Y, \dots, Z$  της  $\varepsilon$ . Και πάλι κατά το Αξίωμα 1.2.2, υπάρχουν άπειρα σημεία  $X, Y, \dots, Z$  επί της  $\varepsilon$  και κάθε ένα από αυτά ορίζει μια διαφορετική ευθεία που διέρχεται από το  $O$ .

### 1.3 Μήκος, απόσταση

Μίλησα στην αρχή για ορισμούς. Για να τελειώσω, θα ήθελα να πω ότι κάνουμε ένα πολύ συνηθισμένο λάθος, όταν θεωρούμε πως δεν γνωρίζουμε κάτι επειδή δεν είμαστε ικανοί να το ορίσουμε.

*Jorge Luis Borges, Η τέχνη του στίχου*

Τα αξιώματα αυτής της παραγράφου συνδέουν τις ευθείες με τους **πραγματικούς αριθμούς** μέσω της έννοιας της *απόστασης* δύο σημείων, αποσαφηνίζουν την έννοια του *σημείου μεταξύ δύο άσπλων σημείων*, καθώς και την έννοια του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , που αποτελείται από όλα τα σημεία μεταξύ των  $A, B$ .

**Αξίωμα 1.3.1** Για κάθε ζεύγος σημείων  $A$  και  $B$  ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός  $|AB| \geq 0$  που ονομάζουμε **απόσταση** των σημείων και ικανοποιεί τις ιδιότητες  $|AB| = |BA|$  και  $|AB| = 0$  τότε και μόνου, όταν τα σημεία αυτά ταυτίζονται.

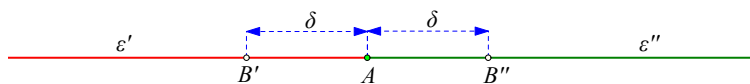


Σχήμα 1.3.1:  $|AB| = |AE| + |EB|$

Δοθέντων δύο σημείων  $A$  και  $B$ , λέμε ότι το σημείο  $E$  ευρίσκεται **μεταξύ** των ή **ανάμεσα** στα  $A$  και  $B$  (Σχήμα 1.3.1), όταν περιέχεται στην ευθεία των  $A$ ,  $B$  και ισχύει

$$|AE| + |EB| = |AB|.$$

**Αξίωμα 1.3.2** Για κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων  $A$ ,  $B$  και  $E$  της ίδιας ευθείας, ένα εκ των τριών είναι ανάμεσα στα άλλα δύο. Αν το  $E$  είναι μεταξύ των  $A$  και  $B$ , τότε  $|AB| = |AE| + |EB|$ . Και αντίστροφα, αν ισχύει αυτή η σχέση, τότε το  $E$  είναι μεταξύ των  $A$  και  $B$ .



Σχήμα 1.3.2: Σημεία σε απόσταση  $\delta$  από το άκρο αντικειμένων ημιευθειών

**Αξίωμα 1.3.3** Ένα σημείο  $A$  ευθείας  $\varepsilon$  χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη  $\varepsilon'$  και  $\varepsilon''$  που έχουν μοναδικό κοινό σημείο το  $A$  και λέγονται **ημιευθείες με άκρο ή αρχή** το  $A$ . Για κάθε θετικό αριθμό  $\delta$  υπάρχει ένα ακριβώς σημείο  $B'$  στην  $\varepsilon'$  με  $|B'A| = \delta$  και ένα ακριβώς σημείο  $B''$  στην  $\varepsilon''$  με  $|B''A| = \delta$ . Το  $A$  είναι το **μέσον** του ευθυγράμμου τμήματος  $B'B''$ .

Εάν τα σημεία  $A$ ,  $B'$  και  $B''$  περιέχονται στην ίδια ευθεία  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  συμβολίζουν τις ημιευθείες της  $\varepsilon$  με άκρο το  $A$ , λέμε ότι τα  $B'$ ,  $B''$  είναι σε **διαφορετικές μεριές** του  $A$  όταν το ένα περιέχεται στην  $\varepsilon'$  και το άλλο στην  $\varepsilon''$  (Σχήμα 1.3.2). Λέμε ότι τα  $B'$  και  $B''$  είναι από την **ίδια μεριά** του  $A$  όταν περιέχονται και τα δύο σε μία από τις  $\varepsilon'$  και  $\varepsilon''$ .

**Μήκος** του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ονομάζουμε την απόσταση  $|AB|$  των άκρων του. Λέμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $ΓΔ$  της ίδιας ευθείας ή διαφορετικών ευθειών είναι **ίσα** όταν έχουν το ίδιο μήκος.

Οι δύο ημιευθείες που ορίζονται από το σημείο  $A$  επί της ευθείας  $\varepsilon$  λέγονται **αντικείμενες. Παράλληλες** ονομάζουμε δύο ημιευθείες που περιέχονται σε παράλληλες ευθείες.

**Σχόλιο** Το Αξίωμα 1.3.3 των ευθειών σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα οποιουδήποτε μήκους θέλουμε. Η πρακτική κατασκευή λ.χ. περιορίζομενοι μόνο στα δύο όργανα σχεδίασης του κανόνα (χάρακα) και του διαβήτη, όπως συνηθίζεται, είναι ένα άλλο θέμα που θα μας απασχολήσει κατά καιρούς. Π.χ. η κατασκευή του μέσου  $M$  ενός δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη απαιτεί γνώση των ιδιοτήτων του κύκλου που δεν έχουμε μάθει ακόμη. Ωστόσο η απόδειξη της ύπαρξης του  $M$  βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων είναι απλή.

**Άσκηση 1.3.1** Έστω ότι  $B$  και  $E$  είναι δύο σημεία στην ίδια ημιευθεία  $AX$  με άκρο το  $A$ . Δείξε ότι η  $|AE| > |AB|$  συνεπάγεται ότι το  $B$  είναι μεταξύ των  $A$  και  $E$ . Και αντίστροφα, αν το  $B$  είναι ανάμεσα στο  $A$  και το  $E$ , τότε ισχύει η προηγούμενη σχέση.

Σχήμα 1.3.3: Το  $B$  ανάμεσα στο  $A$  και το  $E$ 

*Υπόδειξη:* Έστω ότι το  $B$  δεν είναι μεταξύ των  $A$  και  $E$ . Τότε ή το  $B$  θα ταυτίζεται με το  $E$  και συνεπώς,  $|AB| = |AE|$ , που είναι άτοπο, ή το  $E$  θα είναι μεταξύ των  $A$  και  $B$  οπότε, κατά το Αξίωμα 1.3.2, θα ισχύει  $|AE| + |EB| = |AB|$ . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι  $|AB| > |AE|$ , αντίθετα με την υπόθεση.

**Άσκηση 1.3.2** (Διπλασιασμός ευθυγράμμου τμήματος) Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Δείξε ότι στην ευθεία  $AB$  υπάρχουν δύο σημεία  $E$  και  $Z$  έτσι ώστε το  $B$  να είναι το μέσον του  $AE$  και το  $A$  να είναι το μέσον του  $ZB$ .

Σχήμα 1.3.4: Διπλασιασμός του  $AB$ 

*Υπόδειξη:* Πάρε το  $E$  επί της ημιευθείας με άκρο το  $B$  που δεν περιέχει το  $A$  και σε απόσταση  $|AB|$  από το  $B$ . Ανάλογα πράξε για το  $Z$ .

**Άσκηση 1.3.3** Δείξε ότι, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , υπάρχει ένα ακριβώς σημείο  $M$  (το μέσον του  $AB$ ) έτσι ώστε  $|AM| = |MB|$ .

*Υπόδειξη:* Αν  $|AB| = \lambda$ , τότε το σημείο  $M$  σε απόσταση  $\lambda/2$  από το  $A$  προς τη μεριά του  $B$ , που εξασφαλίζεται από το Αξίωμα 1.3.3, είναι το ζητούμενο.

**Άσκηση 1.3.4** Δείξε ότι, αν δύο σημεία  $A$  και  $B$  είναι από την ίδια μεριά ευθείας  $\varepsilon$ , τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  δεν τέμνει την  $\varepsilon$ .

*Υπόδειξη:* Αν το  $AB$  έτεμνε την  $\varepsilon$ , τότε το σημείο τομής  $\Gamma$  θα ήταν διαφορετικό των  $A$  και  $B$ , άρα θα ήταν μεταξύ αυτών και θα είχαμε αντίφαση στο Αξίωμα 1.2.5.

**Άσκηση 1.3.5** Δείξε ότι μία ευθεία  $\varepsilon'$  είναι παράλληλος της  $\varepsilon$  τότε και μόνον, όταν ένα εκ των δύο ημιεπιπέδων της  $\varepsilon$  περιέχει κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων της  $\varepsilon'$ .

*Υπόδειξη:* Αν υπάρχουν δύο σημεία  $A$  και  $B$  της  $\varepsilon'$  περιεχόμενα σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της  $\varepsilon$ , τότε κατά το Αξίωμα 1.2.5, η  $\varepsilon'$  θα τέμνει την  $\varepsilon$ . Αντίστροφα, αν ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της  $\varepsilon$  περιέχει όλα τα δυνατά ζεύγη σημείων της  $\varepsilon'$ , τότε αυτή δεν μπορεί να τέμνει την  $\varepsilon$ . Αν την έτεμνε στο σημείο  $A$ , τότε το  $A$  θα όριζε δύο αντικείμενες ημιευθείες επί της  $\varepsilon'$  και επιλέγοντας από ένα σημείο σε κάθε ημιευθεία θα βρίσκαμε δύο σημεία της  $\varepsilon'$  σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της  $\varepsilon$ .

**Άσκηση 1.3.6** Δείξε ότι τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  της ευθείας  $\varepsilon$  είναι από την ίδια μεριά του σημείου  $A$  της  $\varepsilon$ , τότε και μόνον, όταν  $|B\Gamma| = ||AB| - |A\Gamma||$ .

*Υπόδειξη:* Αν τα  $B, \Gamma$  είναι στην ίδια ημιευθεία του  $A$ , τότε ή το  $B$  θα είναι μεταξύ του  $A$  και  $\Gamma$ , οπότε  $|A\Gamma| = |AB| + |B\Gamma|$ , ή το  $\Gamma$  θα είναι μεταξύ των  $A$  και  $B$ , οπότε  $|AB| = |A\Gamma| + |\Gamma B|$ . Συνεπώς, και στις δύο περιπτώσεις  $|B\Gamma| = ||AB| - |A\Gamma||$ , δηλαδή το ζητούμενο. Παρόμοιος συλλογισμός αποδεικνύει και το αντίστροφο.

**Άσκηση 1.3.7** Έστω  $M$  το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ . Δείξε ότι, αν το σημείο  $\Gamma$  είναι στο εσωτερικό του  $AB$ , τότε η απόσταση  $|\Gamma M| = \frac{1}{2}||\Gamma A| - |\Gamma B||$ . Εάν το  $\Gamma$  είναι στην ευθεία  $AB$  αλλά εκτός του τμήματος  $AB$ , τότε  $|\Gamma M| = \frac{1}{2}(|\Gamma A| + |\Gamma B|)$ .

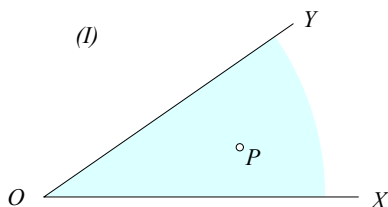


## 1.4 Γωνίες

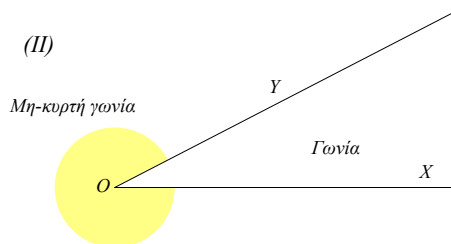
Είπε ο Διδάσκαλος: 'Όποιος δεν φλέγεται αγ' το ζήλο, δεν τον φωτίζω. 'Όποιος δεν πάσχει να εκφραστεί, δεν τον κατατοπίζω. Αν σε κάποιον αποκαλύψω τη μία γωνία και δεν μου επιστρέψει με τις άλλες τρεις, δεν του επαναλαμβάνω το μάθημα.

Κομφούκιος, Ανάλεκτα 7.8

Δύο ημιευθείες  $OX$ ,  $OY$  με κοινό άκρο  $O$  και μη-περιεχόμενες στην ίδια ευθεία, χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη και ορίζουν μία **κυρτή γωνία** ή απλά **γωνία** και μία **μη-κυρτή γωνία**. **Κυρτή γωνία**



Σχήμα 1.4.1: Γωνία  $\widehat{XOY}$



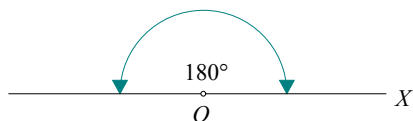
Μη-κυρτή γωνία  $\widehat{XOY}$

ή απλά **γωνία** λέγεται το σχήμα που συμβολίζουμε με  $\widehat{XOY}$  και αποτελείται από τις δύο ημιευθείες  $OX$  και  $OY$  μαζί με το ένα από τα δύο μέρη του επιπέδου που λέγεται εσωτερικό της γωνίας. Το **εσωτερικό** της γωνίας (Σχήμα 1.4.1-I) είναι το μέρος του επιπέδου που αποτελείται από τα σημεία  $P$  που ικανοποιούν τις δύο ιδιότητες:

1. το  $P$  και η ημιευθεία  $OY$  είναι από την ίδια μεριά της ευθείας  $OX$ ,
2. το  $P$  και η ημιευθεία  $OX$  είναι από την ίδια μεριά της ευθείας  $OY$ .

Το σημείο  $O$  λέγεται **κορυφή** της γωνίας. Οι ημιευθείες  $OX$ ,  $OY$  λέγονται **πλευρές της γωνίας**. **Μη-κυρτή γωνία** λέγεται το σχήμα που ορίζεται πάλι από τις ημιευθείες  $OX$  και  $OY$  και συνίσταται από το υπόλοιπο μέρος του επιπέδου εκτός του εσωτερικού της γωνίας  $\widehat{XOY}$  και των ημιευθειών που την ορίζουν (Σχήμα 1.4.1-II). Το υπόλοιπο αυτό μέρος του επιπέδου ονομάζουμε **εσωτερικό** της μη-κυρτής γωνίας  $\widehat{XOY}$ , ή **εξωτερικό** της κυρτής γωνίας  $\widehat{XOY}$ .

Συχνά θα μιλάμε για γωνίες χωρίς να κάνουμε διάκριση για το αν είναι κυρτή ή μη-κυρτή. Το ακριβές νόημα, δηλαδή αν πρόκειται για κυρτή ή μη-κυρτή, θα προκύπτει τότε από τα συμφραζόμενα. Στην περίπτωση που οι δύο ημιευθείες περιέχονται στην ίδια ευθεία ορίζουμε τις επόμενες ειδικές γωνίες.



Σχήμα 1.4.2: Πεπλατυσμένη γωνία



Μηδενική γωνία

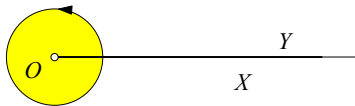
**Πεπλατυσμένη γωνία** ή **ευθεία γωνία** ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο αντικείμενες ημιευθείες. Οποιοδήποτε από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία  $OX$  μπορεί να θεωρηθεί εσωτερικό ή εξωτερικό της πεπλατυσμένης γωνίας.

**Μηδενική γωνία** ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ταυτιζόμενες ημιευθείες  $OX$  και  $OY$ . Θεωρούμε ότι η γωνία αυτή δεν έχει εσωτερικό, ενώ ολόκληρο το επίπεδο πλην της  $OX$  θεωρείται το εξωτερικό αυτής της γωνίας.

**Πλήρη στροφή** ή **πλήρη γωνία** ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ταυτιζόμενες ημιευθείες  $OX$  και  $OY$  (Σχήμα 1.4.3). Εδώ ως εσωτερικό της γωνίας θεωρούμε ολόκληρο το επίπεδο πλην της  $OX$ , ενώ δεν υπάρχει εξωτερικό.

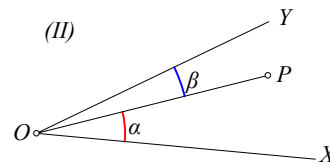
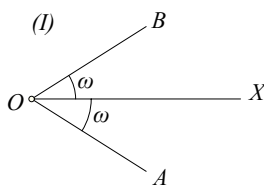
Οι βασικές ιδιότητες (αξιώματα) των γωνιών είναι οι εξής:





Σχήμα 1.4.3: Πλήρης στροφή

**Αξίωμα 1.4.1** Για κάθε γωνία (κυρτή ή μη)  $\widehat{XOY}$  ορίζεται ένας αριθμός  $|\widehat{XOY}| = |\widehat{YOX}| \geq 0$  που λέγεται **μέτρο της γωνίας σε μοίρες**. Ισχύει  $|\widehat{XOY}| = 0$  τότε και μόνον όταν η γωνία είναι η μηδενική.



Σχήμα 1.4.4: Ίσες γωνίες εκατέρωθεν της OX

$$|\widehat{XOY}| = |\widehat{XOP}| + |\widehat{POY}|$$

**Αξίωμα 1.4.2** Για κάθε αριθμό  $\omega$  με  $0 < \omega < 180^\circ$  υπάρχουν δύο ακριβώς ημιευθείες OA, OB στις δύο πλευρές της ευθείας OX έτσι ώστε οι γωνίες  $\widehat{XOA}$  και  $\widehat{XOB}$  να ικανοποιούν  $|\widehat{XOA}| = |\widehat{XOB}| = \omega$  (Σχήμα 1.4.4-I). Η πεπλατυσμένη γωνία έχει μέτρο 180 μοίρες.

Εκ παραδόσεως το μέτρο  $\omega$  σε μοίρες συμβολίζεται με  $\omega^\circ$ . Έτσι γωνία  $30^\circ$  σημαίνει γωνία 30 μοιρών. Το 1/60-οστό της μοίρας λέγεται **πρώτο** της μοίρας ή **λεπτό** και συμβολίζεται με ένα τόνο. Το 1/60-οστό του λεπτού λέγεται **δεύτερο** της μοίρας και συμβολίζεται με δύο τόνους. Έτσι,  $30^\circ 23' 11''$  συμβολίζει το μέτρο που ισούται με  $30 + \frac{23}{60} + \frac{11}{3600}$  μοίρες.

Δύο γωνίες  $\widehat{AB\Gamma}$  και  $\widehat{A'B'\Gamma'}$  λέγονται **ίσες**, τότε και μόνον, όταν τα μέτρα τους είναι ίσα:  $|\widehat{AB\Gamma}| = |\widehat{A'B'\Gamma'}|$ .

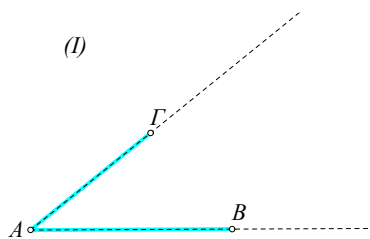
**Σχόλιο-1** Συχνά, στα επόμενα, θα παραλείψουμε τις απόλυτες τιμές και για δύο ίσες γωνίες θα γράφουμε απλά  $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A'B'\Gamma'}$ , αντί για  $|\widehat{AB\Gamma}| = |\widehat{A'B'\Gamma'}|$ .

**Αξίωμα 1.4.3** Για κάθε σημείο P στο εσωτερικό της γωνίας  $\widehat{XOY}$  (κυρτής ή μη-κυρτής), τα μέτρα των γωνιών  $\widehat{XOY}$ ,  $\widehat{XOP}$  και  $\widehat{POY}$  ικανοποιούν τη  $\widehat{XOY} = \widehat{XOP} + \widehat{POY}$ . Σε κάθε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η γωνία  $\widehat{XOY}$  είναι το **άθροισμα** των γωνιών  $\widehat{XOP}$  και  $\widehat{POY}$ . Συχνά για να δηλώσουμε μια τέτοια σχέση θα παραλείψουμε τα απόλυτα και θα γράφουμε  $\widehat{XOY} = \widehat{XOP} + \widehat{POY}$ .

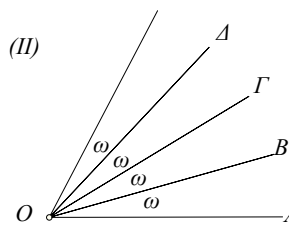
Δύο γωνίες, που έχουν κοινή κορυφή και μία πλευρά επίσης κοινή και μή τεμνόμενα αντίστοιχα εσωτερικά (όπως οι  $\widehat{XOP}$  και  $\widehat{POY}$  του σχήματος 1.4.4), λέγονται **εφεξής**. Χωρίζοντας μία μη-κυρτή γωνία σε δύο μέρη, μέσω ενός σημείου στο εσωτερικό της, και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αξίωμα, βλέπουμε ότι οι μη-κυρτές γωνίες έχουν μέτρο  $\omega > 180^\circ$ . Το αξίωμα εξασφαλίζει επίσης την ύπαρξη της **διχοτόμου**, που είναι ημιευθεία διερχόμενη από την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες (εφεξής) γωνίες.

**Άσκηση 1.4.1** (Ύπαρξη Διχοτόμου) Δείξε ότι για κάθε γωνία  $\widehat{XOY}$  υπάρχει μία ακριβώς ημιευθεία OZ στο εσωτερικό της που τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες  $\widehat{XOZ}$ ,  $\widehat{ZOY}$  με  $|\widehat{XOZ}| = |\widehat{ZOY}| = |\widehat{XOY}|/2$ .

**Γωνία** δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και AΓ, που έχουν κοινό άκρο το σημείο A, λέμε τη γωνία που σχηματίζεται από τις αντίστοιχες ημιευθείες AB και AΓ (Σχήμα 1.4.5-1).



Σχήμα 1.4.5: Γωνία τμημάτων AB και AG



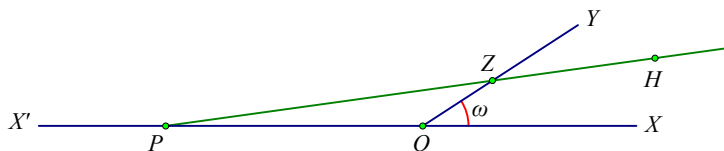
Άθροισμα ίσων γωνιών

**Άσκηση 1.4.2** Βρες τη διχοτόμο μιας πεπλατυσμένης γωνίας  $\widehat{XOY}$ . Δείξε ότι το μέτρο μιας πλήρους στροφής είναι 360 μοίρες.

**Άσκηση 1.4.3** Ξεκινώντας από γωνία  $\widehat{AOB}$  μέτρου  $\omega$ , κατασκευάζουμε ίσες με αυτήν εφεξής προς το ίδιο μέρος  $\widehat{BO\Gamma}$ ,  $\widehat{\Gamma O\Delta}$ , κ.λπ. Για ποια μέτρα  $\omega$  η διαδικασία αυτή μετά από  $n$  βήματα ορίζει γωνία  $\widehat{AO\Omega}$ , της οποίας η πλευρά  $O\Omega$  συμπίπτει με την αρχική  $OA$  (Σχήμα 1.4.5-II);

**Άσκηση 1.4.4** Έστω γωνία  $\widehat{XOY}$  με μέτρο  $|\widehat{XOY}| = a$  και  $P$  σημείο στο εσωτερικό της γωνίας. Δείξε ότι  $|\widehat{XOP}| < a$ . Αντίστροφα δείξε ότι για κάθε θετικό  $\beta < a$  υπάρχει σημείο  $P$  εσωτερικό της γωνίας έτσι ώστε  $|\widehat{XOP}| = \beta$ . Δείξε ακόμη ότι όλα αυτά τα σημεία  $P$  περιέχονται σε ημιευθεία με άκρο το  $O$ .

**Άσκηση 1.4.5** Έστω ότι τα σημεία  $A$  και  $B$  περιέχονται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας  $\widehat{XOY}$ . Δείξε ότι και κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας  $\widehat{XOY}$ . Δείξε ότι η ανάλογη ιδιότητα δεν ισχύει για μη-κυρτές γωνίες.



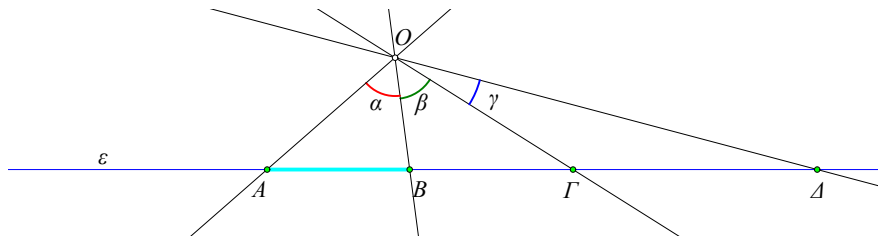
Σχήμα 1.4.6: Σημεία στο εσωτερικό γωνίας  $\widehat{XOY}$

**Άσκηση 1.4.6** Δίδεται κυρτή γωνία  $\widehat{XOY}$  και σημείο  $P$  επί της αντικείμενης ημιευθείας  $OX'$  της  $OX$ , καθώς και σημείο  $Z$  της ημιευθείας  $OY$ . Δείξε ότι κάθε σημείο  $H$  της ημιευθείας  $PZ$  ευρισκόμενο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $PZ$  περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας  $\widehat{XOY}$ .

**Υπόδειξη:** Εκ κατασκευής το  $H$  περιέχεται στην μεριά της ευθείας  $OY$  στην οποία περιέχεται και η  $OX$ . Επίσης τα  $Z, H$  περιέχονται από την ίδια μεριά της ευθείας  $OX$  διότι το σημείο τομής  $P$  της  $ZH$  με την  $OX$  είναι εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $ZH$ .

**Σχόλιο-2** Το Αξίωμα 1.4.2 των γωνιών σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιαδήποτε γωνία θέλουμε και από τις δύο μεριές μιας ημιευθείας. Όπως όμως και για ευθύγραμμα τμήματα έτσι και για γωνίες, η πρακτική κατασκευή συγκεκριμένης γωνίας με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, όταν αυτό είναι εφικτό, όπως λ.χ. η γωνία 60 μοιρών, είναι ένα διαφορετικό ζήτημα και θα χρειαστούν και πάλι ιδιότητες του κύκλου για να μπορέσουμε να δικαιολογήσουμε την κατασκευή.

**Σχόλιο-3** Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσει κανείς ορισμένες κοινές ιδιότητες μεταξύ γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων, ιδιαίτερα όσον αφορά τις έννοιες *μεταξύ*, *διαδοχικές* και *μέτρο*. Το σχήμα 1.4.7



Σχήμα 1.4.7: Αντιστοιχία ευθυγράμμων τμημάτων - γωνιών

δείχνει πόσο φυσιολογική είναι αυτή η συσχέτιση. Από ένα σταθερό σημείο  $O$  εκτός της σταθερής ευθείας  $\varepsilon$  και για κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  αυτής κατασκευάζεται η γωνία  $\widehat{AOB}$ . Μέσω αυτής της αντιστοιχίας ευθυγράμμων τμημάτων - γωνιών οι έννοιες που ανέφερα μεταφέρονται από την ευθεία στις γωνίες με κορυφή το  $O$ . Έτσι το  $\widehat{A\Gamma}$  είναι το άθροισμα των  $AB$  και  $B\Gamma$  και η αντιστοιχη γωνία  $\widehat{AOG}$  είναι το άθροισμα των  $\widehat{AOB}$  και  $\widehat{BO\Gamma}$ . Το  $B$  είναι μεταξύ των  $A$  και  $\Gamma$  και ανάλογα η  $OB$  είναι μεταξύ των  $OA$  και  $O\Gamma$ , σε δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν εφεξής γωνίες κ.ο.κ.

Με την ευκαιρία του σχήματος 1.4.7 μπορούμε να θέσουμε αμέσως δύο προβλήματα, τα οποία, όμως, για να λύσουμε θα πρέπει πρώτα να μάθουμε να χειριζόμαστε κάποια εργαλεία (δες για τη λύση τους τις Άσκησης 3.9.7 και 3.8.11).

**Πρόβλημα 1.4.1** Υπόθεσε ότι στο σχήμα 1.4.7 η γωνία  $\widehat{AOB}$  έχει σταθερό μέτρο  $|\widehat{AOB}| = a$  και περιστρέφεται περί το  $O$ . Για ποια θέση της γίνεται το μήκος του αντιστοίχου ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ελάχιστο;

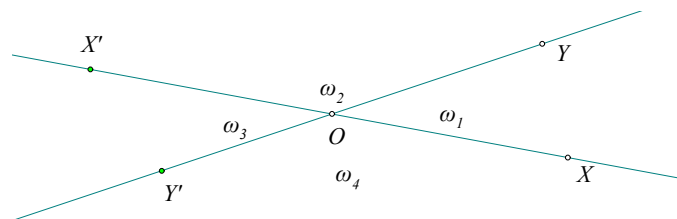
**Πρόβλημα 1.4.2** Υπόθεσε ότι στο σχήμα 1.4.7 το τμήμα  $AB$  γλιστρά πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  χωρίς να αλλιάζει το μήκος του. Για ποια θέση του  $AB$  γίνεται η αντιστοιχη γωνία  $\widehat{AOB}$  μέγιστη;

## 1.5 Γωνιών είδη

Νόμοι, στην πιο πλατιά σημασία, είναι οι αναγκαίες σχέσεις που πηγάζουν από τη φύση των πραγμάτων και, με την έννοια αυτή, όλα τα όντα έχουν τους νόμους τους.

*Montesquieu, Το πνεύμα των νόμων, 1748*

Δύο τεμνόμενες στο σημείο  $O$  ευθείες  $OX$  και  $OY$  ορίζουν τέσσερις γωνίες. Οι γωνίες αυτές ανά δύο σχηματίζουν ζεύγη **κατά κορυφήν** γωνιών, δηλαδή γωνιών εκ των οποίων έκαστη έχει ως πλευ-

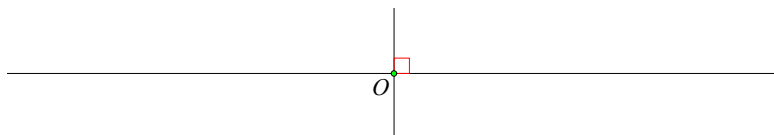


Σχήμα 1.5.1: Γωνίες δύο ευθειών

ρές τις προεκτάσεις της άλλης (Σχήμα 1.5.1). Για τις δύο πεπλατυσμένες  $\widehat{XOX'}$  και  $\widehat{YOY'}$  έχουμε  $180^\circ = |\widehat{XOX'}| = |\widehat{XOY}| + |\widehat{YOX'}|$ . Επίσης  $180^\circ = |\widehat{YOY'}| = |\widehat{YOX}| + |\widehat{XOY'}|$ . Επειδή  $|\widehat{XOY}| = |\widehat{YOX}|$  συμπεραίνουμε ότι οι κατά κορυφήν γωνίες  $\widehat{YOX'}$  και  $\widehat{XOY'}$  είναι ίσες. Ανάλογα δείχνουμε και ότι οι  $\widehat{XOY}$  και  $\widehat{X'OY'}$  είναι ίσες. Αποδείξαμε συνεπώς την:

**Πρόταση 1.5.1** Κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μέτρων  $180^\circ$  λέγονται **παραπληρωματικές**. Στο προηγούμενο σχήμα κάθε ζεύγος διαδοχικών γωνιών αποτελείται από παραπληρωματικές γωνίες. **Ορθή** λέγεται μία γωνία που έχει μέτρο  $90^\circ$ . Προφανώς μία ορθή είναι ίση με την παραπληρωματική της. Προεκτείνοντας τις πλευρές μίας ορθής γωνίας στο σημείο  $O$ , δηλαδή θεωρώντας και τις αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών, ορίζουμε τέσσερις ορθές γωνίες γύρω από το σημείο αυτό, που ανά δύο είναι ή κατά κορυφήν ή παραπληρωματικές.



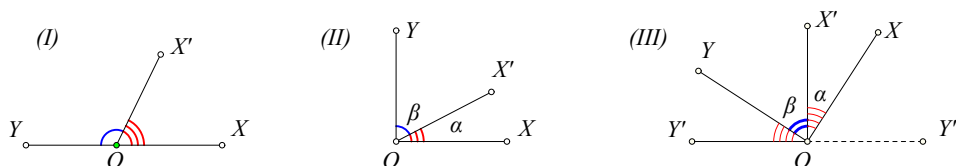
Σχήμα 1.5.2: Κάθετες ευθείες

Έτσι δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο  $O$  και σχηματίζουν μία (από τις τέσσερις) γωνίες ορθή θα σχηματίζουν και τις υπόλοιπες ορθές. Δύο τέτοιες ευθείες λέγονται **κάθετες**. **Οξεία** λέγεται μία γωνία



Σχήμα 1.5.3: Οξεία και αμβλεία γωνία

$\widehat{XOY}$  της οποίας το μέτρο  $|\widehat{XOY}| < 90^\circ$ . **Αμβλεία** λέγεται μία γωνία της οποίας το μέτρο  $|\widehat{XOY}| > 90^\circ$ . Προφανώς αν μία γωνία είναι οξεία τότε η παραπληρωματική της θα είναι αμβλεία και τούμπαλιν. Λέμε ότι η γωνία  $\alpha$  είναι μεγαλύτερη/μικρότερη της γωνίας  $\beta$  αν ισχύει κάτι ανάλογο για τα μέτρα τους:  $|\alpha| < |\beta|$  (αντίστοιχα  $|\alpha| > |\beta|$ ). Προφανώς κάθε αμβλεία είναι μεγαλύτερη της ορθής που με τη σειρά της είναι μεγαλύτερη κάθε οξείας. **Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες των οποίων τα



Σχήμα 1.5.4: Παραπληρωματικές, Συμπληρωματικές, Γωνίες με κάθετες πλευρές

μέτρα  $\alpha, \beta$  έχουν άθροισμα  $\alpha + \beta = 90^\circ$  (Σχήμα 1.5.4-II). Προφανώς συμπληρωματικές γωνίες είναι οξείες και οι δύο.

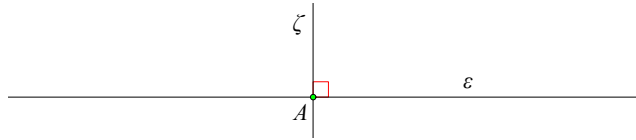
Ένα σημείο  $X'$  στο εσωτερικό μιας ορθής γωνίας  $\widehat{XOY}$  ορίζει δύο συμπληρωματικές γωνίες  $\alpha = \widehat{XOX'}$ ,  $\beta = \widehat{X'OY}$ .

**Πρόταση 1.5.2** Δύο γωνίες  $\widehat{XOX'}$  και  $\widehat{YOY'}$  που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα κάθετες είναι ή ίσες ή παραπληρωματικές (Σχήμα 1.5.4-III).

**Απόδειξη:** Εάν οι  $OY$  και  $OY'$  είναι προς το ίδιο μέρος της  $OX'$  τότε οι γωνίες  $\alpha = \widehat{XOX'}$  και  $\alpha' = \widehat{YOY'}$  είναι ίσες ως έχουσες κοινή συμπληρωματική γωνία  $\beta$ . Εάν οι  $OY$  και  $OY''$  είναι σε διαφορετικά μέρη της  $OX'$  τότε η αντικείμενη ημιευθεία  $OY'$  της  $OY''$  σχηματίζει παραπληρωματική της γωνίας

$\alpha' = \widehat{YOY''}$  και είναι από το ίδιο μέρος της  $OX'$  με την  $OY$ , άρα κατά το προηγηθέν  $180^\circ - \alpha' = \alpha$ , ο.ε.δ.

**Πόρισμα 1.5.1** Από σημείο  $A$  ευθείας  $\varepsilon$  διέρχεται μία ακριβώς ευθεία  $\zeta$  κάθετος στην  $\varepsilon$ .



Σχήμα 1.5.5: Κάθετος ζ της ε

*Απόδειξη:* Άμεση συνέπεια του Αξιώματος 1.4.2, κατά το οποίο υπάρχει μία ακριβώς γωνία 90 μοιρών με κορυφή στο  $A$ , μία πλευρά ταυτιζόμενη με την  $\varepsilon$  και περιεχόμενη σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της  $\varepsilon$ , ο.ε.δ.

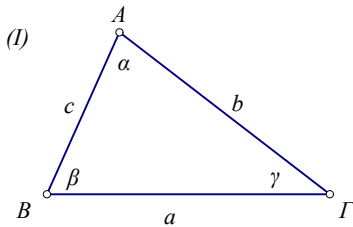
## 1.6 Τρίγωνα

Καθαρογραμμένα μες στα φρούτα : ο κύκλος, το τετράγωνο  
 Το τρίγωνο και ο ρόμβος  
 Όπως τα βλέπουν τα πουλιά, να γίνει απλός ο κόσμος  
 Ένα σχέδιο Πικασσό  
 Με γυναίκα, παιδάκι και υποκένταυρο.

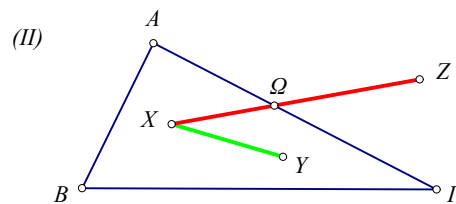
*Οδυσσέας Ελύτης, Τα ειεροθαλή*

Το τρίγωνο, μετά την ευθεία και τη γωνία, είναι το απλούστερο σχήμα του επιπέδου. Παρά την απλότητά του έχει άπειρες ιδιότητες και αποτελεί αντικείμενο μελέτης γνωστών και άγνωστων Μαθηματικών όλων των εποχών. Τα μέχρι τώρα συμπεράσματα είναι τόσα πολλά, που συγκροτούν ειδικό κλάδο της γεωμετρίας, τη λεγόμενη *Γεωμετρία του τριγώνου* ([Κατ96], [Gal13], [Lal52], [Yiu13]).

**Τρίγωνο** λέγεται το σχήμα που ορίζεται από τρία σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ , μη περιεχόμενα σε μία και μόνον ευθεία, καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν. Τα τρία αυτά σημεία λέγονται



Σχήμα 1.6.1: Τρίγωνο



Εσωτερικό και εξωτερικό τριγώνου

**κορυφές του τριγώνου.** Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από δύο κορυφές του τριγώνου λέγονται **πλευρές του τριγώνου.** **Γωνίες του τριγώνου** ονομάζουμε τις (κυρτές) γωνίες που σχηματίζονται σε κάθε κορυφή του από τις πλευρές του τριγώνου με αρχή αυτήν την κορυφή. τα μήκη των πλευρών παριστάνονται συνήθως με τα λατινικά γράμματα

$$a = |B\Gamma|, \quad b = |\Gamma A|, \quad c = |AB|$$

και τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου με τα μικρά Ελληνικά

$$a = |\widehat{BA\Gamma}|, \quad \beta = |\widehat{\Gamma BA}|, \quad \gamma = |\widehat{A\Gamma B}| \quad \text{ή απλά με} \quad a = \widehat{A}, \quad \beta = \widehat{B}, \quad \gamma = \widehat{\Gamma}.$$

Τους συμβολισμούς αυτούς θα χρησιμοποιώ συχνά και στα επόμενα κεφάλαια.

Λέμε ότι οι γωνίες  $\widehat{AB\Gamma}$ ,  $\widehat{B\Gamma A}$ ,  $\widehat{\Gamma AB}$  είναι αντίστοιχα **απέναντι** των πλευρών  $A\Gamma$ ,  $BA$  και  $\Gamma B$ . Το άθροισμα των μηκών των πλευρών

$$\sigma = a + b + c,$$

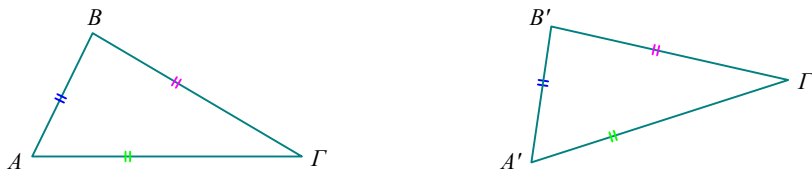
λέγεται **περίμετρος** του τριγώνου. Το  $\tau = \sigma/2$  ονομάζουμε **ημιπερίμετρο** του τριγώνου

Ένα τρίγωνο λέγεται: (1) **οξυγώνιο**, (2) **αμβλυγώνιο**, (3) **σκαληνό**, όταν αντίστοιχα, (1) έχει όλες τις γωνίες του οξείες, (2) έχει μία γωνία αμβλεία, (3) έχει πλευρές με διαφορετικά μήκη.

Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  λέμε ότι είναι **ίσα**, όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές ( $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ ) και αντίστοιχα ίσες γωνίες ( $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ ,  $\gamma = \gamma'$ ).

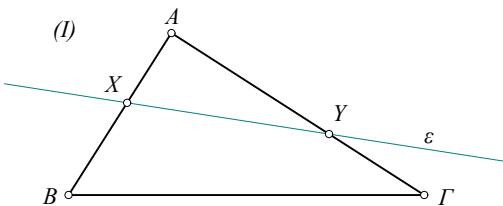
Οι βασικές ιδιότητες (αξιώματα) του τριγώνου είναι οι εξής:

**Αξίωμα 1.6.1** Κάθε τρίγωνο χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη το **εσωτερικό** και **εξωτερικό** (Σχήμα 1.6.1-II). Δύο σημεία  $X$  και  $Y$ , περιεχόμενα στο εσωτερικό του τριγώνου, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα  $XY$  που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του τριγώνου. Δύο σημεία  $X$  και  $Z$ , περιεχόμενα το ένα στο εσωτερικό και το άλλο στο εξωτερικό του, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα  $XZ$  το οποίο ή περιέχει κορυφή του τριγώνου ή τέμνει μία ακριβώς πλευρά του τριγώνου σε εσωτερικό της πλευράς σημείο  $\Omega$ .

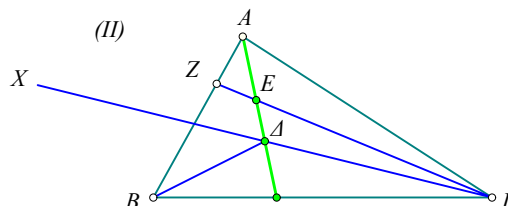


Σχήμα 1.6.2: Τρίγωνα με αντίστοιχες πλευρές ίσες

**Αξίωμα 1.6.2** (Ισότητα δύο τριγώνων) Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  που έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες ( $|AB| = |A'B'|$ ,  $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$ ,  $|GA| = |G'A'|$ ) είναι ίσα. Δηλαδή έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες. Μάλιστα απέναντι από αντίστοιχα ίσες πλευρές θα ευρισκονται ίσες γωνίες (Σχήμα 1.6.2).



Σχήμα 1.6.3: Αξίωμα του Pasch



Τομή απέναντι πλευράς

**Αξίωμα 1.6.3** (Του Pasch (1843-1940)) Αν μία ευθεία  $\epsilon$  τέμνει μία πλευρά  $AB$  του τριγώνου και δεν διέρχεται από μία κορυφή του, τότε θα τέμνει και μία από τις άλλες πλευρές (Σχήμα 1.6.3-I).

**Σχόλιο-1** Το αξίωμα για το εσωτερικό και εξωτερικό του τριγώνου είναι μια από τις περιπτώσεις που ανέφερα στην αρχή του κεφαλαίου. Συνάγεται από τα υπόλοιπα αξιώματα, συνεπώς θα μπορούσε να αποδειχθεί ως θεώρημα. Η απόδειξη ωστόσο περιέχει λεπτομέρειες στις οποίες δεν κρίνω σκόπιμο να

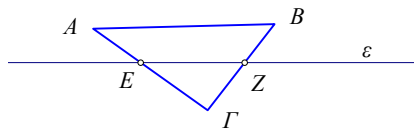
εμπλακεί ο μαθητής. Έτσι το βάζω εδώ ως αξίωμα.

Το τελευταίο Αξίωμα 1.6.3 φαίνεται αυτονόητο, ωστόσο η ιδιότητα που εκφράζει δεν συνάγεται από τα προηγούμενα αξιώματα. Η χρησιμότητά του φαίνεται και από την επόμενη πρόταση καθώς και την άσκηση που ακολουθεί. Οι δύο αυτές προτάσεις παρατίθενται απλώς για να δώσουν μια γεύση των λεπτομερειών που πρέπει να προσέξει κανείς, αν θέλει να αποδείξει *όλους* τους ισχυρισμούς του βάσει των αξιωμάτων. Ένα πλήθος παρόμοιων «αυτονόητων» προτάσεων μπορεί να δει κανείς στα [Efi80, σ. 42-84], [Bel07].

**Πρόταση 1.6.1** *Εάν το  $\Delta$  είναι ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τότε η  $A\Delta$  τέμνει την απέναντι πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου (Σχήμα 1.6.3-III).*

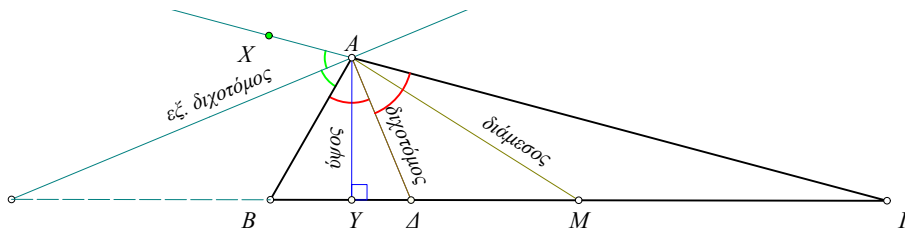
*Απόδειξη:* Πάρε σημείο  $E$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$ . Θεώρησε κατόπιν το τρίγωνο  $AB\Delta$  και την τέμνουσα  $GE$ . Κατά το Αξίωμα 1.6.3 η ευθεία  $GE$  θα συναντά και μία δεύτερη πλευρά του τριγώνου  $AB\Delta$ . Επειδή η πλευρά  $B\Delta$  αυτού του τριγώνου είναι εκτός της γωνίας  $\widehat{XGA}$ , η  $GE$  θα συναντά την  $AB$  σε ένα σημείο  $Z$ . Θεώρησε τότε το τρίγωνο  $B\Gamma Z$  και την ευθεία  $AE$  που συναντά την πλευρά του  $\Gamma Z$ . Κατά το 1.6.3 η  $AE$  θα συναντά και μία άλλη πλευρά του τριγώνου που δεν μπορεί να είναι η  $BZ$ , διότι τότε η  $AE$  θα συνέπιπτε με τη  $BZ$ . Άρα η  $AE$ , που είναι η ίδια με την ευθεία  $A\Delta$ , θα συναντά την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $B\Gamma Z$ , που είναι και πλευρά του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ο.ε.δ.

**Άσκηση 1.6.1** *Δίδεται ευθεία  $\varepsilon$ . Δείξε ότι η σχέση μεταξύ δύο σημείων  $A$  και  $B$ : {τα  $A$  και  $B$  περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της  $\varepsilon$ } είναι μεταβατική. Δηλαδή αν τα  $A$  και  $B$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και τα  $B$  και  $\Gamma$  είναι επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο τότε και τα  $A$  και  $\Gamma$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο.*



Σχήμα 1.6.4: Το νόημα του αξιώματος 1.6.3

*Υπόδειξη:* Υπόθεσε ότι τα  $A, B$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και ότι τα  $B, \Gamma$  επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο όμως ότι τα  $A, \Gamma$  δεν είναι. Τότε (Αξίωμα 1.2.5) υπάρχει σημείο  $E$  της ευθείας  $\varepsilon$  επί του  $A\Gamma$  και μεταξύ των  $A$  και  $\Gamma$ . Με άλλα λόγια η  $\varepsilon$  τέμνει την  $A\Gamma$ . Επειδή η  $\varepsilon$  δεν περιέχει τα  $A, B, \Gamma$  και τέμνει τη μία πλευρά του τριγώνου ( $A\Gamma$ ), θα τέμνει κατά το Αξίωμα 1.6.3 και μία από τις άλλες δύο. Αν τέμνει τη  $B\Gamma$  σε σημείο  $Z$ , έχουμε άτοπο διότι τότε τα  $B, \Gamma$  θα είναι σε διαφορετικές πλευρές της  $\varepsilon$ . Αν τέμνει την  $AB$ , θα έχουμε ανάλογο άτοπο. Άρα η  $A\Gamma$  δεν μπορεί να τέμνει την  $\varepsilon$ .



Σχήμα 1.6.5: Διάμεσος, Διχοτόμος, Ύψος

**Διάμεσος** του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του με το μέσον της απέναντι πλευράς. **Διχοτόμος** του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά του και χωρίζει τη γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες. Συχνά ονομάζουμε διχοτόμο και ολόκληρη την ευθεία ή ημιευθεία που διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου. **Εξωτερική γωνία** του τριγώνου λέγεται μία παραπληρωματική γωνία τριγώνου, λ.χ. της  $\widehat{A}$ , που προκύπτει προεκτείνοντας μία από τις πλευρές του τριγώνου, λ.χ. την  $A\Gamma$  (δηλαδή θεωρώντας την ευθεία  $A\Gamma$ ),



οπότε προκύπτει η  $\widehat{BAX}$  (σχήμα 1.6.5). **Εξωτερική διχοτόμος** τριγώνου λέγεται η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του. **Ύψος** του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή του τριγώνου με ένα σημείο της απέναντι πλευράς της και είναι κάθετο στην πλευρά αυτή (την ύπαρξη του ύψους θα εξασφαλίσουμε λίγο αργότερα στην § 1.12). Όπως θα δούμε αργότερα, οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από κοινό σημείο (Θεώρημα 2.8.1), οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από άλλο κοινό σημείο (Θεώρημα 2.2.2) και τέλος τα τρία ύψη διέρχονται και αυτά από τρίτο κοινό σημείο (Θεώρημα 2.8.2).

Οι διάμεσοι, τα ύψη και οι διχοτόμοι (εσωτερικές και εξωτερικές) τριγώνου αναφέρονται συχνά ως **δευτερεύοντα στοιχεία** του τριγώνου.

**Σχόλιο-2** Συχνά η γνώση των μηκών τριών από αυτά τα στοιχεία αρκεί για την ακριβή κατασκευή του τριγώνου. Για παράδειγμα, στην Άσκηση 2.13.11, θα δούμε ότι το τρίγωνο κατασκευάζεται εύκολα, όταν γνωρίζουμε τα τρία μήκη  $|AY|$ ,  $|AZ|$  και  $|AM|$ , ύψους, διχοτόμου και διαμέσου από την ίδια κορυφή. Συνήθως, στις κατασκευές τριγώνων απαιτούμε τη χρήση αποκλειστικά και μόνον του κανόνα και του διαβήτη ([Pet01], [Adl06], [Eve63, σ. 183]).

Ένα, σχετικά σύνθετο, πρόβλημα είναι να αποδείξουμε ότι μια ορισμένη κατασκευή με χρήση μόνο του κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη (§ 2.4). Για παράδειγμα, η κατασκευή του τριγώνου από το ύψος  $|AY|$  και διάμεσο  $|AM|$  από την ίδια κορυφή, αλλά διχοτόμο από μίαν άλλη κορυφή και όχι την  $A$ , αποδεικνύεται αδύνατη ([Fur37, σ. 38]).

Φυσικά, το να μην κατασκευάζεται το τρίγωνο με τα συγκεκριμένα δεδομένα μέσω κανόνα και διαβήτη, δεν σημαίνει ότι το τρίγωνο δεν κατασκευάζεται με άλλα μέσα ή ότι δεν υπάρχει. Έτσι, για παράδειγμα, δοθέντων τριών θετικών αριθμών, υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο που έχει αυτούς τους αριθμούς ως μήκη των διχοτόμων του. Ωστόσο το τρίγωνο αυτό δεν μπορεί να κατασκευασθεί με τον κανόνα και το διαβήτη ([MP94], [Oxm08]).

**Άσκηση 1.6.2** Δείξε ότι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας κορυφής τριγώνου είναι κάθετες ευθείες.

## 1.7 Η ισότητα σχημάτων

Μπαρμπαγιάννη  
Μακρυγιάννη  
πάρε μαύρο γιαταγάνι  
κι έλα στη ζωή μας πίσω  
το στραβό να κάνεις ίσο.

Νίκος Γκάτσος

Ένα σημείο, μία ευθεία, μία ημιευθεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα τρίγωνο, είναι **σχήματα**. Γενικότερα, σχήμα (του επιπέδου) ονομάζουμε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο σημείων του. Αυτά που εξετάσαμε μέχρι τώρα είναι τα απλούστερα σχήματα. Στα επόμενα μαθήματα θα γνωρίσουμε άλλα πιο σύνθετα σχήματα και θα μελετήσουμε ιδιότητές που ισχύουν για καθένα από αυτά και είναι οι ίδιες για τα λεγόμενα **ίσα σχήματα**.

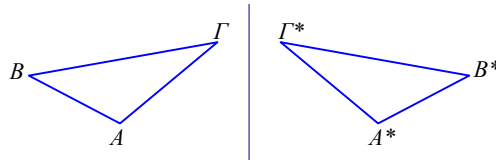
Κάθε σχήμα έχει έναν κανόνα που καθορίζει πότε είναι ίσο με ένα άλλο. Τα ευθύγραμμο τμήματα έχουν το μήκος τους. Είναι ίσα τότε ακριβώς, όταν έχουν το ίδιο μήκος. Οι γωνίες το ίδιο. Έχουν και αυτές το μέτρο τους. Είναι ίσες όταν έχουν ίσα μέτρα. Στα τρίγωνα, η ισότητα περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία. Ο ορισμός της ισότητας απαιτεί από δύο τρίγωνα να έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες αντίστοιχες γωνίες. Το Αξίωμα 1.6.2 δίδει το βασικό κριτήριο ισότητας τριγώνων. Λέει ότι, όταν δύο τρίγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, τότε είναι ίσα. Δηλαδή και οι αντίστοιχες γωνίες τους (οι απέναντι από τις ίσες πλευρές) θα είναι και αυτές ίσες. Παρακάτω (§ 1.9) θα δούμε



και άλλα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Όσο πιο πολύπλοκο είναι το σχήμα, τόσο περισσότερα στοιχεία του πρέπει να συγκρίνουμε για να καταλήξουμε ότι είναι ίσο με ένα άλλο.

Ο Ευκλείδης στα στοιχεία του δεν χρονοτριβεί στην ανάλυση της έννοιας της ισότητας. Υιοθετεί μια απλοϊκή έννοια ισότητας κατά την οποία δύο σχήματα είναι ίσα, τότε και μόνον όταν μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα και να το τοποθετήσουμε πάνω στο άλλο έτσι ώστε τα δύο σχήματα να συμπέσουν ακριβώς. Τι θα πει όμως *μετατοπίσουμε*; Η έννοια της μετατόπισης είναι σύνθετη. Θεμελιώνεται με τη γενική έννοια του *Μετασχηματισμού* και ειδικότερα της *Ισομετρίας*, για την οποία θα μιλήσουμε πολύ αργότερα (§ 7.1).

Αρχικά θεμελιώνουμε την ισότητα δίνοντας για κάθε σχήμα τον κανόνα του, δηλαδή πότε ακριβώς είναι ίσο με ένα άλλο. Ωστόσο δεν βλάπτει να σκεφτόμαστε και με τον τρόπο του Ευκλείδη. Στο επίπεδο, δύο σχήματα που είναι ίσα με τον κανόνα ισότητάς τους, είναι ίσα και κατά την έννοια του Ευκλείδη, μέσω μετατόπισης και σύμπτωσης. Και αντίστροφα αν μπορούν να τοποθετηθούν, ώστε να συμπέσουν, τότε είναι ίσα και με τον κανόνα που δίνουμε σε κάθε περίπτωση. Το πρόβλημα είναι ότι, για να αποδείξουμε αυτήν την ισοδυναμία, πρέπει να μελετήσουμε διάφορα ζητήματα, που η καταγραφή τους, σε αυτό το σημείο, θα δημιουργούσε κάποιες δυσκολίες κατανόησης. Περιοριζόμαστε λοιπόν στην παραδοχή αυτής της αρχής του Ευκλείδη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το επίπεδο είναι σαν μια πλαστική διαφάνεια και τα σχήματα μπορούν να κοπούν από το μέρος που έχουν αρχικά σχεδιασθεί και να μετατεθούν στο μέρος που είναι το άλλο σχήμα, να τοποθετηθούν πάνω σε αυτό και να συμπέσουν. Πολύ αργότερα, στην § 7.5, που τη συνιστώ για μια δεύτερη ανάγνωση, γίνεται η αυστηρή θεμελίωση της ισότητας.



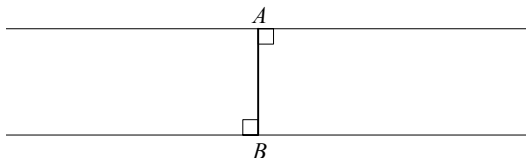
Σχήμα 1.7.1: Ίσα αλλά διαφορετικά προσανατολισμένα

Σημειώνω μια ιδιαιτερότητα της έννοιας της ισότητας, που φανερώνεται στο σχήμα 1.7.1 και έχει να κάνει με το λεγόμενο **προσανατολισμό** των σχημάτων. Τα δύο τρίγωνα είναι ίσα με τη δική μας έννοια. Έχουν όμως την ιδιαιτερότητα ότι η διαδοχή  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$  είναι κατά τη φορά του ρολογιού, ενώ η διαδοχή  $A^* \rightarrow B^* \rightarrow \Gamma^*$  είναι αντίθετη της φοράς του ρολογιού. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  λέγεται **αρνητικά προσανατολισμένο**, ενώ το  $A^*B^*\Gamma^*$  λέγεται **θετικά προσανατολισμένο**. Για να κάνουμε το  $AB\Gamma$  να συμπέσει με το  $A^*B^*\Gamma^*$ , με την έννοια της μετατόπισης, πρέπει να το κόψουμε και να το γυρίσουμε από την πίσω μεριά, με τον τρόπο που γυρίζουμε μια σελίδα και πάμε στην από πίσω της. Τα πράγματα γίνονται λίγο πιο σύνθετα στο χώρο, όπου παρουσιάζεται το ανάλογο φαινόμενο και εκεί δεν υπάρχει κάτι έξω από το χώρο για να κάνουμε αυτό το αναποδογύρισμα του προσανατολισμού. Εκεί η έννοια της ισότητας με τον τρόπο που την ορίζουμε, για κάθε σχήμα ξεχωριστά, δεν είναι ισοδύναμη με την έννοια της σύμπτωσης (δες λ.χ. το σχόλιο στην § 9.2 και σε μια δεύτερη ανάγνωση την πλήρη περιγραφή της ισότητας στο χώρο στην §12.5). Ο τρόπος λοιπόν που χειριζόμαστε την ισότητα είναι πιο ασφαλής από αυτόν της *μετατόπισης*, όσο δεν μπαίνουμε στις λεπτομέρειες του ακριβούς ορισμού αυτής της έννοιας.

**Σχόλιο-1** Για ορισμένα σχήματα η ισότητα με την έννοια της μετατόπισης είναι προφανής. Έτσι, λ.χ. δύο οποιεσδήποτε ευθείες  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ίσες, με την έννοια, ότι η  $\alpha$  μπορεί να μετατοπισθεί και να τοποθετηθεί επί της  $\beta$ , έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπέσουν. Παρόμοια δύο τεμνόμενες ευθείες  $\alpha$  και  $\beta$ , που σχηματίζουν μεταξύ τους μία γωνία μέτρου  $\omega$ , συγκροτούν ένα σχήμα που είναι ίσο με το σχήμα δύο άλλων ευθειών  $\alpha'$  και  $\beta'$ , που σχηματίζουν μεταξύ τους μία γωνία του ίδιου μέτρου  $\omega$ .

**Σχόλιο-2** Και ένα σχόλιο για την ορολογία. Συχνά για την ισότητα δύο σχημάτων που έχουν γωνίες, κορυφές ή άλλα παρόμοια χαρακτηριστικά, κάνουμε αντιστοιχίσεις μεταξύ των κορυφών τους βάζοντας σε αντίστοιχες κορυφές το ίδιο γράμμα με κάποιο δείκτη ή τόνο ή άστρο ή άλλο σημάδι. Έτσι, όταν λέμε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα διότι έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, εννοούμε ότι η πλευρά  $AB$  είναι αντίστοιχα ίση προς την  $A'B'$ , η  $B\Gamma$  προς τη  $B'\Gamma'$  κ.λπ. Τον κανόνα

αυτό ακολουθούμε και στα σχήματα του χώρου. Το να μπορούμε να βάλουμε τα ίδια γράμματα στα υποψήφια για ισότητα σχήματα είναι το πρώτο βήμα για να αποδείξουμε την ισότητά τους, που συνήθως ανάγεται στην ισότητα αντίστοιχων και απλούστερων στοιχείων τους.



Σχήμα 1.7.2: Ένα απλό σχήμα

**Άσκηση 1.7.1** Το σχήμα 1.7.2 αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  μήκους  $\delta$  και τις ευθείες που είναι κάθετες σε αυτό στα άκρα του. Δείξε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $A'B'$ , του ίδιου μήκους  $\delta$ , ορίζει ανάλογα ένα σχήμα ίσο προς το προηγούμενο με την έννοια της μετατόπισης.

*Υπόδειξη:* Λόγω της ισότητας των μηκών, το τμήμα  $A'B'$  μπορεί να μετατοπισθεί ώστε να συμπίσει με το  $AB$ . Τότε, κατά το Αξίωμα 1.4.2, θα συμπέσουν και οι κάθετες προς το  $A'B'$  στα άκρα του με τις αντίστοιχες κάθετες του  $AB$  στα άκρα του.

### 1.8 Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο

Είδε με τα δικά του μάτια ότι το φεγγάρι είναι στρογγυλό  
 Ήταν επίσης σίγουρος ότι η γη είναι τετράγωνη,  
 Διότι ταξίδεψε πενήντα μίλια και δεν βρήκε  
 Σημάδι να δείχνει κάπου ότι είναι κυκλική.

*Lord Byron, Don Juan, canto V*

Στην Γεωμετρία, όπως και σε όλα τα Μαθηματικά, μετά από έναν ορισμό μιας γενικής κατηγορίας, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Δεν είναι σπάνιο, κάποια γενική ιδιότητα που θέλουμε να αποδείξουμε, να προκύπτει ευκολότερα σε μια ειδική περίπτωση και η ειδική απόδειξη να δείχνει και το δρόμο για τη γενική. Άλλοτε πάλι, οι ιδιότητες της ειδικής κατηγορίας βοηθούν στην διατύπωση και απόδειξη ιδιοτήτων της γενικής ή τη διάψευση κάποιας γενικής εικασίας. Τα ισοσκελή και τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ειδικές περιπτώσεις τριγώνων, που τις συναντάμε στις διατυπώσεις και αποδείξεις πληθώρας γενικών ιδιοτήτων σε όλα τα κεφάλαια της γεωμετρίας.

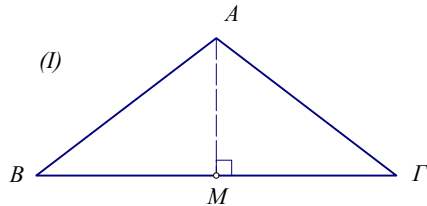


Σχήμα 1.8.1: Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο

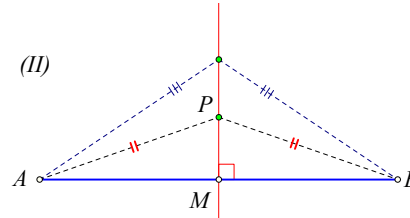
**Ισοσκελές** λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. Οι δύο ίσες πλευρές λέγονται **σκέλη** και η τρίτη πλευρά **βάση** του ισοσκελούς. Η κορυφή στην οποία συντρέχουν τα σκέλη λέγεται **κορυφή** του ισοσκελούς.

**Ορθογώνιο τρίγωνο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μία γωνία του ορθή. Οι πλευρές που ορίζουν αυτήν τη γωνία λέγονται **κάθετες πλευρές** του ορθογωνίου. Η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** του ορθογωνίου τριγώνου.

**Θεώρημα 1.8.1** Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ( $|AB| = |AG|$ ) οι παρά τη βάση γωνίες (στα  $B$  και  $\Gamma$ ) είναι ίσες.



Σχήμα 1.8.2: Το θεώρημα του ισοσκελούς

Η μεσοκάθετος του  $AB$ 

*Απόδειξη:* Θεώρησε τα δύο τρίγωνα  $ABM$  και  $AM\Gamma$  που σχηματίζονται φέρνοντας την  $AM$ , όπου  $M$  το μέσον της βάσης  $B\Gamma$  (Σχήμα 1.8.2-I). Τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες:  $|AB| = |AG|$  εξ υποθέσεως,  $|BM| = |M\Gamma|$  διότι το  $M$  είναι μέσον της  $B\Gamma$  και τέλος την  $AM$  κοινή. Κατά το Αξίωμα 1.6.2 των τριγώνων τα δύο αυτά τρίγωνα θα είναι ίσα, άρα και οι γωνίες τους στα  $B$  και  $\Gamma$  θα είναι αντίστοιχα ίσες ο.ε.δ.

**Πόρισμα 1.8.1** Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ( $|AB| = |AG|$ ) η ευθεία που ενώνει την κορυφή του με το μέσον  $M$  της απέναντι πλευράς διχοτομεί τη γωνία της κορυφής. (Δες την Άσκηση 1.9.8 για το αντίστροφο).

**Πόρισμα 1.8.2** Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ( $|AB| = |AG|$ ) η ευθεία που ενώνει τη κορυφή του με το μέσον  $M$  της απέναντι πλευράς είναι κάθετος στην βάση και χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ( $AMB$  και  $AM\Gamma$ ) (Δες τη Άσκηση 1.9.10 για το αντίστροφο).

**Μεσοκάθετο** του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ονομάζουμε την ευθεία που είναι κάθετος στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος (Σχήμα 1.8.2-II). Το προηγούμενο πόρισμα μπορεί επίσης να διατυπωθεί στην επόμενη μορφή.

**Πόρισμα 1.8.3** Για κάθε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με βάση  $AB$ , η κορυφή του  $\Gamma$  ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

Ισοδύναμη επίσης είναι και η διατύπωση:

**Πόρισμα 1.8.4** Κάθε σημείο  $P$  που ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $B$  ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

**Άσκηση 1.8.1** Υποθέτοντας ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία δεν τέμνονται (θα το δείξουμε αργότερα στο πόρισμα 1.10.8), δείξε ότι: Δοθέντων τριών διαφορετικών σημείων  $\{A, B, \Gamma\}$  στην ίδια ευθεία  $\varepsilon$ , δεν υπάρχει σημείο  $X$ , το οποίο να ισαπέχει από τα τρία αυτά σημεία.

## 1.9 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είναι λάθος το ότι η ισότητα είναι νόμος της φύσης. Η φύση δεν παράγει ισότητες. Η ανώτατη αρχή της είναι διάταξη και εξάρτηση.

*Vauvenargues, Αρχές και Στοχασμοί*

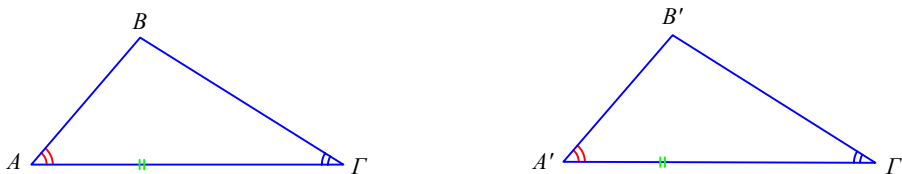
Εκτός από το βασικό Αξίωμα 1.6.2 ισότητας τριγώνων που αναφέρεται και ως ΠΠΠ-κριτήριο (πλευρά-πλευρά-πλευρά κριτήριο) ισότητας, ισχύουν και άλλα δύο κριτήρια ισότητας που προκύπτουν ως θεωρήματα βάσει του ΠΠΠ-κριτηρίου. Αυτά αναφέρονται ως ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας (πλευρά-γωνία-πλευρά κριτήριο) και ΓΠΓ-κριτήριο ισότητας (γωνία-πλευρά-γωνία κριτήριο).



Σχήμα 1.9.1: ΠΓΠ κριτήριο

**Πρόταση 1.9.1** (ΠΓΠ-κριτήριο) Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$ , που έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες ( $|AB| = |A'B'|$ ,  $|A\Gamma| = |A'\Gamma'|$ ) και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες επίσης ίσες ( $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$ ), είναι ίσα.

*Απόδειξη:* Τοποθέτησε τη γωνία  $A'$  πάνω στην  $A$  έτσι ώστε να συμπέσουν οι ημιευθείες  $AB$  και  $A'B'$  καθώς και οι  $A\Gamma$  και  $A'\Gamma'$  (Σχήμα 1.9.1). Αυτό είναι δυνατόν λόγω της υποτιθέμενης ισότητας των γωνιών στα  $A$  και  $A'$  αντιστοίχως. Λόγω της επίσης υποτιθέμενης ισότητας των μηκών  $|AB| = |A'B'|$ , θα συμπέσουν και τα  $B$  και  $B'$  (σύμφωνα με το Αξίωμα 1.3.3) και για τον ίδιο λόγο θα συμπέσουν και τα  $\Gamma$  και  $\Gamma'$ . Συνεπώς, θα συμπέσουν και οι πλευρές  $B\Gamma$  και  $B'\Gamma'$  και επομένως, τα μήκη τους θα είναι ίσα  $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$ . Η αλήθεια της πρότασης προκύπτει εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.9.2: ΓΠΓ-κριτήριο

**Πρόταση 1.9.2** (ΓΠΓ-κριτήριο) Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$  που έχουν δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες ( $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A'B'\Gamma'}$  και  $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{B'\Gamma'A'}$ ) και τις περιεχόμενες σε αυτές πλευρές επίσης ίσες ( $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$ ) είναι ίσα.

*Απόδειξη:* Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Τοποθέτησε τα τρίγωνα έτσι ώστε να συμπέσουν οι  $B\Gamma$  και  $B'\Gamma'$ , καθώς και οι γωνίες στα  $B$ ,  $B'$  και  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  (Σχήμα 1.9.2). Αυτό είναι δυνατόν λόγω του αξιώματος 1.4.2. Τότε θα συμπέσουν οι ευθείες  $BA$ ,  $B'A'$  καθώς και οι  $\Gamma A$ ,  $\Gamma'A'$ , άρα θα συμπέσουν και οι τομές τους που ορίζουν αντιστοίχα τα  $A$  και  $A'$ . Από αυτήν τη σύμπτωση έπεται ότι  $|BA| = |B'A'|$  και  $|\Gamma A| = |\Gamma'A'|$ . Η αλήθεια της πρότασης προκύπτει εφαρμόζοντας πάλι το ΠΠΠ-κριτήριο, ο.ε.δ.

**Πρόταση 1.9.3** Αν το τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές.

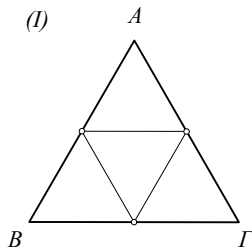
## 1.18 Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου

Ακόμη και αν όλα είναι γνωστά, η φροντίδα του ανθρώπου δεν είναι ακόμη πλήρης. Διότι το φαγητό και μόνο δεν θα τον κρατήσει υγιή. Πρέπει να κάνει ασκήσεις. Διότι η τροφή και οι ασκήσεις, ενώ έχουν αντίθετες ποιότητες, συνεργάζονται για την παραγωγή της υγείας.

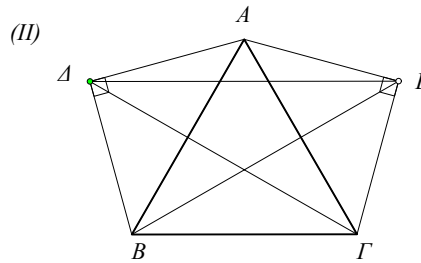
Ιπποκράτης

**Άσκηση 1.18.1** Προσδιόρισε τις γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου. Είναι ποτέ δυνατόν σε ένα τέτοιο τρίγωνο τα ίσα σκέλη να περικλείουν μια άλλη γωνία διαφορετική της ορθής;

**Άσκηση 1.18.2** Δείξε ότι το ύψος ενός ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι το μισό του μήκους της υποτεινουσας. Και αντίστροφα, αν το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίσο με το μισό της υποτεινουσας, τότε το τρίγωνο έχει τις δύο κάθετες πλευρές ίσες.



Σχήμα 1.18.1: Ισόπλευρο τρίγωνο



Ισότητα όλων των πλευρών

**Άσκηση 1.18.3** Δείξε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοπλεύρου τριγώνου  $AB\Gamma$  ορίζουν τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα (Σχήμα 1.18.1-I).

**Άσκηση 1.18.4** Στις πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου κατασκευάζουμε προς τα έξω ίσα ορθογώνια τρίγωνα (Σχήμα 1.18.1-II). Δείξε ότι σε μια τέτοια κατασκευή δεν είναι ποτέ δυνατόν τα μήκη των πέντε πλευρών που προκύπτουν να είναι ίσα.

**Άσκηση 1.18.5** Εάν στο σχήμα 1.18.1-II υποθέσουμε ότι τα μήκη  $\{|AA|, |AB|, |B\Gamma|, |\Gamma E|, |EA|\}$  είναι ίσα, τότε προσδιόρισε τις γωνίες στα  $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$ .

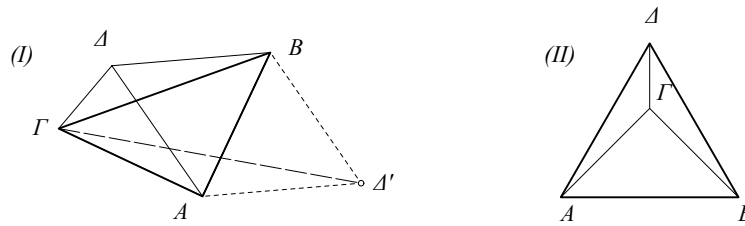
**Άσκηση 1.18.6** Εάν σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι διπλάσια της άλλης, τότε το τρίγωνο έχει γωνίες  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  και  $30^\circ$  και η μία κάθετος είναι διπλάσια της υποτεινουσας.

**Άσκηση 1.18.7** Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κάθετες πλευρές  $|A\Gamma| > |AB|$ , διάμεσο  $AM$  και ύψος  $AY$  από το  $A$ . Δείξε ότι η γωνία  $\widehat{YAM} = \beta - \gamma$  (δες άσκηση 2.14.15 για το αντίστροφο).

**Άσκηση 1.18.8** Σε τυχόν τρίγωνο  $AB\Gamma$  πάρε τα σημεία  $\Delta, E$  στην βάση  $B\Gamma$  έτσι ώστε  $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{EA\Gamma} = \widehat{B}$ . Δείξε ότι το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές.

**Άσκηση 1.18.9** Δοθισών δύο τεμνομένων ευθειών  $a, \beta$  και σημείου  $P$ , να αχθεί διά του  $P$  ευθεία  $\varepsilon$  έτσι ώστε οι τρεις ευθείες  $a, \beta, \varepsilon$  να σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

**Άσκηση 1.18.10** Δοθέντων δύο σημείων  $A, B$  και ευθείας  $\varepsilon$  να αχθούν δύο ευθείες  $a, \beta$ , αντίστοιχα, διά των  $A, B$ , έτσι ώστε οι τρεις ευθείες  $a, \beta, \varepsilon$  να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.



Σχήμα 1.18.2: Υπολογισμοί γωνιών

**Άσκηση 1.18.11** Στην κάθετη πλευρά  $AB$  ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  και προς τη μεριά του  $\Gamma$  κατασκευάζουμε ισόπλευρο  $AB\Delta$  (Σχήμα 1.18.2-I). Βρες το μέτρο της γωνίας  $\widehat{B\Delta\Gamma}$ . Παρόμοια προσδιόρισε το μέτρο της  $\widehat{B\Delta'\Gamma}$ , όπου το  $\Delta'$  είναι το συμμετρικό του  $\Delta$  ως προς  $AB$ . Τέλος προσδιόρισε και τη γωνία των (προεκτάσεων των) των ευθειών  $\{A\Gamma, B\Delta\}$ .

**Άσκηση 1.18.12** Στην υποτεινούσα  $AB$  ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  και προς τη μεριά της ορθής κατασκευάζουμε ισόπλευρο  $AB\Delta$  (Σχήμα 1.18.2-II). Βρες το μέτρο της γωνίας  $\widehat{B\Delta\Gamma}$ .

**Άσκηση 1.18.13** Δείξε ότι, αν τα τρία σημεία  $A, B, \Gamma$  ικανοποιούν τη  $|B\Gamma| = |BA| + |A\Gamma|$  τότε περιέχονται σε μία ευθεία.

**Άσκηση 1.18.14** Δείξε ότι για κάθε ευθεία  $\varepsilon$ , σημείο  $A$  εκτός αυτής και θετικό αριθμό  $\delta$ , υπάρχουν το πολύ δύο ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  με  $B$  επί της  $\varepsilon$ , μήκους  $|BA| = \delta$ .

**Άσκηση 1.18.15** Μπορεί να χωρισθεί ένα σκαληνό τρίγωνο με μία ευθεία σε δύο ίσα τρίγωνα;

**Άσκηση 1.18.16** Με πόσους τρόπους μπορεί να χωρισθεί με μια ευθεία ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε δύο άλλα ίσα τρίγωνα;

**Άσκηση 1.18.17** Σε τρίγωνο με βάση  $a = |B\Gamma|$ , δείξε ότι  $b + c - a < 2|A\Delta|$ , όπου  $\Delta$  οποιοδήποτε σημείο της βάσης.

**Άσκηση 1.18.18** Δείξε ότι, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα  $EZ$ , περιεχόμενο εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό τριγώνου  $AB\Gamma$ , είναι μικρότερο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου.

**Άσκηση 1.18.19** Η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , που έχει την πλευρά  $|AB| > |A\Gamma|$ . Δείξε ότι  $|A\Delta| < |AB|$ . Κατόπιν θεώρησε το σημείο  $E$  της  $AB$ , έτσι ώστε  $|AE| = |A\Delta|$ . Δείξε ότι η γωνία  $\widehat{\Delta EB}$  είναι πάντοτε αμβλεία και προσδιόρισε το μέτρο της συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου. Δείξε τέλος ότι  $|B\Delta| > |\Gamma\Delta|$ .

**Άσκηση 1.18.20** Στο ορθογώνιο, στο  $A$ , τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με άνισες καθέτους, οι  $AY, A\Delta$  και  $AM$  είναι αντίστοιχα το ύψος, η διχοτόμος και η διάμεσος. Δείξε ότι η  $A\Delta$  είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{YAM}$ .

**Άσκηση 1.18.21** Στις πλευρές (ημιευθείες) γωνίας  $\widehat{XOX'}$  ορίζουμε σημεία  $A, B$  της  $OX$  και  $A', B'$  της  $OX'$ , έτσι ώστε  $|OA| = |OA'|$  και  $|OB| = |OB'|$ . Δείξε ότι το σημείο τομής  $\Delta$  των ευθειών  $AB'$  και  $A'B$  είναι επί της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{XOX'}$ .

**Άσκηση 1.18.22** Δοθέντων τριών μη συνευθειακών σημείων προσδιόρισε ευθεία από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν την ίδια απόσταση (τρεις λύσεις).

**Άσκηση 1.18.23** Δοθέντων δύο ίσων ευθυγράμμων τμημάτων  $AB, A\Gamma$ , να βρεθεί σημείο  $\Delta$  επί δοθείσας ευθείας  $\varepsilon$  έτσι ώστε οι γωνίες  $\widehat{A\Delta B}$  και  $\widehat{A\Delta\Gamma}$  να είναι ίσες.

**Άσκηση 1.18.24** Δείξε ότι, για κάθε σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , διαφορετικό από τα  $B$  και  $\Gamma$ , υπάρχει ευθεία  $\Delta X$  που αποτελείται από τις ευθείες των άλλων πλευρών τριγώνου με γωνίες ίσες με αυτές του  $AB\Gamma$ . Δείξε ότι, για κάθε τέτοιο  $\Delta$ , υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές ευθείες  $\Delta X$  που έχουν αυτή την ιδιότητα.

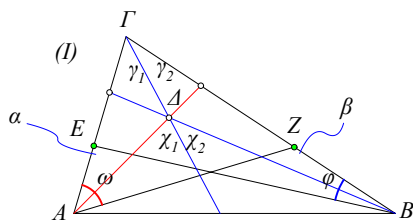
**Άσκηση 1.18.25** Την κορυφή  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  ενώνουμε με  $\mu$  διαφορετικά σημεία της απέναντι πλευράς. Την κορυφή  $B$  ενώνουμε επίσης με  $\nu$  διαφορετικά σημεία της απέναντι πλευράς. Πόσα συνολικά τρίγωνα περιέχονται στο δημιουργούμενο σχήμα;

Υπόδειξη:  $\frac{(\mu+1)(\nu+1)(\mu+\nu+2)}{2}$ .

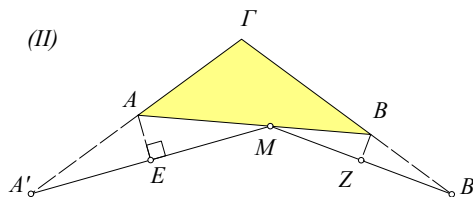
**Άσκηση 1.18.26** Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει πλευρές  $|A\Gamma| > |AB|$  και επί της πλευράς  $A\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $B'$ , έτσι ώστε  $|AB'| = |AB|$ . Δείξε ότι η γωνία  $B'B\Gamma = \frac{\beta-\gamma}{2}$ . Δείξε επίσης ότι η γωνία αυτή ισούται με την γωνία μεταξύ της διχοτόμου και του ύψους του τριγώνου από το  $A$ .

**Άσκηση 1.18.27** Δείξε ότι, για κάθε σημείο  $X$ , μη περιεχόμενο στις τεμνόμενες στο σημείο  $O$  ευθείες  $\{a, \beta\}$  και κάθε ευθεία  $\gamma$ , διερχόμενη από το  $X$ , η  $\gamma$  τέμνει τουλάχιστον μία από τις δύο ευθείες  $\{a, \beta\}$ .

**Άσκηση 1.18.28** Αν  $Y, \Delta, M$  συμβολίζουν αντίστοιχα τα ίχνη στην  $B\Gamma$  του ύψους, διχοτόμου και διαμέσου του τριγώνου  $AB\Gamma$ , δείξε ότι το  $\Delta$  είναι πάντα μεταξύ των  $Y$  και  $M$ . Δείξε επίσης ότι, αν δύο από αυτά τα ίχνη συμπίπτουν, τότε συμπίπτουν και τα τρία και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Σχήμα 1.18.3:  $\widehat{A\Delta B} = a + \beta$



Κατασκευή σημείου  $M$

**Άσκηση 1.18.29** Στις πλευρές  $GA, GB$  τριγώνου  $AB\Gamma$  επιλέγουμε αντίστοιχα σημεία  $E$  και  $Z$  και φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών  $\omega = \widehat{GAZ}$  και  $\phi = \widehat{EB\Gamma}$  που τέμνονται στο σημείο  $\Delta$ . Δείξε ότι, για τις γωνίες  $a = \widehat{AEB}$  και  $\beta = \widehat{AZB}$ , ισχύει  $a + \beta = 2\widehat{A\Delta B}$ .

Υπόδειξη: Έστω ότι η  $G\Delta$  χωρίζει τις  $\gamma = \widehat{A\Gamma B}$  και  $\widehat{A\Delta B}$ , αντίστοιχα, σε δύο μέρη  $\gamma_1, \gamma_2$  και  $\chi_1, \chi_2$  (Σχήμα 1.18.3-I). Δες ότι  $a + \beta = 2\gamma + \omega + \phi$ ,  $\chi_1 = \gamma_1 + \frac{\omega}{2}$ ,  $\chi_2 = \gamma_2 + \frac{\phi}{2}$ .

**Άσκηση 1.18.30** Να βρεθεί σημείο  $M$  επί της πλευράς  $AB$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , έτσι ώστε  $|MA| + |AG| = |MB| + |BG|$ .

Υπόδειξη: Πάρε  $AA'$  ίσο με  $AM$  στην προέκταση της  $GA$  και  $BB'$  ίσο με  $BM$  στην προέκταση της  $GB$  (Σχήμα 1.18.3-II). Το μήκος  $|GA'| = |GB'|$  είναι γνωστό και ίσο με την ημiperίμετρο του τριγώνου. Τα τρίγωνα  $AA'M$  και  $BB'M$  είναι ισοσκελή και κατασκευάζονται από τα δεδομένα.

**Άσκηση 1.18.31** Δείξε ότι, εάν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  περιέχεται εξ ολοκλήρου στο τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ , τότε κάθε πλευρά του  $AB\Gamma$  είναι μικρότερη της μεγαλύτερης πλευράς του  $A'B'\Gamma'$  και κάθε πλευρά του  $A'B'\Gamma'$  είναι μεγαλύτερη της μικρότερης του  $AB\Gamma$ .

**Άσκηση 1.18.32** Υπάρχει ευθεία τέμνουσα όλες τις πλευρές τριγώνου  $AB\Gamma$  υπό την ίδια γωνία  $\omega$ ;



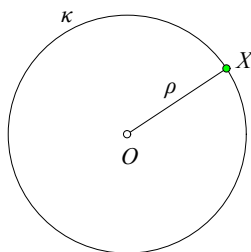
### 2.1 Ο κύκλος, η διάμετρος, η χορδή

Οι πιο πολλοί ζουν, είτε φυσικά είτε διανοητικά είτε ηθικά, σε ένα πολύ περιορισμένο κύκλο του συνόλου των δυνατοτήτων τους. *Κάνουν χρήση* ενός πολύ μικρού μέρους της συνείδησης και των ψυχικών τους δυνάμεων εν γένει. Μοιάζοντας πολύ με εκείνον που απ' όλες τις δυνατότητες του σώματός του, συνηθίζει να χρησιμοποιεί και να κινεί μόνο το μικρό του δάχτυλο.

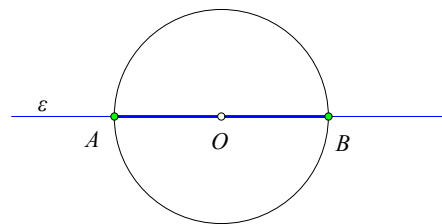
*William James, Γράμμα στον Lutoslawski*

Μετά την ευθεία και τα παράγωγά της, δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα, τις τεθλασμένες και τα πολύγωνα, ο κύκλος είναι η απλούστερη καμπύλη που, όπως και η ευθεία, έχει σε όλα τα σημεία της μία ομοιογένεια αλλά, σε αντίθεση με την ευθεία, δεν εκτείνεται στο άπειρο. Η ευθεία και ο κύκλος είναι επίσης τα σχήματα για τα οποία διαθέτουμε απλούστατα όργανα σχεδίασης, τον *κανόνα* και το *διαβήτη*. Εάν είχαμε κάποιο τρίτο, εξίσου απλό, εργαλείο σχεδιασμού μιας άλλης κατηγορίας καμπύλων, σίγουρα θα συγκαταλέγαμε και αυτή την κατηγορία στη στοιχειώδη ευκλείδεια γεωμετρία.

**Κύκλος ακτίνας**  $\rho$  λέγεται το σχήμα του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία  $X$  που απέχουν από ένα σταθερό σημείο  $O$  απόσταση  $\rho$ . Το σημείο  $O$  λέγεται **κέντρο** του κύκλου. **Ακτίνα**  $OX$  του κύκλου ονομάζουμε και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το κέντρο  $O$  και το σημείο του κύκλου



Σχήμα 2.1.1: Κύκλος  $\kappa(O, \rho)$ ,

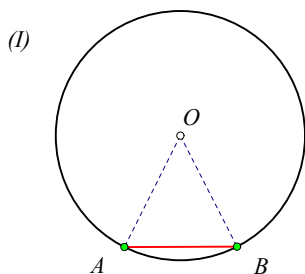


Διάμετρος  $AB$

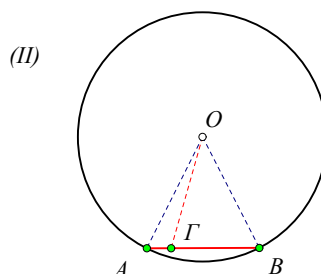
$X$ . Συχνά επίσης συμβολίζουμε αυτόν τον κύκλο με  $O(\rho)$  ή με  $\kappa(O, \rho)$ . **Εσωτερικό** του κύκλου ονομάζουμε το σύνολο των σημείων  $Y$  των οποίων η απόσταση από το κέντρο  $O$  είναι μικρότερη της ακτίνας:



$|OY| < \rho$ . **Εξωτερικό** του κύκλου ονομάζουμε το σύνολο των σημείων  $Z$  των οποίων η απόσταση από το κέντρο  $O$  είναι μεγαλύτερη της ακτίνας:  $|OZ| > \rho$ . Από το Αξίωμα 1.3.3 των ευθειών, συνάγεται ότι κάθε ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το κέντρο του  $O$ , συναντά τον κύκλο σε δύο σημεία ακριβώς  $A$  και  $B$ . Τέτοια σημεία του κύκλου ονομάζονται **αντιδιαμετρικά** και το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , που ορίζεται από αυτά, ονομάζεται **διάμετρος** του κύκλου. Προφανώς, το μέσον κάθε διαμέτρου είναι το κέντρο  $O$  και το μήκος της είναι διπλάσιο της ακτίνας  $|AB| = 2\rho$ . Δύο κύκλοι είναι/λέγονται **ίσοι**, όταν οι ακτίνες τους είναι ίσες. **Χορδή** κύκλου λέγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , του οποίου τα



Σχήμα 2.1.2: (α) Χορδή κύκλου,



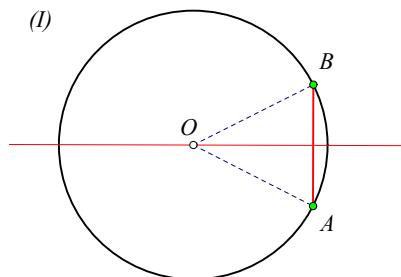
(β) Κοινά σημεία χορδής και κύκλου

άκρα είναι επί του κύκλου. Η διάμετρος είναι μια ειδική περίπτωση χορδής. Κάθε χορδή  $AB$  που δεν είναι διάμετρος ορίζει, μαζί με το κέντρο  $O$  του κύκλου, ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AOB$  (Σχήμα 2.1.2-I), τα σκέλη του οποίου έχουν μήκος  $\rho$ .

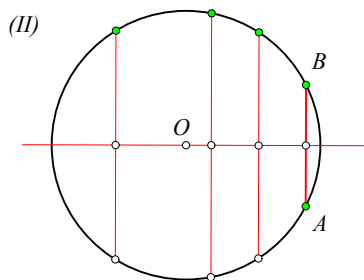
**Πρόταση 2.1.1** Μια χορδή  $AB$  δεν περιέχει άλλα σημεία του κύκλου εκτός των άκρων της  $A$  και  $B$ .

*Απόδειξη:* Αν η χορδή περιείχε ένα ακόμη σημείο  $\Gamma$  του κύκλου (Σχήμα 2.1.2-II), τότε το  $BO\Gamma$  θα ήταν ισοσκελές και το  $A$  θα ήταν στην προέκταση της βάσης του, άρα, κατά το Πόρισμα 1.10.7 θα ισχυε  $\rho = |OA| < |OG| = \rho$  που είναι άτοπο, ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.1.1** Το κέντρο του κύκλου περιέχεται στην μεσοκάθετο πάσης χορδής αυτού.



Σχήμα 2.1.3: Μέσον χορδής



Μέσα παραλλήλων χορδών

*Απόδειξη:* Προφανώς, αφού το κέντρο ισαπέχει από τα άκρα της χορδής (Σχήμα 2.1.3-I), θα περιέχεται στην μεσοκάθετο αυτής (Πόρισμα 1.9.1), ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.1.2** Η κάθετος από το κέντρο προς τη χορδή κύκλου διέρχεται από το μέσον αυτής.

**Πόρισμα 2.1.3** Τα μέσα παραλλήλων χορδών κύκλου περιέχονται στην διάμετρο την κάθετη στις χορδές αυτές.

*Απόδειξη:* Φέρνουμε από το κέντρο του κύκλου κάθετη προς μία τέτοια χορδή (Σχήμα 2.1.3-II). Αυτή θα περνά από το μέσον της χορδής και θα είναι και κάθετος σε όλες τις παράλληλες χορδές, άρα θα διέρχεται και από το μέσον αυτών (Πόρισμα 2.1.2), ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.1.4** Κάθε διάμετρος του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του.

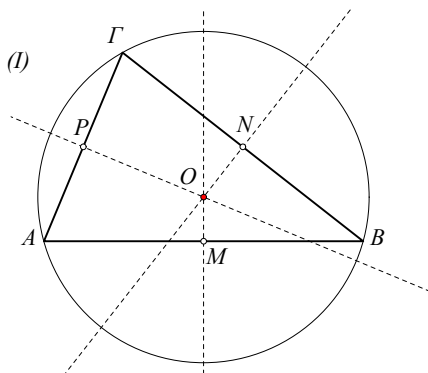
**Πόρισμα 2.1.5** Το κέντρο του κύκλου είναι και κέντρο συμμετρίας του.

**Άσκηση 2.1.1** Δείξε ότι ένας άξονας συμμετρίας του κύκλου, περνά αναγκαστικά από το κέντρο του. Δείξε επίσης ότι, ένα κέντρο συμμετρίας του κύκλου συμπίπτει αναγκαστικά με το κέντρο του.

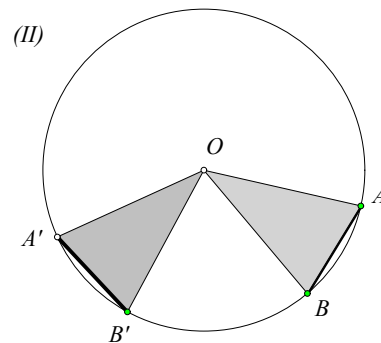
**Πρόταση 2.1.2** Το μήκος χορδής κύκλου ακτίνας  $\rho$  είναι μικρότερο ή ίσο του μήκους  $2\rho$  της διαμέτρου. Εάν η χορδή έχει μήκος  $2\rho$  τότε συμπίπτει με διάμετρο του κύκλου.

*Απόδειξη:* Αν  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $\delta = |AB|$  το μήκος της χορδής και τα σημεία  $A, B, O$  δεν είναι στην ίδια ευθεία, τότε σχηματίζεται τρίγωνο  $ABO$ . Το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές και τα σκέλη του έχουν μήκος  $\rho$ . Συνεπώς, κατά την τριγωνική ανισότητα,  $\delta = |AB| < |OA| + |OB| = 2\rho$ . Αυτή η ανισότητα επίσης συνεπάγεται ότι δεν μπορεί η χορδή να έχει μήκος  $2\rho$  και τα σημεία  $A, B$  και  $O$  να μην είναι στην ίδια ευθεία. Τούτο αποδεικνύει το δεύτερο ισχυρισμό, ο.ε.δ.

**Θεώρημα 2.1.1** Για κάθε τριάδα σημείων  $A, B$  και  $\Gamma$ , μη περιεχομένων στην ίδια ευθεία, υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος διερχόμενος από αυτά.



Σχήμα 2.1.4: Περιγεγραμμένος κύκλος ( $AB\Gamma$ )



Ίσες χορδές και ίσα ισοσκελή τρίγωνα

*Απόδειξη:* Οι μεσοκάθετοι των ευθυγράμμων τμημάτων  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα τέμνονται σε σημείο  $O$  (Σχήμα 2.1.4-I). Αν δεν ετέμνοντο, τότε θα ήταν παράλληλες και από το  $B$  θα είχαμε τις κάθετες  $BM, BN$  σε δύο παράλληλες, άρα τα  $M, N$  και  $B$  συνευθειακά, που είναι άτοπο. Από την πρώτη μεσοκάθετο, έχουμε (Πόρισμα 1.9.1) ότι  $|OA| = |OB|$  και από τη δεύτερη μεσοκάθετο ότι  $|OB| = |OG|$ . Συνάγεται λοιπόν ότι και  $|OA| = |OG|$ , άρα το  $O$  είναι και επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος  $A\Gamma$ . Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι οι τρεις μεσοκάθετοι στις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  διέρχονται από το ίδιο σημείο  $O$ , το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του  $|OA| = |OB| = |OG| = \rho$ . Συνεπώς, ο κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$  διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Το ότι ο κύκλος αυτός είναι μοναδικός, προκύπτει με το ίδιο επιχείρημα. Κάθε άλλος κύκλος που θα περνούσε από τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$ , θα είχε το κέντρο του επί της μεσοκαθέτου των πλευρών του τριγώνου, αφού αυτές θα ήσαν τότε χορδές του κύκλου (Πόρισμα 2.1.1). Επομένως, το κέντρο του και η ακτίνα του θα συνέπιπταν με τα αντίστοιχα του κύκλου που φτιάξαμε προηγουμένως, ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.1.6** Για κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος, που διέρχεται από τις κορυφές του.

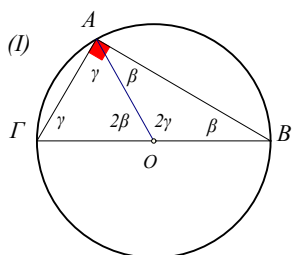
Τον κύκλο του προηγουμένου πορίσματος ονομάζουμε **περιγεγραμμένο** κύκλο του τριγώνου ή **περίκυκλο**. Το κέντρο αυτού του κύκλου λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου και, όπως είδαμε στην απόδειξη παραπάνω, συμπίπτει με το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου. Συχνά τον κύκλο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  συμβολίζουμε με  $(AB\Gamma)$ .

**Άσκηση 2.1.2** Δείξε ότι, ίσες χορδές  $AB$  και  $A'B'$  στον ίδιο κύκλο με κέντρο  $O$ , ορίζουν ίσα (ισοσκελή) τρίγωνα  $AOB$  και  $A'OB'$  (Σχήμα 2.1.4-II).

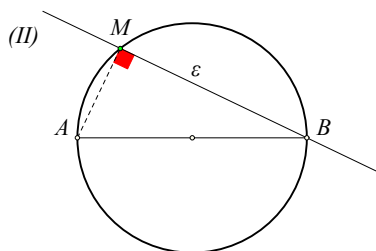
**Πόρισμα 2.1.7** Αν σημείο  $A$  βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα  $BΓ$  υπό ορθή γωνία, δηλαδή  $|\widehat{BAΓ}| = 90^\circ$ , τότε περιέχεται στον κύκλο με διάμετρο  $BΓ$ .

Απόδειξη: Αν το  $BΓ$  φαίνεται υπό ορθή γωνία από το  $A$ , τότε, κατά το Πόρισμα 1.15.18, η διάμεσος από το  $A$  επί τη  $BΓ$  θα είναι το ήμισυ αυτής. Συνεπώς, τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $Γ$  θα είναι στον κύκλο με διάμετρο  $BΓ$ , ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.1.8** Για κάθε σημείο  $A$  του κύκλου με διάμετρο  $BΓ$ , η γωνία  $\widehat{BAΓ}$  είναι ορθή. Ισοδύναμα: μία διάμετρος φαίνεται από κάθε σημείο του κύκλου (πλην των άκρων της) υπό ορθή γωνία. Αντίστροφα, αν μία χορδή κύκλου φαίνεται από ένα σημείο του υπό ορθή γωνία, τότε είναι διάμετρος του κύκλου.



Σχήμα 2.1.5: Διάμετροι φαίνονται υπό ορθή γωνία,



Προβολή σε ευθεία

Απόδειξη: Πράγματι, αν η  $BΓ$  είναι διάμετρος και το  $A$  σημείο του κύκλου (διαφορετικό των  $B$  και  $Γ$ ), τότε δημιουργούνται τα ισοσκελή τρίγωνα  $OAB$  και  $OAG$  με γωνίες στην βάση αντίστοιχα τις γωνίες  $\beta$  και  $\gamma$  του τριγώνου  $ABΓ$  (Σχήμα 2.1.5-I). Το άθροισμα των (εξωτερικών) γωνιών των δύο ισοσκελών στο  $O$  είναι  $2\beta + 2\gamma = 180^\circ$  (Πόρισμα 1.15.2), άρα  $\beta + \gamma = 90^\circ$ , που δείχνει ότι το  $ABΓ$  είναι ορθογώνιο στο  $A$ . Αντίστροφα, αν η χορδή  $BΓ$  φαίνεται υπό ορθή γωνία από το  $A$ , τότε, κατά το προηγούμενο πόρισμα, το  $A$  θα είναι στον κύκλο με διάμετρο  $BΓ$ , ο οποίος έχοντας τρία κοινά σημεία με το δοθέντα (τα  $A$ ,  $B$  και  $Γ$ ), θα πρέπει να συμπίπτει με αυτόν, ο.ε.δ.

**Άσκηση 2.1.3** Δείξε ότι, από δύο χορδές κύκλου  $\alpha$  και  $\beta$ , η μεγαλύτερη απέχει τη μικρότερη απόσταση από το κέντρο.

**Άσκηση 2.1.4** Δείξε ότι, αν τρία σημεία  $X$ ,  $Y$  και  $Z$  είναι επί κύκλου  $\kappa$ , τότε και τα συμμετρικά τους  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  (ως προς άξονα ή σημείο) θα είναι επί κύκλου  $\kappa'$  που είναι ίσος με τον  $\kappa$ .

**Άσκηση 2.1.5** Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων κύκλων  $\kappa$  που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ ;

**Άσκηση 2.1.6** Έστω ότι  $A$  και  $B$  είναι δύο σταθερά σημεία και  $\varepsilon$  ευθεία διερχόμενη διά του  $B$ . Έστω επίσης  $M$  η προβολή του  $A$  επί της  $\varepsilon$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του  $M$  καθώς η ευθεία  $\varepsilon$  περιστρέφεται περί το  $B$ .

Υπόδειξη: Όταν η  $\varepsilon$  δεν συμπίπτει με την  $AB$  ή την κάθετο αυτής στο  $B$ , τότε το τρίγωνο  $ABM$  (Σχήμα 2.1.5-II) είναι ορθογώνιο με σταθερά υποτεινούσα  $AB$ , άρα κατά το προηγούμενο πόρισμα το σημείο  $M$  θα είναι επί του κύκλου με διάμετρο  $AB$ .

**Άσκηση 2.1.7** Δίδονται δύο συγκεντρικοί κύκλοι  $\alpha$  και  $\beta$ . Δείξε ότι, ευθεία  $\varepsilon$  τέμνουσα και τους δύο κύκλους, ορίζει ευθύγραμμο τμήματα  $AB$ ,  $ΓΔ$ , περιεχόμενα μεταξύ των κύκλων, που είναι ίσα.

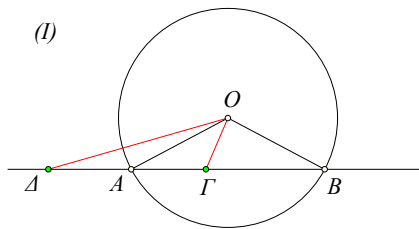
**Άσκηση 2.1.8** Δίδεται ευθεία  $\varepsilon$  και δύο σημεία  $A$ ,  $B$  εκτός αυτής. Να βρεθεί σημείο  $Γ$  της ευθείας, το οποίο να ισαπέχει από τα  $A$  και  $B$ . Έχει το πρόβλημα πάντοτε λύση;

## 2.2 Κύκλος και ευθεία

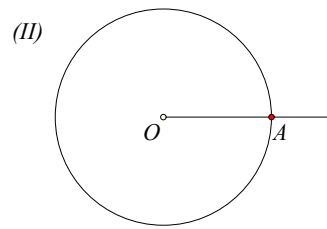
Όρος απαραίτητος για την ευτυχία είναι η δραστηριότητα: ο άνθρωπος πρέπει ν' ασχολείται με κάτι και, ει δυνατόν, να δημιουργεί ή, τουλάχιστον, να μαθαίνει κάτι.

*Arthur Schopenhauer, Παρανέσεις και πρακτικές αρχές*

Εξετάζουμε σε αυτή την παράγραφο τη σχετική θέση μιας ευθείας και ενός κύκλου. Το κλειδί είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία. Αυτή η απόσταση, συσχετιζόμενη με την ακτίνα του κύκλου, καθορίζει αν θα έχουμε ένα, δύο ή κανένα κοινό σημείο των δύο σχημάτων.



Σχήμα 2.2.1: Τομή ευθείας και κύκλου



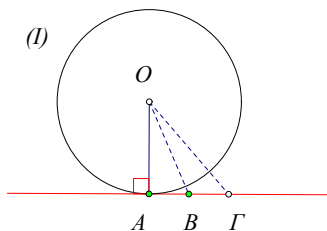
Τομή κύκλου και ημιευθείας

**Πρόταση 2.2.1** Μια ευθεία  $AB$  περιέχει το πολύ δύο σημεία ενός κύκλου.

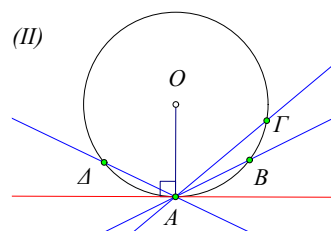
*Απόδειξη:* Δείχνουμε ότι μία ευθεία δεν μπορεί να περιέχει τρία ή περισσότερα σημεία. Πράγματι, αν η ευθεία είχε τρία κοινά σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  με τον κύκλο, τότε ένα από τα τρία θα ήταν μεταξύ των δύο άλλων, τα οποία θα όριζαν μία χορδή του κύκλου (Σχήμα 2.2.1-I). Έτσι θα είχαμε χορδή που θα περιείχε και τρίτο σημείο του κύκλου. Κάτι που αποκλείσαμε με την Πρόταση 2.1.1, ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.2.1** Κάθε ημιευθεία με άκρο που συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου τέμνει τον κύκλο σε ένα ακριβώς σημείο (Σχήμα 2.2.1-II).

**Εφαπτόμενη** του κύκλου λέγεται μία ευθεία που έχει ένα και μόνο κοινό σημείο με αυτόν. Το σημείο αυτό λέγεται **σημείο επαφής** του κύκλου και της ευθείας.



Σχήμα 2.2.2: Εφαπτόμενη κύκλου

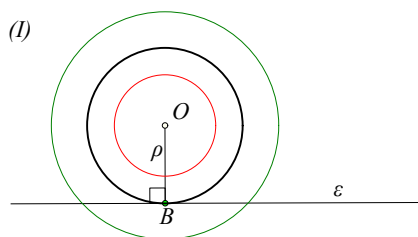


Ευθείες διά του σημείου A του κύκλου

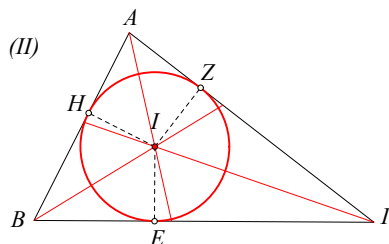
**Θεώρημα 2.2.1** Μία ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο  $A$  με κύκλο είναι κάθετη στο  $A$  στην ακτίνα  $OA$  του κύκλου.

*Απόδειξη:* Διά της εις άτοπον απαγωγής. Αν δεν ήταν κάθετη, τότε έστω  $OB$  η κάθετη και όρισε το  $\Gamma$  επί της ευθείας έτσι ώστε το  $B$  να είναι το μέσον του  $A\Gamma$  (Σχήμα 2.2.2-I). Τότε τα τρίγωνα  $OBA$  και  $OBF$  θα ήταν ορθογώνια και ίσα, ως έχοντα την  $OB$  κοινή τις  $BA$  και  $B\Gamma$  ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες  $\widehat{OBA}$  και  $\widehat{OBF}$  ίσες ως ορθές. Τότε το  $OAG$  θα ήταν ισοσκελές και θα είχαμε  $|OG| = |OA| = \rho$ , δηλαδή το  $\Gamma$  θα ήταν επί του κύκλου και η ευθεία θα είχε και άλλο κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός του  $A$ , άτοπο, ο.ε.δ.

**Πόρισμα 2.2.2** Όλες οι ευθείες που διέρχονται από σημείο  $A$  κύκλου, εκτός της κάθετου της ακτίνας  $OA$  στο  $A$ , τέμνουν τον κύκλο σε ένα δεύτερο σημείο  $B$ . Η κάθετος αυτή είναι η μία και μοναδική εφαπτόμενη του κύκλου στο  $A$  (Σχήμα 2.2.2-Ι).



Σχήμα 2.2.3: Τομή ευθείας και κύκλου



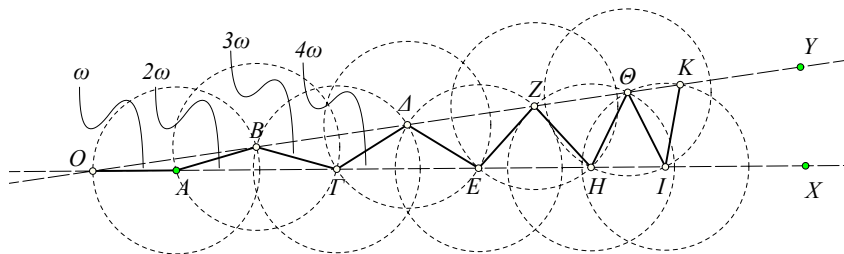
Εγγεγραμμένος του τριγώνου κύκλος

**Πόρισμα 2.2.3** Δοθείσης ευθείας  $\varepsilon$  και σημείου  $O$  εκτός αυτής, ο κύκλος  $O(\rho)$  τέμνει την ευθεία τότε και μόνον, όταν  $\rho > |OB|$  όπου το  $B$  είναι η προβολή του  $O$  επί της  $\varepsilon$  ( $|OB|$  είναι η απόσταση του σημείου  $O$  από την ευθεία  $\varepsilon$ ). Όταν  $\rho = |OB|$ , τότε ο κύκλος εφάπτεται της ευθείας στο  $B$ . Τέλος όταν  $\rho < |OB|$ , ο κύκλος δεν τέμνει την ευθεία (Σχήμα 2.2.3-Ι).

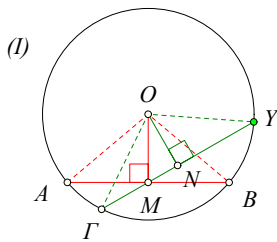
**Θεώρημα 2.2.2** Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου  $AB\Gamma$  διέρχονται από κοινό σημείο  $I$  που είναι το κέντρο κύκλου  $I(r)$  εφαιπομένου ταυτόχρονα και στις τρεις πλευρές του.

*Απόδειξη:* Έστω  $I$  το σημείο τομής των δύο διχοτόμων του τριγώνου και συγκεκριμένα των διχοτόμων των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  (Σχήμα 2.2.3-ΙΙ). Θα δείξουμε ότι και η τρίτη διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  διέρχεται από το  $I$ . Πράγματι, κατά την Πρόταση 1.15.16 οι αποστάσεις του  $I$  από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{B}$ :  $IE$  και  $IH$  θα είναι ίσες. Παρόμοια και οι αποστάσεις του  $I$  από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ :  $IE$  και  $IZ$  θα είναι ίσες. Συνεπώς, οι τρεις αποστάσεις:  $IE$ ,  $IH$  και  $IZ$  θα είναι ίσες μεταξύ τους, άρα ακτίνες του κύκλου με κέντρο  $I$  και ακτίνα  $r = |IE|$ . Η ισότητα των αποστάσεων  $IH$  και  $IZ$  από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{A}$  δείχνει ότι το  $I$  ευρίσκεται και επί της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{A}$  (Πρόταση 1.15.16). Η καθετότητα των πλευρών στα άκρα των ακτίνων αυτών του κύκλου δείχνει (2.2.2) ότι ο κύκλος εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου, ο.ε.δ.

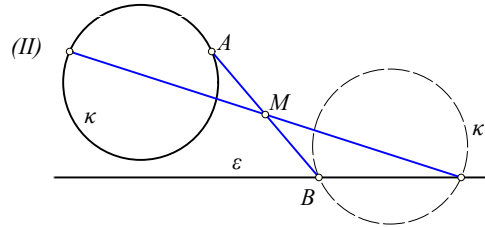
Το σημείο  $I$  που εξασφαλίζει το προηγούμενο θεώρημα, λέγεται **έγκεντρο του τριγώνου**. Ο κύκλος με κέντρο το  $I$ , που εφάπτεται των τριών πλευρών του τριγώνου, λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Η ακτίνα του  $r = |IE| = |IZ| = |IH|$  ισούται με την απόσταση του  $I$  από μία οποιαδήποτε από τις πλευρές του. Σημείωσε ότι, από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων  $EIG$ ,  $ZIG$ , προκύπτει ότι  $|GE| = |GZ|$  και ανάλογα  $|BE| = |BH|$ ,  $|AH| = |AZ|$ .

Σχήμα 2.2.4: Πολλαπλάσια γωνίας  $\omega$

**Άσκηση 2.2.1** Στις πλευρές γωνίας  $\widehat{XOY}$  ορίζουμε εναλλάξ σημεία  $A, B, \Gamma, \dots$  σε ίσες αποστάσεις  $|OA| = |AB| = |B\Gamma| = \dots$ . Δείξε ότι, στα ισοσκελή τρίγωνα που προκύπτουν, οι γωνίες στη βάση είναι  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ , όπου  $\omega = |\widehat{XOY}|$ , (Σχήμα 2.2.4). Μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρα τέτοια τρίγωνα;



Σχήμα 2.2.5: Ελάχιστη χορδή διά σημείου



Εφαρμογή της συμμετρίας

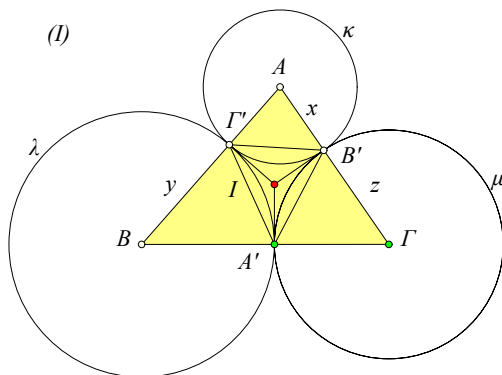
**Άσκηση 2.2.2** Δείξε ότι η ελάχιστου μήκους χορδή  $XY$  κύκλου  $\kappa(O, \rho)$  που διέρχεται από σταθερό σημείο  $M$  (διαφορετικό του  $O$ ) στο εσωτερικό του κύκλου, είναι η κάθετη  $AB$  στην  $OM$  (Σχήμα 2.2.5-I).

Υπόδειξη: Το τρίγωνο  $OMN$  έχει υποτείνουσα  $|OM| > |ON|$ , άρα το ισοσκελές  $OAB$  έχει μικρότερη βάση από αυτήν του ισοσκελούς  $OXY$  (Άσκηση 2.1.3).

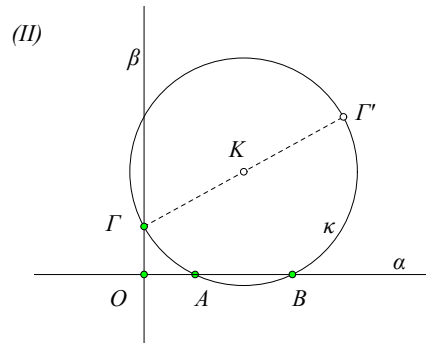
Συχνά η απόσταση  $|OM|$ , του μέσου της χορδής από το κέντρο, αναφέρεται ως **απόστημα** της χορδής.

**Άσκηση 2.2.3** Έστω κύκλος  $\kappa$  και σημείο  $M$ . Δείξε ότι, τα συμμετρικά  $X'$  των σημείων  $X$  του κύκλου  $\kappa$  ως προς  $M$ , περιέχονται σε κύκλο  $\kappa'$  ίσο προς τον  $\kappa$ .

**Άσκηση 2.2.4** Έστω κύκλος  $\kappa$ , σημείο  $M$  και ευθεία  $\varepsilon$ . Κατασκεύασε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με άκρα αντίστοιχα στον  $\kappa$  και την  $\varepsilon$  και μέσον το  $M$  (Σχήμα 2.2.5-II). Πότε το πρόβλημα (δεν) έχει λύση;



Σχήμα 2.2.6: Τρεις εφαπτόμενοι κύκλοι



Ελαχιστοποίηση διαμέτρου

**Άσκηση 2.2.5** Κατασκεύασε κύκλους  $\kappa, \lambda, \mu$  που ανά δύο εφάπτονται και έχουν αντίστοιχα κέντρα στις κορυφές  $A, B$  και  $\Gamma$  τριγώνου (Σχήμα 2.2.6-I). Δείξε ότι η ημπερίμετρος  $\tau$  του τριγώνου και οι αντίστοιχες ακτίνες  $x, y, z$  αυτών των κύκλων ικανοποιούν τις ισότητες (με  $a = |B\Gamma|$ ,  $b = |\Gamma A|$ ,  $c = |AB|$ ):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2}(a + b + c), & y &= \frac{1}{2}(c + a - b) = \tau - b, \\ x &= \frac{1}{2}(b + c - a) = \tau - a, & z &= \frac{1}{2}(a + b - c) = \tau - c. \end{aligned}$$

**Άσκηση 2.2.6** Στην προηγούμενη άσκηση, δείξε ότι τα σημεία επαφής των κύκλων  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$  είναι επί των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$ , του οποίου το έγκεντρο  $I$  συμπίπτει με το περίκεντρο του  $A'B'\Gamma'$ .

**Άσκηση 2.2.7** Τα  $A$  και  $B$  είναι σταθερά σημεία της ευθείας  $\alpha$ , το  $\Gamma$  μεταβλητό σημείο της ευθείας  $\beta$  κάθετης στην  $\alpha$  στο σταθερό σημείο της  $O$  (Σχήμα 2.2.6-III). Για κάθε κύκλο  $\kappa$  διερχόμενο από τα  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  θεωρούμε το αντιδιαμετρικό του  $\Gamma'$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του  $\Gamma'$  και η θέση του κύκλου για την οποία το μήκος  $|\Gamma\Gamma'|$  γίνεται ελάχιστο.

**Άσκηση 2.2.8** Δείξε ότι, το σημείο  $I$  επί της διχοτόμου  $AD$  τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων, τότε και μόνον, όταν  $|\widehat{B\Gamma}| = 90^\circ + \frac{|\widehat{BA\Gamma}|}{2}$ .

## 2.3 Δύο κύκλοι

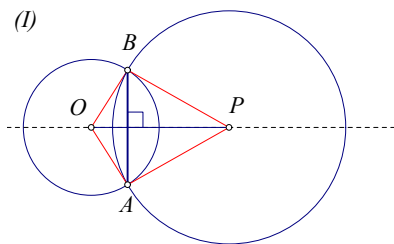
Λυπούμαι που στη διάλεξη χρειάστηκε να προσθέσω μια μεγάλη δόση τετραδιάστατης γεωμετρίας. Όμως δεν απολογούμαι. Διότι αληθινά, δεν είμαι εγώ υπεύθυνος που η φύση, από την πιο θεμελιώδη άποψη, είναι τετραδιάστατη.

A. N. Whitehead, Η έννοια της Φύσης

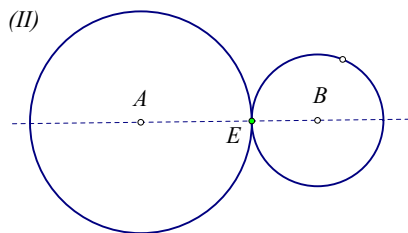
Εξετάζουμε εδώ τη σχετική θέση δύο κύκλων. Το κλειδί του θέματος είναι η απόσταση των κέντρων των κύκλων σε σχέση με το μέγεθος των ακτίνων τους. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι υπάρχουν τρεις δυνατότητες: (α) δύο διαφορετικά σημεία τομής, (β) ένα και μοναδικό, (γ) κανένα. Θεμελιώδους σημασίας, επίσης, είναι το θεώρημα 2.4.1, που συμπληρώνει την τριγωνική ανισότητα (§ 1.11), δείχνοντας την ύπαρξη τριγώνου με δοθέντα μήκη πλευρών  $\{a, b, c\}$ , που ικανοποιούν αυτήν την ανισότητα.

**Θεώρημα 2.3.1** Δύο διαφορετικοί κύκλοι έχουν το πολύ δύο διαφορετικά κοινά σημεία.

Απόδειξη: Διότι αν είχαν τρία ή περισσότερα θα ταυτίζονταν κατά το Θεώρημα 2.1.1, ο.ε.δ.



Σχήμα 2.3.1: Κοινή χορδή και διάκεντρος



Σημείο επαφής επί της διακέντρου

Το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  των κοινών σημείων  $A$  και  $B$  δύο κύκλων, που τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία (Σχήμα 2.3.1-I), λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Δύο κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο λέγονται **συγκεντρικοί**. Η ευθεία που ενώνει τα κέντρα  $O$  και  $P$  δύο μη συγκεντρικών κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των κύκλων. Συχνά ονομάζουμε *διάκεντρο* και το ευθύγραμμο τμήμα  $OP$  που ενώνει τα κέντρα. Το τι ακριβώς εννοούμε σε κάθε περίπτωση, συνάγεται από τα συμφραζόμενα.

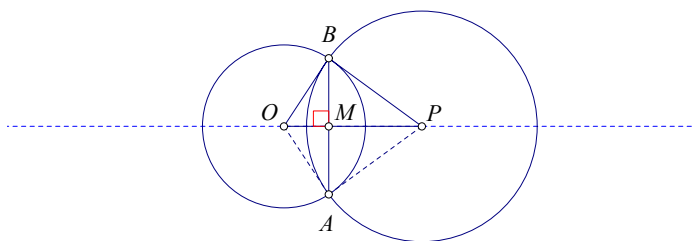
**Πόρισμα 2.3.1** Η διάκεντρος  $OP$  δύο κύκλων που τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία  $A$  και  $B$  συμπίπτει με τη μεσοκάθετο της κοινής χορδής τους  $AB$ .



*Απόδειξη:* Κατά το Πόρισμα 2.1.1, τα κέντρα των δύο κύκλων θα ευρίσκονται στην μεσοκάθετο της χορδής τους  $AB$ , ο.ε.δ.

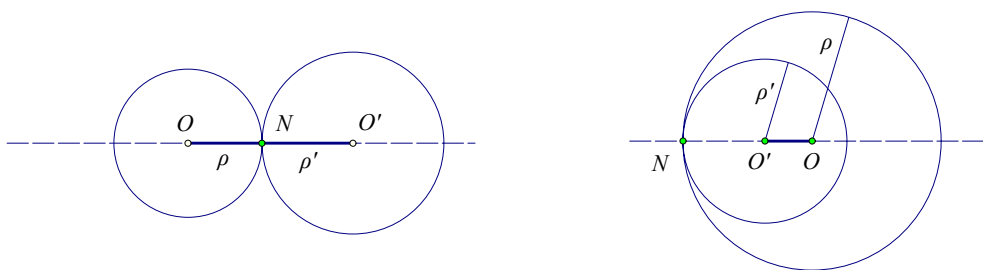
Δύο κύκλοι λέγονται **εφαπτόμενοι**, όταν έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο  $A$  (Σχήμα 2.3.1-II). Το σημείο αυτό λέγεται **σημείο επαφής** των δύο κύκλων.

**Πρόταση 2.3.1** Το σημείο επαφής δύο εφαπτομένων κύκλων ευρίσκεται επί της διακέντρου αυτών. Αντίστροφα, αν δύο διαφορετικοί κύκλοι έχουν ένα σημείο τομής επί της διακέντρου τότε αυτό είναι μοναδικό σημείο τομής και οι κύκλοι εφάπτονται.



Σχήμα 2.3.2: Συμμετρία ως προς διάκεντρο

*Απόδειξη:* Διά της εις άτοπον απαγωγής. Έστω ότι το σημείο επαφής  $A$  των δύο κύκλων δεν είναι στην διάκεντρο  $OP$  αυτών (Σχήμα 2.3.2). Φέρε τότε κάθετο  $AM$  από το  $A$  στην διάκεντρο  $OP$  και προέκτεινέ την κατά το διπλάσιο μέχρι το  $B$ . Τα τρίγωνα  $OMA$  και  $OMB$  είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο). Ανάλογα και τα  $PMA$  και  $PMB$  είναι ίσα. Συνάγεται λοιπόν ότι  $|OB| = |OA| = \rho$  και  $|PB| = |PA| = \rho'$ , όπου  $\rho$  και  $\rho'$  οι ακτίνες των δύο κύκλων. Συνεπώς, εκτός του  $A$  ευρίσκουμε και άλλο σημείο  $B$  κοινό των δύο κύκλων, πράγμα άτοπον. Αντίστροφα, αν οι κύκλοι έχουν δύο σημεία τομής  $A$  και  $B$ , τότε η διάκεντρός τους συμπίπτει με τη μεσοκάθετο του  $AB$  (Πόρισμα 2.3.1) και κανένα από τα δύο σημεία δεν μπορεί να είναι επί της διακέντρου, ο.ε.δ.



Σχήμα 2.3.3:  $\rho + \rho' = |OO'|$

$|\rho - \rho'| = |OO'|$

**Πόρισμα 2.3.2** Δύο κύκλοι  $O(\rho)$  και  $O'(\rho')$  έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο (εφάπτονται), τότε και μόνον, όταν ισχύει μία από τις ισότητες:

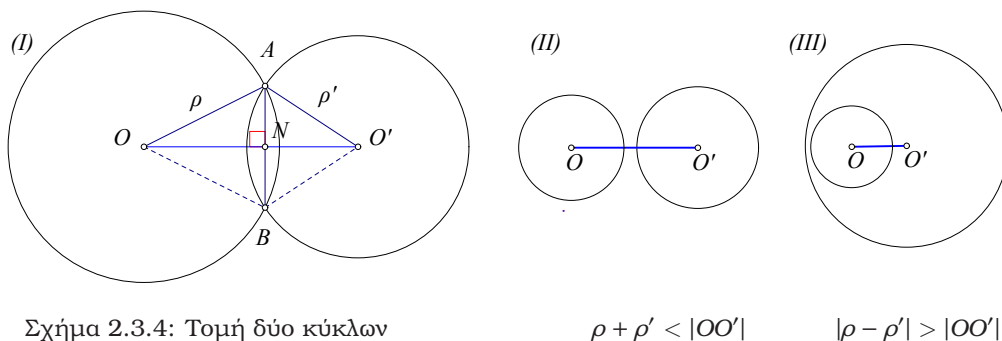
$$\rho + \rho' = |OO'|, \quad |\rho - \rho'| = |OO'|.$$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι οι κύκλοι εφάπτονται *εξωτερικά* και στην δεύτερη λέμε ότι εφάπτονται *εσωτερικά*.

**Θεώρημα 2.3.2** Δύο κύκλοι  $O(\rho)$  και  $O'(\rho')$  τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία, τότε και μόνον, όταν η διάκεντρός αυτών  $|OO'|$  και οι ακτίνες τους ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες

$$|\rho - \rho'| < |OO'| < \rho + \rho'.$$





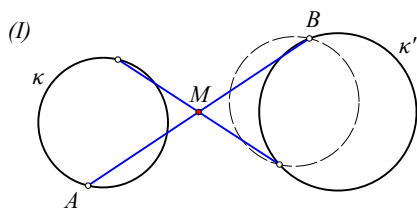
Σχήμα 2.3.4: Τομή δύο κύκλων

$$\rho + \rho' < |OO'|$$

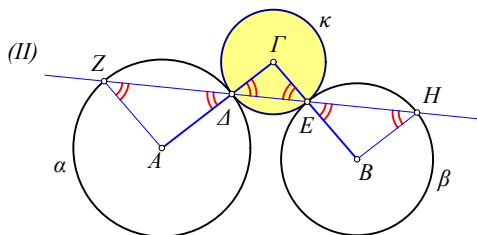
$$|\rho - \rho'| > |OO'|$$

**Απόδειξη:** Αν οι κύκλοι τέμνονται και ένα (από τα δύο) σημείο τομής είναι το  $A$  (Σχήμα 2.3.4-I), τότε σχηματίζεται τρίγωνο  $OAO'$  με πλευρές μηκών  $\rho$ ,  $\rho'$  και  $|OO'|$  (Πρόταση 2.3.1). Κατά τα Θεώρημα 1.11.1 και Θεώρημα 1.11.2 θα ικανοποιούνται οι τριγωνικές ανισότητες. Αντίστροφα, αν ικανοποιούνται οι ανισότητες αυτές, τότε οι δύο κύκλοι δεν μπορούν να εφάπτονται, διότι τότε θα είχαμε  $\rho + \rho' = |OO'|$  ή  $|\rho - \rho'| = |OO'|$ . Επίσης, δεν μπορεί να μην τέμνονται, διότι μετρώντας αποστάσεις επί της διακέντρου τους θα είχαμε ή  $\rho + \rho' < |OO'|$  (Σχήμα 2.3.4-II) ή  $|\rho - \rho'| > |OO'|$  (Σχήμα 2.3.4-III). Επομένως, αν οι ανισότητες ικανοποιούνται οι κύκλοι θα τέμνονται σε δύο σημεία, ο.ε.δ.

**Άσκηση 2.3.1** Δείξε ότι το σχήμα που αποτελείται από δύο κύκλους είναι συμμετρικό ως προς άξονα που ταυτίζεται με τη διάκεντρό τους. Αν οι δύο κύκλοι είναι ίσοι, δείξε ότι υπάρχει και άλλος άξονας συμμετρίας κάθετος στον προηγούμενο, καθώς και κέντρο συμμετρίας του σχήματος.



Σχήμα 2.3.5: Εφαρμογή της συμμετρίας



Κύκλος ταυτόχρονα εφαιπτόμενος δύο άλλων

**Άσκηση 2.3.2** Δίδονται δύο κύκλοι  $\kappa$  και  $\kappa'$  και σημείο  $M$ . Να βρεθεί ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με τα άκρα επί των κύκλων αντίστοιχα και μέσον το  $M$  (Σχήμα 2.3.5-I).

**Άσκηση 2.3.3** Δείξε ότι, αν ένας κύκλος  $\kappa$  εφάπτεται δύο άλλων  $\alpha$  και  $\beta$ , τότε η ευθεία  $\Delta E$  που ενώνει τα δύο σημεία επαφής του  $\kappa$  τέμνει ξανά τους δύο άλλους σε σημεία  $Z$  και  $H$ , έτσι ώστε οι ακτίνες  $AZ$  και  $BE$  να είναι παράλληλες και οι  $A\Delta$  και  $BH$  να είναι επίσης παράλληλες (Σχήμα 2.3.5-II).

**Υπόδειξη:** Τρίγωνα που σχηματίζονται από ακτίνες είναι ισοσκελή. Οι γωνίες τέτοιων ισοσκελών στα  $Z$  και  $E$  είναι ίσες εντός -εκτός και επί τα αυτά μέρη για τη  $\Delta E$  ως προσπίπτουσα στις ευθείες  $AZ$  και  $B\Gamma$ .

**Άσκηση 2.3.4** Χώρισε χορδή  $AB$  κύκλου  $\kappa(O, \rho)$  σε τρία ίσα τμήματα  $A\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta B$ . Δείξε ότι οι γωνίες  $\widehat{AO\Gamma}$ ,  $\widehat{\Gamma O\Delta}$  και  $\widehat{\Delta O B}$  δεν είναι ίσες μεταξύ τους. Ακριβέστερα, οι  $\widehat{AO\Gamma}$  και  $\widehat{\Delta O B}$  είναι ίσες αλλιά μικρότερες της  $\widehat{\Gamma O\Delta}$ .

**Άσκηση 2.3.5** Δίδονται δύο παράλληλες ευθείες  $\epsilon$  και  $\zeta$  και σημείο  $A$  μη περιεχόμενο σε αυτές. Κατασκεύασε κύκλο διερχόμενο από το  $A$  και εφαιπτόμενο των δύο ευθειών.

**Άσκηση 2.3.6** Δίδεται κύκλος  $\kappa$  και δύο σημεία  $A$  και  $B$  εκτός αυτού. Κατασκεύασε ορθή γωνία  $\widehat{XOY}$ , της οποίας η κορυφή  $O$  να είναι σημείο του κύκλου  $\kappa$  και οι πλευρές  $OX$ ,  $OY$  να διέρχονται αντίστοιχα από τα  $A$  και  $B$ .

**Άσκηση 2.3.7** Να κατασκευασθεί κύκλος  $\kappa$  διερχόμενος από δύο δοθέντα σημεία  $A$  και  $B$  και τέμνον δοθέντα κύκλο  $\eta$  κατά χορδή  $\Gamma\Delta$  παράλληλο προς δοθείσα ευθεία  $\varepsilon$ .

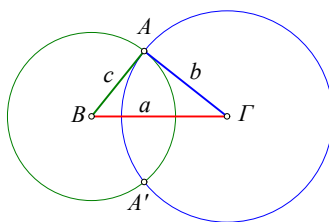
**Άσκηση 2.3.8** Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος κύκλων ακτίνας  $r$ , που μπορούν να τοποθετηθούν εφάπτομενοι εξωτερικά κύκλου  $\kappa$  της ίδιας ακτίνας, έτσι ώστε, ανά δύο, είτε να εφάπτονται είτε να μην τέμνονται;

## 2.4 Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη

Τα Μαθηματικά, ως έκφραση της ανθρώπινης διάνοιας, αντανακλούν την ενεργό θέληση, το στοχαστικό συλλογισμό και την επιθυμία για αισθητική τελείωση. Τα βασικά τους στοιχεία είναι η λογική και η διαίσθηση, η ανάλυση και η κατασκευή, η γενικότητα και η μοναδικότητα.

*Richard Courant, Τι είναι τα Μαθηματικά;*

Με τον όρο αυτό εννοούμε μία ακολουθία κατασκευών κύκλων ή/και ευθειών και των σημείων τομής τους. Ο κανόνας (χάρακας) υποτίθεται ότι μας δίδει τη δυνατότητα να ορίσουμε την ευθεία (και το ευθύγραμμο τμήμα) που ορίζεται από δύο σημεία  $A$  και  $B$ . Ο διαβήτης μας δίδει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε τον κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα. Επίσης έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε τα σημεία τομής α) ευθείας και ευθείας, β) ευθείας και κύκλου, γ) κύκλου και κύκλου. Κατασκευές που επιτυγχάνονται με την αποκλειστική χρήση του κανόνα και του διαβήτη παίζουν ένα ιδιαίτερο ρόλο στην ευκλείδεια γεωμετρία από την εποχή της αρχαιότητας. Από τότε είναι γνωστά τα τρία προβλήματα που δεν λύνονται με αυτόν τον τρόπο: (1) του διπλασιασμού του όγκου του κύβου (Δήλιο πρόβλημα), (2) της τριχοτόμησης της γωνίας και (3) του τετραγωνισμού του κύκλου. Η πλήρης απόδειξη της αδυναμίας λύσης αυτών των προβλημάτων με τον κανόνα και το διαβήτη είναι δυνατή με τη χρήση αλγεβρικών δομών (σωμάτων) και είναι σχετικά πρόσφατο επίτευγμα ([Pet01], [Adl06], [Eve63, σ. 183], [Kle97]).



Σχήμα 2.4.1: Κατασκευή από  $a$ ,  $b$  και  $c$

**Θεώρημα 2.4.1** Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών τρεις δοθέντες θετικούς αριθμούς  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , τότε και μόνον, όταν οι αριθμοί αυτοί ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες, ισοδύναμα, η μεγαλύτερη πλευρά, έστω  $a$ , ικανοποιεί την ανισότητα:

$$a < b + c.$$

**Κατασκευή:** Αν τα  $a$ ,  $b$ ,  $c$  είναι μήκη πλευρών τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες (1.11). Αντίστροφα, αν οι τρεις αυτοί αριθμοί ικανοποιούν αυτές τις ανισότητες, τότε κατασκευάζεται τρίγωνο με αυτά τα μήκη πλευρών. Πράγματι, έστω ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  μήκους

Συνεπώς, εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση, συμπεραίνουμε ότι η  $\Gamma\Delta$  είναι και αυτή εφαπτόμενη του κύκλου  $\kappa$  ([Fet77, σ. 24]), ο.ε.δ.

**Άσκηση 2.15.1** Η κορυφή  $O$  ορθής γωνίας  $\widehat{XOY}$  περιέχεται στο εσωτερικό του κύκλου  $\kappa$  και οι πλευρές τέμνουν τον κύκλο στα σημεία  $X, X', Y, Y'$ . Φέρνοντας εφαπτόμενες σε αυτά τα σημεία, σχηματίζεται το περιγεγραμμένο του κύκλου τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  (Σχήμα 2.15.3-II), για το οποίο δείξε ότι είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Δείξε και το αντίστροφο: Εάν οι πλευρές εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου εφάπτονται και ενός άλλου κύκλου, τότε οι ευθείες που ενώνουν τα απέναντι κείμενα σημεία επαφής τέμνονται ορθογώνια.

Τετράπλευρα όπως το  $AB\Gamma\Delta$ , της προηγούμενης άσκησης, που είναι ταυτόχρονα περιγράψιμα σε κύκλο  $\kappa$  και εγγράψιμα σε άλλο κύκλο  $\kappa'$ , λέγονται **δικεντρικά**.

**Άσκηση 2.15.2** Ο κύκλος  $\kappa'$  εφάπτεται του περικύκλου  $\kappa$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην κορυφή  $A$  και τέμνει την απέναντι πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $\{D, E\}$ . Δείξε ότι οι γωνίες  $\widehat{BAD} = \widehat{EAG}$ .

**Άσκηση 2.15.3** Προέκτεινε τις πλευρές  $\{AB, A\Gamma\}$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , στις  $\{AB', A\Gamma'\}$ , έτσι ώστε η  $B'\Gamma'$  να είναι παράλληλη της εφαπτόμενης στο  $A$  του περικύκλου του τριγώνου. Δείξε ότι το  $B\Gamma\Gamma'B'$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

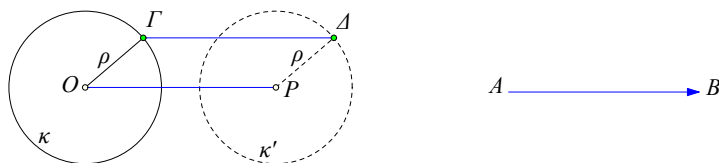
## 2.16 Γεωμετρικοί τόποι

Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να έχουμε πάντα στο μυαλό μας ότι κάθε ζωντανός οργανισμός τείνει να αυξηθεί με γεωμετρική πρόοδο.

*Charles Darwin, Η καταγωγή των ειδών*

Γεωμετρικούς τόπους συναντήσαμε ήδη στην πορεία του μαθήματος (Πόρισμα 1.9.1 και συνακόλουθο σχόλιο, Πόρισμα 1.15.17, Άσκηση 2.1.6). Πρόκειται για σύνολα σημείων που χαρακτηρίζονται από κάποια ιδιότητα. Από τους απλούστερους τόπους είναι ο κύκλος  $\kappa(O, \rho)$ . Χαρακτηρίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν απόσταση  $\rho$  από το σταθερό σημείο  $O$ . Παρόμοια η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ : είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα  $A$  και  $B$  του τμήματος. Οι απλούστεροι γεωμετρικοί τόποι καταλήγουν σε ευθείες και κύκλους. Υπάρχουν όμως και απλές ιδιότητες που οδηγούν σε νέες καμπύλες (λ.χ κωνικές τομές (§ 11.1)). Για την εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου συχνά χρησιμοποιούμε κάποια ειδικά σημεία, για τα οποία γνωρίζουμε ότι ανήκουν σε αυτόν ή και σχετίζονται άμεσα με αυτόν. Η επόμενη άσκηση δίνει ένα τέτοιο παράδειγμα.

**Άσκηση 2.16.1** Δοθέντος κύκλου  $\kappa(O, \rho)$  και ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , από κάθε σημείο  $\Gamma$  του  $\kappa$  φέρνουμε παράλληλο ίσο και ομόρροπο προς το  $AB$  ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου  $\Delta$ .

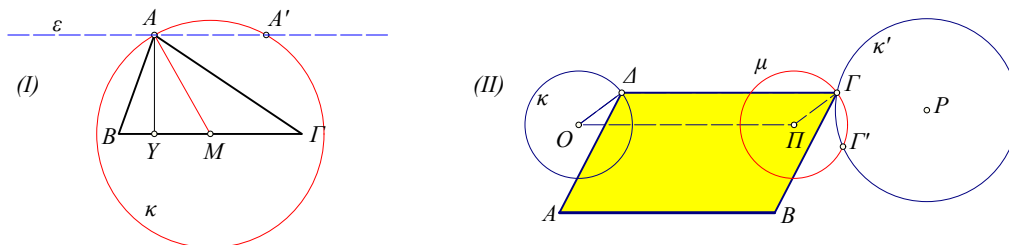


Σχήμα 2.16.1: Παράλληλος μεταφορά κύκλου

*Υπόδειξη:* Την ίδια διαδικασία που εφαρμόζουμε σε κάθε σημείο  $\Gamma$  του κύκλου  $\kappa$  εφαρμόσσε και στο κέντρο του  $O$ . Ορίζεται έτσι το σημείο  $P$ , έτσι ώστε το  $OP$  να είναι παράλληλο ίσο και ομόρροπο προς το  $AB$ . Τότε το  $OP\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο, άρα το μήκος  $|P\Delta| = \rho$  είναι σταθερό και ίσο με την ακτίνα του δοθέντος κύκλου. Συνεπώς, τα σημεία του ζητούμενου τόπου περιέχονται στον κύκλο  $\kappa'(P, \rho)$ . Αντίστροφα, δείχνουμε ότι κάθε σημείο του κύκλου  $\kappa'(P, \rho)$  είναι σημείο του τόπου. Προς τούτο, ξεκινώντας από σημείο  $\Delta$  του  $\kappa'$  ευρίσκουμε το σημείο  $\Gamma$  επί του  $\kappa$ , έτσι ώστε το  $\Gamma\Delta$  να είναι παράλληλο, ίσο και ομόρροπο του  $AB$ . Αυτό δείχνει ότι το  $\Delta$  είναι σημείο του τόπου και ολοκληρώνει την απόδειξη της ταύτισης του κύκλου  $\kappa'(P, \rho)$  με το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.

Μια σημαντική χρήση των γεωμετρικών τόπων είναι αυτή της εφαρμογής τους στις κατασκευές. Σε αυτές ζητούμε σημείο το οποίο αποδεικνύουμε ότι περιέχεται σε δύο γεωμετρικούς τόπους ταυτόχρονα. Η συνέπεια είναι ότι το ζητούμενο σημείο συμπίπτει με ένα σημείο τομής των δύο γεωμετρικών τόπων. Η επόμενη κατασκευή δίδει ένα παράδειγμα αυτής της μεθόδου.

**Κατασκευή 2.16.1** *Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$  από την πλευρά  $a = |B\Gamma|$ , το ύψος  $u_A = |AY|$  και τη διάμεσο  $\mu_A = |AM|$ .*



Σχήμα 2.16.2: Τρίγωνο από  $\{a, u_A, \mu_A\}$

Κατασκευή παραλληλογράμμου

*Κατασκευή: Ανάλυση:* Έστω ότι το ζητούμενο τρίγωνο κατασκευάσθηκε. Η κορυφή  $A$  θα απέχει απόσταση  $u_A$  από τη βάση  $B\Gamma$ , άρα θα είναι σημείο μιας εκ των παραλλήλων ευθειών  $\varepsilon$  προς τη  $B\Gamma$  σε απόσταση  $u_A$  από αυτήν (Σχήμα 2.16.2-I). Επίσης η κορυφή  $A$  θα απέχει απόσταση  $\mu_A$  από το μέσον  $M$  της  $B\Gamma$ , άρα θα είναι σημείο του κύκλου  $\kappa(M, \mu_A)$ . Συνεπώς, το  $A$  θα είναι σημείο τομής των δύο αυτών γεωμετρικών τόπων.

*Σύνθεση:* Κατασκευάζουμε τμήμα  $B\Gamma$  μήκους  $a$  και φέρνουμε παράλληλο  $\varepsilon$  προς αυτό σε απόσταση  $u_A$ . Κατασκευάζουμε επίσης τον κύκλο  $\kappa(M, \mu_A)$ . Ένα από τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  και του κύκλου  $\kappa$  ορίζει την κορυφή  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της κατασκευής.

*Διερεύνηση:* Για να υπάρχει λύση θα πρέπει οι δύο τόποι να τέμνονται. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση  $u_A$  της ευθείας από το  $B\Gamma$  θα πρέπει να είναι μικρότερη της ακτίνας  $\mu_A$  του κύκλου  $\kappa$ . Συνεπώς, έχουμε λύση όταν  $\mu_A \geq u_A$ . Αποδεικνύεται εύκολα ότι τα τρίγωνα που προκύπτουν από τα διάφορα σημεία τομής των δύο τόπων είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, από τα δεδομένα κατασκευάζεται ένα ακριβώς τρίγωνο, ο.ε.κ.

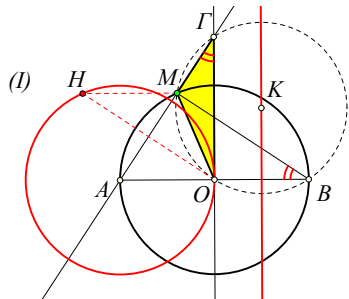
**Άσκηση 2.16.2** *Δίδεται η θέση και το μέγεθος ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  και δύο κύκλων  $\kappa(O, \rho)$  και  $\kappa'(P, \rho')$ . Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , μία πλευρά του οποίου να είναι η  $AB$  και οι κορυφές του  $\Delta$  και  $\Gamma$  να είναι σημεία των κύκλων  $\kappa$  και  $\kappa'$  αντίστοιχα.*

*Υπόδειξη: Ανάλυση:* Έστω ότι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  κατασκευάσθηκε (Σχήμα 2.16.2-II). Η πλευρά του  $\Delta\Gamma$  θα είναι παράλληλη, ίση και ομόρροπη του  $AB$ , άρα το άκρο της  $\Gamma$  θα περιέχεται σε γνωστό γεωμετρικό τόπο που ορίζεται από κύκλο  $\mu(\Pi, \rho)$  (Άσκηση 2.16.1), έτσι ώστε η  $O\Pi$  να είναι παράλληλη, ίση και ομόρροπη της  $AB$ . Το  $\Gamma$  λοιπόν θα είναι σημείο τομής του δοθέντος κύκλου  $\kappa'(P, \rho')$  και του κύκλου  $\mu(\Pi, \rho)$  που κατασκευάζεται από τα δεδομένα.

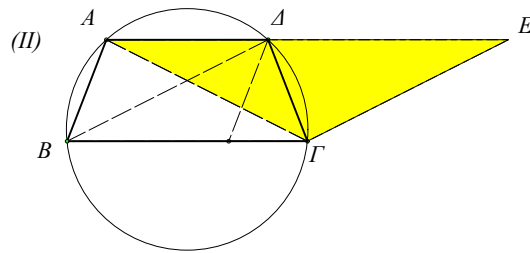
*Σύνθεση:* Κατασκευάζουμε τον κύκλο  $\mu(\Pi, \rho)$  όπως αναφέρεται στην ανάλυση. Έστω  $\Gamma$  ένα σημείο τομής των κύκλων  $\mu(\Pi, \rho)$  και  $\kappa'(P, \rho')$ . Ευρίσκουμε το σημείο  $\Delta$  επί του κύκλου  $\kappa$  έτσι ώστε το  $O\Pi\Gamma\Delta$

να είναι παραλληλόγραμμο. Τότε και το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της κατασκευής.

*Διερεύνηση:* Υπάρχει λύση τότε ακριβώς όταν οι κύκλοι  $\mu(\Pi, \rho)$  και  $\kappa'(P, \rho')$  τέμνονται. Εάν οι κύκλοι αυτοί τέμνονται σε δύο σημεία, τότε υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις. Αν οι κύκλοι εφάπτονται, τότε υπάρχει μία ακριβώς λύση. Εάν οι κύκλοι ταυτίζονται τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.



Σχήμα 2.16.3: Τόπος περικέντρου, ορθοκέντρου



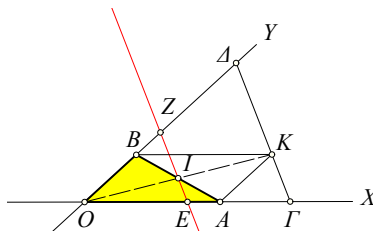
Κατασκευή τραπέζιου

**Άσκηση 2.16.3** Σημείο  $M$  μεταβάλλεται επί κύκλου με διάμετρο  $AB$ . Η ευθεία  $AM$  τέμνει τη μεσοκάθετο του  $AB$  στο σημείο  $\Gamma$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του περικέντρου  $K$  του τριγώνου  $OM\Gamma$ , καθώς και ο γεωμετρικός τόπος του ορθοκέντρου  $H$  αυτού του τριγώνου.

*Υπόδειξη:* Ο περικύκλος του τριγώνου  $OM\Gamma$  διέρχεται από το  $B$  (Σχήμα 2.16.3-I). Αυτό φαίνεται από το ότι οι γωνίες  $\widehat{ABM}$  και  $\widehat{A\Gamma O}$  είναι ίσες, ως συμπληρωματικές της γωνίας  $\widehat{BAG}$ . Επομένως, το κέντρο  $K$  του κύκλου  $(OM\Gamma)$  θα ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος  $OB$ . Το ορθόκентρο  $H$  του  $OM\Gamma$  συμπίπτει με την τομή της κάθετης από το  $M$  στην  $OG$  και της κάθετης από το  $O$  στην  $AG$ . Άρα στο τετράπλευρο  $OBMH$  οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και επομένως αυτό είναι παραλληλόγραμμο. Τούτο συνεπάγεται ότι η  $MH$  είναι παράλληλη, ίση και ομόροπη της  $BO$ , άρα ο γεωμετρικός τόπος του  $H$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $A$  και ακτίνα ίση με  $\frac{|AB|}{2}$  (Άσκηση 2.16.1).

**Άσκηση 2.16.4** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων  $K$  κύκλων  $\kappa(K, \rho)$  οι οποίοι εφάπτονται δύο τεμνομένων ευθειών  $\epsilon$  και  $\epsilon'$ .

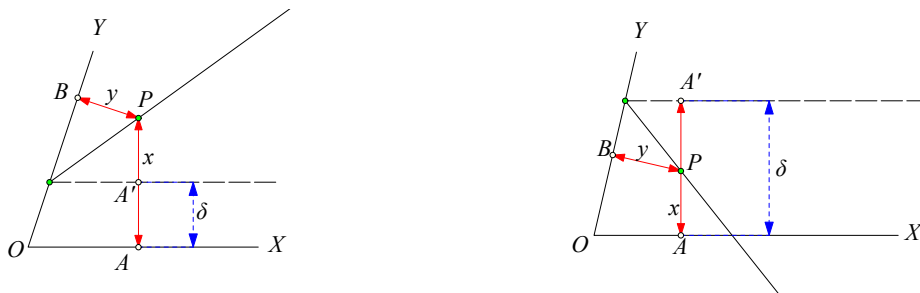
**Άσκηση 2.16.5** Κατασκεύασε τραπέζιο εγγεγραμμένο σε δοθέντα κύκλο  $\kappa$  και έχουν δοθέν ύψος και δοθέν άθροισμα/διαφορά βάσεων (Σχήμα 2.16.3-II).



Σχήμα 2.16.4: Γεωμετρικός τόπος με σταθερό  $|OA| + |OB|$

**Άσκηση 2.16.6** Στις πλευρές  $OX, OY$  γωνίας  $\widehat{XOY}$  ορίζονται αντίστοιχα σημεία  $A$  και  $B$ , έτσι ώστε  $|OA| + |OB| = \eta$  να είναι σταθερό. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

*Υπόδειξη:* Θεώρησε το συμμετρικό  $K$  του  $O$  ως προς το μέσον  $I$  του  $AB$ . Στο τετράπλευρο  $OAKB$  οι διαγώνιοι  $AB$  και  $OK$  διχοτομούνται στο σημείο  $I$ , άρα είναι παραλληλόγραμμο. Όρισε επί των  $OX$ ,  $OY$  αντίστοιχα τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , έτσι ώστε  $|O\Gamma| = |O\Delta| = \rho$ . Προκύπτει τότε άμεσα ότι τα τρίγωνα  $\Gamma AK$  και  $KB\Delta$  είναι ισοσκελή και τα σημεία  $\Delta$ ,  $K$  και  $\Gamma$  είναι επ' ευθείας που κατασκευάζεται άμεσα από τα δεδομένα. Συνάγεται ότι το μέσον  $I$  της  $AB$ , που είναι και μέσον της  $OK$ , περιέχεται στην ευθεία  $EZ$  που ενώνει τα μέσα  $E$ ,  $Z$  των πλευρών του ισοσκελούς  $\Gamma O\Delta$ .



Σχήμα 2.16.5: Ευθεία οριζόμενη από εξίσωση

**Άσκηση 2.16.7** Δίδεται γωνία  $\widehat{XOY}$  και σταθερός αριθμός  $\delta$ . Δείξε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $P$ , για τα οποία οι αποστάσεις  $x = |PA|$ ,  $y = |PB|$  από τις  $OX$  και  $OY$  αντίστοιχα, ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x - y = \delta, \quad x + y = \delta,$$

περιέχεται αντίστοιχα σε δύο ευθείες παράλληλες προς τις διχοτόμους της γωνίας  $\widehat{XOY}$ . Βρες τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τις πλευρές (ή προεκτάσεις) της γωνίας  $\widehat{XOY}$ . Ποιες είναι οι θέσεις αυτών των ευθειών όταν το  $\delta = 0$ ;

**Άσκηση 2.16.8** Κατασκεύασε τραπέζιο του οποίου δίδονται τα μήκη τριών πλευρών και η γωνία των μη παραλληλίων πλευρών του.

**Άσκηση 2.16.9** Να κατασκευασθεί σημείο  $X$  που απέχει απόσταση  $\delta$  από δοθείσα ευθεία  $\varepsilon$  και ισαπέχει από δύο άλληλες ευθείες  $\{\varepsilon', \varepsilon''\}$ . Το ίδιο πρόβλημα να ληθεί και όταν η  $\varepsilon$  είναι κύκλος. Επίσης να διερευνηθεί και στις δύο περιπτώσεις πότε ακριβώς υπάρχει λύση.

## 2.17 Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου

Όμως το μυστικό του μεγαλοφυούς έργου τέχνης δεν παραδίδεται έτσι στην επίθεση του πνεύματος. Θα λέγαμε ότι ανθίσταται στη βίαιη κατάκτηση και παραδίδεται μόνον σε όποιον επιλέγει. Όπως την επιστημονική αλήθεια, χρειάζεται να το πλησιάσει κανείς με κοπιώδη προσοχή, χωρίς όμως την κατά μέτωπον έφοδο που προτιμούν οι θηρευτές. Τα όπλα δεν το πτοούν: εάν είναι να υποκύψει, θα το κάνει ίσως μπροστά στη στοχαστική λατρεία.

*Ortega y Gasset, Σκέψεις για τον Δον Κιχώτη*

Στα επόμενα, ως συνήθως,  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(a, b, c)$ ,  $(\mu_A, \mu_B, \mu_\Gamma)$ ,  $(u_A, u_B, u_\Gamma)$  και  $(\delta_A, \delta_B, \delta_\Gamma)$  συμβολίζουν αντίστοιχα τα μέτρα/μήκη των γωνιών, πλευρών, διαμέσων, υψών και διχοτόμων του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Ένα πρόβλημα που προκύπτει φυσιολογικά στο παρόν στάδιο της μελέτης είναι αυτό των κατασκευών τριγώνων από τρία στοιχεία τους. Οι επόμενες λίστες δίνουν όλα τα δυνατά προβλήματα που μπορούν

να προκύψουν συνδυάζοντας τρία από τα προηγούμενα στοιχεία ([Fur37]). Το (\*) σημαίνει ότι η κατασκευή δεν είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη.

#### A. Κατασκευές περιλαμβάνουσες δύο τουλάχιστον πλευρές

1.  $(a, b, c)$  βασική από τρεις πλευρές
2.  $(a, b, a), (a, b, \gamma)$  βασικές από δύο πλευρές και μία γωνία
3.  $(a, b, \mu_A), (a, b, \mu_\Gamma)$  δύο πλευρές, μία διάμεσος.
4.  $(a, b, \nu_A), (a, b, \nu_\Gamma)$  δύο πλευρές, ένα ύψος.
5.  $(a, b, \delta_A)^*, (a, b, \delta_\Gamma)$  δύο πλευρές, μία διχοτόμος.

#### B. Κατασκευές περιλαμβάνουσες μία ακριβώς πλευρά

1.  $(a, \beta, \gamma)$  βασική: 2 γωνίες, 1 πλευρά.
2.  $(a, a, \mu_A), (a, a, \mu_B), (a, \beta, \mu_A), (a, \beta, \mu_B), (a, \beta, \mu_\Gamma)$  πλευρά, γωνία, διάμεσος
3.  $(a, a, \nu_A), (a, a, \nu_B), (a, \beta, \nu_A), (a, \beta, \nu_B), (a, \beta, \nu_\Gamma)$  πλευρά, γωνία, ύψος
4.  $(a, a, \delta_A), (a, a, \delta_B)^*, (a, \beta, \delta_A)^*, (a, \beta, \delta_B), (a, \beta, \delta_\Gamma)$  πλευρά, γωνία, διχοτόμος
5.  $(a, \mu_A, \mu_B), (a, \mu_B, \mu_\Gamma)$  πλευρά, δύο διαμέσοι
6.  $(a, \mu_A, \nu_A), (a, \mu_A, \nu_B), (a, \mu_B, \nu_A), (a, \mu_B, \nu_B), (a, \mu_B, \nu_\Gamma)$  πλευρά, διάμεσος, ύψος
7.  $(a, \mu_A, \delta_A), (a, \mu_A, \delta_B)^*, (a, \mu_B, \delta_A)^*, (a, \mu_B, \delta_B)^*, (a, \mu_B, \delta_\Gamma)^*$  πλευρά, διάμ., διχ.
8.  $(a, \nu_A, \nu_B), (a, \nu_B, \nu_\Gamma)$  πλευρά, δύο ύψη
9.  $(a, \nu_A, \delta_A), (a, \nu_A, \delta_B)^*, (a, \nu_B, \delta_A)^*, (a, \nu_B, \delta_B), (a, \nu_B, \delta_\Gamma)$  πλευρά, ύψος, διχοτόμος
10.  $(a, \delta_A, \delta_B)^*, (a, \delta_B, \delta_\Gamma)^*$  πλευρά, δύο διχοτόμοι

#### Γ. Κατασκευές περιλαμβάνουσες δύο τουλάχιστον γωνίες

1.  $(a, \beta, \gamma)$  από τρεις γωνίες (ομοιότητα)
2.  $(a, \beta, \mu_A), (a, \beta, \mu_\Gamma)$  δύο γωνίες, μία διάμεσος.
3.  $(a, \beta, \nu_A), (a, \beta, \nu_\Gamma)$  δύο γωνίες, ένα ύψος.
4.  $(a, \beta, \delta_A), (a, \beta, \delta_\Gamma)$  δύο γωνίες, μία διχοτόμος.

#### Δ. Κατασκευές περιλαμβάνουσες μία ακριβώς γωνία και δευτερεύοντα στοιχεία

1.  $(a, \mu_A, \mu_B), (a, \mu_B, \mu_\Gamma)$  γωνία, δύο διαμέσοι
2.  $(a, \mu_A, \nu_A), (a, \mu_A, \nu_B), (a, \mu_B, \nu_A), (a, \mu_B, \nu_B), (a, \mu_B, \nu_\Gamma)$  γωνία, διάμεσος, ύψος
3.  $(a, \mu_A, \delta_A), (a, \mu_A, \delta_B)^*, (a, \mu_B, \delta_A)^*, (a, \mu_B, \delta_B)^*, (a, \mu_B, \delta_\Gamma)^*$  γωνία, διάμ., διχ.
4.  $(a, \nu_A, \nu_B), (a, \nu_B, \nu_\Gamma)$  γωνία, δύο ύψη
5.  $(a, \nu_A, \delta_A), (a, \nu_A, \delta_B)^*, (a, \nu_B, \delta_A), (a, \nu_B, \delta_B), (a, \nu_B, \delta_\Gamma)^*$  γωνία, ύψος, διχοτόμος
6.  $(a, \delta_A, \delta_B)^*, (a, \delta_B, \delta_\Gamma)^*$  γωνία, δύο διχοτόμοι

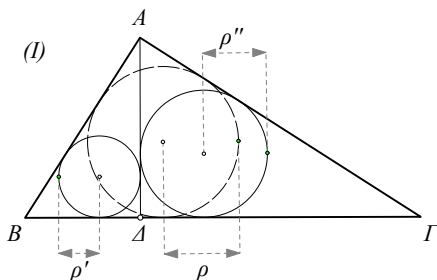
#### Ε. Κατασκευές μόνο από δευτερεύοντα στοιχεία

1.  $(\mu_A, \mu_B, \mu_\Gamma)$  τρεις διαμέσοι
2.  $(\mu_A, \mu_B, \nu_A), (\mu_A, \mu_B, \nu_\Gamma), (\mu_A, \mu_B, \delta_A)^*, (\mu_A, \mu_B, \delta_\Gamma)^*$  δύο διαμέσοι+
3.  $(\mu_A, \nu_A, \nu_B), (\mu_A, \nu_B, \nu_\Gamma)$  διάμ., 2 ύψη
4.  $(\mu_A, \nu_A, \delta_A), (\mu_A, \nu_A, \delta_B)^*, (\mu_A, \nu_B, \delta_A)^*, (\mu_A, \nu_B, \delta_B)^*, (\mu_A, \nu_B, \delta_\Gamma)^*$  διάμ., ύψος, διχ.
5.  $(\mu_A, \delta_A, \delta_B)^*, (\mu_A, \delta_B, \delta_\Gamma)^*$  διάμ., 2 διχ.
6.  $(\nu_A, \nu_B, \nu_\Gamma)$  τρία ύψη
7.  $(\nu_A, \nu_B, \delta_A)^*, (\nu_A, \nu_B, \delta_\Gamma)$  2 ύψη, 1 διχ.
8.  $(\nu_A, \delta_A, \delta_B)^*, (\nu_A, \delta_B, \delta_\Gamma)^*$  ύψος, 2 διχ.
9.  $(\delta_A, \delta_B, \delta_\Gamma)^*$  τρεις διχοτόμοι

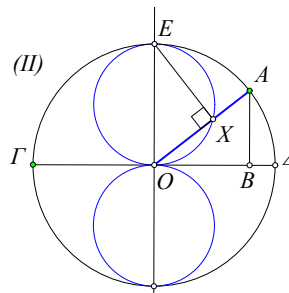
Στις παραπάνω λίστες, οι κατασκευές που χαρακτηρίζονται ως *βασικές* στηρίζονται άμεσα στα αξιώματα και έχουν ήδη εξετασθεί. Επίσης έχουν γίνει και κάπως πιο σύνθετες, όπως η  $(a, b, \mu_\Gamma)$  (Άσκηση 2.4.2),  $(a, \mu_A, \nu_A)$  (Κατασκευή 2.16.1) και  $(\mu_A, \nu_A, \delta_A)$  (Κατασκευή 2.13.11). Όλες οι κατασκευές της λίστας (A), εκτός των δύο τελευταίων, απαιτούν μόνο τις γνώσεις που αποκτήθηκαν μέχρι τώρα. Επίσης εύκολες και προσιτές με τις μέχρι τούδε γνώσεις είναι οι κατασκευές της λίστας (Γ). Από τις υπόλοιπες, που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη, η δυσκολία κυμαίνεται από το πολύ απλό (π.χ.  $(a, \beta, \mu_A)$ ) έως το δύσκολο (π.χ.  $(a, \mu_A, \nu_A)$ ). Οι γνώσεις που χρειάζονται για την αντιμετώπισή τους (όσων κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη) περιέχονται στα τέσσερα πρώτα κεφάλαια του βιβλίου. Καθώς προχωράμε σε αυτά, είναι ωφέλιμο και χρήσιμο να γυρνά κανείς σε τούτες τις λίστες και να δοκιμάζει τις δυνάμεις του διαλέγοντας κάποιες κατασκευές, είτε στην τύχη,



είτε ξαναπιάνοντας κάποιες, στις οποίες είχε στο παρελθόν αποτύχει.



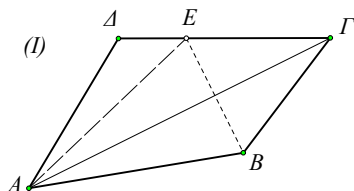
Σχήμα 2.17.1:  $\rho + \rho' + \rho'' = |AD|$



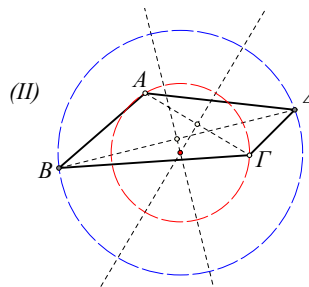
Σημείο X με  $|OX| = |AB|$

**Άσκηση 2.17.1** Ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  χωρίζεται με το ύψος του  $AD$  σε δύο άλflα ορθογώνια τρίγωνα (Σχήμα 2.17.1-I). Δείξε ότι το άθροισμα των ακτίνων των εγγεγραμμένων κύκλων των τριών ορθογωνίων τριγώνων ισούται με το μήκος  $|AD|$ .

**Άσκηση 2.17.2** Μεταβλητό σημείο  $A$  κύκλου  $O(\rho)$  προβάλλεται στο σημείο  $B$  σταθερής διαμέτρου  $\Gamma\Delta$  (Σχήμα 2.17.1-II). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου  $X$  της ακτίνας  $OA$ , για το οποίο  $|OX| = |AB|$ .



Σχήμα 2.17.2: Κατασκευή τετραπλεύρου



Μη τεμνόμενοι κύκλοι

**Άσκηση 2.17.3** Κατασκεύασε τετράπλευρο του οποίου δίδονται τα μήκη των πλευρών και του οποίου η μία διαγώνιος διχοτομεί τη μία από τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες.

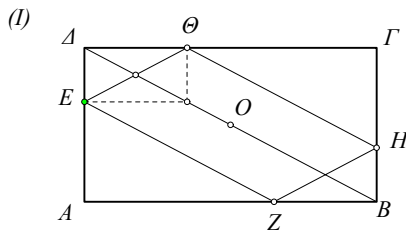
Υπόδειξη: Αν η  $AG$  διχοτομεί τη γωνία στο  $\Gamma$ , θεώρησε το συμμετρικό  $E$  του  $B$  ως προς  $AG$  (Σχήμα 2.17.2-I). Το τρίγωνο  $AE\Delta$  κατασκευάζεται. Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις αν τα σημεία  $E, \Delta$  συμπίπτουν.

**Άσκηση 2.17.4** Δίδεται κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ . Κατασκεύασε μη τεμνόμενους κύκλους διερχόμενους από τα ζεύγη σημείων  $(A, \Gamma)$  και  $(B, \Delta)$  αντίστοιχα (Σχήμα 2.17.2-II) ([Cox67, σ. 58]).

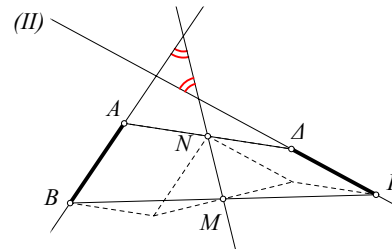
**Άσκηση 2.17.5** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του ορθοκέντρου και του εγκέντρου τριγώνου  $AB\Gamma$ , του οποίου η βάση  $B\Gamma$  μένει σταθερά και η γωνία  $\alpha$  έχει σταθερό μέτρο.

**Άσκηση 2.17.6** Αρίθμησε διαδοχικά τις γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου με άρτιο πλήθος πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο. Δείξε ότι το άθροισμα των γωνιών άρτιας τάξεως ισούται με το άθροισμα των γωνιών περιττής τάξεως.





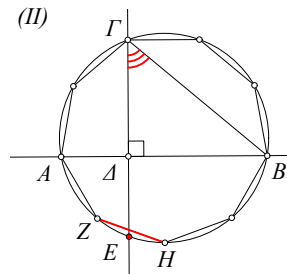
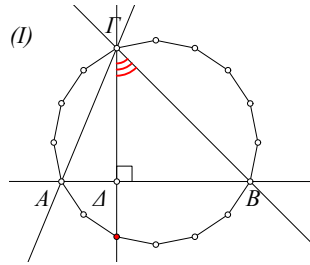
Σχήμα 2.17.3: Εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο



Τετράπλευρο με ίσες πλευρές

**Άσκηση 2.17.7** Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  φέρνουμε δύο παράλληλες προς μία διαγώνιο του  $B\Delta$ , σε ίση απόσταση  $\delta$  από αυτήν. Δείξε ότι σχηματίζεται εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο  $EZH\Theta$  με περίμετρο ανεξάρτητη του  $\delta$  και ίση με  $2|B\Delta|$  (Σχήμα 2.17.3-I).

**Άσκηση 2.17.8** Τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες. Δείξε ότι η ευθεία  $MN$  των μέσων των μη ίσων πλευρών σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ίσες πλευρές (Σχήμα 2.17.3-II).



Σχήμα 2.17.4: Κάθετες σε διαγώνιες κανονικών πολυγώνων

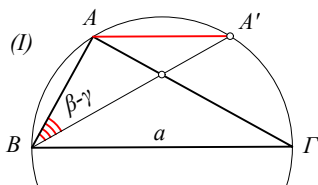
**Άσκηση 2.17.9** Δείξε ότι, η κάθετη από μια κορυφή  $\Gamma$  κανονικού πολυγώνου σε μια διαγώνιο του  $AB$ , διέρχεται από μίαν άλλη κορυφή του πολυγώνου, αν αυτό έχει άρτιο αριθμό πλευρών (Σχήμα 2.17.4-I). Αν το πολύγωνο έχει περιττό αριθμό πλευρών, τότε η κάθετη διέρχεται από το μέσον  $E$  του τόξου του περιγεγραμμένου κύκλου που ορίζεται από μια πλευρά του  $ZH$  (Σχήμα 2.17.4-II).

Υπόδειξη: Για άρτιο αριθμό πλευρών  $2n$  ισχύει (Σχήμα 2.17.4-I):

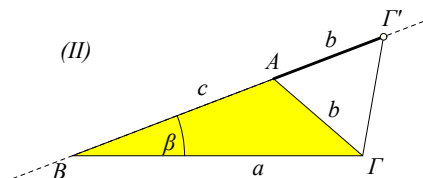
$$\widehat{\Delta\Gamma B} = 90^\circ - \widehat{\Delta B\Gamma} = 90^\circ - \frac{k}{n} \cdot 90^\circ = (n - k) \cdot \frac{90^\circ}{n},$$

όπου  $k$  ακέραιος. Ανάλογη και η απόδειξη για περιττό αριθμό πλευρών.

**Άσκηση 2.17.10** Δείξε ότι το άθροισμα των υψών ενός τριγώνου είναι μικρότερο της περιμέτρου του.



Σχήμα 2.17.5: Ορθογώνιο από  $a, |\beta - \gamma|$



Κατασκευή από  $(a, b + c, \beta)$

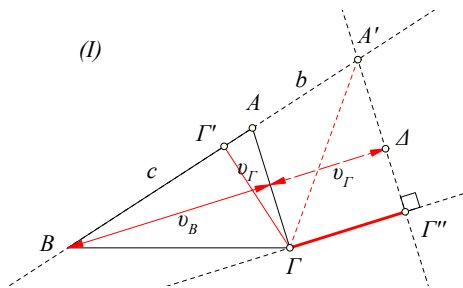
**Άσκηση 2.17.11** Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο από το μήκος της υποτεινούσας  $a = |BG|$  και τη διαφορά των γωνιών  $|\beta - \gamma|$ .

Υπόδειξη: Φέρε τη  $|BA'| = |AG|$  (Σχήμα 2.17.5-I). Το ισοσκελές τραπέζιο  $AA'GB$  κατασκευάζεται από τα δεδομένα.

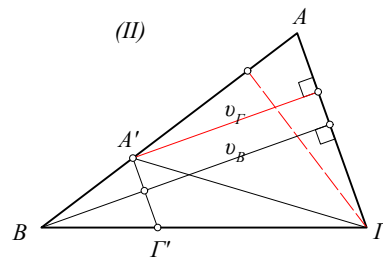
**Άσκηση 2.17.12** Να κατασκευασθεί τρίγωνο από τα μήκη  $a = |BG|$ ,  $b + c = |AG| + |AB|$  και τη γωνία στο  $B$ .

Υπόδειξη: Στην προέκταση της  $BA$  προς το  $A$  πάρε  $G'$  έτσι ώστε  $|AG'| = |AG|$  (Σχήμα 2.17.5-II). Το τρίγωνο  $BGG'$  κατασκευάζεται.

**Άσκηση 2.17.13** Δείξε ότι σε τρίγωνο  $ABG$  του οποίου είναι γνωστή η γωνία στο  $A$ , τα μήκη  $b + c$  και  $u_B + u_G$  προσδιορίζονται το ένα από το άλλο.



Σχήμα 2.17.6: Σχέση  $b + c$  και  $u_B + u_G$



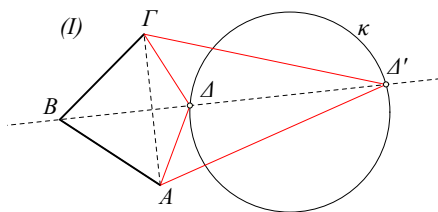
Σχέση  $|b - c|$  και  $u_B - u_G$

Υπόδειξη: Από το  $G$  φέρε παράλληλο  $GG''$  προς το ύψος  $u_B$ , μήκους  $u_G$  και προσδιόρισε το  $G''$  (Σχήμα 2.17.6-I). Από το  $G''$  φέρε παράλληλο προς την  $AG$  τέμνουσα την  $AB$  στο  $A'$ . Δείξε ότι η  $A'G$  είναι διχοτόμος της γωνίας στο  $A'$  και, επομένως,  $b = |AG| = |AA'|$  και  $|BA'| = b + c$ . Τα δύο προς σύγκριση μήκη είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου  $BAA'$  με γνωστές γωνίες.

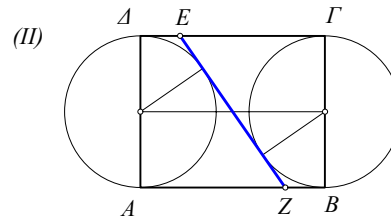
**Άσκηση 2.17.14** Δείξε ότι, σε τρίγωνο  $ABG$  του οποίου είναι γνωστή η γωνία στο  $A$ , τα μήκη  $|b - c|$  και  $|u_B - u_G|$  προσδιορίζονται το ένα από το άλλο (Σχήμα 2.17.6-II).

**Άσκηση 2.17.15** Να κατασκευασθεί τρίγωνο από τα στοιχεία του ( $a = |BG|$ ,  $a$ ,  $u_B + u_G$ ), καθώς και από τα ( $a$ ,  $|a - b|$ ,  $u_B + u_G$ ).

**Άσκηση 2.17.16** Να κατασκευασθεί τρίγωνο από τα στοιχεία του ( $a = |BG|$ ,  $\gamma$ ,  $u_B + u_G$ ), καθώς και από τα ( $a = |BG|$ ,  $\gamma$ ,  $u_B - u_G$ )



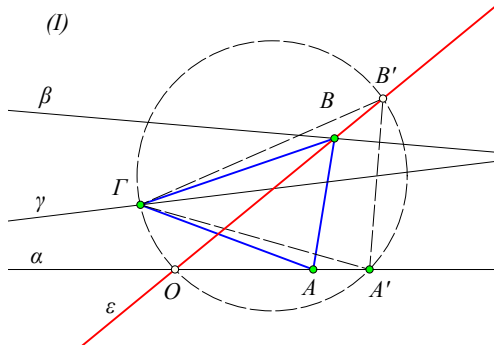
Σχήμα 2.17.7: Βλέποντας τμήματα υπό ίσες γωνίες



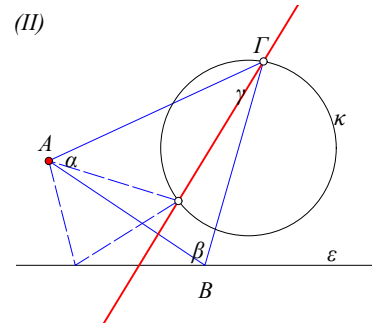
$|EZ| = |AB|$

**Άσκηση 2.17.17** Δοθέντων δύο ίσων ευθυγράμμων τμημάτων  $AB$ ,  $AG$ , να βρεθεί σημείο  $\Delta$  επί δοθέντος κύκλου  $\kappa$  έτσι ώστε οι γωνίες  $\widehat{A\Delta B}$  και  $\widehat{B\Delta G}$  να είναι ίσες. Να εξετασθεί πότε υπάρχει λύση του προβλήματος (Σχήμα 2.17.7-I).

**Άσκηση 2.17.18** Κατασκευάζουμε κύκλους με διάμετρο, αντίστοιχα, τις απέναντι πλευρές  $AD, B\Gamma$  ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ . Δείξε ότι η εσωτερική κοινή εφαπτόμενη των δύο κύκλων (όταν υπάρχει), ορίζει τμήμα  $EZ$  ίσο προς την πλευρά  $AB$  του ορθογωνίου (Σχήμα 2.17.7-II).



Σχήμα 2.17.8: Κορυφές επί ευθειών



Κορυφές επί ευθείας και κύκλου

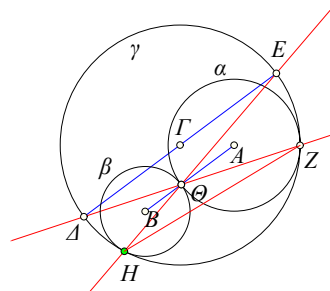
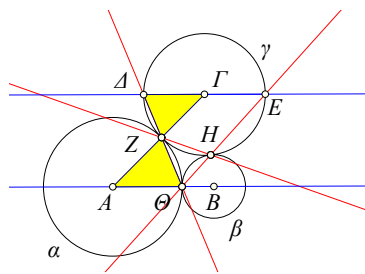
**Άσκηση 2.17.19** Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$  με δοθείσες γωνίες, του οποίου οι κορυφές  $A, B, \Gamma$  να περιέχονται αντίστοιχα σε τρεις ευθείες  $a, \beta, \gamma$ .

Υπόδειξη: Θεώρησε τυχόν σημείο  $\Gamma$  της  $\gamma$  και τρίγωνα  $\Gamma A' B'$  με γωνίες ίσες αντίστοιχα με τις δοθείσες και την κορυφή  $A'$  επί της  $a$  (Σχήμα 2.17.8-I). Τότε (Θεώρημα 2.14.3) η κορυφή  $B'$  περιέχεται πάντοτε σε σταθερή ευθεία  $\varepsilon$ . Θεώρησε το σημείο τομής  $B$  της  $\varepsilon$  και της  $\beta$  και όρισε το τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

**Άσκηση 2.17.20** Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$  με δοθείσες γωνίες, του οποίου η κορυφή  $A$  είναι σταθερό σημείο, η κορυφή  $B$  να περιέχεται σε ευθεία  $\varepsilon$  και η κορυφή  $\Gamma$  να περιέχεται σε κύκλο  $\kappa$  (Σχήμα 2.17.8-II).

**Άσκηση 2.17.21** Γωνία  $\widehat{XOY}$  σταθερού μέτρου  $\omega$  και με κορυφή στο σταθερό σημείο  $O$  μεταβάλλεται έτσι ώστε τα  $X, Y$  να περιέχονται σε σταθερό κύκλο  $\kappa$ . Για κάθε θέση της γωνίας θεωρούμε το σημείο  $Y'$  στην προέκταση της  $OX$  αντίρροπα προς το  $OX$  και έτσι ώστε  $|OY'| = |OY|$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του  $Y'$ .

Υπόδειξη: Κύκλος ίσος προς τον  $\kappa$ .

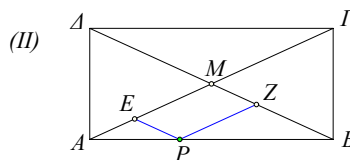
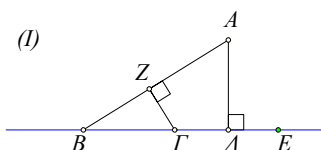


Σχήμα 2.17.9: Σημεία επαφής τριών κύκλων

**Άσκηση 2.17.22** Δίδονται τρεις κύκλοι  $a(A), \beta(B), \gamma(\Gamma)$  εφαπτόμενοι σε τρία διαφορετικά σημεία  $\Theta, H, Z$  (Σχήμα 2.17.9). Δείξε ότι τα δεύτερα σημεία τομής  $E, Z$  των  $H\Theta, Z\Theta$  ορίζουν στον κύκλο  $\gamma$  αντιδιαμετρικά σημεία  $\Delta, E$  (δες και Άσκηση 7.11.2).

Η επόμενη άσκηση ([Cox48], [Eng98, σ. 43]) προτάθηκε από τον Sylvester (1814-1897) το 1893 και λύθηκε μετά από 40 χρόνια!

**Άσκηση 2.17.23** Δίδονται  $n$  σημεία με την ιδιότητα: Κάθε ευθεία που ενώνει δύο από αυτά περιέχει και ένα τρίτο από αυτά. Δείξε ότι και τα  $n$  σημεία περιέχονται σε μία ευθεία.

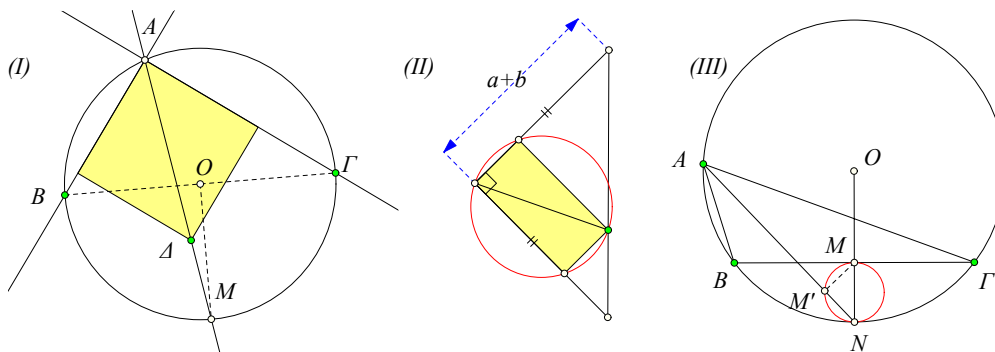


Σχήμα 2.17.10:  $n$  συνευθειακά σημεία

$$|PE| + |PZ| = |MA|$$

Υπόδειξη: Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε υπάρχουν σημεία  $A, B, \Gamma$  έτσι ώστε η απόσταση  $|AA|$  του  $A$  από το  $B\Gamma$  να είναι η ελάχιστη δυνατή για όλες τις τριάδες που σχηματίζονται επιλέγοντας από τα  $n$  σημεία (Σχήμα 2.17.10-I). Έστω ότι η  $B\Gamma$  περιέχει ένα ακόμη σημείο, το  $E$ . Τότε δύο τουλάχιστον σημεία από τα  $B, \Gamma, E$  θα περιέχονται στην  $B\Gamma$  και από την ίδια μεριά του  $\Delta$ . Ας υποθέσουμε ότι τα  $B, \Gamma$  περιέχονται από την ίδια μεριά του  $\Delta$  και κατά τη διάταξη  $B, \Gamma, \Delta$ . Τότε η απόσταση του  $\Gamma$  από την  $AB$  θα είναι μικρότερη από την  $|AA|$ , πράγμα που αντιφάσκει στην υπόθεση.

**Άσκηση 2.17.24** Δείξε ότι κάθε σημείο  $P$  της περιμέτρου ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου προβάλλεται παράλληλα προς τις διαγωνίες σε δύο σημεία αυτών  $E$  και  $Z$  έτσι ώστε  $|PE| + |PZ| = |MA|$ , όπου  $M$  το σημείο τομής των διαγωνιών. Αντίστροφα, αν σημείο  $P$  προβάλλεται παράλληλα προς τις πλευρές γωνίας  $\widehat{AMB}$  σε σημεία τους  $E, Z$  έτσι ώστε  $|PE| + |PZ| = \kappa$ , όπου  $\kappa$  σταθερά, τότε το  $P$  περιέχεται στην περίμετρο ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Σχήμα 2.17.10-II).



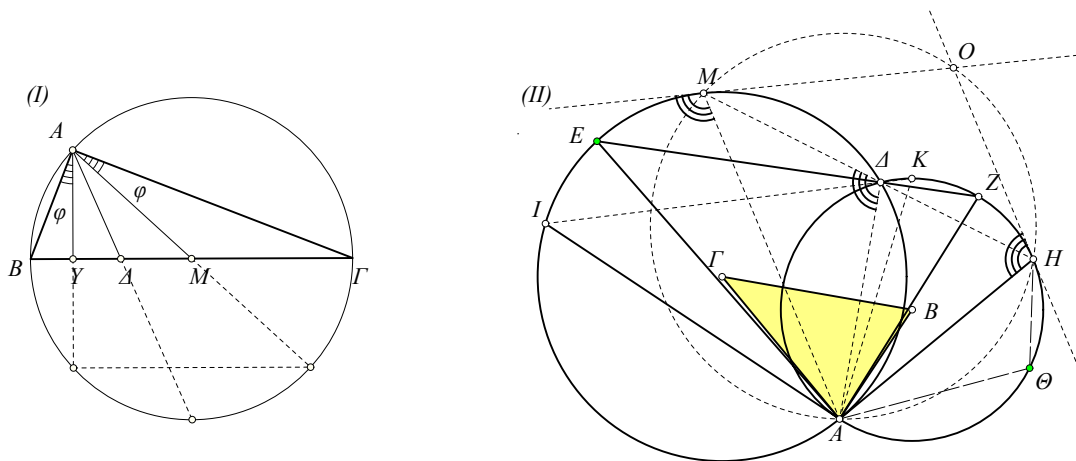
Σχήμα 2.17.11: Υποδείξεις μέσω των σχημάτων

**Άσκηση 2.17.25** Κατασκεύασε τετράγωνο του οποίου οι δύο διαδοχικές πλευρές να διέρχονται από δοθέντα σημεία  $B, \Gamma$  και η κορυφή που περιέχεται στις άλλες δύο να είναι δοθέν σημείο  $\Delta$  (Σχήμα 2.17.11-I).

**Άσκηση 2.17.26** Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει δοθείσα περίμετρο (Σχήμα 2.17.11-II).

**Άσκηση 2.17.27** Τριγώνου  $AB\Gamma$  η θέση και το μέγεθος της βάσης  $B\Gamma$  και το μέτρο της γωνίας  $a = \widehat{BA\Gamma}$  μένουν σταθερά. Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της προβολής του μέσου  $M$  της  $B\Gamma$  στην διχοτόμο από το  $A$  (Σχήμα 2.17.11-III).

**Άσκηση 2.17.28** Δοθέντος τριγώνου  $AB\Gamma$  να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $P$  του επιπέδου, για τα οποία οι κάθετες στις  $PA, PB, P\Gamma$  στα  $A, B, \Gamma$  αντιστοίχως, συντρέχουν σε κοινό σημείο.



Σχήμα 2.17.12: Χαρακτηρισμός ορθογωνίου

Γωνίες από μεταβλητή χορδή

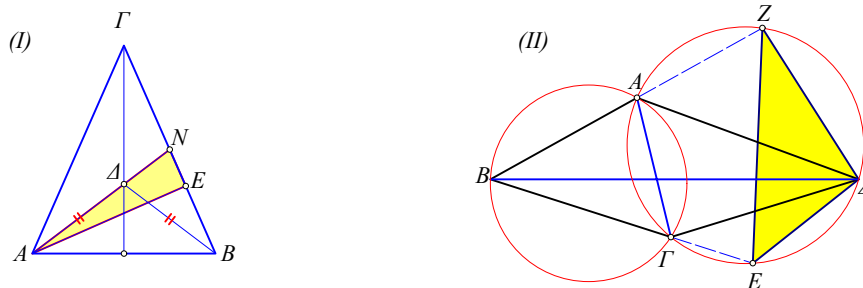
Υπόδειξη: Ο περιγεγραμμένος κύκλος του  $AB\Gamma$ .

**Άσκηση 2.17.29** Δείξε ότι (εκτός των ισοσκελών) το ορθογώνιο τρίγωνο, χαρακτηρίζεται από το ότι το ύψος και η διάμεσος από την ορθή γωνία του είναι ίσων κεκλιμένες προς την αντίστοιχη διχοτόμο (Σχήμα 2.17.12-I).

**Άσκηση 2.17.30** Από το κοινό σημείο  $A$  δύο κύκλων με κέντρα  $B$  και  $\Gamma$  φέρνουμε ευθεία που τους τέμνει στα  $E$  και  $Z$ . Επίσης στο άλλο κοινό σημείο  $A$  των δύο κύκλων φέρνουμε τις εφαπτόμενες  $AI$  και  $AH$  των δύο κύκλων. Δείξε ότι (Σχήμα 2.17.12-II):

1. Η γωνία  $\widehat{IAH}$  είναι παραπληρωματική της  $\widehat{EAZ}$ .
2. Εάν  $M, K$  είναι τα σημεία τομής των κύκλων αντίστοιχα με τις  $\Delta H, I\Delta$  και  $MO, HO$  εφαπτόμενες αντίστοιχα στα  $M, H$ , τότε το  $OMAH$  είναι εγγράψιμο.
3. Η γωνία  $\widehat{I\Delta H}$  έχει μέτρο  $\widehat{I\Delta H} = 2\widehat{EAZ}$ .

Υπόδειξη: Δες τις ασκήσεις 2.13.12, 2.13.13. Για το (3):  $\widehat{I\Delta H} = \widehat{I\Delta A} + \widehat{A\Delta H} = \frac{1}{2}(\widehat{I\Gamma A} + \widehat{AB\Theta})$  κ.λπ.



Σχήμα 2.17.13: Κατασκευή ισοσκελούς,

Κατασκευή τετραπλεύρου

**Άσκηση 2.17.31** Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με βάση  $AB$ , του οποίου δίδεται το μήκος του ύψους  $AE$  και το μήκος της διαμέσου  $AN$ .

Υπόδειξη: Από τα δεδομένα κατασκευάζεται το ορθογώνιο τρίγωνο  $AEN$  (Σχήμα 2.17.13-I). Το σημείο τομής των διαμέσων  $\Delta$  είναι γνωστό σημείο της  $AN$  και  $|\Delta A| = |\Delta B|$ . Επομένως, το  $B$  ευρίσκεται ως τομή του κύκλου με ακτίνα  $\Delta A$  με την ευθεία  $EN$ .

**Άσκηση 2.17.32** Κατασκεύασε τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , του οποίου δίδονται τα μήκη των διαγωνίων  $\{A\Gamma, B\Delta\}$  και τα μέτρα των γωνιών του.

Υπόδειξη: Από τα δεδομένα κατασκευάζονται οι κύκλοι  $(A\Gamma\Delta)$  και  $(AB\Gamma)$  διότι τα  $\Delta$  και  $B$  βλέπουν υπό δοθείσες γωνίες το δοθέν  $A\Gamma$  (Σχήμα 2.17.13-II). Προεκτείνοντας τις  $BA$  και  $B\Gamma$  ορίζουμε τα σημεία  $Z$  και  $E$  του κύκλου  $(A\Gamma\Delta)$ . Στον κατασκευασθέντα κύκλο  $(A\Gamma\Delta)$  οι γνωστές γωνίες  $\widehat{Z\Delta\Delta}$  και  $\widehat{E\Gamma\Delta}$  ορίζουν κατασκευάσιμα μήκη  $|AZ|$ ,  $|AE|$ . Συνεπώς, το τρίγωνο  $\Delta EZ$  κατασκευάζεται. Το  $B$  προσδιορίζεται ως τομή του κύκλου που βλέπει το  $EZ$  υπό δοθείσα γωνία  $\widehat{B}$  και του κύκλου  $\Delta(AB)$ .

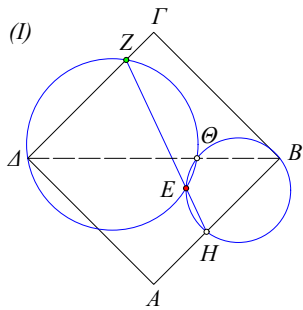
**Άσκηση 2.17.33** Κατασκεύασε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , του οποίου δίδεται η διχοτόμος  $A\Delta$  και οι ακτίνες των περικύκλιων των τριγώνων  $\{AB\Delta, A\Gamma\Delta\}$ .

**Άσκηση 2.17.34** Δίδονται δύο κύκλοι τεμνόμενοι στα σημεία  $\{A, B\}$ . Να αχθεί από το  $A$  ευθεία που τέμνει τους κύκλους στα δεύτερα σημεία  $\{\Gamma, \Delta\}$ , έτσι ώστε το  $A$  να είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$ .

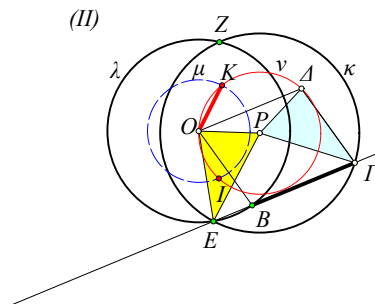
**Άσκηση 2.17.35** Κατασκεύασε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , του οποίου δίδεται η διάμεσος  $A\Delta$  και οι ακτίνες των περικύκλιων των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$ .

**Άσκηση 2.17.36** Κατασκεύασε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , του οποίου δίδεται το μήκος της διαγωνίου  $A\Gamma$  και η διαφορά των γωνιών  $\widehat{\Gamma AB}$  και  $\widehat{\Gamma A\Delta}$ .

**Άσκηση 2.17.37** Δοθέντων δύο σημείων  $A$  και  $B$  και κύκλου  $\kappa(O, \rho)$  έτσι ώστε τα  $A, B$  και  $O$  να μην είναι συνευθειακά, να αχθούν δύο παράλληλες  $AX$  και  $BY$  έτσι ώστε να αποτεμνουν από τον κύκλο δύο ίσες χορδές. Να εξετασθεί πότε το πρόβλημα έχει λύση.



Σχήμα 2.17.14: Τομή στην διαγώνιο

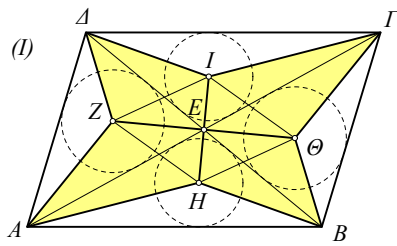


Τμήμα μεταξύ δύο κύκλων

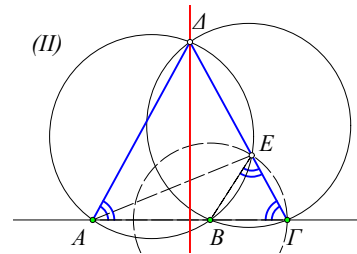
**Άσκηση 2.17.38** Από δοθέν σημείο  $E$  εντός τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  φέρνουμε τέμνουσα αυτό στα σημεία  $Z, H$  (Σχήμα 2.17.14-I). Δείξε ότι οι κύκλοι  $(\Delta ZE)$ ,  $(EHB)$  τέμνονται σε σημείο  $\Theta$  μιας διαγωνίου του τετραγώνου.

**Άσκηση 2.17.39** Δίδονται δύο κύκλοι  $\kappa, \lambda$  τεμνόμενοι στα σημεία  $E, Z$ . Να αχθεί τέμνουσα αυτούς ευθεία  $EB$  διά του  $E$ , έτσι ώστε το τμήμα  $B\Gamma$  που ορίζεται επί αυτής από τα δεύτερα σημεία τομής της με τους κύκλους να έχει δοθέν μήκος  $\delta$ .

Υπόδειξη: Αν  $\kappa(P)$ ,  $\lambda(O)$  οι κύκλοι, θεώρησε μεταβλητή ευθεία διά του  $E$  τέμνουσα αυτούς αντίστοιχα στα  $\Gamma, B$  (Σχήμα 2.17.14-II). Σχημάτισε το παραλληλόγραμμο  $OB\Gamma\Delta$ . Η κορυφή του  $\Delta$  περιέχεται σε κύκλο  $\nu$  και η ζητούμενη τέμνουσα λαμβάνεται όταν το  $\Delta$  συμπέσει με ένα από τα σημεία τομής  $I, K$  του κύκλου  $\nu$  με τον κύκλο  $\mu(O, \delta)$ .



Σχήμα 2.17.15: Παραλληλόγραμμο και ρόμβος



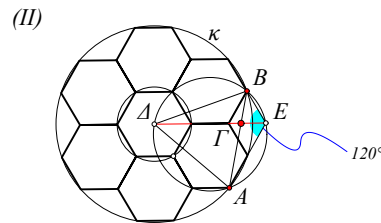
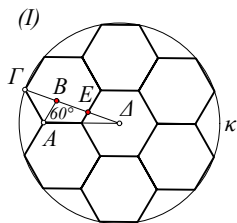
Τόπος τομής (Δ) ίσων κύκλων

**Άσκηση 2.17.40** Θεώρησε τα τέσσερα τρίγωνα που ορίζονται από τις πλευρές παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  και το σημείο  $E$  τομής των διαγωνίων του (Σχήμα 2.17.15-I). Δείξε ότι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων αυτών των τριγώνων σχηματίζουν ρόμβο  $ZH\Theta I$ . Εξέτασε πότε ο ρόμβος αυτός είναι τετράγωνο.

**Άσκηση 2.17.41** Τα  $AB, B\Gamma$  είναι διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα της ίδιας ευθείας. Κατασκευάζουμε ίσους κύκλους που έχουν, αντίστοιχα, τα  $AB, B\Gamma$  ως χορδές. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του άψιλου σημείου τομής τους  $\Delta$  (Σχήμα 2.17.15-II).

**Άσκηση 2.17.42** Κατασκεύασε τρίγωνο  $AB\Gamma$  που έχει μεσοκάθετες των πλευρών του δοθείσες ευθείες  $a, \beta, \gamma$ , διερχόμενες από κοινό σημείο  $O$ .

**Άσκηση 2.17.43** Οι κύκλοι  $\{\kappa_1, \kappa_2\}$  τέμνονται στα σημεία  $\{A, B\}$ , από τα οποία διέρχονται αντίστοιχα οι ευθείες  $\{a, \beta\}$ . Αυτές ξανατέμνουν τους κύκλους, αντίστοιχα, στα σημεία  $\{A_1, A_2\}$  η  $a$  και  $\{B_1, B_2\}$  η  $\beta$ . Δείξε ότι οι ευθείες  $\{A_1B_1, A_2B_2\}$  είναι παράλληλες. Τι συμβαίνει όταν τα σημεία  $\{A_1, B_1\}$  συμπίπτουν (Άσκηση 2.13.18);



Σχήμα 2.17.16: Εφτά ίσα κανονικά εξάγωνα μέσα σε κύκλο

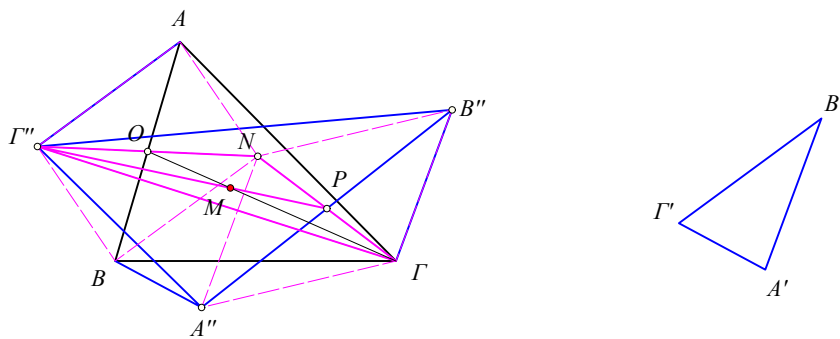
**Άσκηση 2.17.44** Σε δοθέντα κύκλο  $\kappa$  να εγγραφούν εφτά ίσα κανονικά εξάγωνα (από τη Συναγωγή του Πάππου [Πάπ76, σ. 1097]) (Σχήμα 2.17.16).

Υπόδειξη: Στο σχήμα 2.17.16-I το  $A$  κατασκευάζεται διότι βλέπει το  $B\Delta$  υπό γωνία  $60^\circ$  και  $|AB|/|B\Gamma| = 2$  (απόδειξη του Πάππου). Ανάλογη απόδειξη στο σχήμα 2.17.16-II, στο οποίο  $|A\Gamma|/|\Gamma B| = 2$ .

**Άσκηση 2.17.45** Δίδεται ευθεία  $\epsilon$  και σημείο της  $M$ , καθώς και σημείο  $H$  εκτός της ευθείας. Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$  του οποίου η βάση  $B\Gamma$  να περιέχεται στην  $\epsilon$  και να έχει μέσον το  $M$ , ορθόκεντρο το  $H$  και οι γωνίες στη βάση του να ικανοποιούν τη σχέση  $\beta - \alpha = 90^\circ$ .

**Άσκηση 2.17.46** Η ευθεία  $\epsilon$  διέρχεται από την κορυφή  $A$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να ευρεθεί σημείο  $M$  της  $\epsilon$  για το οποίο η απόσταση  $|MB| + |M\Gamma|$  είναι η ελάχιστη δυνατή. Να ευρεθεί κατόπιν ο γεωμετρικός τόπος αυτών των σημείων  $M$  όταν η  $\epsilon$  περιστρέφεται περί το  $A$ .

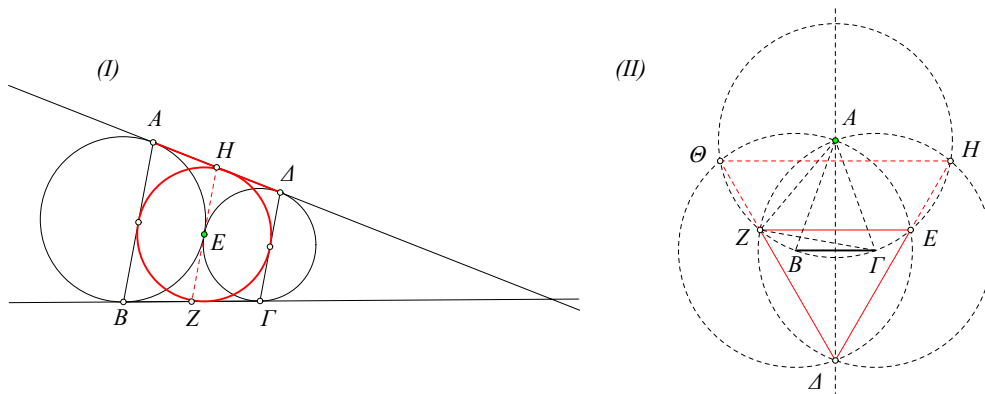




Σχήμα 2.17.17: Τρίγωνα με κοινό κέντρο βάρους (κεντροειδές)

**Άσκηση 2.17.47** Δοθέντων δύο τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , κατασκευάζουμε τρίτο  $A''B''\Gamma''$  ως εξής: Από την κορυφή  $\Gamma$  φέρουμε παράλληλο και ίσο τμήμα  $\Gamma B''$  προς το  $A'B'$ , από την  $A$  παράλληλο και ίσο  $A\Gamma''$  προς τη  $B'\Gamma'$  και από τη  $B$  παράλληλο και ίσο  $BA''$  προς τη  $\Gamma'A'$ . Δείξε ότι το τρίγωνο  $A''B''\Gamma''$  έχει το ίδιο κεντροειδές  $M$  με το  $AB\Gamma$ .

Υπόδειξη: Από το  $A''$  φέρε παράλληλο και ίσο  $A''N$  προς το  $\Gamma B''$  (Σχήμα 2.17.17). Το τρίγωνο  $BA''N$  είναι ίσο προς το  $\Gamma'A'\Gamma'$ , άρα η  $BN$  είναι παράλληλη και ίση της  $\Gamma''A$ . Το κέντρο βάρους των  $A''B''\Gamma''$  και  $AB\Gamma$  συμπίπτει με αυτό του  $\Gamma''GN$ .



Σχήμα 2.17.18: Τετράπλευρο εφαπτομένων

Τρεις ίσοι κύκλοι

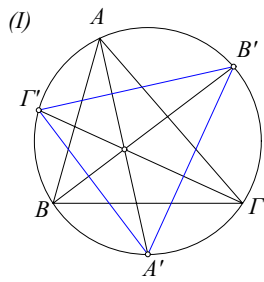
**Άσκηση 2.17.48** Δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο  $E$ . Δείξε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , με κορυφές τα σημεία επαφής τους με τις κοινές τους εφαπτόμενες, είναι περιγράψιμο κύκλου κέντρου  $E$  (Σχήμα 2.17.18-I).

**Άσκηση 2.17.49** Με ακτίνα το σκέλος  $r = |AB|$  ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  γράφουμε κύκλους με κέντρα τα  $A, B, \Gamma$ . Δείξε ότι τα σημεία τομής αυτών των κύκλων σχηματίζουν δύο ισόπλευρα τρίγωνα  $\Delta EZ$  και  $\Delta H\Theta$  (Σχήμα 2.17.18-II).

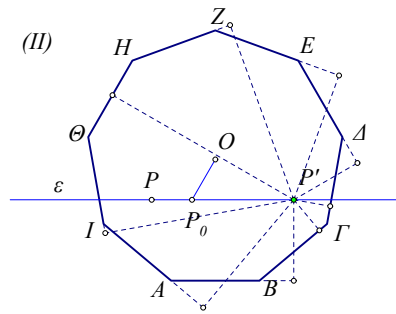
Υπόδειξη: Λόγω συμμετρίας το  $\Delta EZ$  είναι ισοσκελές,  $|\Delta Z| = |\Delta E|$ . Δείξε ακόμη ότι τα τρίγωνα  $E\Gamma Z$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι ίσα και η γωνία  $\widehat{\Gamma E Z}$  είναι  $30^\circ$ .

**Άσκηση 2.17.50** Να κατασκευασθεί τετράπλευρο του οποίου δίδονται τα μέτρα δύο απέναντι γωνιών του, τα μήκη των διαγωνίων του και το μέτρο της γωνίας τους.





Σχήμα 2.17.19: Τρίγωνα διχοτόμων

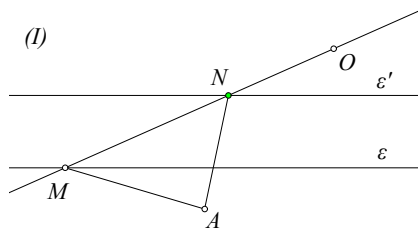


Άθροισμα αποστάσεων

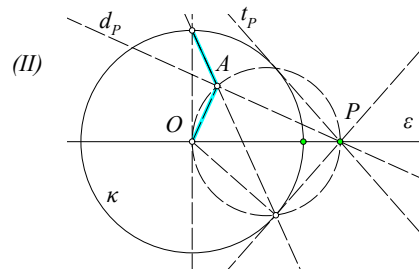
**Άσκηση 2.17.51** Δοθέντος τριγώνου  $AB\Gamma$ , τα σημεία  $A'$ ,  $B'$  και  $\Gamma'$  ορίζονται ως οι τομές των διχοτόμων του  $AB\Gamma$  με τον περίκυκλο αυτού. Δείξε ότι το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  έχει τις διχοτόμους του  $AB\Gamma$  ως ύψη (Σχήμα 2.17.19-I).

**Άσκηση 2.17.52** Δείξε ότι, για τυχόν σημείο  $P$  στο εσωτερικό κανονικού πολυγώνου το άθροισμα των αποστάσεων του από τις πλευρές του πολυγώνου είναι σταθερό.

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα, χρησιμοποιώντας την άσκηση 2.5.1, ότι αυτό το άθροισμα αποστάσεων δεν μεταβάλλεται, εάν το σημείο  $P$  κινείται επί ευθείας  $\varepsilon$ , που είναι παράλληλη προς κάποια πλευρά του πολυγώνου (Σχήμα 2.17.19-II). Άφησε κατόπιν το  $P$  να πάρει τη θέση της προβολής  $P_0$  επί της  $\varepsilon$  παράλληλα προς μίαν άλλη πλευρά του πολυγώνου, του κέντρου  $O$  του πολυγώνου. Εφάρμοσε κατόπιν την ίδια παρατήρηση στην ευθεία  $P_0O$ , δείχνοντας έτσι, ότι αυτό το άθροισμα είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου  $O$  από τις πλευρές του πολυγώνου (εναλλακτικά, δες την άσκηση 3.14.19).



Σχήμα 2.17.20: Τέμνουσα παραλλήλων

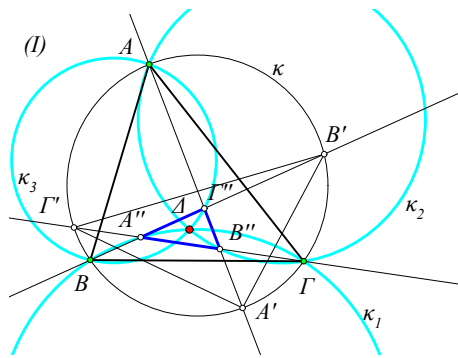


Γεωμετρικός τόπος

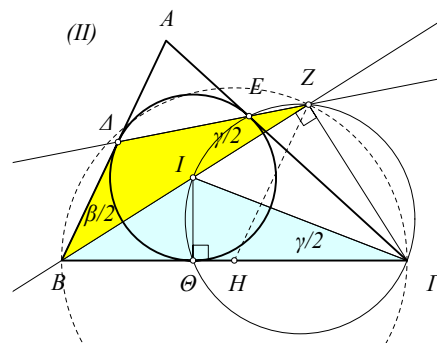
**Άσκηση 2.17.53** Από το σημείο  $O$  εκτός των παραλλήλων  $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$  άγονται ευθείες τέμνουσες τις παράλληλες αντιστοίχα σε σημεία  $\{M, N\}$ . Να βρεθεί η τέμνουσα για την οποία οι αποστάσεις  $\{|AM|, |AN|\}$  από το σταθερό σημείο  $A$  είναι ίσες (Σχήμα 2.17.20-I).

**Άσκηση 2.17.54** Η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το κέντρο του κύκλου  $\kappa(O)$ . Για κάθε σημείο  $P$  της  $\varepsilon$ , εξωτερικό του κύκλου, φέρουμε την εφαπτόμενη  $t_P$  του  $\kappa$  από το  $P$  στο ίδιο πάντα μέρος της  $\varepsilon$ . Να βρεθεί ο τόπος της προβολής  $A$  του κέντρου  $O$  του  $\kappa$  στη διχοτόμο  $d_P$  της γωνίας των ευθειών  $\{\varepsilon, t_P\}$  (Σχήμα 2.17.20-II).

**Άσκηση 2.17.55** Τα τρίγωνα  $\{AB\Gamma, A'B'\Gamma'\}$  έχουν κοινό περίκυκλο  $\kappa$ . Το πρώτο παραμένει σταθερό και το δεύτερο περιστρέφεται μέσα στον κύκλο παραμένοντας ίσο προς εαυτό. Δείξε ότι οι ευθείες  $\{AA', BB', \Gamma\Gamma'\}$  είναι πλευρές ενός τριγώνου  $A''B''\Gamma''$  με σταθερές γωνίες και οι κορυφές του κινούνται σε τρεις κύκλους  $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$  που διέρχονται από κοινό σημείο  $\Delta$  (Σχήμα 2.17.21-I).



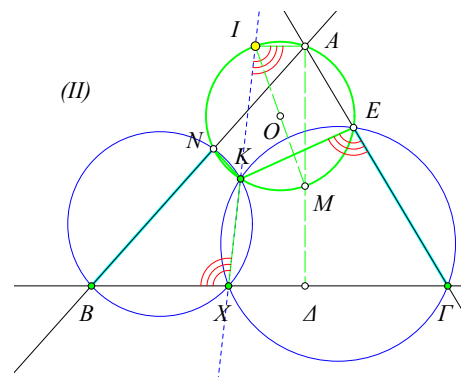
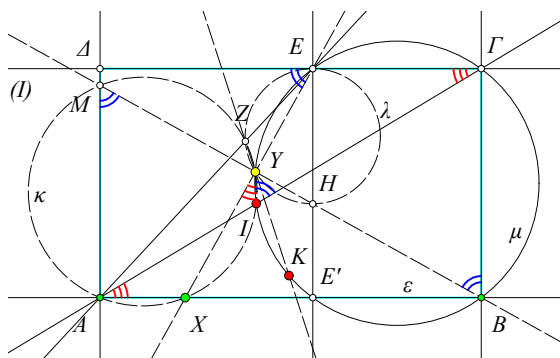
Σχήμα 2.17.21: Σταθερές γωνίες



Τομή επί κύκλου

Υπόδειξη: Εφαρμοσε την άσκηση 2.13.17.

**Άσκηση 2.17.56** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η διχοτόμος στο  $B$  και η ευθεία  $\Delta E$ , που ενώνει τα σημεία επαφής των  $AB, A\Gamma$  με τον εγγεγραμμένο κύκλο, τέμνονται στο σημείο  $Z$ . Δείξε ότι το  $Z$  είναι επί του κύκλου με διάμετρο τη  $B\Gamma$  (Σχήμα 2.17.21-II).



Σχήμα 2.17.22: Μεταβλητοί κύκλοι

**Άσκηση 2.17.57** Δίδεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ , και σταθερό σημείο  $E$  της πλευράς  $\Gamma\Delta$  (Σχήμα 2.17.22-I). Για κάθε σημείο  $X$  της ευθείας  $AB$  ορίζουμε την κάθετη προβολή  $Y$  του  $B$  στην ευθεία  $EX$  και τον κύκλο  $\kappa = (AXY)$ . Δείξε ότι

1. Οι κύκλοι  $\kappa$  διέρχονται όλοι από σταθερό σημείο  $I$  της διαγωνίου  $A\Gamma$ .
2. Εάν  $H$  είναι η τομή των  $\{EE', BY\}$  και  $Z$  το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων  $\{\kappa, \lambda = (EYH)\}$ , τότε η ευθεία  $ZY$  διέρχεται από σταθερό σημείο  $K$  του κύκλου  $\mu$ .

Υπόδειξη: Για το (1) όρισε το σημείο τομής  $M$  των ευθειών  $\{A\Delta, BY\}$  και δεξ ότι το  $M$  περιέχεται στον  $\kappa = (AXY)$ . Το  $Y$  περιέχεται επίσης στον κύκλο  $\mu = (B\Gamma EE')$ . Εάν  $I$  είναι το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων  $\{\kappa, \mu\}$ , δείξε ότι το  $I$  περιέχεται στην  $A\Gamma$ .

Για το (2) δεξ ότι  $\widehat{IYK} = \widehat{\Gamma AE}$ , που είναι σταθερή γωνία.

**Άσκηση 2.17.58** Τα σημεία  $\{N, E\}$  στις πλευρές  $\{AB, A\Gamma\}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι σταθερά και το  $X$  κινείται στην ευθεία  $B\Gamma$  (Σχήμα 2.17.22-II). Δείξε ότι η κοινή χορδή  $XK$  των κύκλων  $\beta = (BXN)$  και  $\gamma = (X\Gamma E)$  διέρχεται από σταθερό σημείο  $I$  της παραλλήλου της  $B\Gamma$  από το  $A$ .

**Άσκηση 2.17.59** Δείξε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, τότε και μόνον τότε, όταν έχει κέντρο συμμετρίας.

Υπόδειξη: Συνδύασε την άσκηση 2.6.5 και την Άσκηση 2.9.3.

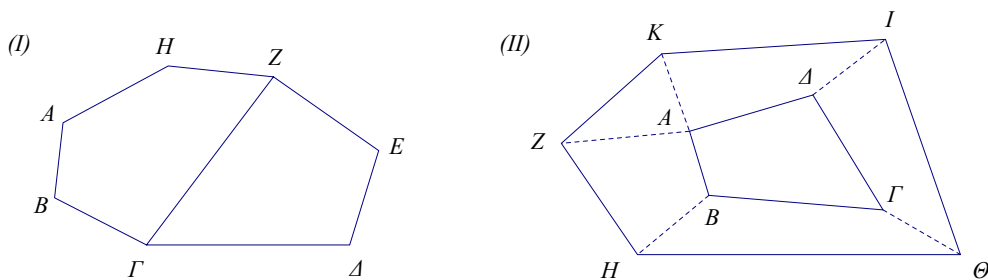
### 3.1 Εμβαδόν πολυγώνων

Ότι δεν δύναμαι να γνωρίσω καμία ουσία, γιατί δεν δύναμαι να έχω ιδέες παρά μόνο των ιδιοτήτων τους, και ότι χίλιες ιδιότητες ενός πράγματος δεν μπορούν να μου μάθουν τη βαθύτερη φύση αυτού του πράγματος, που είναι δυνατόν να έχει χίλιες άλλες ιδιότητες τις οποίες αγνώω.

*Βολταίρος, Ο αδαής Φιλόσοφος*

Μετά τα μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και τα μέτρα γωνιών, το τρίτο μέγεθος που μετράμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου είναι τα **εμβαδά** πολυγώνων. Το εμβαδόν ενός κυρτού πολυγώνου  $\Pi$  είναι ένα θετικός αριθμός  $\epsilon(\Pi) > 0$  για τον οποίον απαιτούμε τις επόμενες ιδιότητες.

**Ιδιότητα 3.1.1** Δύο ίσα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά.



Σχήμα 3.1.1:  $\epsilon(ΑΒΓΖΗ) + \epsilon(ΓΔΕΖ) = \epsilon(ΑΒΓΔΕΖΗ)$

$\epsilon(ΑΒΓΔ) < \epsilon(ΖΗΘΙΚ)$

**Ιδιότητα 3.1.2** Ένα πολύγωνο  $\Pi$  που συνιθεται από άλφια  $\{\Pi', \Pi'', \dots\}$ , πεπερασμένα το πλήθος πολύγωνα που δεν αλληλοεπικαλύπτονται, έχει εμβαδόν το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων (Σχήμα 3.1.1-1)

$$\epsilon(\Pi) = \epsilon(\Pi') + \epsilon(\Pi'') + \dots$$

Στο σχήμα 3.1.1-I, τα δύο πολύγωνα  $ABΓZH$  και  $ΓΔEZ$  έχουν κοινή πλευρά τη  $ΓZ$  και σχηματίζουν το νέο πολύγωνο  $ABΓΔEZH$ .

**Ιδιότητα 3.1.3** Ένα πολύγωνο  $Π$ , που περιέχεται μέσα σε ένα άλλο  $Π'$ , έχει μικρότερο εμβαδόν (Σχήμα 3.1.1-III):  $ε(Π) < ε(Π')$ .

**Ιδιότητα 3.1.4** Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά τη μονάδα μήκους είναι ένα.

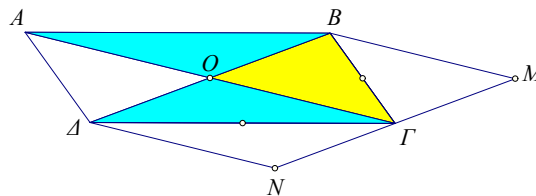
**Σχόλιο-1** Όπως θα δούμε παρακάτω, οι τέσσερις αυτές ιδιότητες που απαιτούμε από το εμβαδόν, καθορίζουν πλήρως τη μορφή του και για ορθογώνια παραλληλόγραμμα οδηγούν στο γνωστό τύπο που το εκφράζουν ως γινόμενο των μηκών των πλευρών του. Είναι, συνεπώς, η ύπαρξή του μια συνέπεια των αξιωμάτων. Γι' αυτό το λόγο ομιλώ για τις «ιδιότητες» και όχι για τα «αξιώματα» του εμβαδού. Θα μπορούσα να πω και «αξιώματα» που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση του εμβαδού, που όμως, δεν συγκαταλέγονται στα «αξιώματα της γεωμετρίας».

**Σχόλιο-2** Η ιδιότητα 3.1.2 θα μπορούσε να αναχθεί με επαγωγή στην αντίστοιχη προσθετικότητα των εμβαδών για πολύγωνα που συντίθενται από δύο μόνο άλλα πολύγωνα. Επίσης η ιδιότητα 3.1.3 είναι συνέπεια της ιδιότητας 3.1.2 και θα μπορούσε να αποδειχθεί από τις άλλες ιδιότητες. Ωστόσο η απόδειξη περιλαμβάνει αρκετά λεπτά σημεία, που στα πρώτα στάδια της γνωριμίας με τη γεωμετρία δεν είναι ανάγκη να αναλυθούν περαιτέρω.

**Σχόλιο-3** Αξίζει να παρατηρήσουμε τις ομοιότητες που παρουσιάζουν οι μετρήσεις μηκών και εμβαδών. Πρόκειται για ειδικές περιπτώσεις **μέτρων**, δηλαδή μηχανισμών μέτρησης μήκους και γενικότερα, περιεχομένου (εμβαδού, όγκου), που εντάσσονται στη γενική, ούτως ονομαζόμενη, *Θεωρία μέτρου*, ως μέτρα του Jordan και ακόμη γενικότερα ως *μέτρα του Lebesgue* ([KF70, σ. 254]). Τα μέτρα αυτά, ξεκινώντας από μετρήσεις πολύ απλών σχημάτων, επεκτείνονται και επιτρέπουν τη μέτρηση πιο πολύπλοκων σχημάτων από αυτά που μας απασχολούν σε αυτό το μάθημα. Ειδικές περιπτώσεις τους είναι και ο όγκος πολυέδρων, που θα συναντήσουμε στη στερεομετρία (§ 10.5), αλλά και το εμβαδόν σφαιρικών πολυγώνων (§ 10.3). Σε όλες τις περιπτώσεις ο μηχανισμός μέτρησης κατασκευάζεται με τον ίδιο τρόπο. Απαιτούμε από αυτόν ορισμένες ιδιότητες και αποδεικνύουμε, ότι αυτές οι απαιτήσεις συνεπάγονται την ύπαρξη ενός και μοναδικού μηχανισμού που τις ικανοποιεί.

**Άσκηση 3.1.1** Δείξε ότι κάθε παραλληλόγραμμο χωρίζεται από μία διαγώνιο του σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα. Δείξε γενικότερα, ότι κάθε ευθεία, που διέρχεται από το κέντρο παραλληλογράμμου, το χωρίζει σε δύο ισοεμβαδικά σχήματα.

**Υπόδειξη:** Τα δύο τρίγωνα που ορίζονται από τη διαγώνιο είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά.



Σχήμα 3.1.2: Ισοεμβαδικά τρίγωνα

**Άσκηση 3.1.2** Δείξε ότι οι δύο διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου το χωρίζουν σε τέσσερα ισοεμβαδικά τρίγωνα.

**Υπόδειξη:** Τα τρίγωνα  $ΑΟΒ$  και  $ΔΟΓ$ , όπου  $Ο$  το κέντρο του παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  (σημείο τομής των διαγωνίων), είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά. Θεώρησε τα συμμετρικά  $Μ, Ν$  του  $Ο$  ως προς τα μέσα των  $ΒΓ$  και  $ΔΓ$  αντίστοιχα. Τα παραλληλόγραμμα  $ΒΟΜ$  και  $ΟΔΝ$  είναι ίσα, άρα και τα μισά τους κατά το εμβαδόν (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση), που είναι τα  $ΒΟΓ$  και  $ΔΟΓ$  θα έχουν ίσα εμβαδά.

**Άσκηση 3.1.3** Δείξε ότι η διάμεσος  $AD$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  το χωρίζει σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα.

Υπόδειξη: Συνδυασμός των δύο προηγούμενων ασκήσεων (δες και Πόρισμα 3.3.6).

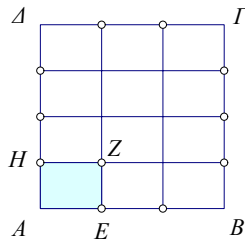
## 3.2 Το εμβαδόν του ορθογωνίου

Όταν μπορείς να μετρήσεις αυτό για το οποίο ομιλείς και να το εκφράσεις με αριθμούς, τότε ξέρεις κάτι για αυτό. Όταν όμως δεν μπορείς να το μετρήσεις και δεν μπορείς να το εκφράσεις με αριθμούς, τότε η γνώση σου είναι ελλιπής και μη ικανοποιητική. Μπορεί να είναι το ξεκίνημα της γνώσης, αλλά, στη σκέψη σου, μόλις που πλησίασες το επίπεδο της *επιστήμης*.

*William Thomson, Lord Kelvin, Εκπαιδευτικές Ομιλίες*

Το κλειδί για τον υπολογισμό των εμβαδών των πολυγώνων είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Στην παράγραφο αυτή ξεκινάμε από το εμβαδόν των ορθογωνίων των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι και σιγά-σιγά, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των εμβαδών, φτάνουμε στο θεμελιώδη τύπο του εμβαδού  $\epsilon = ab$ , ως γινόμενο των μηκών των πλευρών του, για οποιεσδήποτε τιμές των  $a$  και  $b$  ακέραιες ή μη.

**Λήμμα 3.2.1** Διαιρούμε τις δύο απέναντι πλευρές του μοναδιαίου (πλευράς μήκους 1) τετραγώνου σε  $\mu$  ίσα μέρη και τις δύο άλλες απέναντι πλευρές σε  $\nu$  ίσα μέρη και φέρνουμε παράλληλες που ενώνουν απέναντι κείμενα σημεία. Σχηματίζονται  $\mu\nu$  παραλληλόγραμμα, έκαστον των οποίων έχει εμβαδόν  $\frac{1}{\mu\nu}$ .

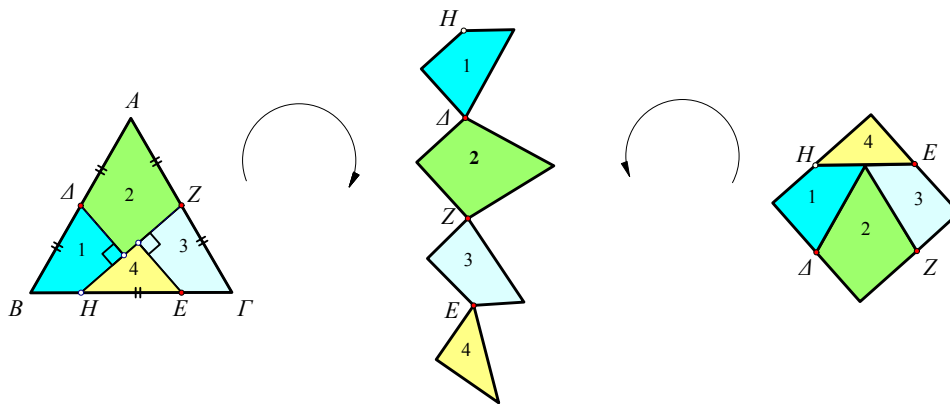


Σχήμα 3.2.1:  $\epsilon(AEZH) = \frac{1}{\mu\nu}$

Απόδειξη: Προφανώς προκύπτουν  $\mu\nu$  ίσα ορθογώνια, που, κατά την ιδιότητα 3.1.1, θα έχουν το ίδιο εμβαδόν  $E$ . Κατά την ιδιότητα 3.1.2, το εμβαδόν του τετραγώνου που είναι 1 (Ιδιότητα 3.1.4), θα είναι το άθροισμα των εμβαδών  $1 = \mu\nu E$ , ο.ε.δ.

**Λήμμα 3.2.2** Το εμβαδόν  $\epsilon$  ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ , με πλευρές  $AB$  και  $A\Delta$ , που έχουν μήκος ρητούς αριθμούς, ισούται με το γινόμενο των μηκών των πλευρών  $\epsilon = |AB||A\Delta|$ .

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι στους ρητούς  $|AB| = \frac{a}{\beta}$ ,  $|A\Delta| = \frac{\gamma}{\delta}$  τα  $a, \beta, \gamma$  και  $\delta$  είναι θετικοί ακέραιοι και διαιρούμε το μοναδιαίο τετράγωνο σε  $\beta\delta$  ίσα ορθογώνια, όπως στο προηγούμενο λήμμα, κατά το οποίο έκαστον έχει εμβαδόν  $\epsilon' = \frac{1}{\beta\delta}$ . Εξ υποθέσεως, η πλευρά  $AB$  του ορθογωνίου μπορεί να διαιρεθεί σε  $a$  το πλήθος τμήματα μήκους  $\frac{1}{\beta}$  και η πλευρά  $A\Delta$  μπορεί να διαιρεθεί σε  $\gamma$  το πλήθος τμήματα μήκους  $\frac{1}{\delta}$ . Φέρνοντας παράλληλους από τα σημεία διαίρεσης αυτών των πλευρών, σχηματίζουμε λοιπόν  $a\gamma$  το πλήθος ίσα ορθογώνια, έκαστον των οποίων έχει εμβαδόν  $\frac{1}{\beta\delta}$ . Το άθροισμα των εμβαδών αυτών των ορθογωνίων είναι  $a\gamma \frac{1}{\beta\delta}$  και ισούται, κατά την ιδιότητα 3.1.2, με το εμβαδόν του ορθογωνίου, ο.ε.δ.



Σχήμα 3.14.22: Διαμέριση ισοπλεύρου του Dudeney

μέση το «ξετυλιγμένο» άρθρωμα. Πιάνοντας το τελευταίο πλακάκι (4) και τυλίγοντας κατά τη φορά του ρολογιού παίρνουμε το σχήμα στα αριστερά, του ισοπλεύρου. Τυλίγοντας το άρθρωμα αντίθετα του ρολογιού παίρνουμε το τετράγωνο στα δεξιά [Dar04, σ. 142].

Υπάρχουν πολλά και ενδιαφέροντα προβλήματα που συνδέονται με διαμερίσεις πολυγώνων, αρκετά από τα οποία παραμένουν άλυτα ([KW91, σ. 50]). Ένα από αυτά είναι ο προσδιορισμός, για δοθέν  $n$ , του ελάχιστου πλήθους  $\kappa(n)$  πολυγώνων στο οποίο μπορεί να διαμερισθεί ένα κυρτό  $n$ -γωνο, έτσι ώστε με τα μέρη του να ανασυγκροτηθεί ένα τετράγωνο. Αντίστοιχα προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν και για σχήματα του χώρου και το τρίτο από τα περίφημα 23 προβλήματα του Hilbert, που έθεσε το 1900 στο δεύτερο παγκόσμιο συνέδριο, στο Παρίσι, ([Wei03, σ. 1378], [Thi03]) σχετίζεται με αυτό το θέμα. Το πρόβλημα αυτό ήταν ισοδύναμο με το ότι ένα κανονικό τετράεδρο δεν μπορεί να διαμερισθεί σε υπο-πολύεδρα, τα οποία να ανασυγκροτήσουν έναν κύβο ([Kan70, σ. 134], [Ben07]). Η ιδιότητα αυτή αποδείχθηκε όντως το 1902 από τον Max Dehn. Οι προηγούμενες ασκήσεις δείχνουν ότι το αντίστοιχο πρόβλημα στο επίπεδο, δηλαδή η διαμέριση ενός ισοπλεύρου τριγώνου και η ανασυγκρότηση με τα μέρη του ενός τετραγώνου είναι δυνατή. Ας σημειώσουμε εδώ την ιδιότητα:

*Αν τα (κυρτά) πολύγωνα  $A, B$  έχουν το ίδιο εμβαδόν, τότε το  $A$  μπορεί να διαμερισθεί σε υπο-πολύγωνα, τα οποία επανατοποθετούμενα σε διαφορετική διάταξη να σχηματίσουν το  $B$ .*

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι συνέπεια της άσκησης 3.4.10. Τούτο διότι, κατά την άσκηση, και τα δύο πολύγωνα μπορούν να διαμερισθούν σε υπο-πολύγωνα που ανασυγκροτούν το ίδιο τετράγωνο. Έχουμε λοιπόν δύο πλακοστρώσεις του ίδιου τετραγώνου με δύο διαφορετικούς τρόπους. Οι δύο αυτές πλακοστρώσεις ορίζουν μία τρίτη στην οποία τα πλακάκια προκύπτουν ως τομές των πλακακιών των δύο πλακοστρώσεων. Με την τρίτη αυτή πλακόστρωση βλέπουμε εύκολα ότι μπορούν να ανασυγκροτηθούν και τα δύο αρχικά πολύγωνα. Μια λεπτομερέστερη εξέταση του θέματος δείχνει επίσης ότι η υπόθεση της κυρτότητας είναι περιττή. Παρόλη τη θεωρητική δυνατότητα, ωστόσο, η διαμέριση και ανασυγκρότηση δύο συγκεκριμένων ισοεμβαδικών πολυγώνων δεν είναι καθόλου προφανής ή εύκολη.

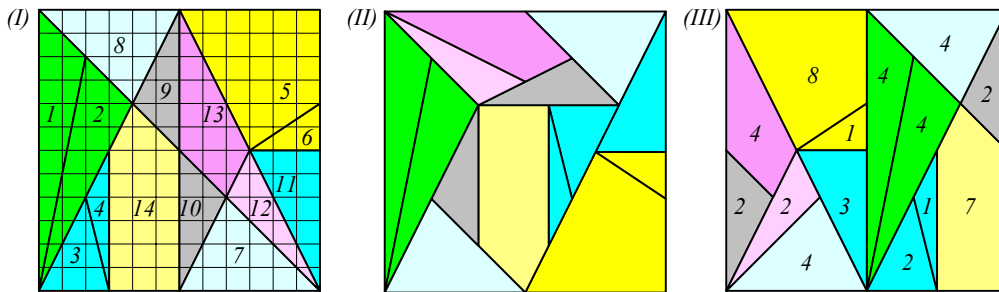
**Άσκηση 3.14.58** Δείξε ότι η διαμέριση του ισοπλεύρου που υποδηλώνεται από το σχήμα 3.14.22 αριστερά, όπου το  $HE$  είναι συμμετρικό ως προς το μέσον του  $BΓ$ , δίδει όντως το τετράγωνο. Εάν, ωστόσο, η διαμέριση γίνει βάσει του σχήματος, με  $|HE| = \frac{|BΓ|}{2}$ , αλλά με  $|BH| \neq |EΓ|$ , τότε κατά την ανασυγκρότηση των μερών προκύπτει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Εξέτασε επίσης ποιοί είναι οι δυνατοί λόγοι  $\frac{a}{b}$ , της μεγάλης προς τη μικρή πλευρά, των παραλληλογράμμων που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο.

**Άσκηση 3.14.59** Προσδιόρισε τα μήκη των πλευρών των τριγώνων που συμμετέχουν στη διαμέριση του ισοπλεύρου τριγώνου του σχήματος 3.14.23.



Σχήμα 3.14.23: Διαμέριση ισοπλεύρου και επανασυγκρότηση μερών σε τετράγωνο II

Σχετικά με τις διαμερίσεις πολυγώνων είναι και τα δύο παραδοσιακά παζλ: το **Στομάχιον του Αρχιμήδη** και το **Τάνγκραμ**. Το πρώτο συνίσταται από μία διαμέριση του τετραγώνου σε 14 πλακάκια. Αυτά ορίζονται χωρίζοντας το τετράγωνο σε  $12 \times 12$  ίσα τετράγωνα και φέρνοντας τις ευθείες που διακρίνονται στο σχήμα 3.14.24-I ([Φου00, σ. 109]). Το σχήμα δείχνει και δύο επανατοποθετήσεις

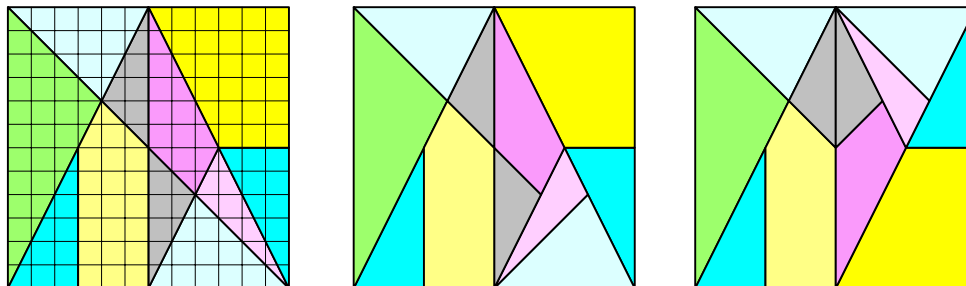


Σχήμα 3.14.24: Τα 14 πλακάκια του στομαχίου του Αρχιμήδη και δύο επανατοποθετήσεις

που ξανασυνθέτουν το τετράγωνο. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 536 διαφορετικοί τρόποι επανατοποθέτησης των πλακιδίων ώστε να ξανασηματίσουν τετράγωνο ([Κατ10, σ.56]).

**Άσκηση 3.14.60** Δείξε ότι τα εμβαδά των πλακακιών του στομαχίου είναι ρητά πολλαπλάσια του εμβαδού του τετραγώνου. Συγκεκριμένα δείξε ότι κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν  $\frac{x}{48}$  του εμβαδού του τετραγώνου, όπου το  $x$  είναι το αναγραφόμενο στο αντίστοιχο πλακάκι στην εικόνα 3.14.24-III.

Αποδεικνύεται επίσης ότι σε όλες αυτές τις δυνατές θέσεις, τα ζεύγη πλακακιών (1, 2), (3, 4), (5, 6) πάνε μαζί και πάντοτε στην ίδια διάταξη (Σχήμα 3.14.24-I). Συνενώνοντας τα πλακάκια των προη-

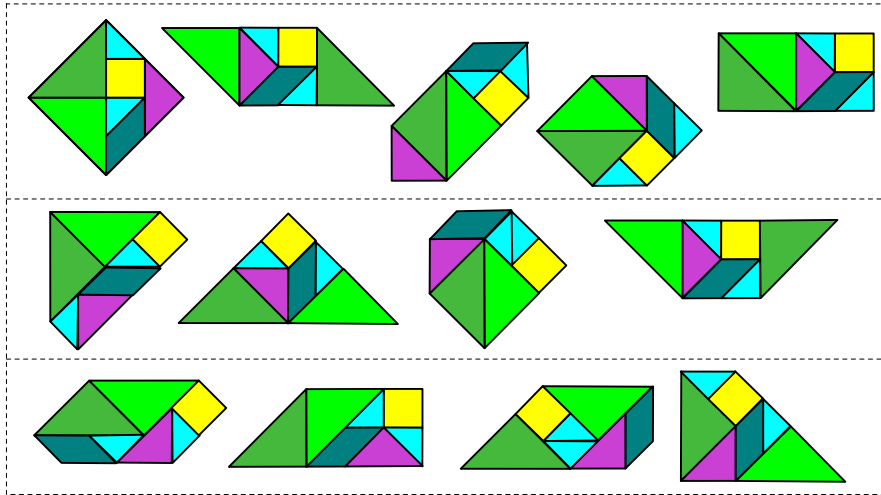


Σχήμα 3.14.25: Τα 11 πλακάκια του ανηγμένου στομαχίου και δύο επανατοποθετήσεις

γουμένων ζευγών δημιουργείται το **ανηγμένο στομάχιο** από 11 πλακάκια (Σχήμα 3.14.25). Επειδή στο ανηγμένο στομάχιο εμφανίζονται δύο επιπλέον ίσα τριγωνικά πλακάκια, το πλήθος των διαφορετικών επανατοποθετήσεων των πλακακιών ώστε να σχηματίσουν το τετράγωνο μειώνεται στο μισό του προηγούμενου: 268.

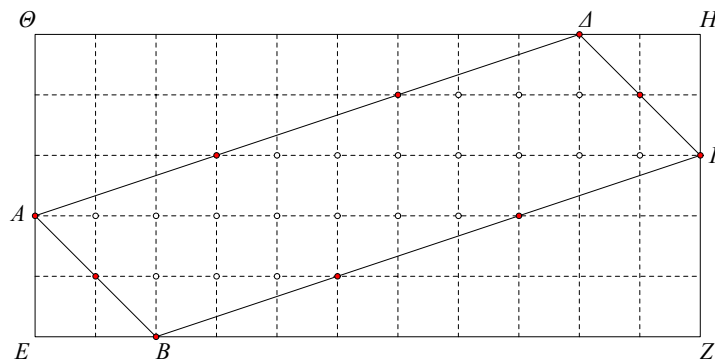
**Άσκηση 3.14.61** Φτιάξε το ανηγμένο στομάχι από χαρτόνι και χρησιμοποίησε τις συμμετρίες που διακρίνεις σ' αυτό για να δημιουργήσεις όσο το δυνατόν περισσότερες επανατοποθετήσεις των πλακακιών ώστε να σχηματίσουν τετράγωνο.

Το Τάνγκραμ συνίσταται στη διαμέριση του τετραγώνου σε 7 πλακάκια και ήταν παιχνίδι στην αρχαία Κίνα με κύριο πρόβλημα, την επανατοποθέτηση των πλακακιών ώστε να προκύψει πολύγωνο με



Σχήμα 3.14.26: Τα 13 κυρτά πολύγωνα που κατασκευάζονται με το τάνγκραμ

δοθέν περίγραμμα ([Tia12]). Σχετικά πρόσφατα (1942) λ.χ. αποδείχθηκε ότι υπάρχουν μόνο 13 κυρτά πολύγωνα που μπορούν να κατασκευασθούν με αυτά τα πλακάκια. Το σχήμα 3.14.26 δείχνει την αρχική διαμέριση του τετραγώνου σε 7 πλακάκια καθώς και μια τοποθέτηση των πλακακιών που παράγει το καθένα από τα 13 αυτά πολύγωνα ([FTW42]).



Σχήμα 3.14.27: Θεώρημα του Pick για παραλληλόγραμμα

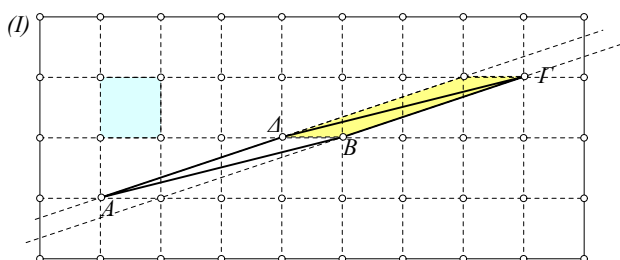
**Άσκηση 3.14.62** (Θεώρημα του Pick 1859-1942, για παραλληλόγραμμα) Δείξε, ότι κάθε παραλληλόγραμμα  $p$  με τις κορυφές του σε κομβικά σημεία τετραγωνισμένου χαρτιού και περιέχον στο εσωτερικό του  $\kappa$  κομβικά σημεία και στο σύνορό του  $\lambda$  κομβικά σημεία, έχει εμβαδόν που δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon(p) = \kappa + \frac{\lambda}{2} - 1$$

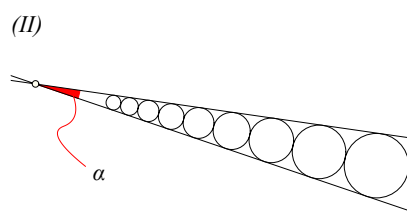


*Υπόδειξη:* Τρία βήματα. (1) Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος ισχύει για παραλληλόγραμμο όπως το  $EZH\Theta$ , με πλευρές οριζόντιες και κάθετες (Σχήμα 3.14.27). (2) Βάσει του (1), βλέπουμε πάλι εύκολα ότι ο τύπος ισχύει για ορθογώνια τρίγωνα, όπως το  $AEB$  με μία πλευρά οριζόντια και μία κάθετη. (3) Συνδυασμός των προηγούμενων και του ότι κάθε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ορίζει ένα άλλο που το περικλείει και έχει πλευρές οριζόντιες και κάθετες, όπως το  $EZH\Theta$ .

Το θεώρημα ισχύει γενικότερα για πολύγωνο με κορυφές σε κομβικά σημεία ([AO12, σ. 277], [RWG76]). Στην ενδιαφέρουσα συλλογή προβλημάτων του Arnold «για παιδιά από 5 έως 15 ετών», προτείνεται το απλούστερο πρόβλημα της επόμενης άσκησης [Arn04, σ. 10], χωρίς να αναφέρεται ο τύπος του Pick. Μια συνέπεια αυτού του τύπου είναι αυτή της μεθεπόμενης άσκησης.



Σχήμα 3.14.28: Παραλληλόγραμμο εμβαδού 1



Κύκλοι εφαπτόμενοι

**Άσκηση 3.14.63** Δείξε ότι σε τετραγωνισμένο χαρτί, παραλληλόγραμμο με τις κορυφές του σε κομβικά σημεία (Σχήμα 3.14.28-I) και το οποίο δεν περιέχει στο εσωτερικό του ή σε πλευρά του άλλο κομβικό σημείο, έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κομβικού τετραγώνου.

**Άσκηση 3.14.64** Δείξε ότι ο τύπος του Pick ισχύει και για τρίγωνα και ότι δεν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές σε κομβικά σημεία.

*Υπόδειξη:* Η απόδειξη για τρίγωνα ανάγεται σε αυτήν των παραλληλογράμμων. Για το ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές σε κομβικά σημεία, το τετράγωνο του ύψους  $v^2$  υπολογίζεται ότι είναι ρητός. Το εμβαδόν  $e$ , κατά Pick, είναι επίσης ρητός, άρα και το  $\frac{e}{v^2}$  θα είναι ρητός, που όμως ισούται με  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Άσκηση 3.14.65** Δείξε ότι οι ακτίνες δύο κύκλων εφαπτομένων μεταξύ τους εξωτερικά και εφαπτομένων δύο ευθειών που τέμνονται υπό γωνία  $\alpha$ , δίδεται από τον τύπο

$$r' = r \frac{1 + \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Συμπέρανε τον τύπο που συνδέει τις ακτίνες του πρώτου και του τελευταίου κύκλου μιας αλυσίδας  $n$  κύκλων, όπως στο σχήμα 3.14.28-II.

**Άσκηση 3.14.66** Δίδονται τρία σταθερά σημεία  $\{A_1, A_2, A_3\}$  και θετικές σταθερές  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \mu\}$ . Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$  για τα οποία το άθροισμα

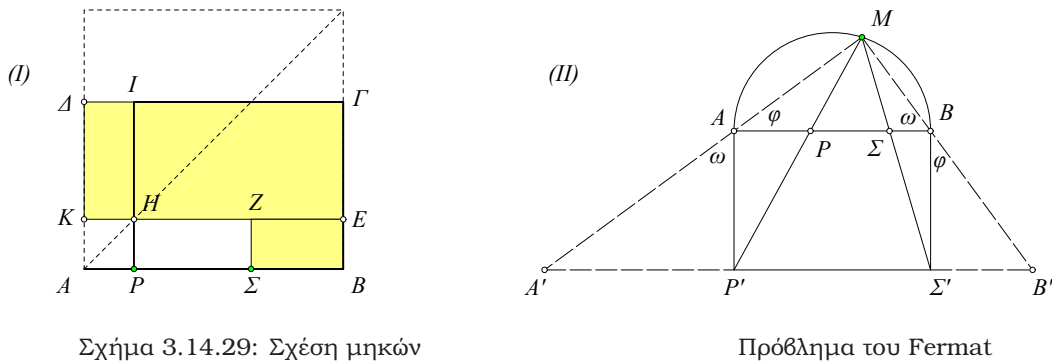
$$\beta_1|XA_1|^2 + \beta_2|XA_2|^2 + \beta_3|XA_3|^2 = \mu,$$

είναι ένας κύκλος. Δείξε την ανάλογη ιδιότητα για τέσσερα σημεία  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ .

*Υπόδειξη:* Χρησιμοποίησε την άσκηση 3.12.9. Αντικατάστησε το  $\beta_1|XA_1|^2 + \beta_2|XA_2|^2$  με έναν όρο της μορφής  $v|XB|^2$  με κατάλληλο σταθερό σημείο  $B$  και σταθερό αριθμό  $v$ .

**Άσκηση 3.14.67** Για το σημείο  $X$  εκτός των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , δείξε ότι  $|XA|^2 + |X\Gamma|^2 = |XB|^2 + |XD|^2$ .

Οι επόμενες δύο ασκήσεις προέρχονται, αντίστοιχα, από τον Euler και τον Fermat. Την πρώτη, που λύνεται εύκολα δια του σχήματος, χρησιμοποιεί ο Euler για να λύσει τη δεύτερη ([San15, σ. 10], [Whi07, σ. 314]). Εδώ, η υπόδειξη της δεύτερης, οδηγεί σε μια πιο σύντομη λύση που δεν κάνει χρήση της πρώτης.



Σχήμα 3.14.29: Σχέση μηκών

Πρόβλημα του Fermat

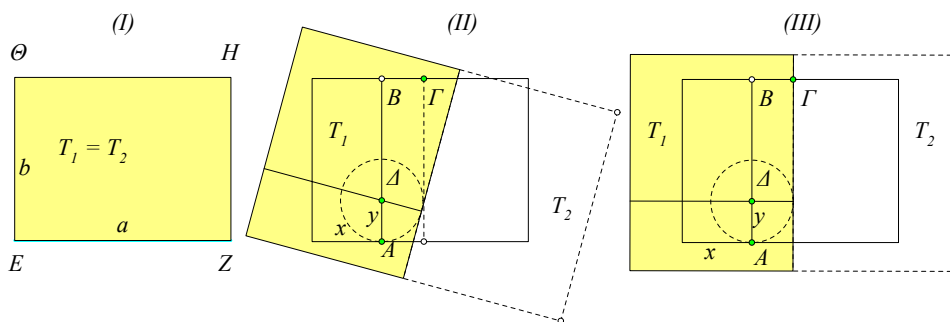
**Άσκηση 3.14.68** Δείξε ότι για τέσσερα συνευθειακά σημεία  $\{A, P, \Sigma, B\}$  σε αυτή τη διάταξη (Σχήμα 3.14.29-I), ισχύει η σχέση  $|AB| \cdot |P\Sigma| + |AP| \cdot |\Sigma B| = |A\Sigma| \cdot |PB|$ .

**Άσκηση 3.14.69** Το ορθογώνιο  $AB\Sigma'P'$  έχει πλευρές  $a = |AP'|$ ,  $b = |AB| = a\sqrt{2}$  και το σημείο  $M$  ευρίσκεται στο ημικύκλιο με διάμετρο  $AB$  (Σχήμα 3.14.29-II). Δείξε ότι οι ευθείες  $\{MP', M\Sigma'\}$  τέμνουν την  $AB$  σε σημεία  $\{P, \Sigma\}$ , για τα οποία ισχύει  $|A\Sigma|^2 + |PB|^2 = |AB|^2$ .

Υπόδειξη: Τα  $\{AA', BB'\}$  σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος ίσο με το  $a = |AP'|$ . Συνεπώς, ισχύει (Πρόταση 3.5.2)  $|A'P'| \parallel |\Sigma'B'| = a^2 = b^2/2$  (\*). Οι επόμενες σχέσεις αποδεικνύουν την πρόταση για τα, ανάλογα των δοθέντων, τμήματα που ορίζονται από τα σημεία  $\{A', P', \Sigma', B'\}$ .

$$\begin{aligned} |A'\Sigma'|^2 + |P'B'|^2 &= (|A'B'| - |\Sigma'B'|)^2 + (|A'B'| - |A'P'|)^2 \\ &= 2|A'B'|^2 + |\Sigma'B'|^2 + |A'P'|^2 - 2|A'B'|(|\Sigma'B'| + |A'P'|) \\ &= 2|A'B'|^2 + |\Sigma'B'|^2 + |A'P'|^2 - 2|A'B'|(|A'B'| - b) \\ &= 2|A'B'|^2 + (|\Sigma'B'| + |A'P'|)^2 - [2|\Sigma'B' \parallel |A'P'|] - 2|A'B'|(|A'B'| - b) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2|A'B'|^2 + (|A'B'| - b)^2 - [b^2] - 2|A'B'|(|A'B'| - b) = |A'B'|^2. \end{aligned}$$

**Άσκηση 3.14.70** Ισοσκελές τραπέζιο έχει ως σταθερή βάση μία διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου του  $\kappa$  και η πλευρά του, που είναι παράλληλη της βάσης, είναι χορδή του  $\kappa$ . Βρες τη θέση της χορδής που μεγιστοποιεί το εμβαδόν του τραpezίου.



Σχήμα 3.14.30: Τραπεζίο που ξεδιπλώνει και διπλασιάζει την επιφάνειά του

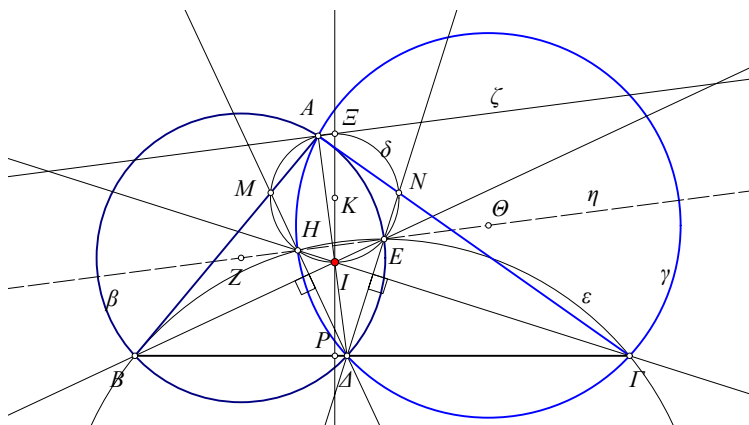
**Άσκηση 3.14.71** Το τραπέζι  $EZH\Theta$  έχει δύο ίσες ορθογώνιες πλάκες  $\{T_1, T_2\}$ , τη μια πάνω ακριβώς από την άσπλη και ενωμένες με μντεσέ κατά μήκος της  $EZ$  (Σχήμα 3.14.30-I). Σε μια ορισμένη σταθερή θέση  $\Delta$  στο σκελετό του τραπεζιού, κάτω από την  $T_1$ , η  $T_1$  είναι στερεωμένη έτσι ώστε να περιστρέφεται περί το  $\Delta$  (Σχήμα 3.14.30-II) και ξεδιπλώνοντας την  $T_2$ , μετά από στροφή  $90^\circ$  να σχηματίζεται ορθογώνιο με επιφάνεια διπλάσιας έκτασης, πλευρές παράλληλες προς το αρχικό ορθογώνιο και το ίδιο κέντρο συμμετρίας (Σχήμα 3.14.30-III). Σε ποιο σημείο του  $T_1$  πρέπει να τοποθετηθεί το  $\Delta$ ;

Υπόδειξη:  $\{x = (2a - b)/4, y = b/4\}$ .

**Άσκηση 3.14.72** Από σημείο  $A$ , εξωτερικό του κύκλου  $\kappa(O)$ , φέρουμε τέμνουσα αυτόν στα σημεία  $\{B, \Gamma\}$ , καθώς και τις εφαπτόμενες  $\{\tau_B, \tau_\Gamma\}$  του  $\kappa$  σε αυτά τα σημεία. Έστω ότι αυτές οι εφαπτόμενες τέμνουν την κάθετο  $\delta$  της  $AO$  στο  $A$  στα σημεία  $\{B', \Gamma'\}$ . Δείξε ότι το  $A$  είναι το μέσον της  $B'\Gamma'$ .

**Άσκηση 3.14.73** Κατασκευάζουμε κύκλους  $\{a, \beta, \gamma\}$  με διαμέτρους τις διαμέσους  $\{AA', BB', \Gamma\Gamma'\}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Δείξε ότι οι κύκλοι αυτοί τέμνονται ανά δύο σε σημεία  $\{A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$  περιεχόμενα στα ύψη του τριγώνου, έτσι ώστε το τρίγωνο  $A_1A_2A_3$  να είναι ομοίωτο του  $AB\Gamma$  και το  $B_1B_2B_3$  να είναι ομοίωτο του ορθικού του  $AB\Gamma$ .

**Άσκηση 3.14.74** Με διάμετρο τις πλευρές  $\{A'B', B'\Gamma', \Gamma'A'\}$  του ορθικού τριγώνου  $A'B'\Gamma'$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , κατασκευάζουμε κύκλους αντίστοιχα  $\{\gamma, a, \beta\}$  που τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου, τις  $\{AB, A\Gamma\}$  ο  $a$  στα  $\{A_1, A_2\}$ , τις  $\{BA, B\Gamma\}$  ο  $\beta$  στα  $\{B_1, B_2\}$ , τις  $\{\Gamma A, \Gamma B\}$  ο  $\gamma$  στα  $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ . Δείξε ότι τα σημεία  $\{A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$  είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 3.14.31: Κύκλοι σχετικοί με διχοτόμους

**Άσκηση 3.14.75** Θεώρησε τους κύκλους  $\{\beta = (AB\Delta), \gamma = (A\Gamma\Delta)\}$ , όπου  $\Delta$  το ίχνος της διχοτόμου  $A\Delta$  στην πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  (Σχήμα 3.14.31). Δείξε ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

1. Εάν  $\{Z, \Theta\}$  είναι τα κέντρα των  $\{\beta, \gamma\}$  και  $\{E, H\}$  οι τομές των διχοτόμων  $\{BI, \Gamma I\}$  με τους κύκλους  $\{\beta, \gamma\}$ , τότε τα  $\{E, H\}$  είναι επί της ευθείας  $Z\Theta$ .
2. Τα σημεία  $\{B, \Gamma, E, H\}$  περιέχονται σε κύκλο  $\epsilon$ .
3. Εάν  $\{M, N\}$  είναι τα σημεία τομής των  $\{\Delta H, \Delta E\}$  με τις αντίστοιχες πλευρές  $\{AB, A\Gamma\}$ , τότε τα 6 σημεία  $\{A, M, H, I, E, N\}$  περιέχονται σε κύκλο  $\delta$ , όπου  $I$  το έγκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
4. Τα  $\{(KI, B\Gamma), (I\Gamma, \Delta E), (I\beta, \Delta H)\}$  είναι ζεύγη κάθετων ευθειών, όπου  $K$  το κέντρο του κύκλου  $\delta$ .

Υπόδειξη: Το (1) είναι προφανές, αφού τα  $\{E, H\}$  θα είναι τα μέσα των τόξων  $\{\widehat{AE\Delta}, \widehat{AH\Delta}\}$  των κύκλων  $\{\beta, \gamma\}$ .

Το (2) προκύπτει άμεσα δείχνοντας ότι  $\widehat{BEH} = \widehat{\Gamma}/2$ .

Για το (3) σημείωσε τις  $\widehat{A}/2 = \widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{BE\Delta} = \widehat{\Delta H\Gamma}$ , που δείχνουν ότι τα  $\{AIEN, AMHI\}$  είναι εγγράφιμα τετράπλευρα. Επίσης, οι  $\widehat{HA\Delta} = \widehat{H\Gamma\Delta}$  και  $\widehat{EA\Delta} = \widehat{EB\Delta}$  οδηγούν στο ότι και το  $AHIE$  είναι εγγράφιμο τετράπλευρο.

Στο (4), η καθετότητα των  $\{IK, B\Gamma\}$  προκύπτει από το ότι η  $\eta = Z\Theta$  είναι παράλληλη της εξωτερικής διχοτόμου  $\zeta$  στο  $A$  και η γωνία  $\widehat{B\Lambda I} = \widehat{A\Xi I}$ , όπου  $\Xi$  η τομή της  $IK$  με τον  $\delta$ . Τα δύο άλλα ζεύγη καθέτων προκύπτουν από εύκολες μετρήσεις γωνιών.

**Άσκηση 3.14.76** Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης δείξε ότι ισχύουν και τα εξής:

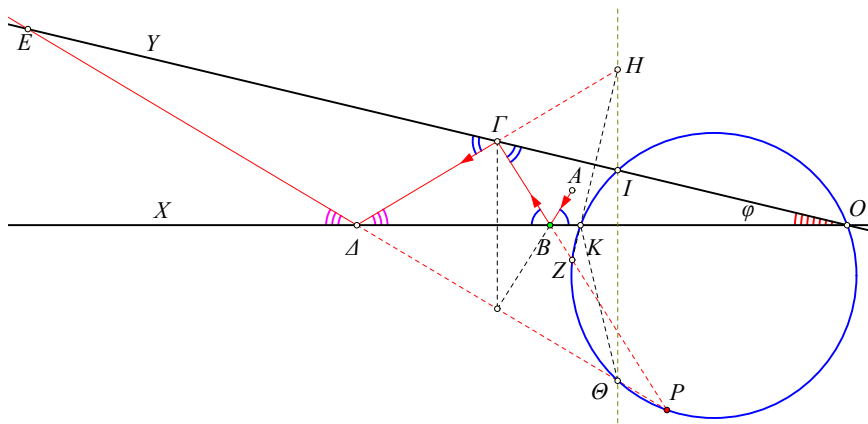
1. Τα  $\{ZKHA, \Theta EKA, ZHBA, \Gamma\Theta E\Lambda\}$  είναι εγγράψιμα τετράπλευρα, όπου  $\Lambda$  το κέντρο του  $\varepsilon$ .
2. Το  $\Theta Z\Lambda K$  είναι επίσης εγγράψιμο τετράπλευρο και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του συμπίπτει με το περίκεντρο του  $AB\Gamma$ .
3. Τα ζεύγη ευθειών  $\{(KH, E\Lambda), (KE, \Lambda H), (\Gamma\Theta, BZ)\}$  τέμνονται επί της εξωτερικής διχοτόμου  $\zeta$ .

**Άσκηση 3.14.77** Σημείο  $P$  προβάλεται επί των πλευρών και της διχοτόμου γωνίας  $\widehat{XOY}$  στα αντίστοιχα σημεία  $\{A, B, \Delta\}$ . Δείξε ότι ισχύει  $|MA| = |MB|$ .

**Άσκηση 3.14.78** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $P$  των οποίων οι προβολές στις πλευρές σταθερής γωνίας  $\widehat{XOY}$  στα αντίστοιχα σημεία  $\{A, B\}$  ορίζουν ευθείες  $AB$  σταθερής κατεύθυνσης.

**Άσκηση 3.14.79** Γωνία σταθερού μέτρου  $\omega = \widehat{XOY}$  περιστρέφεται περί το κέντρο  $O$  του κύκλου  $\kappa(O)$  τέμνουσα αυτόν στα σημεία  $\{A, B\}$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής  $P$  των ευθειών  $\{AA', BB'\}$ , όπου  $A'B'$  σταθερή διάμετρος του κύκλου.

**Άσκηση 3.14.80** Δίδεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να βρεθεί τέταρτο σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  να είναι ταυτόχρονα εγγράψιμο και περιγράψιμο.



Σχήμα 3.14.32: Ανακλώμενες ευθείες

**Άσκηση 3.14.81** Δίδεται γωνία  $\widehat{XOY}$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της (Σχήμα 3.14.32). Θεωρούμε τις ευθείες ως κάτοπτρα, το  $A$  ως σημειακή πηγή φωτός και την  $AB$  ακτίνα φωτός με  $B$  μεταβαλλόμενο στην  $OX$ . Η ακτίνα  $AB$  ανακλάται στη  $B\Gamma$ , αυτή στη  $\Gamma\Delta$ , αυτή στη  $\Delta E$  κ.ο.κ. Δείξε ότι:

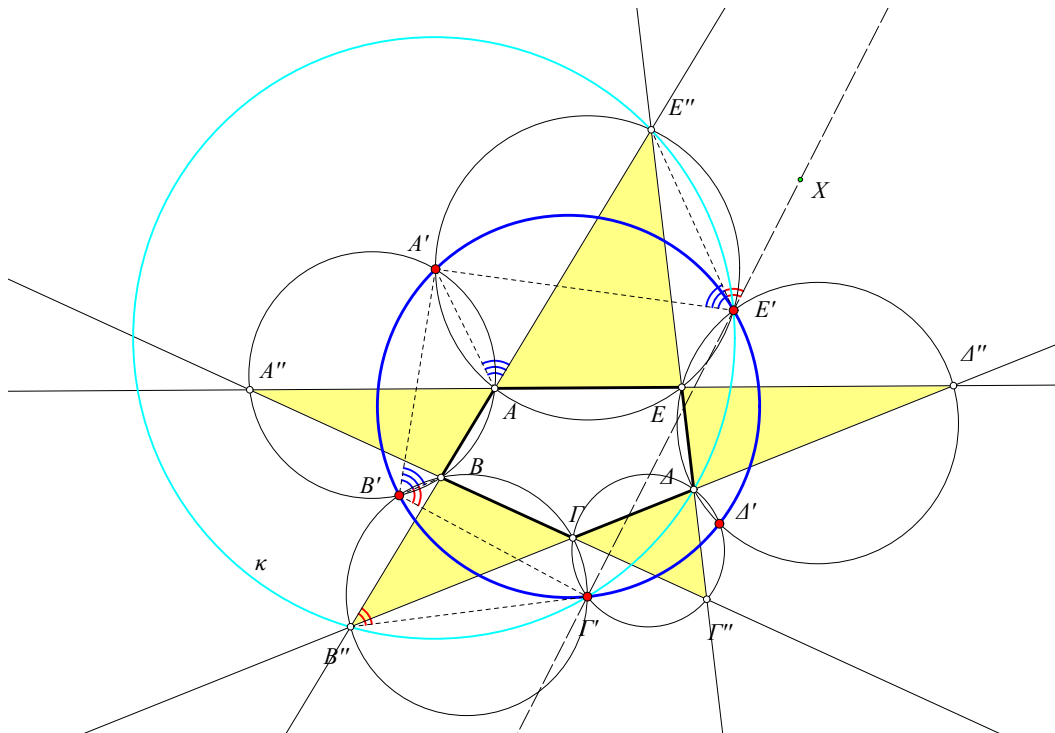
1. όλες οι ευθείες  $B\Gamma$  διέρχονται από σταθερό σημείο  $Z$ ,
2. όλες οι ευθείες  $\Gamma\Delta$  διέρχονται από σταθερό σημείο  $H$ ,
3. όλες οι ευθείες  $\Delta E$  διέρχονται από σταθερό σημείο  $\Theta$ ,
4. το σημείο τομής  $P$  των ευθειών  $B\Gamma$  και  $\Delta E$  ανήκει στον κύκλο  $(OZ\Theta)$ ,
5. ο κύκλος αυτός διέρχεται από το σημείο τομής  $I$  της  $OY$  με την  $H\Theta$ .

Υπόδειξη: Το  $Z$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς  $OX$ . Το  $H$  είναι το συμμετρικό του  $Z$  ως προς  $OY$ . Το  $\Theta$  είναι το συμμετρικό του  $H$  ως προς  $OX$ . Η γωνία  $\widehat{\Theta P Z} = \widehat{ABK} - \widehat{\Gamma\Delta B} = (\widehat{\Delta B\Gamma} - \widehat{B\Gamma O}) + (\widehat{\Delta\Gamma E} - \widehat{E\Delta X}) = 2\phi$ . Παρόμοια  $\widehat{Z I \Theta} = 2\widehat{Z H \Theta} = 2\phi$  και  $\widehat{Z K \Theta} = 2\widehat{Z H \Theta} = 2\phi$ .

**Άσκηση 3.14.82** Δίδεται γωνία  $\widehat{XOY}$  και σημεία  $A$  και  $B$  στο εσωτερικό της. Να βρεθεί η τροχιά μπίλιας (τεθλασμένη) που ξεκινώντας από το  $A$  και ανακλώμενη εναλλάξ στις πλευρές  $OX$ ,  $OY$  και τέλος πάλι στην  $OX$  διέρχεται διά του  $B$ .

Υπόδειξη: Χρήση της Άσκησης 3.14.81.

**Άσκηση 3.14.83** Τα σημεία  $\{A, B\}$  κινούνται επί παραλλήλων ευθειών  $\{a, b\}$ , έτσι ώστε το τμήμα  $AB$  να έχει σταθερή κατεύθυνση. Από το σημείο  $P$  εκτός της σωρίδας των παραλλήλων σχηματίζουμε τη γωνία  $\omega = \widehat{APB}$ . Να βρεθεί η θέση του  $AB$  για την οποία η γωνία αυτή γίνεται μέγιστη.



Σχήμα 3.14.33: Θεώρημα του Miquel για πεντάγωνα

**Άσκηση 3.14.84** (Θεώρημα του Miquel για πεντάγωνα) Δίδεται κυρτό πεντάγωνα  $AB\Gamma\Delta E$  και προεκτείνουμε τις πλευρές του ώστε με τις τομές τους να σχηματισθούν πέντε τρίγωνα  $\{ABA'', B\Gamma B'', \Gamma\Delta\Gamma'', \Delta E\Delta'', EAE''\}$ , των οποίων οι περικυκλοι τέμνονται σε δεύτερα σημεία  $\{A', B', \Gamma', \Delta', E'\}$ . Δείξε ότι αυτά τα σημεία είναι ομοκυκλικά (Σχήμα 3.14.33).

Υπόδειξη: Μια λύση προκύπτει με ένα, όπως λέγεται, «κυνήγι γωνιών». Μ' αυτό δείχνουμε ότι τα πέντε τετράπλευρα που προκύπτουν παραλείποντας μία κορυφή λ.χ. την  $\Delta'$  είναι εγγράψιμα. Για το  $A'\Gamma'E'B'$  λοιπόν, δείχνουμε ότι οι απέναντι γωνίες  $\{\widehat{B'}, \widehat{E'}\}$  είναι παραπληρωματικές. Παρατηρούμε πρώτα ότι το πεντάγωνα  $B'\Gamma'\Delta'E'E''$  είναι εγγράψιμο. Πράγματι, θεώρησε τον περικυκλο  $\kappa$  του τριγώνου  $B'\Delta'E''$  και τις γωνίες στο  $\Gamma'$  :

$$\widehat{B'\Gamma'\Delta} = \widehat{B'\Gamma'\Gamma} + \widehat{\Gamma\Gamma'\Delta} = \widehat{\Gamma B A} + \widehat{\Gamma\Gamma''\Delta} = 180^\circ - \widehat{A E'' E}.$$

Αυτό δείχνει ότι το  $B'\Gamma'\Delta E''$  είναι εγγράψιμο. Παρόμοια δείχνουμε ότι και το  $B'\Delta E'E''$  είναι εγγράψιμο. Τώρα, στο  $B'\Gamma'E'A'$  παρατηρούμε τις απέναντι γωνίες  $\widehat{B'} = \widehat{A'B'B} + \widehat{B B'\Gamma'}$  και  $\widehat{E'} = 180^\circ - \widehat{A'E'E''} - \widehat{E''E'X}$ , για τις οποίες ισχύει  $\widehat{A'B'B} = \widehat{A'AE''} = \widehat{A'E'E''}$  και  $\widehat{B B'\Gamma'} = \widehat{B B''\Gamma'} = \widehat{E''E'X}$ .

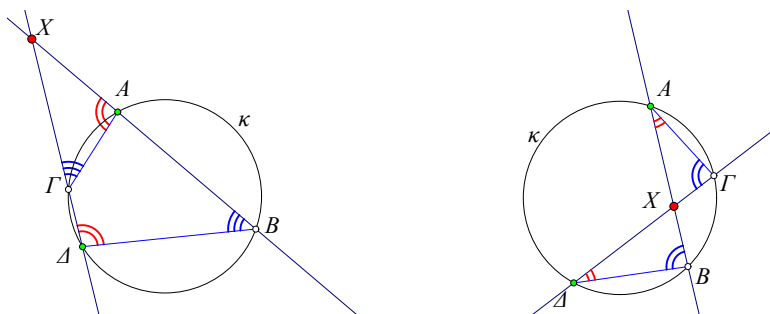
### 4.1 Δύναμη ως προς κύκλο

Ουδέν χρήμα μάτην γίνεται, αλλά πάντα εκ λόγου τε και υπ' ανάγκης.

Δημόκριτος

Ένα σημαντικό, με πολλές εφαρμογές μέγεθος, που εξαρτάται από ένα κύκλο και ένα σημείο, είναι αυτό της **δύναμης σημείου ως προς κύκλο**. Το μέγεθος αυτό στηρίζεται στις επόμενες δύο προτάσεις που αντιστοιχούν στα θεωρήματα 35, 36, 37 του τρίτου βιβλίου των στοιχείων του Ευκλείδη ([Hea08, σ. 73, II]). Εκτενής χρήση του εμφανίζεται για πρώτη φορά σε εργασία του Louis Gaultier (1803, [Gau13]), ο οποίος εισήγαγε και την έννοια του ριζικού άξονα (και ριζικού επιπέδου για δύο σφαίρες). Η πλήρης ανάπτυξη και συστηματική χρήση του, ωστόσο, οφείλεται στον Jacob Steiner [Ste71, σ. 17-76,I], που εισήγαγε και τον όρο της δύναμης.

**Θεώρημα 4.1.1** Δοθέντος κύκλου  $\kappa$  και σημείου  $X$ , έστω ότι ευθεία διά του  $X$  τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $A$  και  $B$ . Τότε το γινόμενο  $|XA||XB|$  είναι ανεξάρτητο της κατεύθυνσης της ευθείας και εξαρτάται μόνον από την θέση του σημείου ως προς τον κύκλο.



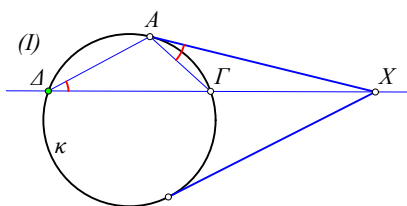
Σχήμα 4.1.1: Δύναμη σημείου ως προς κύκλο  $|XA||XB|$

*Απόδειξη:* Θεώρησε δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το  $X$  και τέμνουν τον κύκλο  $\kappa$  στα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma, \Delta$  αντίστοιχα. Τα τρίγωνα που σχηματίζονται  $XA\Gamma$  και  $X\Delta B$  είναι όμοια (Πόρισμα

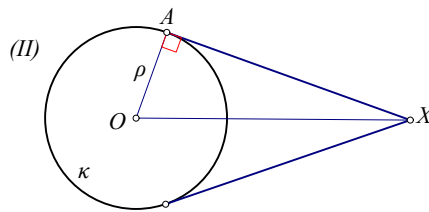
2.14.1). Συνεπώς, έχουν πλευρές ανάλογες :

$$\frac{|XA|}{|X\Gamma|} = \frac{|XD|}{|XB|} \Rightarrow |XA||XB| = |X\Gamma||XD|, \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Τον αριθμό  $p(X) = |XA||XB|$ , αν το σημείο είναι εξωτερικό,  $p(X) = -|XA||XB|$ , αν το σημείο είναι εσωτερικό και  $p(X) = 0$ , αν το  $X$  είναι επί του κύκλου ονομάζουμε **δύναμη του σημείου  $X$  ως προς τον κύκλο  $\kappa$** . Συχνά θα χρησιμοποιούμε για την δύναμη και το σύμβολο  $p(X, \kappa)$  ή/και  $p_\kappa(X)$ . Στην περίπτωση που το  $X$  είναι εξωτερικό σημείο, έχουμε δύο ειδικές θέσεις της τέμνουσας τον κύκλο ευθείας: τις εφαπτόμενες από το  $X$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε τις θέσεις αυτές οριακές, χαρακτηριζόμενες από το ότι τα σημεία τομής  $A$  και  $B$  συμπίπτουν. Και πάλι σχηματίζονται όμοια



Σχήμα 4.1.2:  $|XA|^2 = |X\Gamma||XD|$

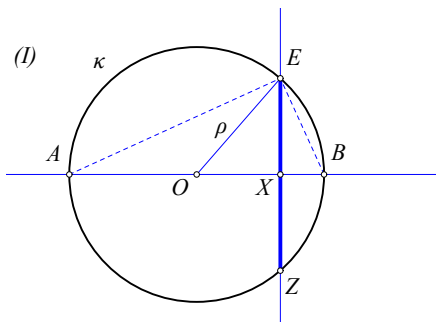


$$p(X) = |XA|^2 = |XO|^2 - \rho^2$$

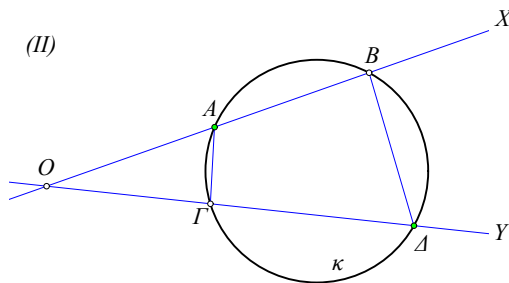
τριγωνα  $XΑΓ$  και  $XΔΑ$  (Σχήμα 4.1.2-I), λόγω του ότι η εγγεγραμμένη γωνία  $\widehat{XΔA}$  είναι ίση με τη  $\widehat{ΓAX}$  που σχηματίζεται από την χορδή  $ΓA$  και την εφαπτόμενη στο άκρο της  $A$  (Θεώρημα 2.13.3). Έτσι προκύπτει ότι  $\frac{|XA|}{|X\Gamma|} = \frac{|XD|}{|XA|}$ , που συνεπάγεται ότι  $p(X) = |X\Gamma||XD| = |XA|^2$ . Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 4.1.1** Για κάθε σημείο  $X$ , εξωτερικό του κύκλου  $\kappa$ , η δύναμη  $p(X)$  ισούται με το τετράγωνο της εφαπτομένης του  $\kappa$  από το  $X$ .

Μια τρίτη έκφραση της δύναμης  $p(X)$  βρίσκουμε φέρνοντας τη  $XO$ , που συνδέει το σημείο  $X$  με το κέντρο  $O$  του κύκλου  $\kappa$ . Αν  $A$  είναι το σημείο επαφής της εφαπτόμενης  $XA$  από το  $X$ , τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο  $OAX$  έχουμε  $p(X) = |XA|^2 = |XO|^2 - \rho^2$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου (Σχήμα 4.1.2-II). Για σημεία  $X$  εσωτερικά του κύκλου δεν υπάρχουν εφαπτόμενες προς αυτόν. Ωστόσο, ή



Σχήμα 4.1.3:  $p(X) = |XO|^2 - \rho^2$



Κριτήριο ομοκυκλικότητας

προηγούμενη έκφραση, αυτή τη φορά με αντίθετο πρόσημο, δίνει πάλι την δύναμη του σημείου. Αυτό φαίνεται φέρνοντας την χορδή του κύκλου που διέρχεται από το  $X$  και είναι κάθετη στη  $XO$  (Σχήμα 4.1.3-I). Ο ορισμός της δύναμης του  $X$  και το ορθογώνιο τρίγωνο  $OXE$ , οδηγούν στην:  $-p(X) = |XA||XB| = |XE|^2 = \rho^2 - |OX|^2$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι για σημεία του κύκλου ισχύει  $p(X) = \rho^2 - |XO|^2 = 0$ , έχουμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.1** Δοθέντος κύκλου  $\kappa(O, \rho)$ , κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$ , η δύναμη οποιουδήποτε σημείου  $X$  του επιπέδου ως προς τον κύκλο  $\kappa$  δίδεται από τον τύπο

$$p(X) = |OX|^2 - \rho^2.$$

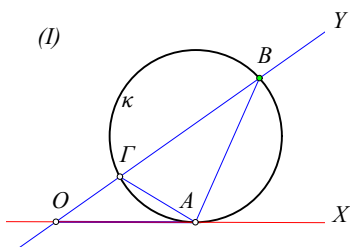


**Πρόταση 4.1.2** Δοθεισών δύο τεμνομένων ευθειών  $OX$  και  $OY$ , τα σημεία  $A, B$  επί της  $OX$  και  $\Gamma, \Delta$  επί της  $OY$ , είναι ομοκυκλικά, τότε και μόνον, όταν  $|OA||OB| = |O\Gamma||O\Delta|$ .

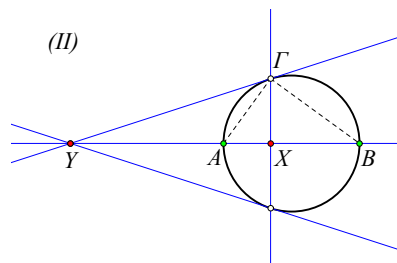
Απόδειξη: Όπως είδαμε, όταν τα  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  είναι στον ίδιο κύκλο (ομοκυκλικά)(Σχήμα 4.1.3-II), τότε ισχύει η ισότητα. Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η ισότητα και  $\kappa$  είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα τρία σημεία:  $A, B$  και  $\Gamma$  (Θεώρημα 2.1.1). Έστω  $\Delta'$  το δεύτερο σημείο τομής αυτού του κύκλου με την  $OY$ . Τότε κατά το Θεώρημα 4.1.1  $|OA||OB| = |O\Gamma||O\Delta'|$ . Αλλά εξ υποθέσεως έχουμε και ότι  $|OA||OB| = |O\Gamma||O\Delta|$  και, επομένως,  $|O\Delta'| = |O\Delta|$  και τα  $\Delta$  και  $\Delta'$  ταυτίζονται, ο.ε.δ.

**Πρόταση 4.1.3** Δίδονται τρία μη συνευθειακά σημεία,  $A$  στην ευθεία  $OX$  και  $B, \Gamma$  στην ευθεία  $OY$ . Ο κύκλος  $(AB\Gamma)$  εφάπτεται της  $OX$  στο  $A$  τότε και μόνον, όταν

$$|OA|^2 = |OB||O\Gamma|.$$



Σχήμα 4.1.4:  $\kappa = (AB\Gamma)$  εφαπτόμενος της  $OX$



Χαρακτηρισμός αρμονικής τετράδας

Απόδειξη: Αν η  $OA$  είναι εφαπτόμενη στον κύκλο  $\kappa = (AB\Gamma)$  στο  $A$  (Σχήμα 4.1.4-I), τότε η σχέση ισχύει κατά το Πόρισμα 4.1.1. Αντίστροφα, αν ισχύει η σχέση και υποθέσουμε ότι η  $OX$  τέμνει τον  $\kappa$  στα σημεία  $A$  και  $A'$ , τότε, κατά την Πρόταση 4.1.2, θα ισχύει  $|OA||OA'| = |OB||O\Gamma|$ . Όμως, εξ υποθέσεως ισχύει και  $|OA|^2 = |OB||O\Gamma|$ , η οποία συνδυαζόμενη με την προηγούμενη, δίδει  $|OA| = |OA'|$ , που σημαίνει ότι τα  $A$  και  $A'$  ταυτίζονται, ο.ε.δ.

**Πρόταση 4.1.4** Τα συνευθειακά σημεία  $A, B$  και  $X, Y$  είναι αρμονικά συζυγή τότε και μόνον, όταν

$$p(Y) + p(X) = |XY|^2,$$

όπου  $p(X), p(Y)$  οι δυνάμεις των σημείων ως προς τον κύκλο με διάμετρο  $AB$  (Σχήμα 4.1.4-II).

Απόδειξη: Προκύπτει από το Πόρισμα 1.17.5 και το ότι

$$p(Y) = |YA||YB| = |Y\Gamma|^2, \quad -p(X) = |XA||XB| = |X\Gamma|^2,$$

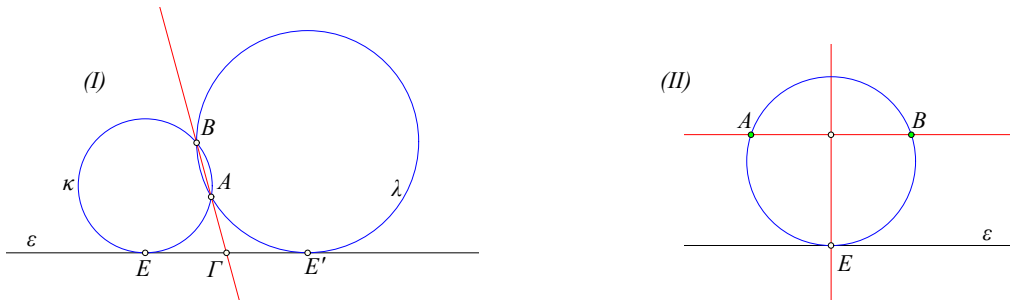
όπου  $Y\Gamma$  η εφαπτόμενη του κύκλου από το  $Y$ , υποτιθέμενο εκτός του κύκλου, ο.ε.δ.

**Άσκηση 4.1.1** Δίδεται κύκλος  $\kappa$  και σταθερά  $\delta$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$ , για τα οποία η δύναμη  $p(X)$  ως προς τον κύκλο  $\kappa$  είναι ίση με  $\delta$ .

**Άσκηση 4.1.2** Κατασκεύασε κύκλο  $\kappa$ , ο οποίος να διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία  $A$  και  $B$  και να εφάπτεται δοθείσης ευθείας  $\varepsilon$ .

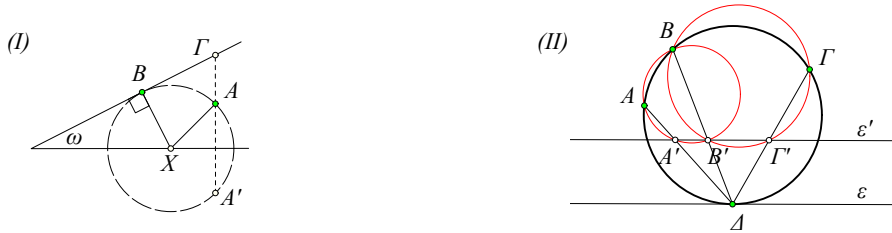
Υπόδειξη: Έστω ότι ο ζητούμενος κύκλος κατασκευάστηκε. Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής της  $AB$  με την δοθείσα ευθεία  $\varepsilon$  και  $E$  το σημείο επαφής του κύκλου με την  $\varepsilon$  (Σχήμα 4.1.5-I). Το  $\Gamma$  προσδιορίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος και η δύναμή του ως προς τον κύκλο θα είναι  $p(\Gamma) = |\Gamma A||\Gamma B| = |\Gamma E|^2$ . Άρα το μήκος  $|\Gamma E|$  και επομένως η θέση του  $E$  προσδιορίζεται επίσης από τα δεδομένα. Συνεπώς, προσδιορίζεται και ένα ακόμη σημείο ( $E$ ), από το οποίο θα διέρχεται ο κύκλος. Εν γένει υπάρχουν δύο λύσεις που αντιστοιχούν σε δύο θέσεις του  $E$  συμμετρικές ως προς το  $\Gamma$ . Σημείωσε ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση, όταν τα σημεία  $A$  και  $B$  ευρίσκονται σε διαφορετικές μεριές της  $\varepsilon$ . Σημείωσε επίσης ότι, στην περίπτωση που δεν υπάρχει το  $\Gamma$ , δηλαδή η ευθεία  $AB$  είναι παράλληλη της  $\varepsilon$  (Σχήμα 4.1.5-II), το πρόβλημα έχει μία μόνο λύση και το  $E$  προσδιορίζεται τέμνοντας την μεσοκάθετο του  $AB$  με την  $\varepsilon$ .





Σχήμα 4.1.5: Κύκλος διά των A, B εφαπτόμενος ευθείας ε

**Άσκηση 4.1.3** Δίδεται κυρτή γωνία ω και σημείο A στο εσωτερικό της. Να βρεθεί σημείο X στη μια πλευρά της γωνίας, το οποίο να ισαπέχει από το σημείο A και την άλλη πλευρά της (Σχήμα 4.1.6-I).



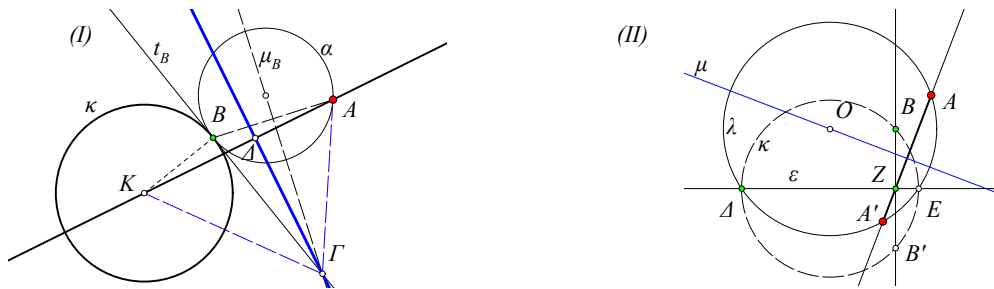
Σχήμα 4.1.6: Σημείο X :  $|XA| = |XB|$

Συγγραμμικά σημεία A', B', Γ'

**Άσκηση 4.1.4** Από σημείο Δ κύκλου κ άγονται τρεις χορδές ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, καθώς και μία παράλληλος ε' της εφαπτομένης στο Δ που τέμνει τις χορδές στα Α', Β' και Γ' αντιστοίχως. Δείξε ότι  $|ΔΑ||ΔΑ'| = |ΔΒ||ΔΒ'| = |ΔΓ||ΔΓ'|$  (Σχήμα 4.1.6-II).

**Άσκηση 4.1.5** Η διάμεσος ΑΜ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περικύκλιο του τριγώνου στο Δ. Δείξε ότι

$$|AM||AD| = \frac{1}{2}(|AB|^2 + |AG|^2).$$



Σχήμα 4.1.7: Τόπος σημείου Δ

Τόπος κέντρων μεταβλητών κύκλων

**Άσκηση 4.1.6** Ο μεταβλητός κύκλος α εφαπτεται σταθερού κύκλου κ(K) στο B και διέρχεται από σταθερό σημείο A. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της τομής Γ της μεσοκαθέτου μ\_B του AB με την εφαπτόμενη t\_B του κ στο B (Σχήμα 4.1.7-I).

**Άσκηση 4.1.7** Τα μεταβλητά σημεία {Δ, Ε} της ευθείας ε έχουν σταθερό γινόμενο αποστάσεων από σταθερό σημείο Ζ της ε και θεωρούμε κύκλους η διερχόμενους από τα {Δ, Ε} και το σταθερό σημείο Α εκτός της ε (Σχήμα 4.1.7-II). Δείξε ότι: (1) Οι κύκλοι κ με διάμετρο ΔΕ διέρχονται από σταθερά σημεία {B, B'}. (2) Οι κύκλοι η διέρχονται επίσης από δύο σταθερά σημεία {A, A'}. (3) Οι ευθείες {AA', BB'} τέμνονται στο Ζ.

## 4.2 Χρυσή τομή, κανονικό πεντάγωνο

Έτσι είναι πάντα το κυνήγι της γνώσης. Τα ουράνια φρούτα, τα χρυσά μήλα των Εσπερίδων, φυλαγμένα πάντοτε από μυριοκέφαλο δράκο που δεν κοιμάται ποτέ, έτσι που χρειάζεται Ηράκλειος άθλος για να τα δρέψεις.

*Henry David Thoreau*

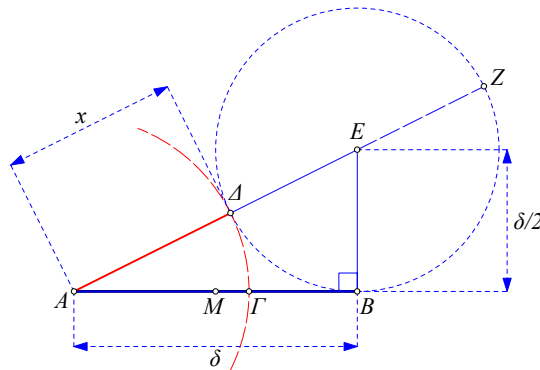
Από τους διασημότερους αριθμούς, που ικανοποιούν μια τετραγωνική εξίσωση, είναι η  $\sqrt{2}$ , που ικανοποιεί την  $x^2 - 2 = 0$  και η **χρυσή τομή**  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  που ικανοποιεί την  $x^2 - x - 1 = 0$ . Γεωμετρικά, ο αριθμός  $\phi$  ορίζεται έμμεσα από την διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δύο μέρη, έτσι ώστε:

*Ο λόγος ολόκληρου προς το μεγάλο ισούται με το λόγο του μεγάλου προς το μικρό τμήμα.*

Αυτό διατυπώνεται, κατά παράδοση, με την ορολογία της επόμενης κατασκευής.

**Κατασκευή 4.2.1** (Χρυσή τομή) *Να βρεθεί σημείο  $\Gamma$  στο εσωτερικό δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , που χωρίζει το τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή*

$$\frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|} \Leftrightarrow |A\Gamma|^2 = |AB||B\Gamma|.$$



Σχήμα 4.2.1: Χρυσή τομή

*Κατασκευή:* Σχημάτισε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABE$  με  $|BE| = \frac{\delta}{2}$ , όπου  $\delta = |AB|$  (Σχήμα 4.2.1). Επί της υποτείνουσας  $EA$  πάρε σημείο  $\Delta$ :  $|EA| = |EB|$ . Ο κύκλος  $\kappa$  με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $A\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο ζητούμενο σημείο  $\Gamma$ . Αυτό προκύπτει από την δύναμη του  $A$  ως προς τον κύκλο  $\kappa$ .

$$|AB|^2 = |A\Delta||AZ| \Leftrightarrow \delta^2 = x(x + \delta),$$

όπου  $x = |A\Delta| = |A\Gamma|$ . Παίρνουμε λοιπόν την εξίσωση ως προς  $x$ :

$$x^2 + x\delta - \delta^2 = 0,$$

που έχει μία λύση αρνητική και απορριπτέα και μία θετική

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\delta = (0,61803398874989484820\dots) \cdot \delta,$$

για την οποία διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη

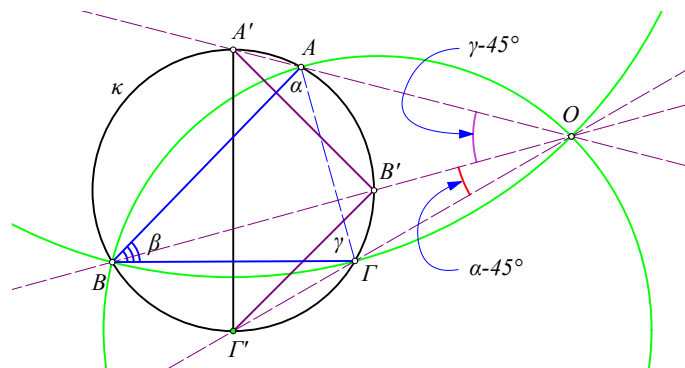
$$\frac{\delta}{x} = \frac{x}{\delta - x} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|}, \quad \text{ο.ε.κ.}$$

Υπόδειξη: Επίλεξε σημείο  $\Xi$  στον  $\varepsilon$  και κάνε αντιστροφή ως προς κύκλο  $\zeta(\Xi)$  (η ακτίνα δεν παίζει ρόλο). Μέσω της αντιστροφής οι κύκλοι  $\{\beta, \mu, \varepsilon\}$  απεικονίζονται αντίστοιχα σε δύο κύκλους  $\{\beta', \mu'\}$  και μία ευθεία  $\varepsilon'$  (Σχήμα 4.10.26-II). Μέσω της άσκησης 4.10.69 κατασκευάζεται κύκλος  $\kappa'$  που τέμνει τα  $\{\beta', \mu', \varepsilon'\}$  υπό γωνίες, αντίστοιχα,  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Ο αντιστροφος  $\kappa$  του  $\kappa'$  είναι ένας κύκλος όπως απαιτεί η άσκηση.

**Άσκηση 4.10.71** Από σημείο  $A$ , εκτός κύκλου  $\kappa$ , να αχθεί προς αυτόν τέμνουσα  $AB\Gamma$ , έτσι ώστε το εσωτερικό του κύκλου τμήμα της  $B\Gamma$  προς το εξωτερικό αυτής τμήμα  $AB$  να έχουν δοθέντα λόγο  $\beta$ .

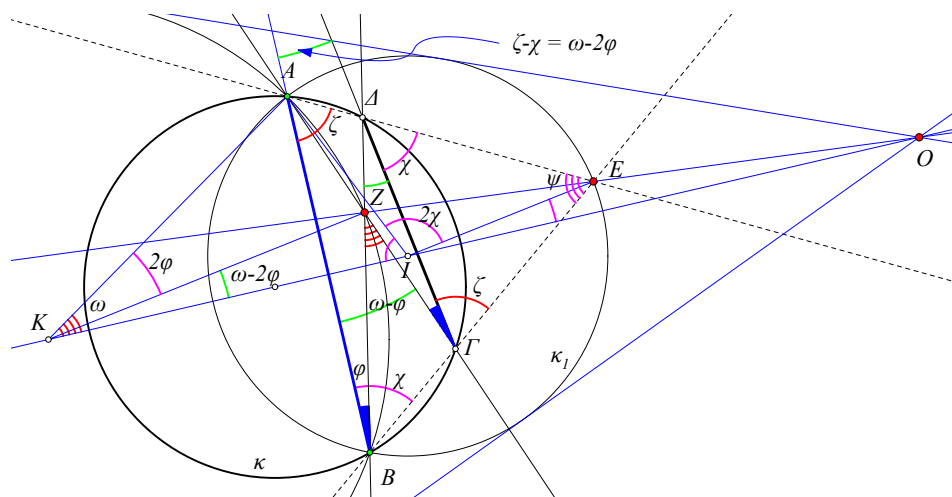
**Άσκηση 4.10.72** Κατασκεύασε κύκλο  $\kappa$  διερχόμενο από δύο δοθέντα σημεία και τέμνοντα δοθέντα κύκλο  $\beta$  κατά διάμετρο του  $\beta$  (ή κατά διάμετρο του  $\kappa$ ).

**Άσκηση 4.10.73** Δίδονται δύο κύκλοι  $\{\alpha, \beta\}$  και σημείο  $\Delta$ . Δείξε ότι υπάρχουν το πολύ δύο ευθείες δια του  $\Delta$  οι οποίες τέμνουν τους δύο κύκλους σε σημεία στα οποία οι αντιστοιχες εφαπτόμενες είναι παράλληλες. Προσδιόρισε τις περιπτώσεις που υπάρχουν, δύο, μία και καμία τέτοια ευθεία.



Σχήμα 4.10.27: Μετάβαση από γωνία  $\beta$  σε ορθή

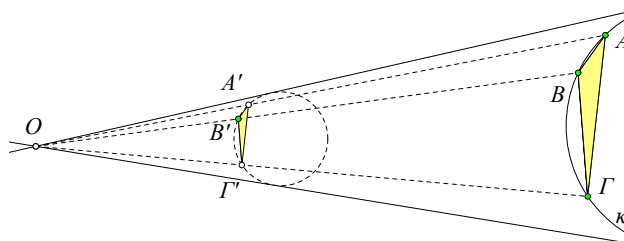
**Άσκηση 4.10.74** Δίδεται κύκλος  $\kappa$  και εγγεγραμμένη σε αυτόν γωνία  $\widehat{AB\Gamma}$ . Δείξε ότι υπάρχει σημείο  $O$ , έτσι ώστε τα δεύτερα σημεία τομής με τον κύκλο  $\{A', B', \Gamma'\}$  των ευθειών, αντίστοιχα,  $\{OA, OB, O\Gamma\}$ , να ορίζουν ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  (Σχήμα 4.10.27).



Σχήμα 4.10.28: Ευθεία δια του κέντρου ομοιοθεσίας

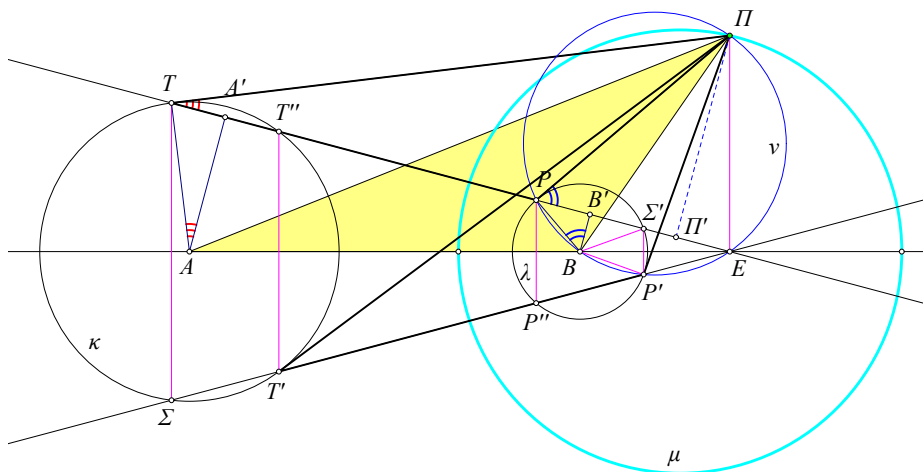
**Άσκηση 4.10.75** Στον κύκλο  $\kappa$  η χορδή  $AB$  παραμένει σταθερά και η  $\Gamma\Delta$  μεταβάλλεται χωρίς να αλλιάζει το μήκος της. Δείξε ότι τα σημεία τομής των ευθειών  $\{E = (A\Delta, B\Gamma), Z = (A\Gamma, B\Delta)\}$  κινούνται πάνω σε σταθερούς κύκλους, αντίστοιχα,  $\{\kappa_1, \kappa_2\}$  και η μεταβλητή ευθεία  $EZ$  διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, που συμπίπτει με ένα κέντρο ομοιότητας  $O$  αυτών των κύκλων (Σχήμα 4.10.28).

Υπόδειξη: Το πρώτο μέρος είναι συνέπεια της άσκησης 2.13.17. Το δεύτερο προκύπτει μετρώντας τις γωνίες που σχηματίζουν οι διάφορες ευθείες και αποδεικνύοντας ότι οι ακτίνες των κύκλων  $\{IE, KZ\}$  είναι παράλληλες.



Σχήμα 4.10.29: Εφαπτόμενες από σημείο

**Άσκηση 4.10.76** Από δοθέν σημείο  $O$  να αχθούν οι εφαπτόμενες προς κύκλο  $\kappa$ , του οποίου το κέντρο είναι εκτός του φύλλου σχεδιασμού.



Σχήμα 4.10.30: Κύκλος ομοιότητας  $\mu$  και ίσα τρίγωνα

**Άσκηση 4.10.77** Δίδονται δύο κύκλοι εξωτερικοί αλληλήλων  $\{\kappa(A, r_\kappa), \mu(B, r_\mu)\}$  και σημείο  $\Pi$  εκτός αυτών. Δείξε ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες (Σχήμα 4.10.30):

1. Το σημείο  $\Pi$  είναι επί του κύκλου ομοιότητας των δύο κύκλων.
2. Οι εφαπτόμενες των κύκλων, από το  $\Pi$ , ανά δύο και έτσι ώστε να διαχωρίζουν τα κέντρα (δηλαδή ένα, το πολύ, κέντρο είναι εντός της γωνίας  $\widehat{T\Pi P}$ ), ορίζουν ίσα τρίγωνα  $\{\Pi T P, \Pi T' P'\}$ .
3. Οι ευθείες των βάσεων  $\{TP, T'P'\}$  αυτών των τριγώνων είναι συμμετρικές ως προς την διάκεντρο.
4. Οι ευθείες των βάσεων  $\{TP, T'P'\}$  αποτεμουν από τους κύκλους ίσες χορδές.

Υπόδειξη:  $(1 \Rightarrow 2)$  Εάν το  $\Pi$  είναι επί του κύκλου ομοιότητας, τότε τα δύο αυτά τρίγωνα θα είναι όμοια προς το  $\Pi AB$  (Άσκηση 4.7.7). Λόγω της ισότητας των εφαπτομένων  $\{\Pi T, \Pi T'\}$ , προκύπτει η ισότητα των τριγώνων.

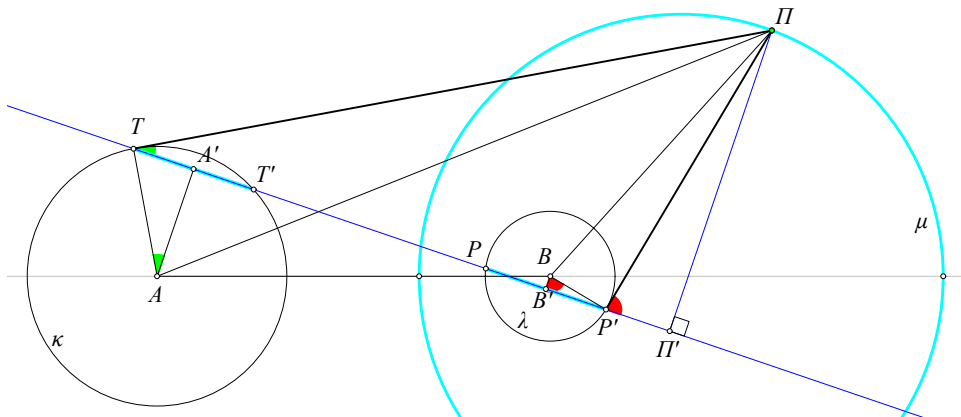
(2 ⇒ 1, 3) Εάν τα τρίγωνα είναι ίσα, τότε η ισότητα των γωνιών  $\widehat{T\Pi P}$  και  $\widehat{T'\Pi P'}$  συνεπάγεται την ισότητα των γωνιών  $\widehat{T\Pi T'}$  και  $\widehat{P\Pi P'}$ , που με την σειρά της συνεπάγεται την ομοιότητα των ορθογώνιων τριγώνων  $\{\Pi T A, \Pi P B\}$ . Αυτή συνεπάγεται ότι το  $\Pi$  είναι επί του κύκλου ομοιότητας. Συνεπώς, οι ευθείες  $\{TP, T'P'\}$  τέμνονται στο σημείο  $E$ , που είναι η προβολή του  $\Pi$  στη διάκεντρο (Άσκηση 4.7.7). Τότε τα σημεία  $\{\Pi, P, B, P', E\}$  είναι ομοκυκλικά και οι γωνίες  $\widehat{P\Pi B} = \widehat{P'E B} = \widehat{B\Pi P'} = \widehat{B'E P'}$ .

(3 ⇒ 1, 4) Εάν οι ευθείες  $\{TP, T'P'\}$  είναι συμμετρικές ως προς την διάκεντρο και τέμνονται στο σημείο  $E$  της διακέντρου  $AB$ , τότε τέμνουν τους κύκλους σε ζεύγη συμμετρικών χορδών  $(TT'', \Sigma T')$  και  $(P\Sigma', P''P')$ . Επίσης το  $PBP'E$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο  $\nu$  διότι  $\widehat{PBP'} = 2\widehat{PP''E} = 2 \frac{180^\circ - \widehat{PEP''}}{2} = 180^\circ - \widehat{PEP''}$ . Συνάγεται ότι το  $\Pi$  περιέχεται και αυτό στον κύκλο και η  $\Pi E$  είναι κάθετος στην  $AB$ . Αυτό συνεπάγεται ότι το  $\Pi$  είναι επί του κύκλου ομοιότητας  $\mu$  των  $\{\kappa, \beta\}$  (Άσκηση 4.7.7). Συνεπώς, κατά το (1),  $|PT| = |T'P'|$ . Τότε αφαιρώντας από τα ίσα τμήματα  $|T\Sigma'| = |P\Sigma'|$  τα προηγούμενα ίσα τμήματα βρίσκουμε ότι  $|P\Sigma'| = |\Sigma T'|$ .

(4 ⇒ 1) Εάν τα τμήματα  $|TT''| = |P\Sigma'|$  (Σχήμα 4.10.30), τότε, για τις ακτίνες των κύκλων θα ισχύει η σχέση,

$$r_\kappa \cdot \eta\mu(\widehat{TAA'}) = r_\beta \cdot \eta\mu(\widehat{PBB'}) \quad \Rightarrow \quad \frac{r_\kappa}{r_\beta} = \frac{\eta\mu(\widehat{PBB'})}{\eta\mu(\widehat{TAA'})} = \frac{|\Pi\Pi'|/|\Pi P|}{|\Pi\Pi'|/|\Pi T|} = \frac{|\Pi T|}{|\Pi P|},$$

όπου  $\{A', B', \Pi'\}$  οι προβολές των  $\{A, B, \Pi\}$  στην ευθεία  $TP$ . Αυτό συνεπάγεται ότι τα ορθογώνια τρίγωνα  $\{\Pi T A, \Pi P B\}$  είναι όμοια και ότι το  $\Pi$  περιέχεται στον κύκλο ομοιότητας των  $\{\kappa, \beta\}$ .

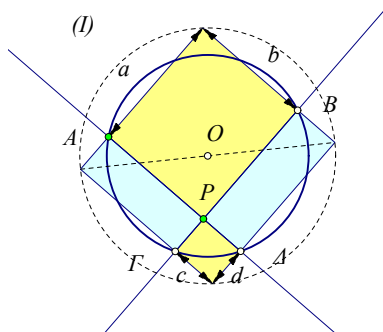


Σχήμα 4.10.31: Κύκλος ομοιότητας και ίσες χορδές

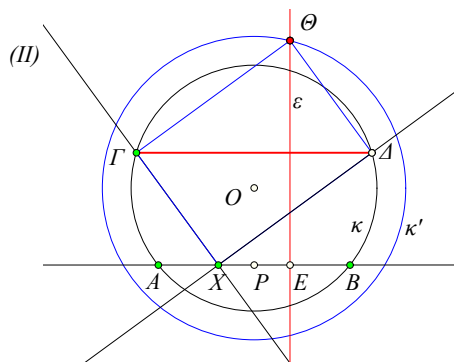
**Άσκηση 4.10.78** Δείξε ότι η τελευταία ιδιότητα της προηγούμενης άσκησης ισχύει και στην περίπτωση δύο εφαπτομένων από το  $\Pi$  που δεν διαχωρίζουν τα κέντρα (έτσι ώστε και τα δύο κέντρα των κύκλων να περιέχονται στη γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες). Με άβλητα λόγια, δοθέντων των εξωτερικών αλληλήθλων κύκλων  $\{\kappa, \beta\}$  και των εφαπτομένων  $\{\Pi T, \Pi P'\}$  από το  $\Pi$ , που δεν διαχωρίζουν τα κέντρα, το  $\Pi$  περιέχεται στον κύκλο ομοιότητας των  $\{\kappa, \beta\}$  τότε και μόνον, όταν οι χορδές των δύο κύκλων  $\{TT', PP'\}$ , που αποτελεί η ευθεία  $TP'$  των σημείων επαφής, είναι ίσες (Σχήμα 4.10.31).

**Άσκηση 4.10.79** Ορθή γωνία περιστρέφεται περί την κορυφή της  $P$ , που περιέχεται εντός κύκλου  $\kappa$ . Οι πλευρές της τέμνουν αντίστοιχα τον κύκλο στα σημεία  $A, \Delta$  και  $B, \Gamma$ . Από τα σημεία αυτά φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές της ορθής γωνίας, που σχηματίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Δείξε ότι

1. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο κέντρο  $O$  του κύκλου  $\kappa$ .
2. Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών του παραλληλογράμμου είναι κύκλος  $\kappa'$  ομοκεντρικός του  $\kappa$ , του οποίου υποβλήθηκε την ακτίνα συναρτήσε αυτής του  $\kappa$  και της απόστασης  $|PO|$ .
3. Δείξε ότι τα διαγώνια-κείμενα παραλληλόγραμμο, όπως β.χ. αυτά με διαγώνιους  $AG, BD$  είναι όμοια.



Σχήμα 4.10.32: Περιστρεφόμενη ορθή γωνία



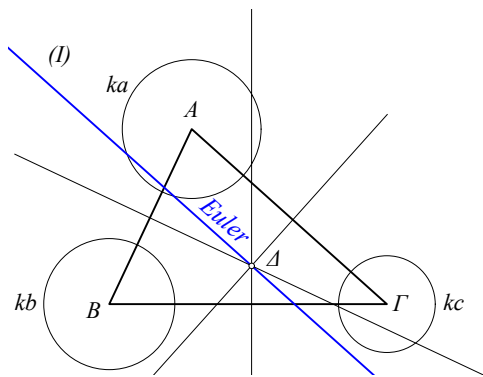
Κατασκευή χορδής

Υπόδειξη: Βάσει του σχήματος 4.10.32-I, το τετράγωνο της διαγωνίου ισούται με  $(a + d)^2 + (b + c)^2$ . Εφάρμοσε την Άσκηση 3.4.16.

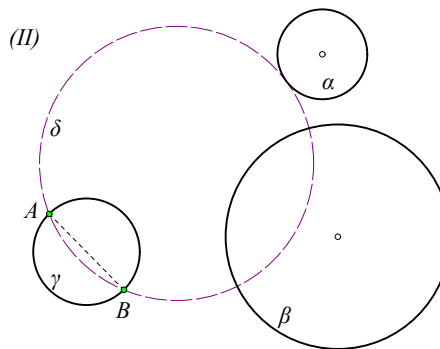
**Άσκηση 4.10.80** Δίδεται σημείο X στη χορδή AB κύκλου κ. Να κατασκευασθεί χορδή ΓΔ, παράλληλη της AB, έτσι ώστε η γωνία ΓXΔ να είναι ορθή.

Υπόδειξη: Η ζητούμενη χορδή παράγει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο XΓΘΔ, του οποίου η κορυφή Θ είναι στην τομή δύο γεωμετρικών τόπων (Σχήμα 4.10.32)-II : (α) του κύκλου κ', που εξετάζεται στην προηγούμενη άσκηση, και (β) της ευθείας ε, που προκύπτει ως τόπος των κορυφών των παραλληλογράμμων ΓXΔΘ, για Γ μεταβαλλόμενο επί του κ και ΓΔ χορδή του κ παράλληλο της AB.

Η ΓΔ μπορεί να προσδιορισθεί και υπολογίζοντας την απόστασή της από το AB. Ο προηγούμενος τρόπος ωστόσο, δείχνει καλύτερα τη γεωμετρική δομή του προβλήματος.



Σχήμα 4.10.33: Χαρακτηρισμός ευθείας Euler

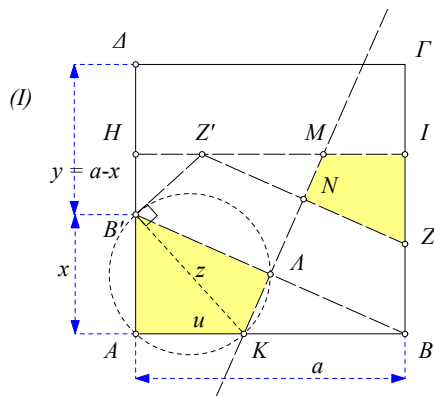


Κύκλος δ με 3 ιδιότητες

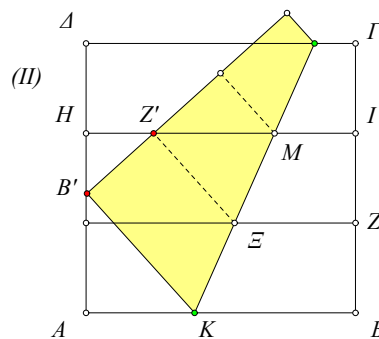
**Άσκηση 4.10.81** Με κέντρα τις κορυφές τριγώνου ABΓ κατασκευάζουμε κύκλους με αντίστοιχες ακτίνες {ka, kb, kc}, όπου  $\{a = |BΓ|, b = |ΓA|, c = |AB|\}$  και k θετικός αριθμός. Δείξε ότι τα ριζικά κέντρα αυτών των τριάδων κύκλων περιέχονται στην ευθεία του Euler του τριγώνου (Σχήμα 4.10.33-I).

Υπόδειξη: Δεδομένου ότι η ευθεία ε του Euler του τριγώνου διέρχεται από το κεντροειδές και το περικεντρο, υπολόγισε, για ένα σημείο X της ε και την προβολή του X' σε μία πλευρά λ.χ. την BΓ, το λόγο των αποστάσεων  $|X'B|/|X'Γ|$ .

**Άσκηση 4.10.82** Δοθέντων τριών κύκλων {α, β, γ} εξωτερικών αλληλήλων, κατασκεύασε κύκλο δ που εφάπτεται του α, τέμνει το β ορθογώνια και τέμνει το γ κατά διάμετρο AB (Σχήμα 4.10.33-II).



Σχήμα 4.10.34: Προετοιμασία κατασκευής



Η  $\sqrt[3]{2}$  με origami

Η επόμενη άσκηση στηρίζει τη μέθοδο εύρεσης της τρίτης ρίζας  $\sqrt[3]{2}$  (Δήλιο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου) με τη μέθοδο του διπλώματος ενός τετραγώνου φύλλου χαρτιού (το origami που συναντήσαμε στην άσκηση 1.16.1). Για την πληρότητα της εφαρμογής αυτής της μεθόδου χρειάζεται η προκαταρκτική διαίρεση του τετραγώνου σε τρεις ίσες οριζόντιες λωρίδες, που μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της άσκησης 2.8.4.

**Άσκηση 4.10.83** Δίδεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , μεταβλητό σημείο  $B'$  στην πλευρά του  $A\Delta$  και τα σημεία  $\{Z, I\}$  στην πλευρά  $B\Gamma$ , που τη χωρίζουν σε τρία ίσα μέρη. Δείξε ότι υπάρχει μία θέση του  $B'$ , έτσι ώστε το συμμετρικό  $Z'$  του  $Z$  ως προς τη μεσοκάθετο  $KM$  του  $BB'$  να περιέχεται στην παράλληλη  $I\epsilon$  της  $AB$ .

Υπόδειξη: Με τους συμβολισμούς του σχήματος 4.10.34-I, όπου η θέση του  $B'$  καθορίζεται από το  $x$ , ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} w = |BB'| &\Rightarrow w^2 = x^2 + a^2, \\ a(a - u) = w^2 / 2 &\Rightarrow u = (a^2 - x^2) / (2a), \\ z = |B'K| = |KB| = a - u &\Rightarrow z = (a^2 + x^2) / (2a), \\ |B'Z'| = |BZ| = a/3 &\text{ και } B'AK \text{ όμοιο του } Z'HB' \Rightarrow \\ |B'H| / |B'Z'| = u/z &\Rightarrow |B'H| = (u/z)(a/3). \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι  $|AB'| + |B'H| = x + |B'H| = 2a/3$ , και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, βρίσκουμε ότι το  $x$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$3x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0.$$

Για να ολοκληρώσουμε την άσκηση θα πρέπει να βρούμε την πραγματική ρίζα αυτής της εξίσωσης, που είναι η  $x_0 = \frac{a}{3} \left( \sqrt[3]{4} - \frac{2}{\sqrt[3]{4}} + 1 \right)$ , και να δούμε ότι αυτή καθορίζει τη θέση του  $B'$  με τις απαιτούμενες ιδιότητες. Η επόμενη άσκηση δείχνει έναν ευκολότερο δρόμο για τον καθορισμό του  $B'$ .

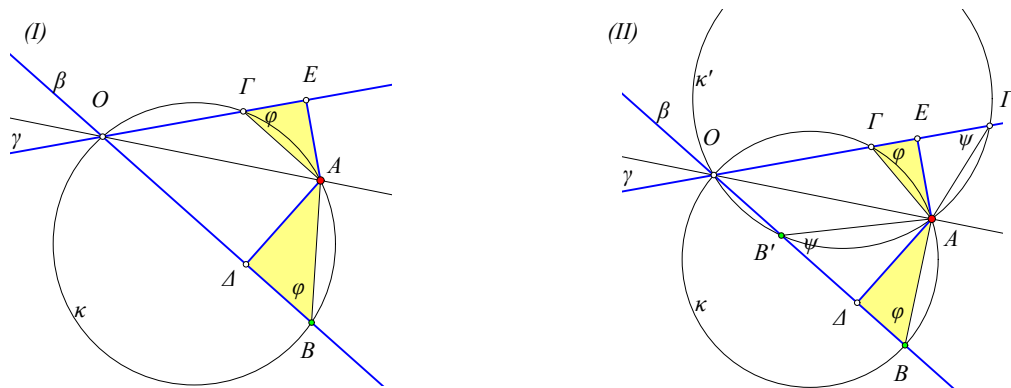
**Άσκηση 4.10.84** Με τους συμβολισμούς και την τιμή του  $x$ , που προσδιορίζεται από την προηγούμενη άσκηση, δείξε ότι ο λόγος  $\beta = y/x = \sqrt[3]{2}$ . Συμπέρανε ότι, διπλώνοντας το τετράγωνο φύλλο χαρτιού, έτσι ώστε το  $B$  να πέσει πάνω στην  $A\Delta$  και το  $Z$  πάνω στην  $HI$ , τότε ο λόγος  $|AB'| / |B'\Delta| = \sqrt[3]{2}$ .

Υπόδειξη: Το πρώτο συμπέρασμα προκύπτει από την τελευταία εξίσωση. Πράγματι γράφοντας  $\beta = y/x = (a - x)/x$ , από την οποία προκύπτει  $x = a/(1 + \beta)$  και αντικαθιστώντας σε αυτήν την εξίσωση, βλέπουμε ότι προκύπτει η  $2 - \beta^3 = 0$ .

Το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει από το ότι, με αυτόν τον τρόπο διπλώματος του χαρτιού (Σχήμα 4.10.34-II), η τσάκιση ταυτίζεται με την ευθεία  $KM$  και το  $B$  πάει ακριβώς πάνω στο  $B'$  της προηγούμενης άσκησης.



**Άσκηση 4.10.85** Θεώρησε μια τεμνόμενη δέσμη κύκλων  $\mathcal{D}$  στα σημεία  $\{O, A\}$  και δύο ευθείες  $\{\beta, \gamma\}$  διά του  $O$ . Δείξε ότι, για κάθε κύκλο  $\kappa$  της δέσμης, τα δεύτερα σημεία τομής του  $\{B, \Gamma\}$  με τις ευθείες  $\{\beta, \gamma\}$  ορίζουν τμήματα  $\{x = |OB|, y = |OG|\}$ , των οποίων τα μήκη ικανοποιούν μία σχέση της μορφής  $ax + by = c$ , όπου  $\{a, b, c\}$  σταθερές.



Σχήμα 4.10.35: Τεμνόμενη δέσμη και ευθείες

Υπόδειξη: Φέρε τις κάθετες  $\{A\Delta, AE\}$  αντίστοιχα στις  $\{\beta, \gamma\}$  (Σχήμα 4.10.35-I). Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\{AB\Delta, A\Gamma E\}$  είναι όμοια. Συνεπώς,

$$\frac{|AB|}{|A\Delta|} = \frac{|A\Gamma E|}{|AE|} \Rightarrow \frac{x - |O\Delta|}{|A\Delta|} = \frac{|OE| - y}{|AE|} \Rightarrow ax + by = c,$$

όπου  $\{a = 1/|A\Delta|, b = 1/|AE|, c = (|OE|/|AE|) + (|O\Delta|/|A\Delta|)\}$  δεν εξαρτώνται από τον ειδικό κύκλο  $\kappa$  της δέσμης  $\mathcal{D}$ .

**Άσκηση 4.10.86** Δείξε την αντιστροφή ιδιότητα από αυτήν της προηγούμενης άσκησης. Δηλαδή, αν σε δύο τεμνόμενες στο σημείο  $O$  ευθείες  $\{\beta, \gamma\}$  λαμβάνονται σημεία αντίστοιχα  $\{B, \Gamma\}$ , έτσι ώστε οι αποστάσεις τους  $\{x = |OB|, y = |OG|\}$  να ικανοποιούν μια σχέση της μορφής  $ax + by = c$  για κάποιες σταθερές  $\{a, b, c\}$ , τότε οι κύκλοι  $\{\kappa = (OB\Gamma)\}$  είναι όλοι μέλη μιας τεμνόμενης δέσμης και διέρχονται από ένα δεύτερο σταθερό σημείο  $A$ .

Υπόδειξη: Θεώρησε δύο κύκλους  $\{\kappa = (OB\Gamma), \kappa' = (OB'\Gamma')\}$  που τέμνονται για δεύτερη φορά στο  $A$  (Σχήμα 4.10.35-II). Τα τρίγωνα  $\{ABB', A\Gamma\Gamma'\}$  είναι όμοια. Συνάγεται ότι οι λόγοι των πλευρών τους ικανοποιούν μια σταθερή σχέση

$$\frac{|BB'|}{|\Gamma\Gamma'|} = \frac{|OB'| - |OB|}{|O\Gamma'| - |O\Gamma|} = \frac{x' - x}{y' - y} = -\frac{b}{a},$$

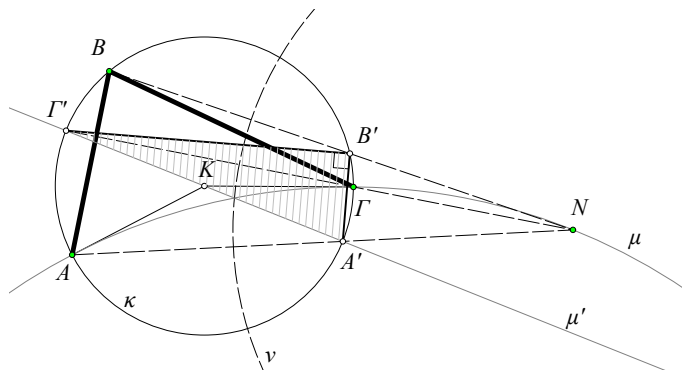
την οποία, λόγω της ομοιότητας, θα ικανοποιούν και τα αντίστοιχα ύψη  $\frac{|A\Delta|}{|AE|} = \frac{|b|}{|a|}$ . Συνάγεται (Πρόταση 3.8.4) ότι η θέση της ευθείας  $OA$  είναι σταθερά ως προς τις  $\{\beta, \gamma\}$ . Συνάγεται επίσης και ότι όλοι οι κύκλοι  $\kappa'$  θα διέρχονται από το κοινό σημείο  $A$  της ευθείας  $OA$  και του κύκλου  $\kappa$ .

**Άσκηση 4.10.87** Καθώς μεταβάλλεται ο κύκλος  $\kappa$  της δέσμης  $\mathcal{D}$ , δείξε ότι στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος 4.10.35-I, οι δεύτερες τομές των υψών από τα  $\{B, \Gamma\}$  με τον  $\kappa$  κινούνται σε δύο σταθερές ευθείες  $\{\beta', \gamma'\}$  που διέρχονται από το  $A$ . Δείξε επίσης ότι το ορθόκεντρο αυτού του τριγώνου κινείται σε μία ευθεία, που τέμνει τις  $\{\beta, \gamma\}$  σε σημεία από τα οποία διέρχονται οι προηγούμενες ευθείες.

Υπόδειξη: Εξέτασε τις γωνίες που σχηματίζονται στο  $A$ , και το ορθόκεντρο.

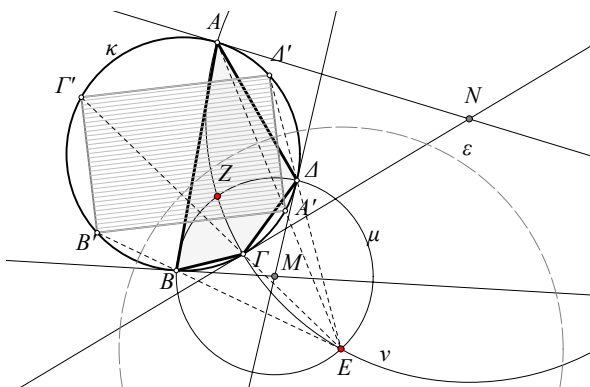
**Άσκηση 4.10.88** Δείξε ότι για δοθείσα γωνία  $\widehat{AB\Gamma}$  εγγεγραμμένη σε κύκλο  $\kappa(K)$ , υπάρχει αντιστροφή ως προς κύκλο  $\nu(N)$ , ορθογώνιο στον  $\kappa$ , που απεικονίζει τα τρία σημεία  $\{A, B, \Gamma\}$  σε τρία άλλα  $\{A', B', \Gamma'\}$ , έτσι ώστε η γωνία  $\widehat{A'B'\Gamma'}$  να είναι ορθή εγγεγραμμένη στον  $\kappa$ .





Σχήμα 4.10.36: Αντιστροφή οποιασδήποτε γωνίας σε ορθή

Υπόδειξη: Θεώρησε τον κύκλο  $\mu(M)$ , που είναι ορθογώνιος στον  $\kappa$  και διέρχεται από τα  $\{A, \Gamma\}$ . Οποιοδήποτε σημείο  $N$  αυτού του κύκλου, εξωτερικό του  $\kappa$ , ορίζει κύκλο  $\nu(N)$  ορθογώνιο στον  $\kappa$  που έχει την αναφερόμενη ιδιότητα (Σχήμα 4.10.36).



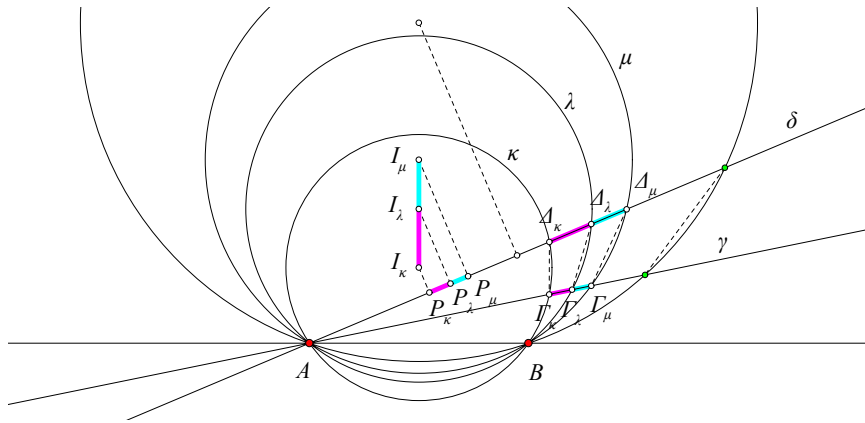
Σχήμα 4.10.37: Αντιστροφή εγγραφίμου τετραπλεύρου σε ορθογώνιο

**Άσκηση 4.10.89** Δείξε ότι για δοθέν τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $\kappa(K)$ , υπάρχει αντιστροφή ως προς κύκλο  $\epsilon(E)$ , ορθογώνιο στον  $\kappa$ , που απεικονίζει τα τέσσερα σημεία  $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$  σε τέσσερα άλλα  $\{A', B', \Gamma', \Delta'\}$ , έτσι ώστε το  $A'B'\Gamma'\Delta'$  να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο στον  $\kappa$ .

Υπόδειξη: Κατασκεύασε τους κύκλους  $\{\mu(M), \nu(N)\}$ , που είναι ορθογώνιοι στον  $\kappa$  και περιέχουν αντίστοιχα τα ζεύγη σημείων  $\{(B, \Delta), (A, \Gamma)\}$  (Σχήμα 4.10.37). Δείξε ότι οι κύκλοι αυτοί τέμνονται σε δύο σημεία  $\{E, Z\}$ , ένα εκ των οποίων ( $E$ ) είναι εξωτερικό του  $\kappa$  και ορίζει κύκλο  $\epsilon(E)$  ορθογώνιο στον  $\kappa$ . Χρησιμοποίησε την προηγούμενη άσκηση (δες και άσκηση 7.8.6).

Οι επόμενες ασκήσεις εξετάζουν μια γενίκευση του θεωρήματος του Θαλή για κύκλους. Αντί για δέσμη ευθειών έχουμε εδώ μια δέσμη κύκλων  $\{\kappa, \lambda, \mu, \dots\}$  που διέρχονται από δύο σημεία  $\{A, B\}$ . Σε κάθε ευθεία  $\gamma$  δια του  $A$  ορίζονται τα δεύτερα σημεία τομής  $\{\Gamma_\kappa, \Gamma_\lambda, \Gamma_\mu, \dots\}$ . Η βασική ιδιότητα διατυπώνεται στην επόμενη άσκηση (Σχήμα 4.10.38).

**Άσκηση 4.10.90** Με τις προηγούμενες προϋποθέσεις και συμβολισμούς, οι λόγοι των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων  $\{|\Gamma_\kappa\Gamma_\lambda|/|\Gamma_\lambda\Gamma_\mu|\}$  δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση της ευθείας  $\gamma$  που διέρχεται από το  $A$ . Με άλλα λόγια, και για μια άλλη ευθεία  $\delta$  δια του  $A$  θα ορίζονται τα αντίστοιχα σημεία



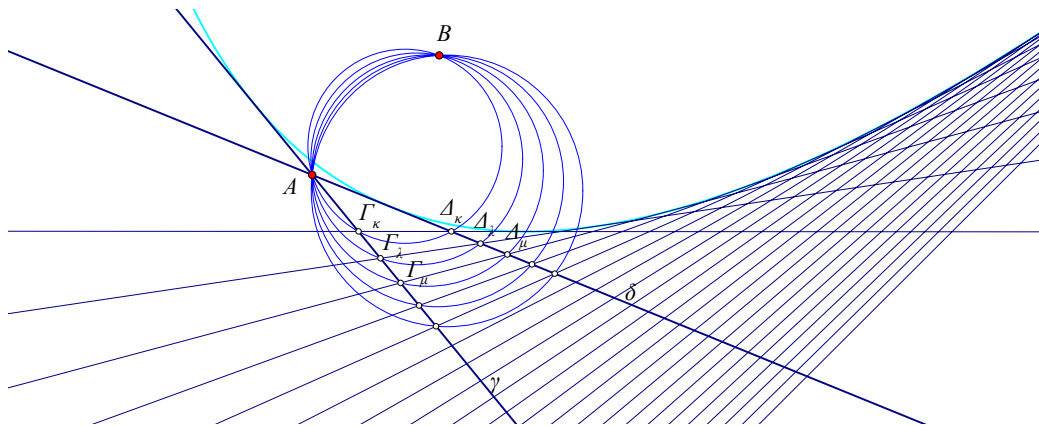
Σχήμα 4.10.38: Γενίκευση Θαλή για δέσμες κύκλων

$\{\Delta_\kappa, \Delta_\beta, \Delta_\mu, \dots\}$  και οι αντίστοιχοι λόγοι θα είναι ίσοι

$$\frac{|\Gamma_\kappa \Gamma_\beta|}{|\Gamma_\beta \Gamma_\mu|} = \frac{|\Delta_\kappa \Delta_\beta|}{|\Delta_\beta \Delta_\mu|}.$$

Υπόδειξη: Πρόβαλλε τα κέντρα των κύκλων  $\{I_\kappa, I_\beta, I_\mu, \dots\}$  πάνω στην  $\delta$  στα αντίστοιχα σημεία της ευθείας  $\{P_\kappa, P_\beta, P_\mu, \dots\}$  και δεξ ότι  $|\Delta_\kappa \Delta_\beta| = 2|P_\kappa P_\beta| = 2|I_\kappa I_\beta| \sin(\varphi)$ , όπου  $\varphi$  η γωνία της ευθείας των κέντρων  $\{I_\kappa\}$  με την  $\delta$ .

**Άσκηση 4.10.91** Με τους προηγούμενους συμβολισμούς και προϋποθέσεις, δείξε ότι, για σταθερές ευθείες  $\{\gamma, \delta\}$  διερχόμενες δια του  $A$ , ο λόγος  $\frac{|\Delta_\kappa \Delta_\beta|}{|\Gamma_\kappa \Gamma_\beta|}$  δεν εξαρτάται από του ειδικούς κύκλους  $\{\kappa, \beta\}$  της δέσμης και είναι ο ίδιος για όλα τα ζεύγη κύκλων που διέρχονται από τα  $\{A, B\}$ .



Σχήμα 4.10.39: Αντίστροφο της γενίκευσης του Θαλή

**Άσκηση 4.10.92** Δείξε το αντίστροφο της ιδιότητας της άσκησης 4.10.90. Εάν σε δύο δοθείσες τεμνόμενες στο σημείο  $A$  ευθείες  $\{\gamma, \delta\}$  τα αντίστοιχα σημεία τους  $\{\Gamma_\kappa, \Gamma_\beta, \Gamma_\mu\}$  και  $\{\Delta_\kappa, \Delta_\beta, \Delta_\mu\}$  ικανοποιούν την  $\frac{|\Gamma_\kappa \Gamma_\beta|}{|\Gamma_\beta \Gamma_\mu|} = \frac{|\Delta_\kappa \Delta_\beta|}{|\Delta_\beta \Delta_\mu|}$ , τότε οι κύκλοι  $\{\kappa = (A\Gamma_\kappa \Delta_\kappa), \beta = (A\Gamma_\beta \Delta_\beta), \nu = (A\Gamma_\nu \Delta_\nu)\}$  διέρχονται από κοινό σημείο  $B$ .

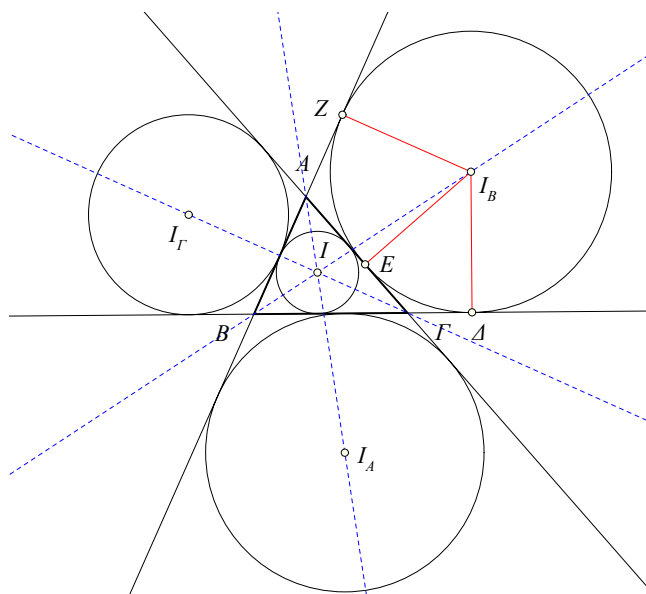
Στο κεφάλαιο 11 θα δούμε ότι οι ευθείες  $\{\Gamma_\kappa \Delta_\kappa, \Gamma_\beta \Delta_\beta, \dots\}$  είναι εφαπτόμενες μιας παραβολής που έχει την εστία της στο  $B$  (Σχήμα 4.10.39).

### 5.1 Παρεγγεγραμμένοι και έκκεντρα

Πλέονες εξ ασκήσεως αγαθοί γίνονται ή από φύσιος.

Δημόκριτος

**Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι** του τριγώνου  $AB\Gamma$  λέγονται οι κύκλοι που είναι εκτός του τριγώνου και εφάπτονται των πλευρών του. Τα κέντρα τους λέγονται **έκκεντρα του τριγώνου** ή **παράκεντρα** του



Σχήμα 5.1.1: Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου

τριγώνου (Σχήμα 5.1.1). Η ύπαρξη των κύκλων αυτών στηρίζεται στην επόμενη πρόταση που είναι ανάλογη αυτής για την ύπαρξη του εγγεγραμμένου κύκλου (Θεώρημα 2.2.2).

**Θεώρημα 5.1.1** Η εσωτερική διχοτόμος μιας γωνίας του τριγώνου και οι εξωτερικές διχοτόμοι των δύο άλλων γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

*Απόδειξη:* Θα δείξουμε ότι η εσωτερική διχοτόμος στο  $B$  και οι εξωτερικές στα  $A$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο ίδιο σημείο, που συμβολίζουμε με  $I_B$ . Ανάλογα θα ισχύουν και για τις άλλες γωνίες και θα ορίζονται τα σημεία  $I_A$  και  $I_\Gamma$  (Σχήμα 5.1.1). Η απόδειξη μεταφέρεται αυτολεξεί από το Θεώρημα 2.2.2. Έστω  $I_B$  το σημείο τομής δύο εκ των τριών διχοτόμων του τριγώνου και συγκεκριμένα των εξωτερικών διχοτόμων των γωνιών  $A$  και  $\Gamma$ . Θα δείξουμε ότι και η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  διέρχεται από το  $I_B$ . Πράγματι, κατά την Πρόταση 1.15.16, οι αποστάσεις του  $I_B$  από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{A}$  είναι ίσες  $|I_B Z| = |I_B E|$ . Παρόμοια και οι αποστάσεις του  $I_B$  από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  είναι ίσες  $|I_B E| = |I_B \Delta|$ . Συνεπώς, οι τρεις αποστάσεις θα είναι ίσες μεταξύ τους  $|I_B Z| = |I_B E| = |I_B \Delta|$ , άρα θα είναι ακτίνες του κύκλου με κέντρο  $I_B$  και ακτίνα  $r_B = |I_B \Delta|$ . Η ισότητα των αποστάσεων  $|I_B Z| = |I_B \Delta|$  από τις πλευρές τις γωνίας  $\hat{B}$ , δείχνει ότι το  $I_B$  ευρίσκεται και επί της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{B}$  (Πρόταση 1.15.16). Η καθετότητα των πλευρών στα άκρα των ακτίνων αυτών του κύκλου, δείχνει (Πόρισμα 2.2.2) ότι ο κύκλος εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου, ο.ε.δ.

**Άσκηση 5.1.1** Έστω ότι  $I, I_A, I_B, I_\Gamma$  είναι αντίστοιχα το έγκεντρο και τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Δείξε ότι:

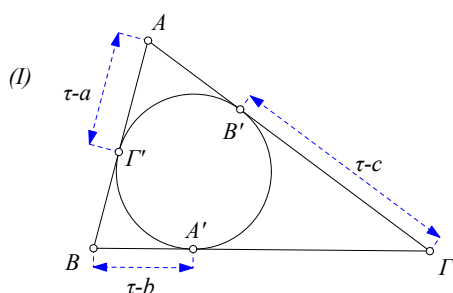
1. Κάθε μία από τις τριάδες  $(A, I, I_A), (B, I, I_B), (\Gamma, I, I_\Gamma)$  αποτελείται από συνευθειακά σημεία.
2. Οι ευθείες που ορίζονται από κάθε μία τριάδα από τις προηγούμενες είναι ύψη του τριγώνου  $I_A I_B I_\Gamma$ .
3. Το  $I$  είναι το ορθόκεντρο του προηγούμενου τριγώνου.
4. Το  $AB\Gamma$  είναι το ορθικό του τριγώνου  $I_A I_B I_\Gamma$ .

**Πρόταση 5.1.1** Το μήκος της εφαπτόμενης  $B\Delta$  από την κορυφή  $B$  προς τον αντίστοιχο παρεγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο  $I_B$  είναι ίσο με την ημιπερίμετρο  $\tau$  του τριγώνου  $AB\Gamma$

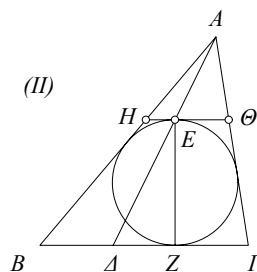
$$|B\Delta| = \frac{1}{2}(a + b + c) = \tau.$$

*Απόδειξη:* Εδώ, ως συνήθως, με  $a, b$  και  $c$  συμβολίζουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου. Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από την ισότητα των εφαπτομένων από το  $B$  (Σχήμα 5.1.1):  $|BZ| = |B\Delta|$ , καθώς και από τα  $A$  και  $\Gamma$ :  $|AZ| = |AE|, |\Gamma E| = |\Gamma\Delta|$ . Η περίμετρος γράφεται λοιπόν

$$\begin{aligned} a + b + c &= (|B\Gamma| + |\Gamma E|) + (|AE| + |BA|) \\ &= (|B\Gamma| + |\Gamma\Delta|) + (|BA| + |AZ|) \\ &= 2(|B\Gamma| + |\Gamma\Delta|), \quad \text{ο.ε.δ.} \end{aligned}$$



Σχήμα 5.1.2: Εφαπτόμενες από τις κορυφές



Εφαπτόμενη παράλληλη της βάσης

**Πρόταση 5.1.2** Εάν  $\tau = \frac{1}{2}(a + b + c)$  είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε οι εφαπτόμενες  $AB', A\Gamma'$  από την κορυφή  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  προς τον εγγεγραμμένο κύκλο του έχουν μήκος

$$|AA'| = |AZ| = \tau - a.$$

Απόδειξη: Όπως και η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης (Σχήμα 5.1.2-I), έτσι και αυτή εδώ, στηρίζεται στην ισότητα των εφαπτομένων από ένα σημείο προς κύκλο:  $|AB'| = |A\Gamma'|$ ,  $|B\Gamma'| = |BA'|$ ,  $|GA'| = |GB'|$ . Αρκεί να γράψουμε λοιπόν την περίμετρο

$$a + b + c = 2\tau = 2(|A\Gamma'| + |BA'| + |A'\Gamma|) = 2(|A\Gamma'| + a),$$

από την οποία προκύπτει αμέσως το ζητούμενο, ο.ε.δ.

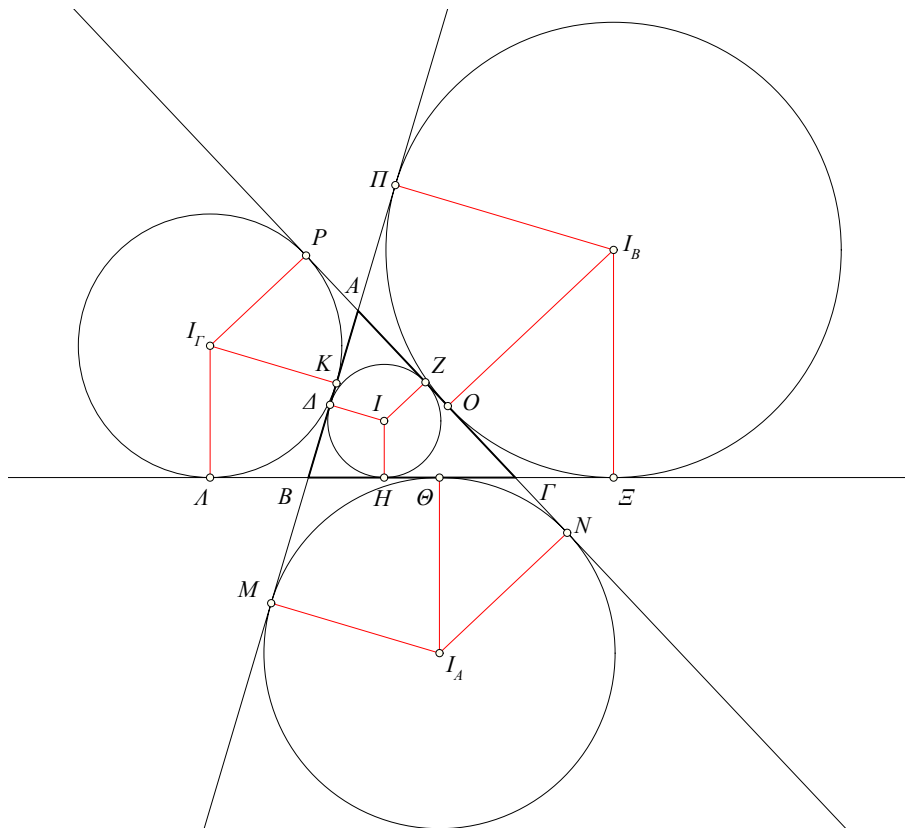
**Άσκηση 5.1.2** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , που έχει  $|A\Gamma| \geq |AB|$ , ο κύκλος  $\kappa$  εφάπτεται των πλευρών  $\{AB, A\Gamma\}$  και διέρχεται από σημείο  $A'$  της βάσης του  $B\Gamma$  (Σχήμα 5.1.2-I). Δείξε ότι ο  $\kappa$  συμπίπτει με τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε και μόνον, όταν ισχύει η σχέση

$$|A'\Gamma| - |A'B| = |A\Gamma| - |AB|.$$

Το  $A'$  συμπίπτει τότε με το σημείο επαφής του κύκλου με τη  $B\Gamma$ .

Υπόδειξη: Για τα  $\{x = |A'B|, y = |A'\Gamma|\}$ , η σχέση ισοδυναμεί με τις  $\{y - x = b - c, y + x = a\}$ .

**Άσκηση 5.1.3** Έστω  $E$  το σημείο επαφής της εφαπτόμενης  $H\Theta$  του εγγεγραμμένου κύκλου, που είναι παράλληλη της  $B\Gamma$ . Δείξε ότι η  $AE$  τέμνει τη  $B\Gamma$  σε σημείο  $\Delta$ , έτσι ώστε  $|AB| + |B\Delta| = |A\Gamma| + |A'\Gamma| = \tau$ . Συμπεράνε ότι  $|B\Delta| = |Z\Gamma|$ , όπου  $Z$  το σημείο επαφής με τη  $B\Gamma$  (Σχήμα 5.1.2-II).

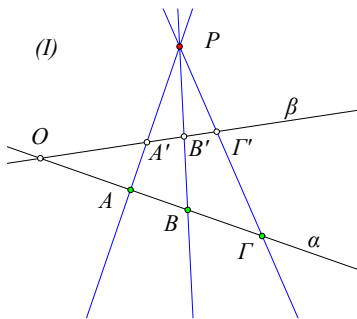


Σχήμα 5.1.3: Τμήματα επί των πλευρών

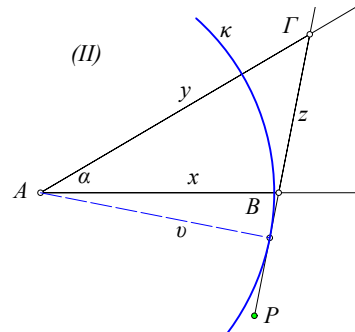
**Πρόταση 5.1.3** Ο επόμενος πίνακας δίνει τα κέντρα του εγγεγραμμένου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου  $AB\Gamma$  καθώς και τις αντίστοιχες προβολές τους στις πλευρές  $AB, B\Gamma$  και  $\Gamma A$  (Σχήμα 5.1.3).

χωρίζεται από το  $K$  σε λόγο  $1 : 3$ . Δείξε τέλος ότι το  $K$  είναι κέντρο αντιμοιοθεσίας των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $ZHE$  με λόγο  $3 : 1$ . Το  $K$  χωρίζει στο λόγο  $3 : 1$  και το τμήμα  $I\Theta$ .

**Άσκηση 5.24.49** Δίδονται δύο τεμνόμενες στο σημείο  $O$  ευθείες  $\{a, \beta\}$  εφοδιασμένες κάθε μία με ένα σύστημα τετμημένων με αρχή το  $O$ . Σε κάθε σημείο  $X(x)$  της  $a$  αντιστοιχίζουμε το σημείο  $Y(y)$  της  $\beta$  μέσω μιας ομογραφικής σχέσης  $y = (ax + b)/(cx + d)$ , όπου  $\{a, b, c, d\}$  σταθερές με  $ad - bc \neq 0$ . Δείξε ότι οι ευθείες  $\{\varepsilon_x = XY\}$ , που ορίζονται από το  $X(x)$  και το αντίστοιχό του  $Y(y)$ , διέρχονται όλες από κοινό σημείο.



Σχήμα 5.24.29: Συντρέχουσες ευθείες



Κατασκευή τριγώνου

**Υπόδειξη:** Θεώρησε το σημείο τομής  $P$  δύο ευθειών  $\{AA', BB'\}$  για τυχόντα σημεία  $\{A, B\}$  της  $a$  και τα ομογραφικά συσχετισμένα αυτών  $\{A', B'\}$  επί της  $\beta$  (Σχήμα 5.24.29-I). Θεώρησε και τρίτο σημείο  $\Gamma$  της  $a$  και το αντίστοιχό του ομογραφικά συσχετισμένο σημείο  $\Gamma'$  της  $\beta$ . Έστω  $k = (OAB\Gamma)$  ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων. Επειδή η ομογραφική συσχέτιση διατηρεί τον διπλό λόγο (Πρόταση 5.21.2), έπεται ότι και τα αντίστοιχα σημεία στην  $\beta$  θα έχουν τον ίδιο διπλό λόγο  $k = (OA'B'\Gamma')$ . Κατά το θεώρημα 5.15.3 έπεται ότι οι τρεις ευθείες θα διέρχονται από κοινό σημείο. Το συμπέρασμα προκύπτει κρατώντας τα  $\{A, B\}$  σταθερά και αλλάζοντας τη θέση του  $\Gamma$ .

Σημείωσε ότι το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης είναι το αντίστροφο της άσκησης 5.21.7.

**Άσκηση 5.24.50** Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$ , του οποίου οι πλευρές  $\{x = |AB|, y = |A\Gamma|\}$  ικανοποιούν μία ομογραφική σχέση  $y = (ux + v)/(rx + s)$  και του οποίου δίδεται η γωνία  $a = \widehat{BA\Gamma}$  και το ύψος  $v$  από το  $A$ .

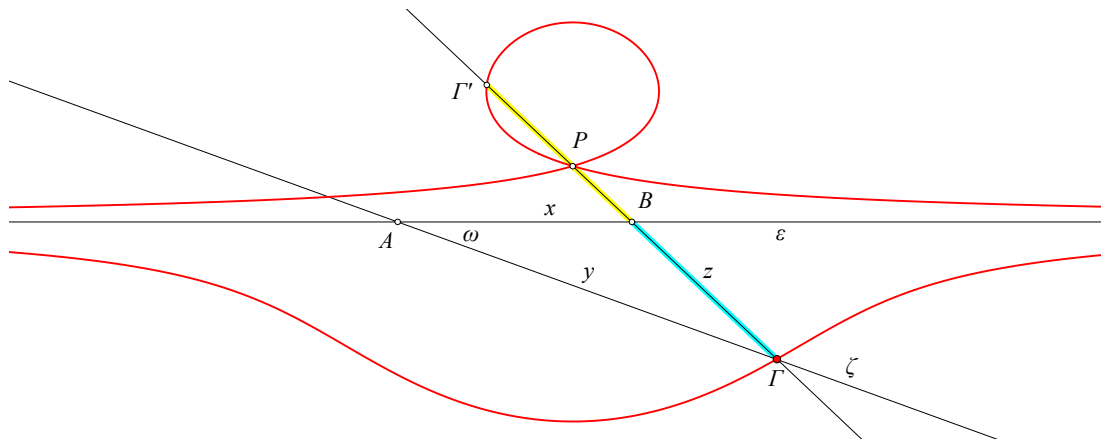
**Υπόδειξη:** Στις πλευρές  $\{AB, A\Gamma\}$  γωνίας  $a$  ορίζουμε μέσω τετμημένων την ομογραφική σχέση  $y = (ux + v)/(rx + s)$  και προσδιορίζουμε το σταθερό σημείο  $P$  από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες  $\{B(x)\Gamma(y)\}$  (Σχήμα 5.24.29-II). Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $v$  γράφουμε κύκλο  $\kappa$  και φέρνουμε την εφαπτόμενη σε αυτόν από το  $P$ .

**Άσκηση 5.24.51** Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$ , του οποίου οι πλευρές  $\{x = |AB|, y = |A\Gamma|\}$  ικανοποιούν μία ομογραφική σχέση  $y = (ux + v)/(rx + s)$  και του οποίου δίδεται η γωνία  $a = \widehat{BA\Gamma}$  και η εσωτερική ή η εξωτερική διχοτόμος ή η ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου.

**Άσκηση 5.24.52** Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$ , του οποίου οι πλευρές  $\{x = |AB|, y = |A\Gamma|\}$  ικανοποιούν μία ομογραφική σχέση  $y = (ux + v)/(rx + s)$  και του οποίου δίδονται οι γωνίες.

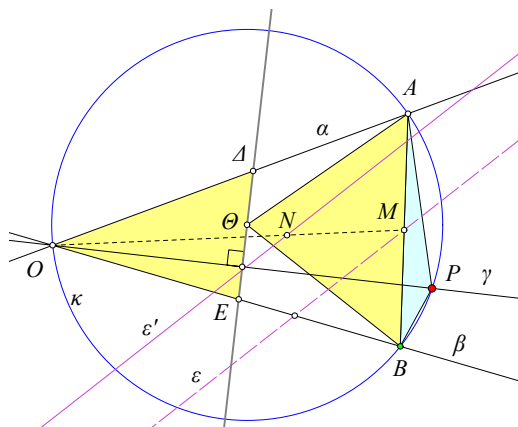
**Άσκηση 5.24.53** Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$ , του οποίου οι πλευρές  $\{x = |AB|, y = |A\Gamma|\}$  ικανοποιούν μία ομογραφική σχέση της μορφής  $ux + vy = w$  και του οποίου δίδεται η γωνία  $a = \widehat{BA\Gamma}$  και ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου ή η διάμεσος από το  $A$ .

Η ομογραφική σχέση στην τελευταία άσκηση δεν έχει την γενική μορφή των προηγούμενων ασκήσεων. Αν διατυπώσουμε την άσκηση χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή  $y = (ux + v)/(rx + s)$  της ομογραφικής σχέσης, τα αντίστοιχα προβλήματα δεν λύνονται με τον κανόνα και το διαβήτη. Για πα-



Σχήμα 5.24.30: Κογχοειδής του Νικομήδη

ράδειγμα, αν δίδεται η προηγούμενη σχέση, η γωνία  $\omega = \widehat{BA\Gamma}$  και η ακτίνα  $R$ , τότε η απέναντι πλευρά  $z = |B\Gamma|$  προσδιορίζεται από τα δεδομένα  $z = 2R \eta\mu(\omega)$  και το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό μιας τέμνουσας της γωνίας  $\widehat{BA\Gamma}$  από το  $P$ , έτσι ώστε το τμήμα  $B\Gamma$  να έχει δοθέν μήκος  $z$ . Το  $P$  προσδιορίζεται από τη γωνία  $\omega$  και την ομογραφική σχέση, όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις. Στο σχήμα 5.24.30 φαίνεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που προκύπτουν από το σταθερό σημείο  $P$  και τη σταθερή ευθεία  $\varepsilon$ , παίρνοντας σε όλες τις ευθείες δια του  $P$  τμήματα  $|B\Gamma| = |B\Gamma'| = z$ . Είναι η γνωστή από την αρχαιότητα **κογχοειδής του Νικομήδη** (περί το 200 π.Χ), που συνδέεται στενά με τη *νεύση* (Άσκηση 5.24.28) και χρησιμοποιήθηκε για την τριχοτόμηση της γωνίας και το διπλασιασμό του κύβου. Το ζητούμενο  $\Gamma$  είναι ακριβώς ένα σημείο τομής της άλλης πλευράς  $\zeta$  της γωνίας  $\omega$  και της καμπύλης.



Σχήμα 5.24.31: Γεωμετρικός τόπος των μέσων

**Άσκηση 5.24.54** Δίδονται τρεις ευθείες  $\{a, \beta, \gamma\}$  διερχόμενες από σημείο  $O$  και σημείο  $P$  της  $\gamma$ . Θεωρούμε όλους τους κύκλους  $\kappa$  που διέρχονται από τα  $\{O, P\}$  και τέμνουν για δεύτερη φορά τις  $\{a, \beta\}$  αντίστοιχα στα σημεία  $\{A, B\}$ . Δείξε ότι το μέσον  $M$  του  $AB$  περιέχεται σε σταθερή ευθεία  $\varepsilon$  και το κέντρο  $N$  του τριγώνου  $OAB$  περιέχεται σε ευθεία  $\varepsilon'$  παράλληλη της  $\varepsilon$  (Σχήμα 5.24.31).

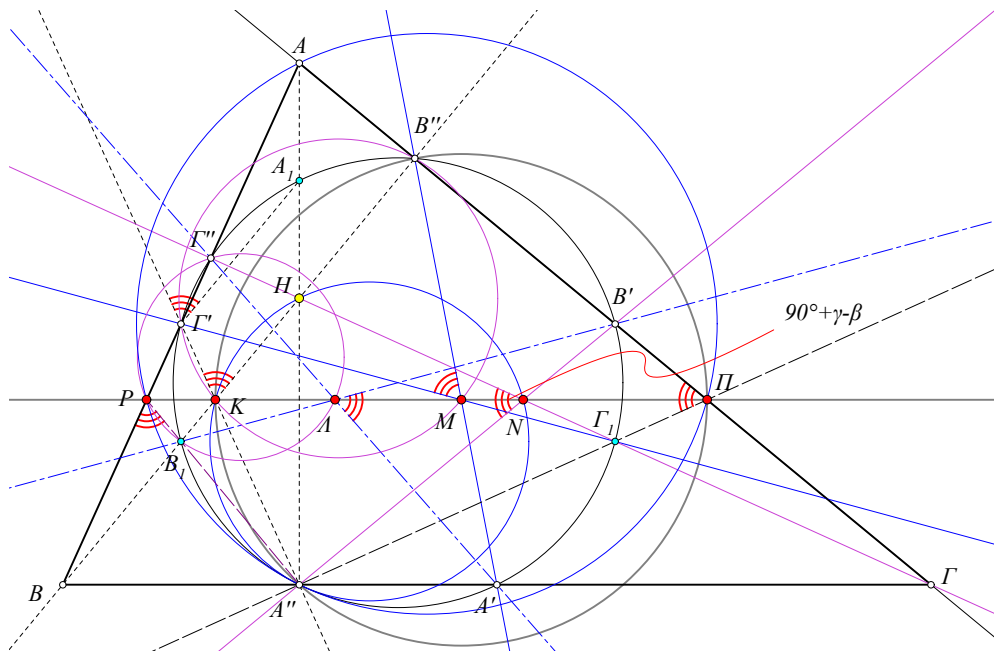
Υπόδειξη: Το τρίγωνο  $PAB$  έχει σταθερές γωνίες, η κορυφή του  $P$  παραμένει σταθερά και τα  $\{A, B\}$  κινούνται επί σταθερών ευθειών. Εφάρμοσε το θεώρημα 2.14.3.

**Άσκηση 5.24.55** Στο σχήμα 5.24.31 της προηγούμενης άσκησης, θεώρησε τη μεσοκάθετο του  $OP$  και τα σημεία τομής της  $\{\Delta, E\}$  αντίστοιχα με τις ευθείες  $\{a, \beta\}$  και το κέντρο  $\Theta$  του κύκλου  $\kappa$ . Δείξε ότι το  $P$  είναι σημείο του Miquel των  $\{A, B, \Theta\}$  ως προς το τρίγωνο  $O\Delta E$  και οδηγός στροφής του  $AB\Theta$  ως προς το  $O\Delta E$ .

**Άσκηση 5.24.56** Κατασκεύασε τα ποδικά του ορθοκέντρου, κέντρου βάρους και εγκέντρου του τριγώνου  $AB\Gamma$  και προσδιόρισε και άθλητα εγγεγραμμένα τρίγωνα  $A'B'\Gamma'$  του  $AB\Gamma$  που ορίζουν αυτά τα σημεία ως αντίστοιχα σημεία Miquel.

**Άσκηση 5.24.57** Έστω  $P$  σημείο του περικύκλου  $\kappa(O, R)$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $\{A', B', \Gamma', P'\}$  οι προβολές του αντίστοιχα στις ευθείες  $\{B\Gamma, \Gamma A, AB, s_P\}$ , όπου  $s_P$  η ευθεία Simson του  $P$ . Δείξε τους τύπους ([Lal52, σ. 14]):

1.  $|PA||PA'| = |PB||PB'| = |PG||PG'| = 2R|PP'|$ .
2.  $|PA||PB||PG| = 4R^2|PP'|$ .
3.  $|PA'|||PB'|||PG'| = 2R|PP'|^2$ .



Σχήμα 5.24.32: Έξι συνευθειακά σημεία

**Άσκηση 5.24.58** Του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα μέσα των πλευρών του είναι  $\{A', B', \Gamma'\}$ , τα ίχνη των υψών του  $\{A'', B'', \Gamma''\}$  και  $\{A_1, B_1, \Gamma_1\}$  τα μέσα των  $\{HA, HB, HG\}$ , όπου  $H$  το ορθόκεντρο. Δείξε ότι οι 6 τομές ευθειών  $P = (AB, A''B_1)$ ,  $K = (BB'', A''\Gamma')$ ,  $L = (A''\Gamma'', B'B_1)$ ,  $N = (\Gamma\Gamma'', B'A'')$ ,  $M = (A'B'', \Gamma'\Gamma_1)$  και  $\Pi = (A''\Gamma_1, A\Gamma)$  περιέχονται σε μία ευθεία παράλληλη της  $B\Gamma$ . Δείξε επίσης ότι το  $M$  είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο  $\Pi P$  και ότι τα τετράπλευρα  $A''KHN$ ,  $A''PA\Pi$  είναι εγγράψιμα και οι περικυκλοί τους εφάπτονται του κύκλου του Euler στο σημείο  $A''$ .

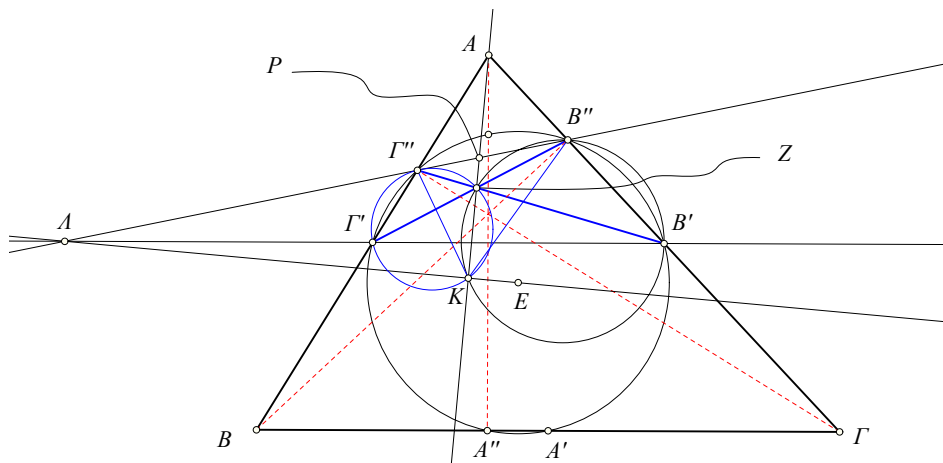
**Υπόδειξη:** Ξεκίνησε από τα εγγράψιμα τετράπλευρα, για τα οποία κρίσιμη είναι η ισότητα των γωνιών που σημειώνεται στο σχήμα 5.24.32.

Η 5.24.58 είναι τυπικό δείγμα άσκησης που προκύπτει με τη βοήθεια του υπολογιστή. Η συγκεκριμένη προέρχεται από ένα πρόγραμμα στο οποίο δίδεται ένα σχήμα, στο οποίο έχουν ορισθεί κάποια σημεία, λεγόμενα πρώτης γενιάς (εδώ 13:  $\{A, B, \Gamma, A', B', \Gamma', A'', B'', \Gamma'', A_1, B_1, \Gamma_1, H\}$ ). Το πρόγραμμα υπολογίζει όλες τις διαφορετικές ευθείες που ορίζονται από αυτά τα σημεία, τις λεγόμενες ευθείες πρώτης γενιάς (εδώ 699). Κατόπιν προσδιορίζει τα σημεία δεύτερης γενιάς, που είναι οι τομές των ευθειών πρώτης γενιάς (εδώ 16470). Στη συνέχεια το πρόγραμμα ερευνά πόσες ευθείες περιέχουν περισσότερα από δύο σημεία. Στη συγκεκριμένη υπάρχουν 5286 τέτοιες ευθείες που φέρουν 3, 4, 5, 6 και 7 σημεία δεύτερης γενιάς. Κάθε τέτοια ευθεία ορίζει μία άσκηση, όπως η προηγούμενη, όπου το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε τη συγγραμμικότητα ορισμένων σημείων. Στο συγκεκριμένο



παράδειγμα οι περισσότερες από τις 5286 ευθείες φέρουν 3 σημεία δεύτερης γενιάς. Όσο περισσότερα συγγραμικά απαιτούμε, τόσο λιγότερες είναι οι ευθείες που βρίσκουμε. Έτσι εδώ από τις 5286 ευθείες μόνο 38 φέρουν έξι σημεία δεύτερης γενιάς (και, συνεπώς, ορίζουν 38 ασκήσεις παρόμοιες με την προηγούμενη), ενώ υπάρχουν και 9 που φέρουν από 7 σημεία η κάθε μια. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτός είναι ο ανώτατος αριθμός συγγραμμικότητας. Δηλαδή, καμία από τις 5286 ευθείες δεν περιέχει περισσότερα από 7 σημεία δεύτερης γενιάς.

Προφανώς η διαδικασία θα μπορούσε να συνεχισθεί επ' άπειρον, να ορισθούν ανάλογα *ευθείες δεύτερης γενιάς*, αντίστοιχα *σημεία τρίτης γενιάς* κ.ο.κ. να εξετασθούν πάλι οι συγγραμμικότητες, να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός συγγραμμικών σημείων σε κάθε γενιά κ.λπ. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα, για λόγους εξάντλησης της υπολογιστικής ισχύος, σταματά στις συγγραμμικότητες σημείων δεύτερης γενιάς, αλλά εξετάζει την αντίστοιχη διαδικασία αντικαθιστώντας τις ευθείες με κύκλους, που ορίζονται από όλες τις δυνατές τριάδες μη-συγγραμμικών σημείων, τους λεγόμενους *κύκλους πρώτης γενιάς*. Εκεί η αντίστοιχη διερεύνηση αφορά σε 4 ή περισσότερα ομοκυκλικά σημεία και στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μεταξύ άλλων, προσδιορίζει και τον κύκλο του Euler, που περιέχει 9 σημεία. Η επόμενη άσκηση προέκυψε από αντίστοιχη διερεύνηση για το ίδιο βασικό σύστημα 13 σημείων της προηγούμενης άσκησης. Η άσκηση δείχνει ότι η προαναφερθείσα διαδικασία παράγει προβλήματα με μη τετριμμένο γεωμετρικό περιεχόμενο. Ωστόσο, για λόγους συνέπειας προς την ιστορική εξέλιξη, εκτός από τις δύο αυτές ασκήσεις, δεν συμπεριλαμβάνω στο βιβλίο άλλες που παράγονται με αυτόν τον τρόπο. Είναι φανερό ότι, ξεκινώντας με ένα μικρό πλήθος σημείων ενός σχήματος, μπορούμε να παραγάγουμε απειρία προβλημάτων. Ωστόσο, τα προβλήματα αυτά δεν φαίνονται να έχουν, σε γενικές γραμμές, την σπουδαιότητα των κλασικών προβλημάτων, που αναπτύχθηκαν σε μια μακροχρόνια εξέλιξη και χρησιμεύουν ως εργαλεία για την επίλυση άλλων προβλημάτων.



Σχήμα 5.24.33: Πολική AZ του σημείου Λ

**Άσκηση 5.24.59** Του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα μέσα των πλευρών είναι αντίστοιχα  $A', B', \Gamma'$  και τα ίχνη των υψών  $A'', B'', \Gamma''$ . Έστω ότι οι ευθείες  $B'\Gamma'', \Gamma'B''$  τέμνονται σε σημείο  $Z$  και οι κύκλοι  $(B'B'Z)$ ,  $(\Gamma'\Gamma''Z)$  τέμνονται σε σημείο  $K$ . Δείξε ότι οι ευθείες  $B'\Gamma', B''\Gamma'', EK$ , όπου  $E$  το κέντρο του κύκλου του Euler διέρχονται από σημείο  $\Lambda$ .

*Υπόδειξη:* Έστω ότι το σημείο  $\Lambda = (\Gamma'B', \Gamma''B'')$  είναι ο πόλος της ευθείας  $AZ$  ως προς τον κύκλο του Euler του τριγώνου  $AB\Gamma$  (Πρόταση 5.17.1). Βλέπουμε εύκολα ότι τα τρίγωνα  $\Lambda\Gamma'B''$ ,  $\Lambda B'\Gamma''$  είναι όμοια ισοσκελή (Σχήμα 5.24.33). Το σημείο τομής  $P = (B'\Gamma'', AZ)$  είναι το αρμονικό συζυγές  $P = \Lambda(\Gamma'', B')$ . Επίσης οι γωνίες  $\widehat{\Gamma''KP}$ ,  $\widehat{PKB''}$  είναι ίσες λόγω των εγγράψιμων τετραπλεύρων  $ZK\Gamma'\Gamma''$ ,  $ZKB'B''$ . Συνάγεται ότι η  $\Lambda K$  είναι η εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου  $KB''\Gamma''$ , άρα είναι κάθετος στην  $AZ$ , που είναι η πολική του  $\Lambda$ . Η κάθετος από τον πόλο  $\Lambda$  στην πολική  $AZ$  διέρχεται από το κέντρο  $E$ . Σημείωσε ότι η ευθεία  $EZ$  είναι η ευθεία του Euler του τριγώνου  $AB\Gamma$  (Άσκηση 5.19.5).

## 6.1 Οι δυσκολίες, το όριο

Ότι είδα, δεν το είδα  
μονάχα με τα μάτια μου.  
Είναι κι η δυσκολία όραση.  
Τα πιο πολλά κεφαλαιώδη  
κάθισα και τα διάβασα με δαύτη.

*Κική Δημοσιλά, Το κεφαλαίο χόμα*

Το πρόβλημα με τον κύκλο είναι ότι πριν να τον μετρήσει, πρέπει κανείς να αποδείξει ότι έχει μήκος (συντότερα λέμε **περίμετρο**). Αυτό φαίνεται δύσκολο να κατανοηθεί από τον αρχάριο, είναι ωστόσο ένα πρόβλημα που προκύπτει από το ότι δεν έχουμε, ως τώρα, δώσει ορισμό του μήκους καμπύλης. Προς το παρόν μήκος ξέρουμε να μετράμε μόνο για ευθύγραμμα τμήματα και τα παράγωγα αυτών, που είναι τεθλασμένες και πολύγωνα. Ο κύκλος ωστόσο είναι κάτι διαφορετικό. Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τα πράγματα, να ορίσουμε τι ακριβώς εννοούμε με μήκος κύκλου και να αποδείξουμε ότι ο ορισμός μας έχει έννοια και δεν αντιφάσκει στα αξιώματά μας. Αφού γίνουν όλα αυτά, μπορούμε κατόπιν να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του μήκους του κύκλου. Στο θέμα της ύπαρξης του μήκους λοιπόν, εμφανίζεται η ανάγκη να καταφύγουμε σε ένα αξίωμα (ή «ιδιότητα» του συνόλου  $\mathbb{R}$ ) των πραγματικών αριθμών (λέγεται **αξίωμα πληρότητας**) που έχει να κάνει με *ακολουθίες* και *όρια*. Το αξίωμα αυτό λέει:

**Αξίωμα 6.1.1** Κάθε αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών  $a_1, a_2, a_3, \dots$  που είναι και φραγμένη έχει όριο έναν πραγματικό αριθμό  $A$ .

Η λέξη **ακολουθία** (αριθμών) σημαίνει ένα σύνολο αριθμών, που καθένας τους χαρακτηρίζεται από έναν ακέραιο αριθμό (δείκτη):

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Κάθε ένας από αυτούς τους αριθμούς ονομάζεται **όρος** της ακολουθίας. Η λέξη **αύξουσα** σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί βαίνουν συνεχώς αυξανόμενοι:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \dots$$

Το ότι η *ακολουθία είναι φραγμένη* σημαίνει ότι υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός  $M$  έτσι ώστε όλοι τους να είναι μικρότεροι από το  $M$ . Θα μπορούσαμε να γράψουμε εν συντομία:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \dots \leq M.$$

Το  $M$  λέγεται (άνω) **φράγμα** της ακολουθίας. Ένα  $M' > M$  είναι επίσης (άνω) φράγμα και συνήθως δεν παίζει ρόλο η ακριβής τιμή του  $M$ . Αρκεί να βρούμε ότι υπάρχει κάποιο  $M$  που ικανοποιεί τις προηγούμενες ανισότητες. Για παράδειγμα, οι αριθμοί

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \dots$$

αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία που είναι και φραγμένη αφού όλοι οι αριθμοί είναι μικρότεροι του  $M = 1$ . Παρατήρησε ότι οι όροι της ακολουθίας αυτής δίδονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{n-1}{n},$$

αντικαθιστώντας σε αυτόν τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, ... κ.λπ.

Η τελευταία λέξη, που θέλει εξήγηση στη σύντομη διατύπωση του αξιώματος, είναι το **όριο**. Δεν θα δώσω εδώ το γενικό ορισμό του αλλά μόνο τον ειδικό, δηλαδή αυτόν του ορίου μιας *αύξουσας* ακολουθίας. Είναι λοιπόν το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας ένας αριθμός  $A$ , για τον οποίον ικανοποιούνται δύο ανισότητες

$$A - \varepsilon < a_n \leq A,$$

η δεξιά για όλα τα  $a_n$ , η δε αριστερή, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$  και αν διαλέξουμε, ικανοποιείται για όλα τα  $a_n$ , εκτός ορισμένων, που όμως ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος (και εξαρτάται από το μέγεθος του  $\varepsilon$ ). Στο προηγούμενο παράδειγμα λ.χ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το όριο είναι  $A = 1$ . Πράγματι, η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} \leq 1.$$

Η δεξιά ανισότητα αληθεύει για όλα τα  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  Η αριστερή γράφεται

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n},$$

και είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{που ισοδυναμεί με την} \quad \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Η τελευταία όμως ικανοποιείται όπως ακριβώς απαιτεί ο ορισμός του ορίου, δηλαδή για όλα τα  $n$  εκτός κάποιων που το πλήθος τους είναι πεπερασμένο (και εξαρτάται από το μέγεθος του  $\varepsilon$ ). Έτσι λ.χ. για  $\varepsilon = 0,001$  άρα  $\frac{1}{\varepsilon} = 1000$ , η ανισότητα ικανοποιείται για όλα τα  $n > 1000$  και δεν ικανοποιείται για τα  $n < 1000$ , που όμως είναι πεπερασμένα το πλήθος. Στην πράξη, για να δείξουμε ότι το  $A$  είναι το όριο της αύξουσας ακολουθίας κάνουμε τα εξής:

1. Βρίσκουμε το (υποψήφιο) όριο  $A$ ,
2. Δείχνουμε ότι η  $a_n \leq A$  ισχύει για όλα τα  $n$ ,
3. Θεωρούμε ότι το  $\varepsilon > 0$  και «λύνουμε» την ανισότητα  $A - \varepsilon < a_n$  ως προς  $n$ ,
4. Διαπιστώνουμε ότι τα  $a_n$  που δεν είναι λύσεις της προηγούμενης ανισότητας είναι πεπερασμένα το πλήθος.

Η πρώτη δυσκολία είναι να βρούμε ή να μαντέψουμε το  $A$ . Το δεύτερο βήμα συνήθως προκύπτει από το πρώτο. Στο τρίτο βήμα πρέπει, όπως κάνουμε και με τις εξισώσεις, να καταφέρουμε να πάμε από τη μια μεριά της ανισότητας το  $\varepsilon$  και από την άλλη το  $n$  και να δείξουμε ότι η ανισότητα είναι ισοδύναμη με μια της μορφής

$$N(\varepsilon) < n.$$

Το  $N(\varepsilon)$  είναι συνήθως ένας αριθμός που εξαρτάται από το  $\varepsilon$  και το, να φέρουμε την (3) σε αυτήν τη μορφή, σημαίνει αυτόματα: (α) ότι η (3) ικανοποιείται για όλα τα  $n$  που είναι μεγαλύτερα του  $N(\varepsilon)$  και (β) δεν ικανοποιείται για όλα τα  $n$  που είναι μικρότερα του  $N(\varepsilon)$ , που πάντως είναι πεπερασμένα το πλήθος.

**Σχόλιο** Η έννοια του ορίου μας χρειάζεται, διότι μέσω αυτής ορίζεται το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του. Όπως θα δούμε παρακάτω, ξεκινώντας από το τετράγωνο, φτιάχνουμε κανονικά πολύγωνα  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$  καθένα από τα οποία έχει διπλάσιο αριθμό πλευρών από το προηγούμενο και είναι όλα εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο  $\kappa$ . Η περίμετρος του κύκλου ορίζεται ως το όριο των περιμέτρων αυτών των πολυγώνων. Ανάλογα και το εμβαδόν του κύκλου ορίζεται ως το όριο των εμβαδών αυτών των πολυγώνων.

Συχνά, στο μάθημα της Γεωμετρίας παραλείπεται η συζήτηση για τις δυσκολίες που παρουσιάζει ο κύκλος, όταν πάμε να μετρήσουμε την περίμετρο και το εμβαδόν του. Νομίζω όμως ότι αυτό δεν είναι σωστό. Στο σημείο αυτό έχουμε μια δυσκολία που η υπέρβασή της είναι ένα επίτευγμα της ανθρωπότητας. Εμφανίζεται η ανάγκη της προσέγγισης, του ορίου, και τίθενται τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού (από τον Αρχιμήδη), που θα αναπτυχθεί πολύ αργότερα. Είναι κρίμα να μην έχει ο μαθητής μια μικρή ιδέα γι' αυτά. Έστω και αν δυσκολεύεται κανείς να κατανοήσει πλήρως τις έννοιες, είναι χρήσιμο για την παιδεία του να νιώσει, άλλος περισσότερο άλλος λιγότερο, πώς η δυσκολία οδηγεί στην υπέρβασή της και το άνοιγμα νέων πεδίων, νέων οριζώντων. Είναι αξιοσημείωτη η σύνδεση των τριών εννοιών: «δυσκολία», «όριο», «υπέρβαση».

**Άσκηση 6.1.1** Δείξε ότι, αν η αύξουσα ακολουθία  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots$  έχει όριο τον αριθμό  $A$  και ο αριθμός  $A' < A$ , τότε υπάρχει ένα  $a_i$  με

$$A' < a_i < A.$$

*Υπόδειξη:* Γράψε  $A' = A - \varepsilon$  με  $\varepsilon = A - A' > 0$ . Εφάρμοσε κατόπιν τον ορισμό του ορίου αύξουσας ακολουθίας, σύμφωνα με τον οποίο υπάρχουν άπειρα  $a_i$  που ικανοποιούν την  $A - \varepsilon < a_i < A$ . Διάλεξε ένα από αυτά.

**Άσκηση 6.1.2** Δείξε ότι αν η αύξουσα ακολουθία  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots$  έχει όριο τον αριθμό  $A$  τότε και η ακολουθία  $\rho a_1 \leq \rho a_2 \leq \rho a_3 \dots$ , όπου  $\rho > 0$ , έχει όριο το  $\rho A$ .

*Υπόδειξη:* Η δεξιά ανισότητα του ορισμού:  $\rho a_i \leq \rho A$  είναι συνέπεια της αντίστοιχης  $a_i \leq A$ , που ισχύει εξ υποθέσεως. Η αριστερή ανισότητα του ορισμού του ορίου:  $\rho A - \varepsilon < \rho a_i$  είναι ισοδύναμη με την  $A - \frac{\varepsilon}{\rho} < a_i$ . Εξ υποθέσεως όμως, η τελευταία ισχύει για όλα τα  $a_i$  εκτός πεπερασμένων ολίγων. Συνεπώς, το ίδιο θα συμβαίνει και με την ισοδύναμη αυτής προηγούμενη ανισότητα. Συνολικά λοιπόν, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οι ανισότητες  $\rho A - \varepsilon < \rho a_i \leq \rho A$  θα ισχύουν για όλα τα  $a_i$  εκτός πεπερασμένων ολίγων, πράγμα που δείχνει την αλήθεια του ισχυρισμού.

**Άσκηση 6.1.3** Δείξε ότι η ακολουθία  $a_n = (3n + 2)/(5n + 10)$  είναι αύξουσα. Δείξε ακόμη ότι το  $A = 3/5$  είναι όριο της ακολουθίας.

*Υπόδειξη:* Το ότι είναι αύξουσα είναι ισοδύναμο με την  $\frac{3n+2}{5n+10} < \frac{3(n+1)+2}{5(n+1)+10}$ , που αποδεικνύεται εύκολα. Για το ότι το όριο είναι το συγκεκριμένο, δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots$  ισχύει η ανισότητα  $(3n + 2)/(5n + 10) < 3/5$ . Κατόπιν «λύνουμε» την

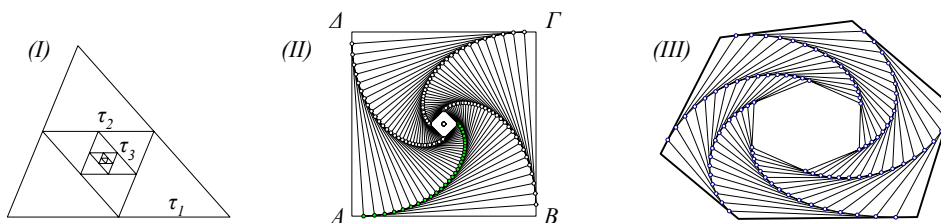
$$\begin{aligned} A - \varepsilon < a_n &\Leftrightarrow A - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \frac{3}{5} - \frac{3n+2}{5n+10} < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon} < n+2 &\Leftrightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 2 < n \end{aligned}$$

Η τελευταία ισχύει για όλα τα  $n$  εκτός ολίγων, το πλήθος των οποίων εξαρτάται από το  $\varepsilon$ .

**Άσκηση 6.1.4** Έστω η ακολουθία της οποίας ο γενικός όρος δίδεται από τον τύπο  $a_n = (an + \beta)/(n\gamma + \delta)$ , όπου  $a, \beta, \gamma$  και  $\delta$  σταθερές. Δείξε ότι η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα τότε και μόνον όταν  $a\delta - \beta\gamma > 0$ . Δείξε επίσης ότι όταν είναι αύξουσα, τότε η ακολουθία έχει όριο το  $a/\gamma$ .

Εκτός της ακολουθίας αριθμών θα θεωρήσουμε στα επόμενα και ακολουθίες πολυγώνων. Όπως και στους αριθμούς έτσι και για πολύγωνα, η λέξη **ακολουθία** σημαίνει ένα σύνολο πολυγώνων κάθε

ένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από έναν ακέραιο:  $\{P_1, P_2, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ . Κάθε ένα από τα πολύγωνα είναι ένας **όρος** της ακολουθίας. Είναι φανερό ότι η έννοια της ακολουθίας και των όρων της μεταφέρεται και σε σύνολα ομοειδών αντικειμένων. Έτσι θα μπορούσαμε να ορίσουμε ακολουθίες από σημεία, από τετράγωνα, από κύκλους κ.λπ. Το σχήμα 6.1.1-I, λ.χ. δείχνει λίγους όρους μιας



Σχήμα 6.1.1: Ακολουθία τριγώνων ... τετραγώνων ... εξαγώνων

ακολουθίας τριγώνων  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  κάθε ένα εκ των οποίων ορίζεται από τα μέσα των πλευρών του προηγούμενου, ξεκινώντας από ένα ορισμένο τρίγωνο  $\tau_1$ . Στο σχήμα 6.1.1-III διακρίνεται μία ακολουθία πολυγώνων. Η ακολουθία κατασκευάζεται παίρνοντας σε κάθε πλευρά και κατά την ίδια πάντα φορά ένα σημείο που τη χωρίζει σε λόγο  $k$ . Ενώνοντας τα σημεία στις πλευρές προκύπτει ένα νέο πολύγωνο, εγγεγραμμένο στο προηγούμενο, στο οποίο επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μία ακολουθία. Η προηγούμενη ακολουθία, των τριγώνων, είναι ειδική περίπτωση αυτής της γενικότερης ακολουθίας.

**Άσκηση 6.1.5** Εντός τετραγώνου  $\tau_1 = AB\Gamma\Delta$  εγγράφουμε τετράγωνο  $\tau_2 = A'B'\Gamma'\Delta'$ , του οποίου οι κορυφές χωρίζουν τις πλευρές σε λόγο  $k < 0$ :  $k = \frac{A'A}{A'B} = \frac{B'B}{B'\Gamma} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta\Delta'}{\Delta A}$ . Την ίδια διαδικασία επαναλαμβάνουμε με το  $\tau_2$  και συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζοντας ακολουθία τετραγώνων  $\{\tau_n\}$  (Σχήμα 6.1.1-III). Υπολόγισε το εμβαδόν του τετραγώνου  $\tau_n$ , καθώς και την απόσταση των κορυφών του  $e_n$  από το κέντρο του  $\tau_1$ . Δείξε ότι το  $e_n$ , για κατάλληλο  $n$ , γίνεται οσοδήποτε μικρό θέλουμε.

Το αρχέτυπο ακολουθίας είναι σίγουρα αυτό των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Μία από τις θεμελιώδεις ιδιότητες αυτής της ακολουθίας είναι η επονομαζόμενη *αρχή της μαθηματικής επαγωγής* ([CR96, σ. 9]), σύμφωνα με την οποία, εάν  $\{A_1, A_2, \dots\}$  είναι μία ακολουθία προτάσεων, έκαστη εξαρτώμενη από τον δείκτη της, τότε για να αποδείξουμε την ισχύ όλων αυτών των προτάσεων αρκεί:

1. Να δείξουμε την ισχύ της  $A_1$ .
2. Με την υπόθεση της ισχύος της  $A_k$ , για αυθαίρετο  $k$ , να δείξουμε την ισχύ της  $A_{k+1}$ .

Τυπικό παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας προτάσεων είναι η επονομαζόμενη *ανισότητα του Bernoulli*

$$A_n : (1+x)^n \geq 1+nx, \text{ ισχύουσα για } x > -1 \text{ και τους ακέραιους } n \geq 1. \quad (**)$$

Η απόδειξη προκύπτει εφαρμόζοντας την αρχή της επαγωγής:

(1) Για  $n = 1, A_1$ :  $(1+x)^1 = (1+x)$ , ισχύει.

(2) Για  $n = k$ , υποθέτοντας ότι ισχύει η  $A_k$ :  $(1+x)^k \geq (1+kx)$ , πολλαπλασιάζουμε με  $(1+x) > 0$ . Προκύπτει η  $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$ , άρα ισχύει και η  $A_{k+1}$ .

Μια εφαρμογή αυτής της ανισότητας γίνεται στη μελέτη της επονομαζόμενης *γεωμετρικής πρόοδος*, που είναι η ακολουθία  $\{s_n = 1+x+\dots+x^n\}$ , εξαρτώμενη από το  $x$ . Χρησιμοποιώντας επαγωγή μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι

$$s_n = 1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \left| s_n - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}, \text{ για } x > -1. \quad (**)$$

Οι αριθμοί  $0 < x < 1$  γράφονται  $x = \frac{1}{1+\theta}$  με  $\theta > 0$ . Τότε,  $x^n = \frac{1}{(1+\theta)^n} \leq \frac{1}{1+n\theta}$ , λόγω της (\*). Που, λόγω της (\*\*), συνεπάγεται ότι, για  $0 < x < 1$ , η γεωμετρική πρόοδος συγκλίνει στο όριο  $1/(1-x)$ .

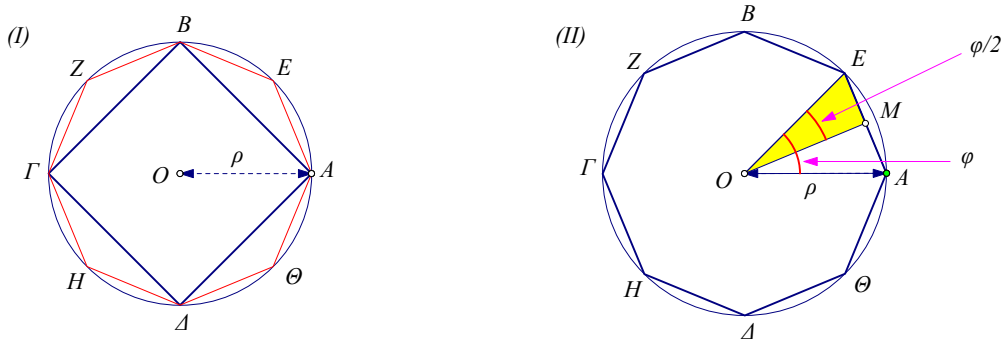
**Άσκηση 6.1.6** Δείξε λεπτομερώς ότι η γεωμετρική πρόοδος  $s_n$ , για  $0 < x < 1$ , συγκλίνει στο  $1/(1-x)$ .

## 6.2 Ορισμός της περιμέτρου του κύκλου

Το δεύτερο, να διαιρώ την καθεμία από τις δυσκολίες που θα εξετάζω σε όσα τεμάχια είναι δυνατόν και χρειάζεται για να τη λύσω καλύτερα.

*Καρτέσιου, Λόγος περί Μεθόδου β' μέρος*

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε ένα κύκλο ακτίνας  $\rho$  και ορίζουμε κανονικά πολύγωνα  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$  εγγεγραμμένα σε αυτόν, καθένα από τα οποία έχει κορυφές αυτές του προηγούμενου συν τα μέσα των τόξων που ορίζονται από τις διαδοχικές κορυφές του προηγούμενου. Ξεκινάμε δε με το τετράγωνο  $\Pi_1$ . Αν  $AB\Gamma\Delta$  συμβολίζει το τετράγωνο (Σχήμα 6.2.1-I), τότε τα μέσα των τόξων  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  ορίζουν



Σχήμα 6.2.1: Τετράγωνο και οκτάγωνο

$|AE|$ : το  $\frac{1}{\mu}$  της περιμέτρου

τέσσερα πρόσθετα σημεία  $E, Z, H, \Theta$  αντίστοιχα και το  $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$  είναι κανονικό οκτάγωνο: το  $\Pi_2$ . Το  $\Pi_3$  θα προκύπτει ανάλογα και θα έχει 16 πλευρές, το  $\Pi_4$  θα έχει 32 και, γενικά, το  $\Pi_\nu$  θα έχει  $2^{\nu+1}$  πλευρές.

**Λήμμα 6.2.1** Το κανονικό πολύγωνο με  $\mu$  πλευρές, εγγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας  $\rho$  έχει περίμετρο

$$2\mu\rho\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{\mu}\right).$$

*Απόδειξη:* Επειδή όλες οι πλευρές του κανονικού πολυγώνου είναι ίσες, η περίμετρος του θα είναι  $\mu \cdot |AE|$  όπου  $AE$  μία πλευρά του (Σχήμα 6.2.1-II). Αν  $O$  το κέντρο του κύκλου, τότε το  $AOE$  είναι ισοσκελές με γωνία στο  $O$  ίση με

$$\varphi = \frac{360^\circ}{\mu} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{180^\circ}{\mu}$$

αφού το άθροισμα  $\mu$  τέτοιων ίσων γωνιών θα δίδει μια πλήρη στροφή περί το  $O$ . Επίσης η διάμεσος  $AM$  είναι κάθετη στο μέσον  $M$  της  $AE$  (Πόρισμα 1.8.2) και το τρίγωνο  $OME$  είναι ορθογώνιο, άρα κατά το Θεώρημα 3.6.1

$$\frac{|AE|}{2} = |ME| = \rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις, προκύπτει το ζητούμενο, ο.ε.δ.

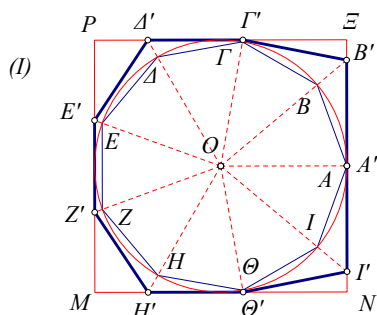
**Λήμμα 6.2.2** Η ακολουθία των περιμέτρων  $p_1, p_2, p_3, \dots$  των πολυγώνων  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$  είναι αύξουσα.

*Απόδειξη:* Επειδή κάθε τέτοιο πολύγωνο έχει πλευρές διπλάσιες του προηγούμενου του, αρκεί να δείξουμε ότι ο λόγος των περιμέτρων  $\frac{p}{p'}$  δύο κανονικών πολυγώνων  $\Pi$  και  $\Pi'$ , εκ των οποίων το πρώτο έχει  $\mu$  πλευρές και το δεύτερο έχει  $2\mu$  πλευρές, είναι μικρότερος του 1. Όμως, κατά τα προηγούμενα, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο για το ημίτονο της διπλάσιας γωνίας (Άσκηση 3.6.5), έχουμε:

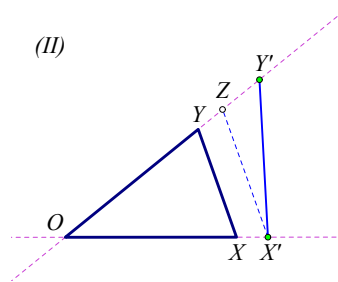
$$\frac{p}{p'} = \frac{2\mu\rho\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{\mu}\right)}{2(2\mu)\rho\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{2\mu}\right)} = \frac{\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{\mu}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{2\mu}\right)} = \frac{2\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{2\mu}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{180^\circ}{2\mu}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{180^\circ}{2\mu}\right)} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{180^\circ}{2\mu}\right) < 1, \text{ ο.ε.δ.}$$



**Λήμμα 6.2.3** Κάθε κανονικό πολύγωνο με  $\mu$  πλευρές, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $\rho$ , έχει περίμετρο μικρότερη από αυτήν του περιγεγραμμένου τετραγώνου στον ίδιο κύκλο.



Σχήμα 6.2.2: Προβολή στο τετράγωνο



Σύγκριση τριγώνου και προβολής του

*Απόδειξη:* Η απόδειξη προκύπτει προβάλλοντας το κανονικό πολύγωνο από το κέντρο του  $O$  πάνω σε ένα περιγεγραμμένο τετράγωνο (Σχήμα 6.2.2-I). Προς τούτο, για κάθε μία από τις κορυφές  $A, B, \Gamma, \dots$  του εγγεγραμμένου πολυγώνου, φέρουμε την αντίστοιχη ημιευθεία  $OA, OB, O\Gamma, \dots$  και ορίζουμε το σημείο τομής της  $A', B', \Gamma', \dots$  με το περιγεγραμμένο τετράγωνο. Προκύπτει ένα πολύγωνο  $A'B'\Gamma' \dots$  που έχει τις κορυφές του πάνω στο τετράγωνο και κάθε πλευρά του είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης πλευράς του αρχικού πολυγώνου. Αυτό προκύπτει από τη σύγκριση των αντιστοιχών τριγώνων,  $(AOB, A'OB')$ ,  $(BO\Gamma, B'O\Gamma')$ ,... Για κάθε τέτοιο ζεύγος τριγώνων, ας το ονομάσω  $(XOY, X'OY')$  (Σχήμα 6.2.2-II), το  $X'$  είναι επί της προεκτάσεως της  $OX$  και το  $Y'$  επί της προεκτάσεως της  $OY$ . Συνεπώς, το  $X'Y'$  είναι μεγαλύτερο από το  $XY$ . Για την απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού, υποθέσε ότι από τις αποστάσεις  $XX'$  και  $YY'$  η  $XX'$  είναι η μικρότερη και φέρε παράλληλο  $X'Z$  από το  $X'$  προς τη  $XY$ . Προφανώς ισχύει

$$|XY| \leq |X'Z| < |X'Y'|.$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι, λόγω ομοιότητας,  $\frac{|XY|}{|X'Z|} = \frac{|OX|}{|OX'|} \leq 1$ . Η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι η γωνία  $\widehat{X'ZY'}$  είναι αμβλεία (Πόρισμα 1.10.3), άρα απέναντί της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου  $X'ZY'$ . Προκύπτει λοιπόν ότι η περίμετρος του  $A'B'\Gamma' \dots$  είναι μεγαλύτερη αυτής του  $AB\Gamma \dots$  αλλά και μικρότερη της περιμέτρου του τετραγώνου. Το τελευταίο διότι οι πλευρές του  $A'B'\Gamma' \dots$  είναι, ή μέρη των πλευρών του τετραγώνου (όπως η  $A'B'$ ), ή έχουν τα άκρα τους σε διαφορετικές πλευρές του τετραγώνου (όπως η  $B'\Gamma'$ ) και είναι υποτεινουσες ορθογωνίων, που είναι μικρότερες από το άθροισμα των δύο καθέτων. Συνολικά λοιπόν, οι περιμέτροι  $p, p'$  και  $p''$  του κανονικού πολυγώνου, της προβολής του στο τετράγωνο και του τετραγώνου αντίστοιχα, ικανοποιούν την

$$p < p' < p'', \quad \text{o.e.d.}$$

Τα λήμματα 6.2.2 και 6.2.3 εξασφαλίζουν, βάσει του Αξιώματος 6.1.1, ότι η ακολουθία  $a_1, a_2, \dots$  των περιμέτρων των πολυγώνων  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  έχει όριο  $A$ . Το  $A$  αυτό ορίζουμε ως μήκος ή **περίμετρο** του κύκλου.

**Σχόλιο-1** Οι αριθμοί  $a_i$  που αναφέρονται παραπάνω, ως περιμέτροι των  $\Pi_i$ , προκύπτουν από το Λήμμα 6.2.1 θέτοντας σε αυτό

$$\mu = 2^{i+1}.$$

Έτσι η περίμετρος του  $\Pi_i$  είναι

$$a_i = 2(2^{i+1}) \cdot \rho \cdot \eta\mu\left(\frac{180^\circ}{2^{i+1}}\right).$$

Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, προκύπτει ότι για την περίμετρο του κύκλου  $A$  και τους παραπάνω αριθμούς  $a_i$  ισχύουν οι ανισότητες

$$A - \varepsilon < a_i < A,$$

η δεξιά για όλα τα  $a_i$  και η αριστερή για όλα τα  $a_i$  εκτός πεπερασμένων ολίγων. Το πόσα  $a_i$  δεν ικανοποιούν την αριστερή ανισότητα, εξαρτάται από το μέγεθος του  $\varepsilon$ . Πάντοτε όμως το πλήθος τους είναι πεπερασμένο.

**Σχόλιο-2** Ο ορισμός της περιμέτρου του κύκλου που δώσαμε, συνδέεται με τον ορισμό του μήκους τεθλασμένης γραμμής και αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές έννοιες μήκους (τεθλασμένης και κύκλου) μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις ενός ενιαίου ορισμού *μήκους καμπύλης*. Δυστυχώς ή ευτυχώς ο ορισμός αυτός ανήκει στην περιοχή του απειροστικού λογισμού και ξεπερνά τα πλαίσια του μαθήματος. Μια ιδέα για τις λεπτομέρειες που υπεισέρχονται δίνουν οι επόμενες ασκήσεις.

**Άσκηση 6.2.1** Δίδεται κύκλος  $\kappa$ . Δείξε ότι κάθε εγγεγραμμένο στον  $\kappa$  κανονικό πολύγωνο έχει περίμετρο μικρότερη αυτής του κύκλου  $\kappa$ .

*Υπόδειξη:* Εδώ αναφερόμαστε σε γενικό κανονικό πολύγωνο και όχι στα ειδικά κανονικά πολύγωνα  $P_i$  με  $2^{i+1}$  πλευρές, για τα οποία δείξαμε ότι οι περιμέτροί τους  $a_i$  αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία με όριο την περίμετρο του κύκλου  $A$  και  $a_i < A$ . Η απόδειξη, στη γενική περίπτωση, προκύπτει από την ειδική περίπτωση και την Άσκηση 2.13.9, κατά την οποία η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου με  $\nu + 1$  πλευρές είναι μεγαλύτερη αυτής του κανονικού πολυγώνου με  $\nu$  πλευρές. Έτσι, για δοθέν  $\nu$ , βρίσκουμε μια δύναμη του 2, για την οποία  $\nu \leq 2^{i+1}$ , που είναι πάντοτε δυνατόν. Τότε όμως, η περίμετρος  $p$  του κανονικού πολυγώνου με  $\nu$  πλευρές, θα είναι μικρότερη της αντίστοιχης περιμέτρου  $a_i$  του  $P_i$ , που, με τη σειρά της, είναι μικρότερη του  $A$ .

**Άσκηση 6.2.2** Δείξε ότι η ακολουθία των περιμέτρων  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  των κανονικών πολυγώνων με  $\nu = 3, 4, 5, \dots$  πλευρές και εγγεγραμμένων σε κύκλο  $\kappa$  είναι αύξουσα και φραγμένη. Συνεπώς, έχει όριο  $B$ . Δείξε ακόμη ότι  $B = A$ , όπου  $A$  το όριο των περιμέτρων  $a_1, a_2, a_3, \dots$  των κανονικών πολυγώνων  $P_1, P_2, P_3, \dots$  των εγγεγραμμένων στον  $\kappa$ .

*Υπόδειξη:* Το ότι η ακολουθία  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  των περιμέτρων όλων των πολυγώνων είναι αύξουσα, αποδεικνύεται στην Άσκηση 2.13.9. Το ότι η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη αποδεικνύεται όπως ακριβώς και στο Λήμμα 6.2.3. Η ύπαρξη του ορίου  $B$  είναι, επομένως, συνέπεια του Αξιώματος 6.1.1. Το ότι  $B = A$  αποδεικνύεται αποκλείοντας τις περιπτώσεις  $B < A$  και  $A < B$ . Πράγματι, έστω ότι  $B < A$ , τότε, κατά τον ορισμό του ορίου, θα υπάρχουν  $a_i$  τέτοια ώστε  $B < a_i < A$ . Τότε όμως και για κάθε πολύγωνο με πλήθος πλευρών  $\nu > 2^{i+1}$  θα έχουμε αντίστοιχη περίμετρο  $a_i < \beta_\nu$ , που συνεπάγεται ότι  $B < a_i < \beta_\nu$ . Τούτο όμως είναι άτοπο, διότι για όλα τα  $\beta_\nu$  ισχύει  $\beta_\nu < B$ . Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι και η  $A < B$  οδηγεί σε άτοπο.

## 6.3 Ο αριθμός $\pi$

Η μέθοδος που ακολουθώ για να ξεπεράσω μια δυσκολία είναι να γυρίζω γύρω-γύρω από αυτήν.

*George Polya, Πώς να το λύσεις*

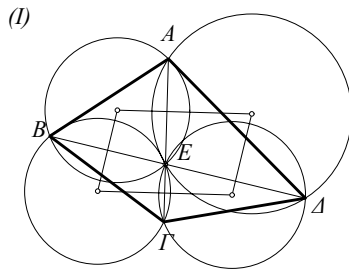
**Λήμμα 6.3.1** Για κάθε κανονικό πολύγωνο με  $\mu$  πλευρές, ο λόγος της περιμέτρου προς τη διάμετρο  $2\rho$  του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ανεξάρτητος του μεγέθους του, εξαρτάται μόνον από το  $\mu$  και δίδεται από τον τύπο :

$$\mu \cdot \eta\mu \left( \frac{180^\circ}{\mu} \right).$$

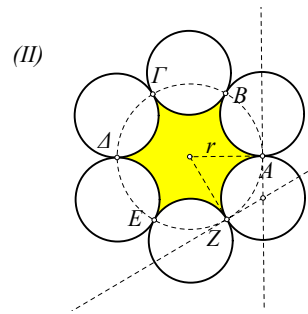
*Απόδειξη:* Προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 6.2.1 διαιρώντας με  $2\rho$ , ο.ε.δ.

**Θεώρημα 6.3.1** Για κάθε κύκλο, ο λόγος της περιμέτρου προς τη διάμετρό του είναι μια σταθερά  $\pi$ , ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου.





Σχήμα 6.9.2: Σύγκριση εμβαδών



Εξάγωνο με πλευρές κυκλικά τόξα

**Άσκηση 6.9.4** Δίδεται κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ . Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους κύκλους  $(EAB)$ ,  $(EB\Gamma)$ ,  $(E\Gamma\Delta)$ ,  $(E\Delta A)$ , των τριγώνων που σχηματίζονται από τις πλευρές του και το σημείο τομής των διαγωνίων του (Σχήμα 6.9.2-I). Δείξε ότι τα κέντρα αυτών των κύκλων είναι κορυφές παραλληλογράμμου, του οποίου το εμβαδόν  $\epsilon'$  έχει λόγο προς το εμβαδόν  $\epsilon$  του τετραπλεύρου

$$\frac{\epsilon}{\epsilon'} \leq 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει τότε και μόνον όταν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθοδιαγώνιο, δηλαδή οι διαγώνιοί του τέμνονται ορθογωνίως.

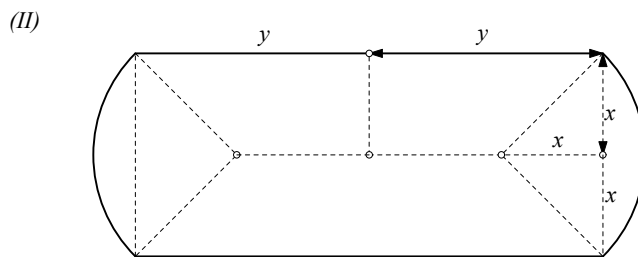
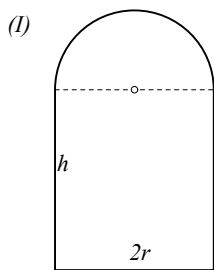
**Άσκηση 6.9.5** Δίδεται κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ . Δείξε ότι το άθροισμα των εμβαδών  $\epsilon' = (EAB) + (EB\Gamma) + (E\Gamma\Delta) + (E\Delta A)$ , των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων που σχηματίζονται από το σημείο τομής των διαγωνίων  $E$  και τις πλευρές του (Σχήμα 6.9.2-I) έχει λόγο προς το εμβαδόν  $\epsilon$  του τετραπλεύρου

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} \geq \pi$$

και η ισότητα ισχύει τότε ακριβώς, όταν το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

**Άσκηση 6.9.6** Να υπολογισθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του καμπυλόγραμμου πολυγώνου  $AB\Gamma\Delta EZ$ , που προκύπτει από ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $r$  (Σχήμα 6.9.2-II).

**Άσκηση 6.9.7** Να υπολογισθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του καμπυλόγραμμου πολυγώνου  $AB\Gamma\dots$ , που προκύπτει από ένα κανονικό  $n$ -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $r$  (γενίκευση προηγούμενης άσκησης).



Σχήμα 6.9.3: Μεγιστοποίηση εμβαδού

**Άσκηση 6.9.8** Να βρεθεί η σχέση των  $\{r, h\}$  για τα οποία το εμβαδόν του παραθύρου του σχήματος 6.9.3-I γίνεται μέγιστο, όταν το μήκος της περιμέτρου του είναι σταθερό ([Loh82, σ. 31]).

Υπόδειξη: Το εμβαδόν  $E$  και η περίμετρος  $p$  δίδονται αντίστοιχα από τους τύπους

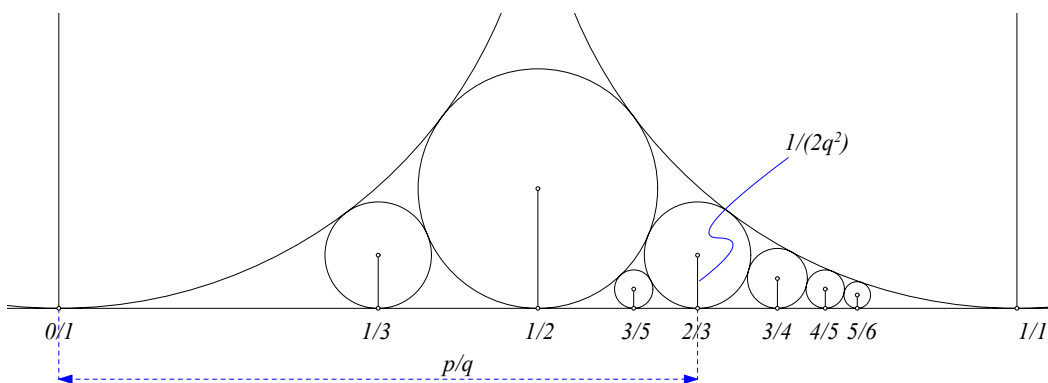
$$E = \frac{r}{2}(4h + \pi r), \quad p = 2r + 2h + \pi r.$$

Εφάρμοσε τη μέθοδο της άσκησης 3.9.12 θέτοντας  $\{x = \frac{r}{2}, y = 4h + \pi r\}$  και μεγιστοποιώντας το

$$x \cdot y \quad \text{υπό τη συνθήκη} \quad ax + by = 2r + 2h + \pi r = p \text{ (σταθερό).}$$

Προκύπτει ότι  $\{a = 4 + \pi, b = \frac{1}{2}\}$  και το μέγιστο λαμβάνεται όταν  $ax = by \Leftrightarrow r = h$ .

**Άσκηση 6.9.9** Να βρεθεί η σχέση (λόγος) των  $\{x, y\}$  για τα οποία το εμβαδόν του σχήματος 6.9.3-II γίνεται μέγιστο, όταν το μήκος της περιμέτρου του είναι σταθερό. Τα τόξα κύκλου στις πλευρές του είναι  $90^\circ$ .



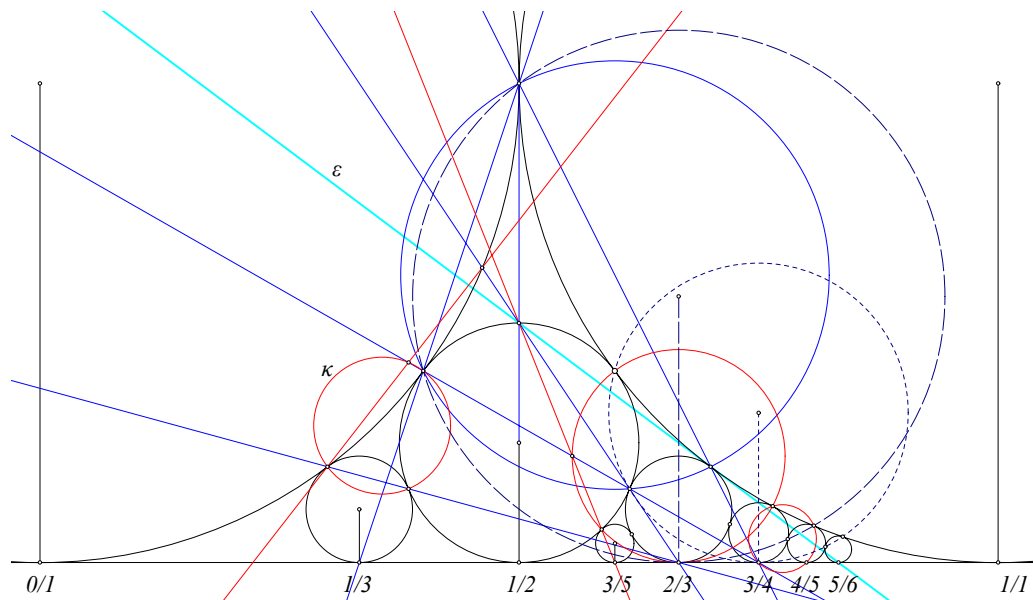
Σχήμα 6.9.4: Κύκλοι του Ford

**Άσκηση 6.9.10** Οι κύκλοι του Ford (1886 – 1967) είναι εφαπτόμενοι ευθείας  $\varepsilon$  από την ίδια μεριά. Κατασκευάζονται επιλέγοντας ένα σύστημα τετμημένων στην  $\varepsilon$  και θεωρώντας τα σημεία με τετμημένες τα ανάγωγα κλάσματα  $\frac{p}{q}$  του διαστήματος  $[0, 1]$ . Σε κάθε τέτοιο σημείο εφάπτεται ένας κύκλος  $\kappa_{p,q}$  (συχνά λέμε «ο κύκλος  $\frac{p}{q}$ ») ακτίνας  $\frac{1}{2q^2}$  (Σχήμα 6.9.4). Δείξε ότι

1. Δύο κύκλοι του Ford εφάπτονται, τότε και μόνον, όταν  $d^2 = 4r \cdot r'$ , όπου  $d$  η απόσταση των σημείων επαφής και  $\{r, r'\}$  οι ακτίνες των κύκλων.
2. Η προηγούμενη ισότητα για τους κύκλους  $\{\kappa_{p,q}, \kappa_{p',q'}\}$  ισοδυναμεί με την  $p \cdot q' - q \cdot p' = -1$ .
3. Δύο κύκλοι του Ford ή είναι ξένοι μεταξύ τους ή εφάπτονται.
4. Εάν οι κύκλοι που αντιστοιχούν στα κλάσματα  $\{\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\}$  εφάπτονται, τότε ο κύκλος που αντιστοιχεί στο  $\frac{p+p'}{q+q'}$ , εφάπτεται των δύο άλλων, τότε και μόνον, όταν  $\frac{p+p'}{q+q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$ .

**Άσκηση 6.9.11** Πόσες και ποιες ακριβώς σχέσεις μπορεί κανείς να διακρίνει στο σχήμα 6.9.5; Για παράδειγμα, ότι ο κύκλος  $\kappa$  είναι ορθογώνιος στους κύκλους που αντιστοιχούν στα κλάσματα  $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ . Ότι η κοινή εφαπτόμενη  $\varepsilon$  των κύκλων  $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$  διέρχεται από το σημείο επαφής  $\frac{5}{6}$  και το αντιδιαμετρικό του  $\frac{1}{2}$  ως προς τον κύκλο  $\frac{1}{2}$ .

Η ακολουθία των συντεταγμένων των σημείων επαφής των κύκλων του Ford με την ευθεία ονομάζεται **ακολουθία των Haros - Farey**. Οι όροι της ταξινομούνται με φυσιολογικό τρόπο στις λεγόμενες



Σχήμα 6.9.5: Συνευθειακά, ομοκυκλικά σημεία σε κύκλους του Ford

σειρές αριθμών *Haros-Farey τάξης  $N$* , που είναι υποσύνολα  $\{F_1, F_2, \dots\}$  της ακολουθίας και κατασκευάζονται, καθένα από το προηγούμενο μέσω της πράξης, που σε δύο κλάσματα αντιστοιχίζει το λεγόμενο **μεσαίο** τους (που είναι διαφορετικός από τον γεωμετρικό μέσο του διαστήματος  $[\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$ ).

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

Τα σύνολα  $F_N$  αποτελούνται από τα ανάγωγα κλάσματα  $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$  και  $q \leq N$ .

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}, \dots \end{aligned}$$

Η επόμενη άσκηση ([RG95, σ. 114]), που παραθέτει τις βασικές ιδιότητες της ακολουθίας των Haros - Farey, είναι για όσους θέλγονται από τη θεωρία αριθμών.

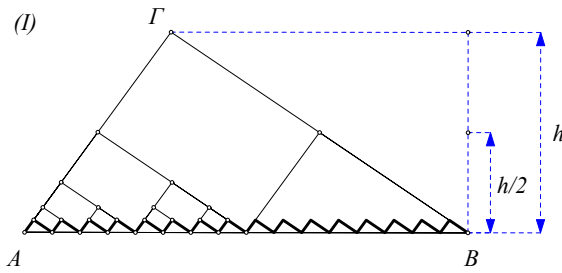
**Άσκηση 6.9.12** 1. Για δύο στοιχεία  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$  του  $F_N$ , το  $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$  είναι ανάγωγο.

2. Εάν  $\left\{ \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''} \right\}$ , είναι διαδοχικοί όροι του  $F_N$ , τότε  $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} \oplus \frac{p''}{q''}$ .

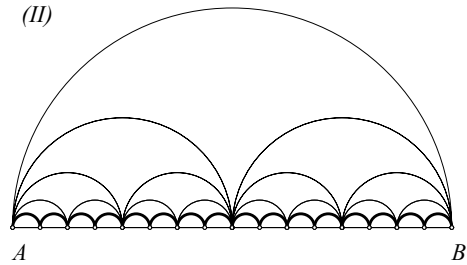
3. Κάθε  $F_N$  περιέχει το προηγούμενο  $F_{N-1}$ , και προκύπτει από το  $F_{N-1}$  παίρνοντας ορισμένους από τους μεσαίους του.

4. Κάθε όρος της ακολουθίας Haros - Farey περιέχεται σε κάποιο  $F_N$ .

5. Για κάθε  $N$  ισχύει ότι το πλήθος στοιχείων  $|F_N|$  του  $F_N$  ικανοποιεί την  $|F_N| = |F_{N-1}| + \phi(N)$ , όπου η  $\phi(N)$  παριστάνει το πλήθος των ακεραίων  $1 \leq x \leq N$ , που δεν έχουν κοινό διαυρήτη με το  $N$  ([RG95, σ. 133]).



Σχήμα 6.9.6: Τεθλασμένες σταθερού μήκους



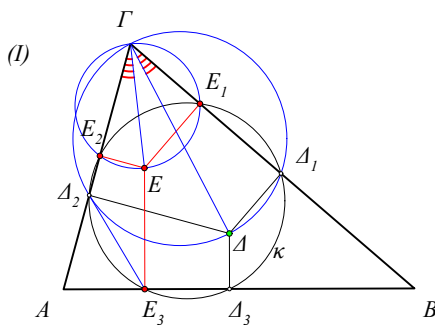
Καμπύλες σταθερού μήκους

**Άσκηση 6.9.13** Δείξε ότι για κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει τεθλασμένη από το  $A$  στο  $B$  της οποίας το μήκος είναι οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, ωστόσο όλα τα σημεία της  $X$  ικανοποιούν  $|X - X'| < \epsilon$ , όπου  $X'$  η προβολή του  $X$  στο  $AB$ .

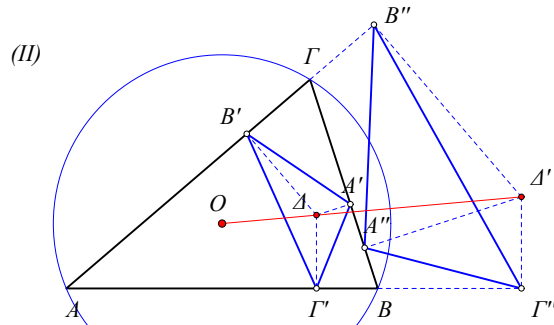
Υπόδειξη: Ξεκίνησε με τρίγωνο  $AB\Gamma$  και κατασκεύασε δύο όμοια αυτού στα δύο μισά της βάσης του  $AB$  (Σχήμα 6.9.6-I). Επανάλαβε τη διαδικασία με τα δύο νέα τρίγωνα κ.λπ. Σε κάθε βήμα ενώνοντας τις πλευρές των τριγώνων που προκύπτουν, εκτός της βάσης τους, δημιουργείται μία τεθλασμένη που έχει πάντα το ίδιο μήκος  $|A\Gamma| + |\Gamma B|$ . Μετά από  $\nu$  βήματα, η απόσταση των σημείων  $X$  αυτής της τεθλασμένης από το  $AB$  είναι μικρότερη του  $h/2^{\nu-1}$ , όπου  $h$  το ύψος του αρχικού τριγώνου.

**Άσκηση 6.9.14** Δείξε ότι για κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει μια καμπύλη με άκρα  $\{A, B\}$ , που αποτελείται από διαδοχικά ημικύκλια, έχει μήκος σταθερό  $\pi|AB|$  και για κάθε σημείο της  $X$  ισχύει  $|X - X'| < \epsilon$ , όπου  $X'$  η προβολή του  $X$  στο  $AB$ .

Υπόδειξη: Η κατασκευή είναι παρόμοια με αυτή της προηγούμενης άσκησης (Σχήμα 6.9.6-II). Δες και την άσκηση 6.4.3.



Σχήμα 6.9.7: Ποδικό τρίγωνο και ισογώνια σημεία



Ποδικό τρίγωνο αντιστρόφου σημείου

**Άσκηση 6.9.15** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ , σημείο  $\Delta$  μη κείμενο επί των πλευρών του (και προεκτάσεων) και  $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$  το ποδικό τρίγωνο του  $\Delta$ , με κορυφές τις προβολές του στις πλευρές του τριγώνου (Σχήμα 6.9.7-I). Προσδιόρισε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ , το εμβαδόν του περικύκλιου του  $\kappa$  και δείξε ότι οι κάθετες στις πλευρές στα δεύτερα σημεία τομής του  $\kappa$  με αυτές, διέρχονται από το ίδιο σημείο  $E$ , που είναι το ισογώνιο συζυγές του  $\Delta$ .

**Άσκηση 6.9.16** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ , σημείο  $\Delta$  μη κείμενο επί των πλευρών του (και προεκτάσεων) (Σχήμα 6.9.7-II). Δείξε ότι το ποδικό τρίγωνο  $t = A'B'\Gamma'$  του σημείου  $\Delta$  και το ποδικό τρίγωνο  $t' = A''B''\Gamma''$  του αντιστρόφου  $\Delta'$  ως προς τον περικύκλιο του  $AB\Gamma$  είναι όμοια τρίγωνα. Υπολόγισε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων  $\{t, t'\}$ , καθώς και το λόγο των εμβαδών των περικύκλων τους.

Μια από τις διασημότερες ακολουθίες ακεραίων αριθμών είναι η ακολουθία του Fibonacci (1175-1250),

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots\}.$$

Εκτός των δύο πρώτων, κάθε όρος της  $a_n$  προκύπτει προσθέτοντας τους δύο προηγούμενους:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{για } n > 2. \end{aligned}$$

Η ακολουθία αυτή εμφανίζεται σε διάφορα προβλήματα, πρακτικά και θεωρητικά ([PL07], [Wal01]). Τη συναντάμε επίσης και στη μελέτη της χρυσής τομής  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , όταν επιχειρήσουμε να γράψουμε τις δυνάμεις του  $\phi$  με τη βοήθεια του ίδιου του  $\phi$ , χρησιμοποιώντας τη βασική εξίσωση ορισμού του  $\phi$ :  $\phi^2 = \phi + 1$  (§ 4.2):

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \phi + 1 \\ \phi^3 &= \phi^2 + \phi = 2 \cdot \phi + 1 \\ \phi^4 &= 2\phi^2 + \phi = 3 \cdot \phi + 2 \\ \phi^5 &= 3\phi^2 + 2\phi = 5 \cdot \phi + 3 \\ \phi^6 &= 5\phi^2 + 3\phi = 8 \cdot \phi + 5 \\ \phi^7 &= 8\phi^2 + 5\phi = 13 \cdot \phi + 8 \\ \dots &= \dots \\ \phi^n &= a_n \cdot \phi + a_{n-1}. \end{aligned}$$

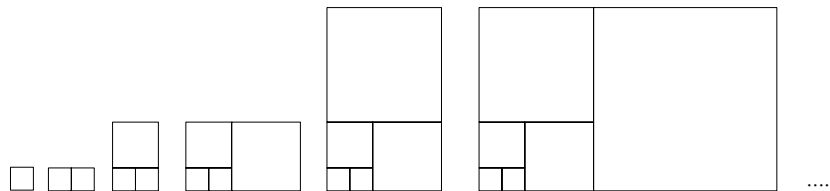
Παρόμοια σχέση ισχύει και για τον αντίστροφο του  $\phi$ ,  $x = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , που ικανοποιεί την εξίσωση  $x^2 + x - 1 = 0$ , από την οποία προκύπτει ανάλογα ότι

$$(-x)^n = a_n \cdot (-x) + a_{n-1}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε τον τύπο του Binet (1786-1856):

$$\begin{aligned} \phi^n - (-x)^n &= a_n \cdot (\phi + x) = a_n \cdot \sqrt{5} \quad \Rightarrow \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-x)^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Το σχήμα 6.9.8 δείχνει μια ακολουθία ορθογωνίων, που ξεκινούν από το τετράγωνο με πλευρά



Σχήμα 6.9.8: Προσέγγιση του χρυσού ορθογωνίου

μήκους 1 και των οποίων οι πλευρές έχουν ως μήκη δύο διαδοχικούς αριθμούς του Fibonacci. Διαλέγοντας τα ορθογώνια περιττής τάξης, δηλαδή αυτά που η μικρή τους πλευρά είναι οριζόντια, έχουμε την ακολουθία των λόγων των πλευρών τους

$$b_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αποδεικνύεται (Άσκηση 6.9.19) ότι αυτή η ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη και το όριό της είναι ο αριθμός  $x = \frac{1}{\phi}$ . Συνεπώς, ο λόγος των πλευρών αυτών των ορθογωνίων τείνει προς το λόγο των πλευρών του χρυσού ορθογωνίου και τα ορθογώνια, ενώ αυξάνουν σε μέγεθος, τείνουν ταυτόχρονα να ομοιάσουν προς το χρυσό ορθογώνιο.

**Άσκηση 6.9.17** Δείξε ότι για κάθε  $n > 1$  ισχύει ο τύπος  $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + (-1)^n$ .

Υπόδειξη: Γράψε  $a_n = k(\phi^n - (-x)^n)$ , όπου  $k = 1/\sqrt{5}$  και παρατήρησε ότι  $\phi^m \cdot (-x)^m = (-1)^m$ , για κάθε  $m \geq 1$ . Τότε,

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 &= k^2((\phi^{n+1} - (-x)^{n+1})(\phi^{n-1} - (-x)^{n-1}) - (\phi^n - (-x)^n)^2) \\ &= -k^2\phi^{n-1}(-x)^{n-1}(\phi - x)^2 = (-1)^n. \end{aligned}$$

**Άσκηση 6.9.18** Δείξε ότι η ακολουθία  $\{b_n\}$  είναι αύξουσα και φραγμένη, επομένως συγκλίνει.

Υπόδειξη: Η ακολουθία φράσσεται από το 1. Για το ότι είναι αύξουσα, δες ότι

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+3}} - \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2n+2}a_{2n+1} - a_{2n+3}a_{2n}}{a_{2n+1}a_{2n+3}} \\ &= \frac{a_{2n+2}a_{2n+1} - (a_{2n+2} + a_{2n+1})a_{2n}}{a_{2n+1}a_{2n+3}} = \frac{a_{2n+1}(a_{2n+2} - a_{2n}) - (-1)^{2n+1}}{a_{2n+1}a_{2n+3}} > 0. \end{aligned}$$

**Άσκηση 6.9.19** Δείξε ότι η ακολουθία  $\{b_n\}$  συγκλίνει στο  $x = 1/\phi$ .

Υπόδειξη: Επειδή το  $x < 1 \Rightarrow x^n < 1$ , ισχύει:

$$(-x)^n = a_n(-x) + a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{(-x)^n}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} - x \Rightarrow \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} - x \right| < \frac{1}{a_n}.$$

**Άσκηση 6.9.20** Δείξε ότι οι αριθμοί  $x$  που ικανοποιούν μία εξίσωση της μορφής  $x^2 - nx + 1 = 0$ , όπου  $n$  ακέραιος θετικός, αναπτύσσονται σε άπειρο συνεχές κλάσμα της μορφής  $x = [n; n, n, n, \dots]$ .

Υπόδειξη:  $x = n + \frac{1}{x}, \dots$

**Άσκηση 6.9.21** Δείξε ότι οι αριθμοί της μορφής  $x = \sqrt{n^2 + 1}$ , όπου  $n$  ακέραιος θετικός, αναπτύσσονται σε άπειρο συνεχές κλάσμα της μορφής  $x = [n; 2n, 2n, 2n, \dots]$ .

Υπόδειξη:  $\sqrt{n^2 + 1} - n = (\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)/(\sqrt{n^2 + 1} + n) = 1/(\sqrt{n^2 + 1} + n)$ . Αυτό συνεπάγεται την

$$x = n + \frac{1}{x+n} \Rightarrow x = n + \frac{1}{2n + \frac{1}{x+n}} \text{ κ.λπ.}$$

**Άσκηση 6.9.22** Προσδιόρισε τον άρρητο αριθμό  $x$ , του οποίου η ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα είναι η περιοδική  $x = [2; 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, \dots] = [2; \overline{5, 1, 3}]$ .

Υπόδειξη: ([Μοο64, σ. 46]) Θεώρησε το περιοδικό τμήμα του συνεχούς κλάσματος

$$y = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{y}}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{y}{3y+1}} = 5 + \frac{3y+1}{4y+1} \Leftrightarrow 2y^2 - 11y - 3 = 0,$$

και χρησιμοποίησε τη σχέση  $x = 2 + \frac{1}{y}$ .

**Άσκηση 6.9.23** Δείξε ότι ο θετικός  $x$  που ικανοποιεί την  $x = \frac{3x+2}{13x+9}$ , έχει ανάπτυγμα σε συνεχές περιοδικό κλάσμα  $x = [0; 4, \overline{2, 1}]$ . Κατασκεύασε και μελέτησε παραδείγματα για αναπτύγματα αριθμών  $y$  που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής  $y = \frac{ay+b}{cy+d}$ , όπου  $\{a, b, c, d\}$  θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τη σχέση  $ad - bc = 1$ .

**Άσκηση 6.9.24** Δίδονται ακέραιοι θετικοί  $\{a, b\}$ . Βρες τη μορφή των αριθμών  $x$  που αναπτύσσονται σε συνεχές περιοδικό κλάσμα της μορφής  $x = [0; \overline{a, b}]$ .

## Μετασχηματισμοί του επιπέδου

## 7.1 Μετασχηματισμοί, ισομετρίες

Δεν ήξερα τότε πως δεν μπορεί ο άνθρωπος να θελήσει ότι του καπνίσει να θελήσει.

*Σεφέρη, Μέρης Α, 9.4.1926*

**Μετασχηματισμός** του επιπέδου λέγεται μια διαδικασία  $f$ , η οποία σε κάθε σημείο  $X$  του επιπέδου, εκτός ενδεχομένως ορισμένων ειδικών σημείων, αντιστοιχίζει ένα άλλο σημείο  $Y$  του επιπέδου που συμβολίζουμε με  $f(X)$ . Γράφουμε  $Y = f(X)$  και ονομάζουμε το  $X$  ένα **πρότυπο** του μετασχηματισμού και το  $Y$  την **εικόνα** του  $X$  μέσω του μετασχηματισμού. Συχνά λέμε ότι ο μετασχηματισμός  $f$  **απεικονίζει** το  $X$  στο  $Y$ . Για τη διαδικασία  $f$  θεωρούμε ότι ικανοποιεί την απαίτηση

$$X \neq Y \Rightarrow f(X) \neq f(Y).$$

Δηλαδή, διαφορετικά σημεία έχουν και διαφορετικές εικόνες. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι, αν για δύο σημεία  $X, Y$  ισχύει  $f(X) = f(Y)$ , τότε θα ισχύει  $X = Y$ . Το σύνολο των σημείων  $X$ , στα οποία ορίζεται ο μετασχηματισμός  $f$ , ονομάζουμε **πεδίο ορισμού** του μετασχηματισμού  $f$ , ενώ το σύνολο που αποτελείται από όλα τα  $Y = f(X)$ , όταν το  $X$  μεταβάλλεται στο πεδίο ορισμού του  $f$ , ονομάζουμε **πεδίο τιμών** του  $f$ . Για παραδείγματα μετασχηματισμών μπορεί ο αναγνώστης να προστρέξει στις αρχές των επομένων παραγράφων. Εδώ περιοριζόμαστε στην περιγραφή κοινών χαρακτηριστικών αυτών των εννοιών.

Για κάθε σχήμα του επιπέδου  $\Sigma$  το σύνολο των εικόνων  $f(X)$ , όπου το  $X$  διατρέχει το  $\Sigma$ , ονομάζεται **εικόνα** του  $\Sigma$  και συμβολίζεται με  $f(\Sigma)$ .

Εφαρμόζοντας τις διαδικασίες τη μία μετά την άλλη δημιουργούμε την έννοια της **σύνθεσης μετασχηματισμών**. Για δύο δοθέντες μετασχηματισμούς  $f$  και  $g$ , ονομάζουμε **σύνθεση** των  $f$  και  $g$ , το μετασχηματισμό του οποίου η διαδικασία είναι η επαλληλία των διαδικασιών των  $f$  και  $g$ . Η σύνθεση των μετασχηματισμών παριστάνεται με το σύμβολο

$$g \circ f.$$

Εξ ορισμού η διαδικασία της σύνθεσης  $g \circ f$  αντιστοιχίζει στο  $X$  πρώτα το  $Y = f(X)$  και κατόπιν στο  $Y$  το  $Z = g(Y) = g(f(X))$ . Συνολικά λοιπόν η σύνθεση αντιστοιχίζει στο  $X$  το  $Z = g(f(X))$ . Υπάρχουν ορισμένες λεπτομέρειες που πρέπει να προσέχουμε στη σύνθεση. Αυτές αφορούν τα πεδία ορισμού και τιμών των μετασχηματισμών που συμμετέχουν στη σύνθεση. Για να έχουν όλα νόημα, θα πρέπει το πεδίο τιμών του πρώτου μετασχηματισμού ( $f$ ) να περιέχεται στο πεδίο ορισμού του δεύτερου ( $g$ ).

Τα πράγματα απλοποιούνται για μετασχηματισμούς που έχουν πεδίο ορισμού καθώς και πεδίο τιμών όλο το επίπεδο.

Καθώς η σύνθεση  $g \circ f$  είναι ένας νέος μετασχηματισμός, μπορούμε να θεωρήσουμε τη σύνθεση αυτού με έναν τρίτο μετασχηματισμό  $h$  :

$$h \circ (g \circ f),$$

και, γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθεση οσωνδήποτε μετασχηματισμών  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$  που, για απλότητα, ας θεωρήσουμε ότι ορίζονται σε όλο το επίπεδο :

$$f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1.$$

Το νόημα μιας τέτοιας σύνθεσης μετασχηματισμών είναι ότι εφαρμόζουμε επάλληλα τις διαδικασίες των μετασχηματισμών που συμμετέχουν με τη σειρά από τα δεξιά προς τα αριστερά. Ο  $f_1$  απεικονίζει το σημείο  $X_1$  στο  $X_2 = f_1(X_1)$ , ο  $f_2$  κατόπιν απεικονίζει το  $X_2$  στο  $X_3 = f_2(X_2)$ , κ.ο.κ. Η διαδικασία μπορεί να αποδοθεί σχηματικά από το διάγραμμα

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \dots \xrightarrow{f_k} X_{k+1}.$$

Ένας πολύ απλός και ανούσιος, ως προς τη δράση του, μετασχηματισμός είναι ο λεγόμενος **ταυτοτικός μετασχηματισμός**, που συμβολίζουμε με  $e$  και ο οποίος, σε κάθε σημείο  $X$  αντιστοιχίζει το ίδιο το  $X$ . Τούτος μοιάζει με τη μονάδα στον πολλαπλασιασμό, που αφήνει τους αριθμούς αμετάβλητους. Έτσι και αυτός δεν κάνει τίποτε. Αφήνει κάθε σημείο σταθερό. Η δομική σημασία του ωστόσο είναι τόσο σημαντική, όσο και αυτή της μονάδας. Με τη βοήθειά του μπορούμε να ορίσουμε αμέσως τον **αντίστροφο μετασχηματισμό** ενός μετασχηματισμού  $f$ , που συμβολίζουμε με  $f^{-1}$ . Αυτός κάνει ακριβώς την αντίθετη διαδικασία από αυτήν του  $f$  και εξ' ορισμού ισχύει

$$f^{-1} \circ f = e.$$

Αν περιοριστούμε σε μετασχηματισμούς  $f, g, h, \dots$ , που ορίζονται για κάθε σημείο του επιπέδου, τότε το σύνολό τους μαζί με τη σύνθεση, παρουσιάζει μια αξιοσημείωτη αναλογία με το σύνολο των θετικών αριθμών και τον πολλαπλασιασμό. Σημειώνω τις αναλογίες (και μία διαφορά) σε δύο παράλληλες στήλες :

#### Αριθμοί

$$z = x \cdot y \quad (\text{γινόμενο})$$

$$x \cdot y = y \cdot x \quad (\text{μεταθετικότητα})$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\text{προσεταιριστικότητα})$$

$$1 \quad (\text{μονάδα})$$

$$y = x^{-1} \Leftrightarrow y \cdot x = 1 \quad (\text{αντίστροφος})$$

#### Μετασχηματισμοί

$$h = g \circ f \quad (\text{σύνθεση})$$

$$g \circ f \neq f \circ g \quad (\text{εν γένει})$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$e \quad (\text{ταυτοτικός μετασχηματισμός})$$

$$g = f^{-1} \Leftrightarrow g \circ f = e$$

Τους κανόνες αυτούς θα εφαρμόζουμε στις επόμενες παραγράφους. Υπογραμμίζω εδώ την προσεταιριστική ιδιότητα

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

που ισχύει για όλους τους μετασχηματισμούς. Τούτο οφείλεται στην ίδια τη φύση τους, ως διαδικασίας αντιστοίχισης, που τελικά παράγει το ίδιο αποτέλεσμα, όπως και αν τους ομαδοποιήσουμε (βάλουμε παρενθέσεις) σε μια σύνθεση περισσότερων μετασχηματισμών.

Μια ειδική κατηγορία μετασχηματισμών, που θα μας απασχολήσει στις επόμενες παραγράφους, είναι αυτή των **ισομετριών του επιπέδου**. Με αυτό τον όρο εννοούμε μετασχηματισμούς που ορίζονται σε όλο το επίπεδο και έχουν επιπλέον την ιδιότητα να διατηρούν τις αποστάσεις ([Cox61, σ. 39], [Sin95]). Δηλαδή μετασχηματισμούς  $X' = f(X)$ , τέτοιους ώστε, για κάθε ζεύγος σημείων  $X, Y$  και τις εικόνες τους  $X', Y'$  να ισχύει

$$|X'Y'| = |XY|.$$

**Θεώρημα 7.1.1** *Μια ισομετρία διατηρεί τις γωνίες.*



*Απόδειξη:* Η σύντομη διατύπωση σημαίνει, ότι για τρία σημεία  $X, Y, Z$  και τις εικόνες τους  $X', Y', Z'$ , μέσω του μετασχηματισμού, οι γωνίες  $\widehat{YXZ}$  και  $\widehat{Y'X'Z'}$  είναι ίσες. Αυτό όμως είναι συνέπεια της ιδιότητας της ισομετρίας του μετασχηματισμού, βάσει της οποίας  $|X'Y'| = |XY|$ ,  $|Y'Z'| = |YZ|$ ,  $|Z'X'| = |ZX|$ . Δηλαδή τα τρίγωνα  $X'Y'Z'$  και  $XYZ$  είναι ίσα. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει και η ισότητα των γωνιών, ο.ε.δ.

**Άσκηση 7.1.1** Δείξε ότι η σύνθεση  $g \circ f$  δύο ισομετριών  $f$  και  $g$  είναι πάλι ισομετρία. Δείξε επίσης ότι ο αντιστροφος μετασχηματισμός  $f^{-1}$  μιας ισομετρίας είναι ισομετρία.

**Θεώρημα 7.1.2** Μία ισομετρία απεικονίζει μία ευθεία  $\varepsilon$  σε μία ευθεία  $\varepsilon'$ . Αν η ισομετρία αφήνει σταθερά δύο σημεία  $A$  και  $B$  της  $\varepsilon$ , τότε αφήνει σταθερά και όλα τα σημεία της  $\varepsilon$ .

*Απόδειξη:* Η θέση ενός σημείου  $X$  της ευθείας  $AB$  καθορίζεται πλήρως από το λόγο  $\frac{|XA|}{|XB|}$  και το ότι  $\|XA\| \pm |XB\| = |AB|$ . Η τελευταία δίνει την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το  $X$  επί της ευθείας. Αν λοιπόν η ισομετρία  $f$  αφήνει τα  $A, B$  σταθερά τότε θα ισχύει για τις εικόνες  $X', A', B'$ :

$$\frac{|X'A'|}{|X'B'|} = \frac{|XA|}{|XB|}, \quad \text{και} \quad |X'A'| \pm |X'B'| = |XA| \pm |XB|.$$

Συνεπώς, αν το  $X$  περιέχεται στην ευθεία  $\varepsilon = AB$ , τότε και το  $X'$  θα περιέχεται στην ευθεία  $\varepsilon' = A'B'$ . Το δεύτερο μέρος προκύπτει αμέσως από τις προηγούμενες ισότητες, αν λάβουμε υπόψη ότι  $A' = A, B' = B$ . Τότε από αυτές προκύπτει ότι για κάθε σημείο  $X$  της  $\varepsilon$  το  $X'$  ταυτίζεται με το  $X$ , ο.ε.δ.

**Θεώρημα 7.1.3** Μία ισομετρία που αφήνει τρία μη συνευθειακά σημεία σταθερά συμπίπτει με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό.

*Απόδειξη:* Έστω ότι η ισομετρία  $f$  αφήνει τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  σταθερά. Τότε, κατά το προηγούμενο θεώρημα, θα αφήνει σταθερές και τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$ . Αν  $X$  είναι σημείο εκτός αυτών των ευθειών, φέρνουμε μία ευθεία  $\varepsilon$  διά του  $X$ , που τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα στα  $\Delta$  και  $E$ , τα οποία η  $f$  αφήνει σταθερά. Κατά το προηγούμενο θεώρημα η  $f$  θα αφήνει σταθερά και όλα τα σημεία της  $\Delta E$  άρα και το  $X$ , ο.ε.δ.

**Πόρισμα 7.1.1** Δύο ισομετρίες που ταυτίζονται σε τρία σημεία ταυτίζονται παντού.

*Απόδειξη:* Πράγματι, αν  $f, g$  είναι οι δύο ισομετρίες, τότε η  $g^{-1} \circ f$  θα αφήνει τα τρία σημεία σταθερά, άρα θα συμπίπτει με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό  $g^{-1} \circ f = e \Leftrightarrow f = g$ , ο.ε.δ.

**Άσκηση 7.1.2** Δείξε ότι μία ισομετρία  $f$  απεικονίζει έναν κύκλο  $\kappa$  σε έναν κύκλο  $\kappa' = f(\kappa)$  ίσης ακτίνας.

**Πρόταση 7.1.1** Εάν μια ισομετρία  $f$  ικανοποιεί τη σχέση  $f \circ f = e$ , τότε έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο.

*Απόδειξη:* Προφανώς ο ταυτοτικός μετασχηματισμός έχει την ιδιότητα της πρότασης. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η  $f$  δεν συμπίπτει με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό και ας συμβολίζουμε με  $X'$  το  $f(X)$ , έτσι ώστε, κατά την υπόθεση  $X'' = X$ . Θεωρούμε λοιπόν ένα τυχόν σημείο  $X$  έτσι ώστε το  $X' = f(X) \neq X$ . Τέτοιο υπάρχει, διαφορετικά η  $f$  θα ήταν η ταυτοτική. Έστω  $M$  το μέσον του  $XX'$ . Δείχνουμε ότι η  $f$  αφήνει το  $M$  σταθερό. Εξ υποθέσεως η  $f$  εναλλάσσει τα  $X$  και  $X'$ , άρα απεικονίζει την ευθεία  $XX'$  στον εαυτό της (Θεώρημα 7.1.2). Επίσης

$$|X'M'| = |XM| = |X'M| = |X''M'| = |XM'|.$$

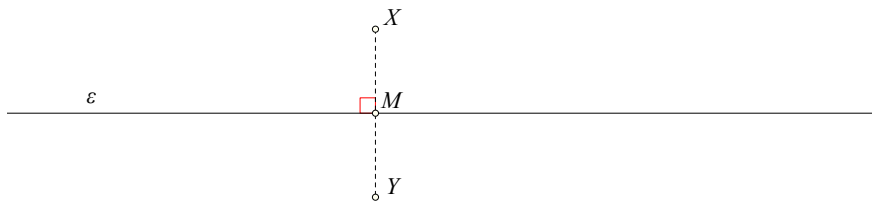
Η πρώτη ισότητα ισχύει διότι η  $f$  είναι ισομετρία. Η δεύτερη διότι το  $M$  είναι το μέσον του  $XX'$ , η τρίτη διότι η  $f$  είναι ισομετρία και η τέταρτη διότι  $X'' = X$  εξ υποθέσεως. Συνολικά λοιπόν έχουμε ότι  $|XM'| = |X'M'|$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $M'$  είναι πάνω στη μεσοκάθετο του  $XX'$ , αλλά, όπως σημειώσαμε, είναι και σημείο της ευθείας  $XX'$ , άρα συμπίπτει με το  $M$ , ο.ε.δ.

## 7.2 Κατοπτρισμοί ή ανάκλασεις

Όπως συμβαίνει πάντα, όσο πιο νεφελώδης και συγκεχυμένη είναι η αντίληψη την οποία μεταβιβάζει μια λέξη, με τόσο μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση και βεβαιότητα χρησιμοποιούν οι άνθρωποι τη λέξη αυτή, και ισχυρίζονται ότι αυτό που μας δίδει να καταλάβουμε η λέξη είναι τόσο απλό και ξεκάθαρο, ώστε δεν αξίζει τον κόπο ούτε καν να συζητήσουμε τι πραγματικά σημαίνει.

Λ. Τοῖστοι, Τι είναι τέχνη

Μια ευθεία του επιπέδου  $\varepsilon$  ορίζει ένα απλούστατο μετασχηματισμό, που λέγεται **κατοπτρισμός** ή **ανάκλαση** ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ , που ονομάζεται **άξονας** ή **κάτοπτρο** της ανάκλασης. Η διαδικασία για αυτόν το μετασχηματισμό περιγράφεται ως εξής:



Σχήμα 7.2.1: Κατοπτρισμός ή ανάκλαση ως προς  $\varepsilon$

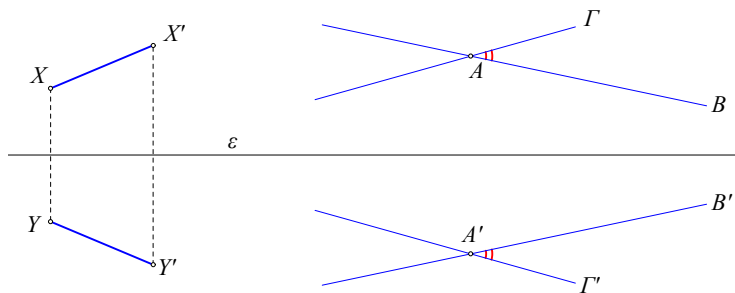
α) Σε κάθε σημείο  $X$ , που δεν περιέχεται στην ευθεία  $\varepsilon$ , αντιστοιχίζεται το σημείο  $Y$ , έτσι ώστε η  $\varepsilon$  να είναι η μεσοκάθετος του  $XY$ . Με άλλα λόγια, το  $X$  προβάλλεται κάθετα στην  $\varepsilon$  στο σημείο της  $M$  και το  $XM$  προεκτείνεται προς τη μεριά του  $M$  κατά το διπλάσιο του  $|XM|$ , έως το  $Y$ .

β) Σε κάθε σημείο  $X$ , που περιέχεται στην ευθεία  $\varepsilon$ , η διαδικασία αντιστοιχίζει το ίδιο το σημείο  $X$ . Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, το  $X$  είναι, όπως λέμε, **σταθερό σημείο του μετασχηματισμού**.

Ο κατοπτρισμός λοιπόν, ορίζεται για κάθε σημείο του επιπέδου ή, με άλλα λόγια, το πεδίο ορισμού του είναι όλο το επίπεδο. Το ίδιο συμβαίνει και με το πεδίο τιμών του. Συμπίπτει και αυτό με όλο το επίπεδο, αφού για κάθε  $Y$  υπάρχει ένα  $X$  έτσι ώστε  $f(X) = Y$ . Η ευθεία  $\varepsilon$ , που ορίζει τον κατοπτρισμό, αποτελείται από τα σταθερά σημεία του κατοπτρισμού. Κάθε σημείο  $X$ , που δεν περιέχεται στην  $\varepsilon$ , αντιστοιχίζεται στο  $Y$ , που είναι στην άλλη πλευρά της  $\varepsilon$ , από αυτήν που ευρίσκεται το  $X$ . Ο κατοπτρισμός λοιπόν εναλλάσσει τις δύο πλευρές της  $\varepsilon$  και αφήνει τα σημεία της  $\varepsilon$  σταθερά.

Ο κατοπτρισμός είναι η έννοια που στηρίζει αυτήν της *αξονικής συμμετρίας*, που εξετάσαμε στην § 1.16: Αξονικά συμμετρικό είναι το σχήμα  $\Sigma$  για το οποίο υπάρχει κατοπτρισμός  $f$ , έτσι ώστε  $f(\Sigma) = \Sigma$ . Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται όπως ακριβώς το αντίστοιχο Θεώρημα 1.16.1.

**Θεώρημα 7.2.1** Κάθε κατοπτρισμός είναι ισομετρία του επιπέδου.



Σχήμα 7.2.2:  $|XX'| = |YY'|$  και  $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$

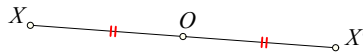
**Πρόταση 7.2.1** Για κάθε ανάκλαση  $f$  ισχύει  $f \circ f = e$ , με άλλα λόγια ο αντιστροφος μιας ανάκλασης είναι ο ίδιος μετασχηματισμός της ανάκλασης.

*Απόδειξη:* Πράγματι, αν  $Y = f(X)$ , τότε το  $Y$  είναι το συμμετρικό του  $X$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ , που ορίζει την ανάκλαση. Τότε όμως και το  $X$  είναι το συμμετρικό του  $Y$  ως προς  $\varepsilon$ . Συνεπώς,  $X = f(Y)$  και επομένως, για κάθε  $X$  θα ισχύει  $f(Y) = f(f(X)) = X$ , που σημαίνει ότι η σύνθεση  $f \circ f$  συμπίπτει με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό  $e$ , ο.ε.δ.

Το σημαντικό χαρακτηριστικό των κατοπτρισμών είναι ότι, όπως λέμε, **παράγουν** όλες τις ισομετρίες του επιπέδου. Δηλαδή, κάθε ισομετρία του επιπέδου μπορεί να γραφεί ως σύνθεση κατοπτρισμών. Με λίγη πρόσθετη εργασία (Άσκηση 7.4.9) θα αποδείξουμε αργότερα το επόμενο θεώρημα ([Cox61, σ. 46]):

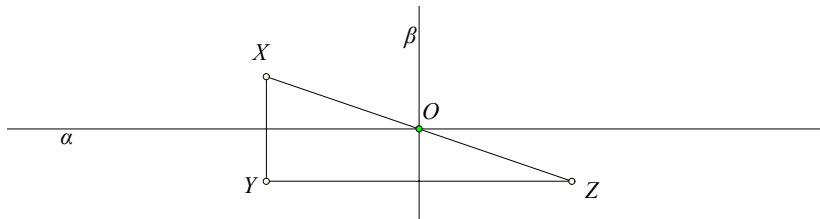
**Θεώρημα 7.2.2** Κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι ή ένας κατοπτρισμός ή μία σύνθεση από δύο ή τρεις κατοπτρισμούς.

Στενά συνδεδεμένος με κατοπτρισμούς είναι και ο άλλος απλός μετασχηματισμός που γνωρίσαμε και περιγράφει τη σημειακή συμμετρία. Ένα σημείο  $O$  του επιπέδου ορίζει το μετασχηματισμό  $f$  της **σημειακής συμμετρίας** ως προς  $O$  (Παράγραφος 1.16). Αυτός σε κάθε  $X \neq O$  αντιστοιχίζει το  $X' = f(X)$  που είναι το συμμετρικό του  $X$  ως προς  $O$ . Με άλλα λόγια το σημείο  $X'$  για το οποίο το  $O$  είναι το μέσον του  $XX'$ .



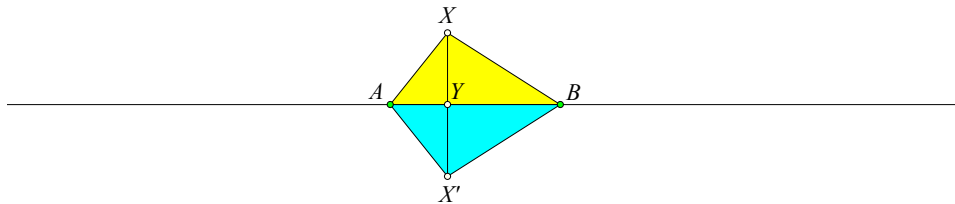
Σχήμα 7.2.3: Ο μετασχηματισμός της σημειακής συμμετρίας ως προς το  $O$

**Θεώρημα 7.2.3** Η σύνθεση  $g \circ f$  δύο ανακλάσεων των οποίων οι άξονες τέμνονται κάθετα στο σημείο  $O$  ταυτίζεται με τη σημειακή συμμετρία ως προς  $O$ .

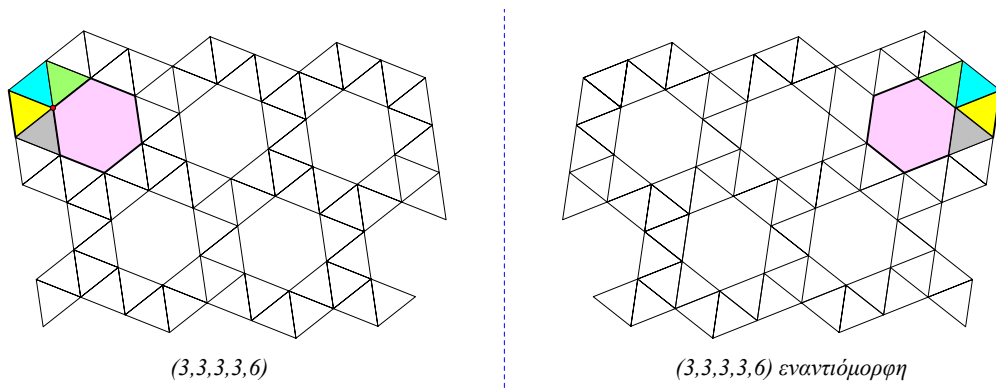


Σχήμα 7.2.4: Σημειακή συμμετρία ως σύνθεση δύο ανακλάσεων

*Απόδειξη:* Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν του Θεωρήματος 1.16.2 και υποδεικνύεται από το σχήμα. Αν το  $Y$  είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία  $a$  και το  $Z$  είναι συμμετρικό του  $Y$  ως προς την ευθεία  $\beta$ , που τέμνει την  $a$  κάθετα στο  $O$ , τότε το  $Z$  είναι και συμμετρικό του  $X$  ως προς το σημείο  $O$ , ο.ε.δ.



Σχήμα 7.2.5: Ισομετρία με δύο σταθερά σημεία



Σχήμα 7.10.11: Η Αρχιμήδεια πλακόστρωση (3, 3, 3, 3, 6) και η εναντιόμορφή της

Δεν θα προχωρήσω στην απόδειξη. Αυτή μπορεί να γίνει με τον ίδιο τρόπο που έγινε και η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. Ας σημειώσουμε ωστόσο, ότι η τάξη  $k$  μιας Αρχιμήδειας πλακόστρωσης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του 6. Τούτο διότι τα κανονικά πολύγωνα έχουν, όλα, γωνίες μεγαλύτερες ή ίσες των  $60^\circ$  και έξι τέτοιες γωνίες γύρω από μια κορυφή καλύπτουν τις  $360^\circ$  του ορίζοντα. Επίσης η τάξη 6 δεν μπορεί να περιέχει άλλη πλακόστρωση εκτός της αναγραφόμενης, αφού τότε θα περιελάμβανε μία γωνία μεγαλύτερη των  $60^\circ$  και θα υπερκάλυπτε τον ορίζοντα των  $360^\circ$ . Για την απόδειξη, συνεπώς, στην περίπτωση της τάξης 4, αρκεί να «λύσουμε» την αντίστοιχη εξίσωση για ακέραιους

$$360^\circ = \frac{v_1 - 2}{v_1} 180^\circ + \frac{v_2 - 2}{v_2} 180^\circ + \frac{v_3 - 2}{v_3} 180^\circ + \frac{v_4 - 2}{v_4} 180^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} = 1$$

και για στην περίπτωση της τάξης 5 την αντίστοιχη, που είναι η

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_5} = \frac{3}{2}.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι στην πρώτη εξίσωση όλοι οι ακέραιοι θα ικανοποιούν τις  $3 \leq v_i \leq 12$  ενώ στη δεύτερη τις  $3 \leq v_i \leq 6$ . Οι εξισώσεις λοιπόν μπορούν να λυθούν «δοκιμάζοντας» για την πρώτη  $10^4$  τετράδες ακεραίων και στη δεύτερη περίπτωση  $4^5$  πεντάδες. Οι αριθμοί είναι σχετικά μικροί και η λύση των δύο εξισώσεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός μικρού προγράμματος.



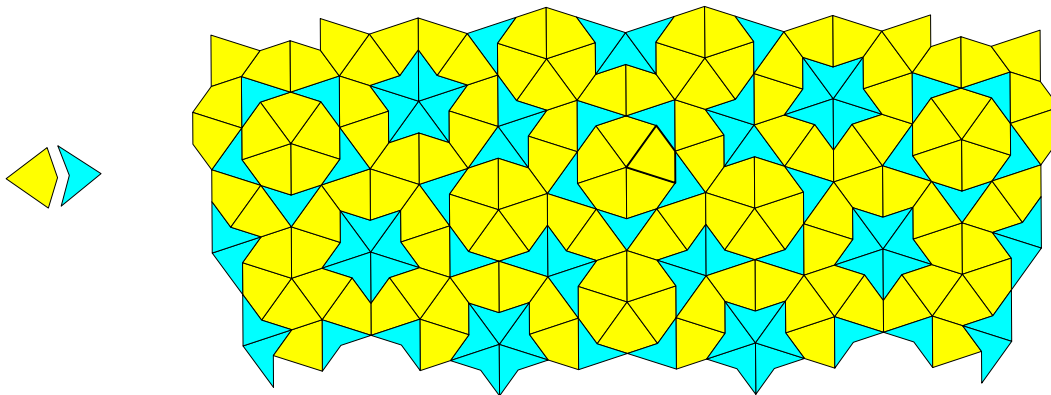
Σχήμα 7.10.12: Πεντάγωνα που επιτρέπουν πλακόστρωση

**Άσκηση 7.10.4** Δείξε ότι κάθε πεντάγωνο  $ABΓΔΕ$  με δύο πλευρές παράλληλες ορίζει μία πλακόστρωση του επιπέδου.

*Υπόδειξη:* Υπάρχει μία πλευρά του πενταγώνου που έχει τις γειτονικές της πλευρές παράλληλες. Η συμμετρία ως προς το μέσον  $O$  αυτής της πλευράς ορίζει ένα γειτονικό πεντάγωνο που μαζί με το αρχικό συγκροτούν ένα εξάγωνο συμμετρικό ως προς το σημείο  $O$  (Σχήμα 7.10.12-Ι).

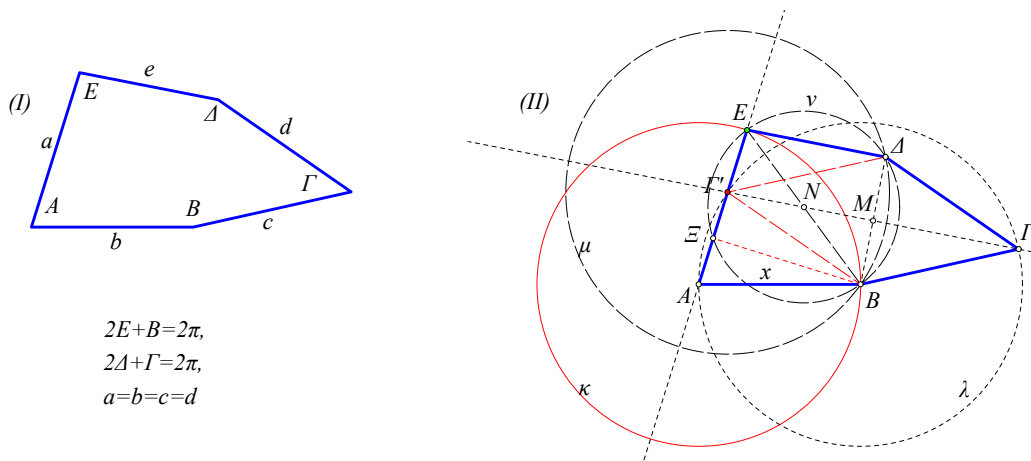
**Άσκηση 7.10.5** Δείξε ότι το δυϊκό πλακάκι της Αρχιμήδειας πλακόστρωσης  $(3, 3, 4, 3, 4)$ , δηλαδή το πλακάκι που έχει ως κορυφές τα κέντρα βάρους των πλακακιών γύρω από μια κορυφή αυτής της πλακόστρωσης, ορίζει πλακόστρωση με πεντάγωνα.

Υπόδειξη: Στο σχήμα 7.10.12-II φαίνονται με διακεκομμένες γραμμές λίγα πλακάκια της (3, 3, 4, 3, 4) πλακόστρωσης. Το πεντάγωνο πλακάκι ορίζεται από τα κέντρα των δύο τετραγώνων και των τριών τριγώνων που συντρέχουν σε μια κορυφή της πλακόστρωσης. Τέσσερα τέτοια πλακάκια σχηματίζουν συμμετρικό εξάγωνο. Τα πλακάκια αυτά και η αντίστοιχη πλακόστρωση ονομάζονται συχνά *του Καϊζου*, γιατί συναντώνται σε παλιούς δρόμους αυτής της πόλης.



Σχήμα 7.10.13: Μια πλακόστρωση του Penrose

Στο βιβλίο [GS87] μελετώνται διεξοδικά οι προηγούμενες, καθώς και πλήθος άλλων κατηγοριών πλακοστρώσεων. Σημειώνω ένα ακόμη παράδειγμα, του Penrose [Wel91, σ. 176], [dB81], πλακόστρωσης με δύο πλακάκια (δες Σχόλιο-2 της § 4.2) τα οποία δίνουν τη δυνατότητα για άπειρες διαφορετικές πλακοστρώσεις. Και σ' αυτές ωστόσο δεν ισχύει ο περιορισμός της τάξης. Σε μια κορυφή της πλακόστρωσης μπορεί να συναντώνται 3, 4 ή 5 πλακάκια (Σχήμα 7.10.13). Η επόμενη άσκηση κα-



Σχήμα 7.10.14: Προδιαγραφές ενός πλακακιού Rice

Κατασκευή ενός τέτοιου πλακακιού

τασκευάζει ένα πλακάκι όπως αυτό της Rice, που αναφέρθηκε παραπάνω. Το πλακάκι αυτό πληροί τις προδιαγραφές του σχήματος 7.10.14-I, όπου τα κεφαλαία συμβολίζουν τα μέτρα των αντιστοίχων γωνιών και τα μικρά λατινικά τα μήκη πλευρών ([Sch78, σ. 35]).

**Άσκηση 7.10.6** Ξεκινώντας από ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  αυθαίρετου μήκους  $x$  κατασκευάσε τέσσερις κύκλους. Τους δύο  $\kappa(A, x)$ ,  $\eta(B, x)$  άμεσα και τους άλλους δύο μετά την επιλογή αυθαίρετου σημείου  $E$  στον  $\kappa$ . Εάν  $\Gamma'$  το δεύτερο σημείο τομής του  $\eta$  με την  $AE$ , ο  $\mu$  ορίζεται ως ο κύκλος  $\mu(\Gamma', x)$  και ο  $\nu$  ως ο κύκλος με διάμετρο  $EB$ . Έστω  $\Delta$  το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων  $\mu$ ,  $\nu$ .  $M$  το μέσον της

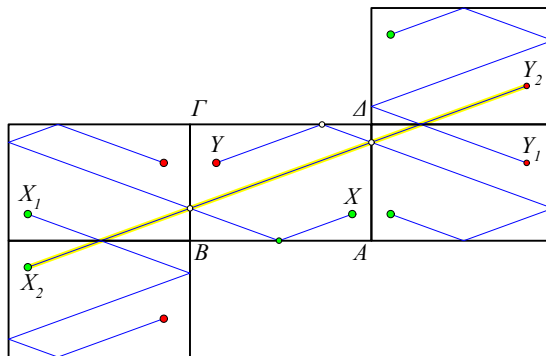
$ΒΔ$  και  $Γ$  το δεύτερο σημείο τομής της  $ΜΓ'$  με τον κύκλο  $β$ . Δείξε ότι το πεντάγωνο  $ΑΒΓΔΕ$  πληροί της προδιαγραφές του πλακακιού Rice.

*Υπόδειξη:* Εκ κατασκευής το  $ΒΓ'ΔΓ$  είναι ρόμβος και τα μήκη των πλευρών  $a = b = c = d = x$ . Η σχέση γωνιών  $2E + B = 2\pi$  προκύπτει προβάλλοντας το  $B$  στο  $E$  επί της  $ΑΓ'$ . Εκ κατασκευής το  $ΒΞΕΔ$  είναι εγγράψιμο, άρα η  $E$  είναι παραπληρωματική της  $ΞΒΔ$ , που είναι το μισό της  $ΑΒΓ$ . Ισχύει λοιπόν  $E + \frac{B}{2} = \pi$ , που είναι ισοδύναμο με την προδιαγραφή. Η άλλη προδιαγραφή αποδεικνύεται πιο απλά από το τραπέζιο  $ΔΕΓ'Γ$  στο οποίο οι γωνίες  $Δ$  και  $Γ'ΓΔ$  είναι παραπληρωματικές. Προκύπτει η  $Δ + \frac{Γ}{2} = \pi$  που ισοδυναμεί πάλι με την προδιαγραφή.

## 7.11 Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου

Ατέλειωτος ο κύκλος της ιδέας και της πράξης,  
Ατέλειωτη εφεύρεση, ατέλειωτο πείραμα,  
Προσάγει γνώση κίνησης, αλλ' όχι της ακινησίας,  
Γνώση της ομιλίας, αλλ' όχι της σιωπής.

*T.S. Eliot, Χορικά από τον «Βράχο»*



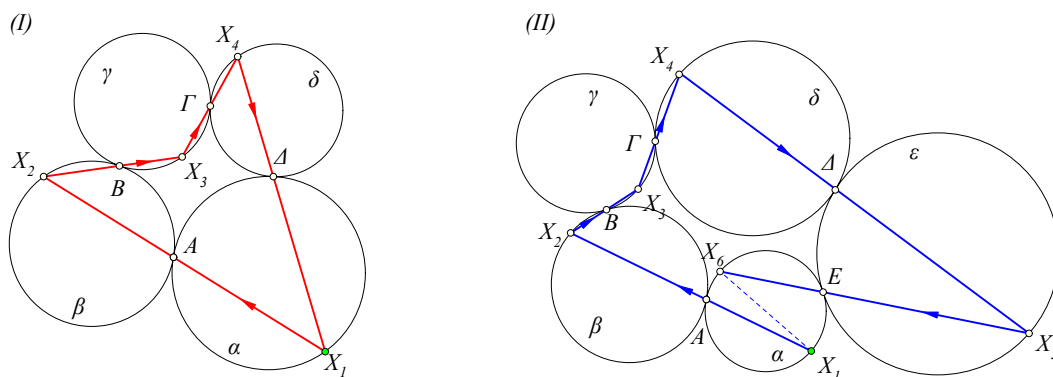
Σχήμα 7.11.1: Τροχιά μπιλιάρδου

**Άσκηση 7.11.1** Τοποθετούνται στο μπιλιάρδο δύο μπίλιες  $X, Y$ . Προσδιόρισε την τροχιά της μπίλιας  $X$ , που ανακλώμενη στα τέσσερα τοιχώματα θα κτυπήσει την  $Y$ . Εξέτασε και την περίπτωση που η μπίλια, μετά από τις τέσσερις ανακλάσεις επιστρέφει στη θέση της.

*Υπόδειξη:* ([Cat52, σ. 7]) Το  $Y_1$  προκύπτει από ανάκλαση του  $Y$  ως προς την πλευρά  $ΑΔ$ . Το  $Y_2$  προκύπτει από το  $Y_1$  μέσω ανάκλασης ως προς  $ΓΔ$ . Το  $X_1$  προκύπτει από το  $X$  μέσω ανάκλασης ως προς  $ΒΓ$ . Το  $X_2$  προκύπτει από το  $X_1$  μέσω ανάκλασης ως προς  $ΑΒ$ . Το  $X_2Y_2$  είναι ευθύγραμμο τμήμα. Για το δεύτερο μέρος δες την Άσκηση 3.5.7.

Στο σχήμα 7.11.2-1 φαίνεται η κατασκευή μιας πολυγωνικής γραμμής που συνδέει τα σημεία επαφής τεσσάρων κύκλων  $a, \beta, \gamma, \delta$ , που εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο αντίστοιχα στα σημεία  $A, B, \Gamma, Δ$ . Η διαδικασία κατασκευής της πολυγωνικής γραμμής είναι η εξής:

1. Ξεκινάμε από τυχόν σημείο  $X_1$  του κύκλου  $a$  και το ενώνουμε με το σημείο επαφής  $A$  των  $a, \beta$ ,
2. Η ευθεία  $X_1A$  ξανατέμνει τον  $\beta$  στο  $X_2$ , το οποίο ενώνουμε με το σημείο επαφής  $B$  των  $\beta, \gamma$ ,
3. Η ευθεία  $X_2B$  ξανατέμνει τον  $\gamma$  στο  $X_3$ , το οποίο ενώνουμε με το σημείο επαφής  $\Gamma$  των  $\gamma, \delta$ ,
4. Η ευθεία  $X_3\Gamma$  ξανατέμνει τον  $\delta$  στο  $X_4$ , το οποίο ενώνουμε με το σημείο επαφής  $Δ$  των  $\delta, a$ ,
5. Η ευθεία  $X_4Δ$  ξανατέμνει τον  $a$  σε σημείο  $X_5$  που συμπίπτει με το  $X_1$ .



Σχήμα 7.11.2: Αλυσίδα εφαπτομένων ανά δύο κύκλων

Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να επεκταθεί σε οσοδήποτε μεγάλες αλυσίδες κύκλων  $a, \beta, \gamma, \dots$ , που εφάπτονται ανά δύο. Το σχήμα 7.11.2-II δείχνει μια ανάλογη πολυγωνική γραμμή για αλυσίδα πέντε κύκλων. Είναι αξιοσημείωτη μια διαφορά που εμφανίζεται στα δύο σχήματα και ισχύει γενικά για παρόμοιες αλυσίδες  $\nu$  κύκλων.

**Άσκηση 7.11.2** Δείξε ότι στην προηγούμενη κατασκευή, όταν το  $\nu$  είναι άρτιο, τότε το τελευταίο σημείο  $X_{\nu+1}$  (το  $X_5 = X_1$  στο σχήμα 7.11.2-I) συμπίπτει με το σημείο εκκίνησης  $X_1$ . Όταν το  $\nu$  είναι περιττό, τότε το τελευταίο σημείο ( $X_6$  στο σχήμα 7.11.2-II) ταυτίζεται με το αντιδιαμετρικό του σημείου εκκίνησης.

Υπόδειξη: ([Yag62, σ. 31 III]). Το  $X_2$  είναι εικόνα  $X_2 = f_A(X_1)$  της ομοιοθεσίας  $f_A$  με κέντρο  $A$  και λόγο  $\lambda_A$  ίσο με το λόγο των ακτίνων των κύκλων  $a$  και  $\beta$ :  $\lambda_A = -\frac{r_\beta}{r_a}$ . Ανάλογα το  $X_3$  είναι εικόνα  $X_3 = f_B(X_2)$  της ομοιοθεσίας με κέντρο  $B$  και λόγο  $\lambda_B = -\frac{r_\gamma}{r_\beta}$ . Το  $X_4$  είναι εικόνα  $X_4 = f_\Gamma(X_3)$  της ομοιοθεσίας με κέντρο  $\Gamma$  και λόγο  $\lambda_\Gamma = -\frac{r_\delta}{r_\gamma}$ . Τέλος το  $X_5$  είναι εικόνα  $X_5 = f_\Delta(X_4)$  της ομοιοθεσίας με κέντρο  $\Delta$  και λόγο  $\lambda_\Delta = -\frac{r_\epsilon}{r_\delta}$ . Συνολικά λοιπόν το  $X_5$  είναι εικόνα της σύνθεσης των μετασχηματισμών

$$X_5 = (f_\Delta \circ f_\Gamma \circ f_B \circ f_A)(X_1).$$

Κατά το Θεώρημα 7.6.3, η σύνθεση των ομοιοθεσιών είναι ομοιοθεσία με λόγο  $\lambda$  ίσο με το γινόμενο των λόγων

$$\lambda = \lambda_\Delta \cdot \lambda_\Gamma \cdot \lambda_B \cdot \lambda_A = \left(-\frac{r_a}{r_\delta}\right) \cdot \left(-\frac{r_\delta}{r_\gamma}\right) \cdot \left(-\frac{r_\gamma}{r_\beta}\right) \cdot \left(-\frac{r_\beta}{r_a}\right) = 1.$$

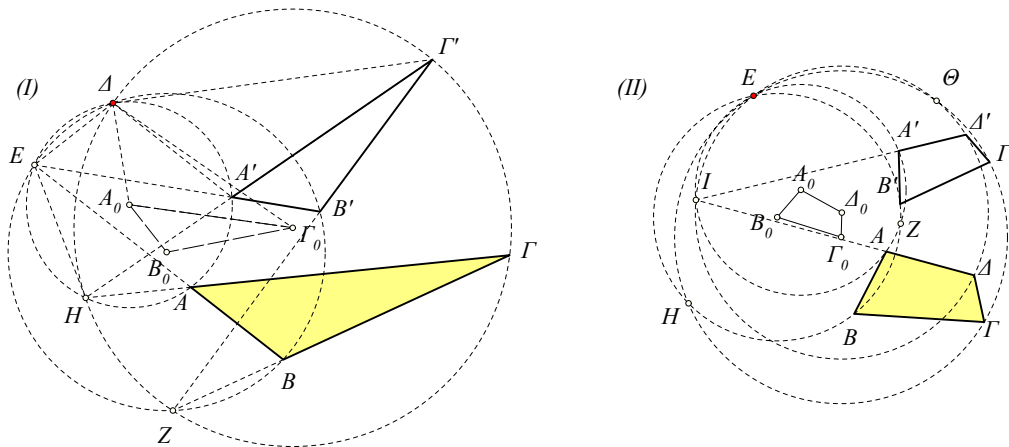
Όμως η ομοιοθεσία με λόγο  $\lambda = 1$  είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, όθεν και το συμπέρασμα για  $\nu = 4$ . Ανάλογη είναι η απόδειξη και για άρτιο  $\nu = 2\kappa$ .

Στη δεύτερη περίπτωση, με τους πέντε κύκλους το  $X_6 = f(X_1) = (f_E \circ f_\Delta \circ f_\Gamma \circ f_B \circ f_A)(X_1)$ , είναι πάλι εικόνα μιας ομοιοθεσίας  $f$  με λόγο που υπολογίζεται ανάλογα και είναι ίσος με  $\lambda = -1$ . Μια τέτοια ομοιοθεσία, όμως, ταυτίζεται με τη συμμετρία ως προς κέντρο, που πρέπει να συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου  $a$  αφού αυτός μένει αναλλοίωτος κατά την  $f$  (δηλαδή η  $f$  τον απεικονίζει στον εαυτό του). Από αυτό προκύπτει και το συμπέρασμα για περιττά  $\nu$ .

**Άσκηση 7.11.3** Δίδονται όμοια και όμοια προσανατολισμένα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , των οποίων οι αντίστοιχες πλευρές τέμνονται στα σημεία  $E = (AB, A'B')$ ,  $Z = (B\Gamma, B'\Gamma')$ ,  $H = (\Gamma A, \Gamma'A')$ . Δείξε ότι:

1. Οι κύκλοι  $(AA'E)$ ,  $(BB'E)$ ,  $(\Gamma\Gamma'Z)$  διέρχονται από κοινό σημείο  $\Delta$ .
2. Το σημείο  $H$  είναι κοινό των κύκλων  $(AA'E)$ ,  $(\Gamma\Gamma'Z)$ .
3. Το σημείο  $\Delta$  είναι κέντρο ομοιότητας των δύο τριγώνων.
4. Τα τρία κέντρα των κύκλων  $(AA'E)$ ,  $(BB'E)$ ,  $(\Gamma\Gamma'Z)$  ορίζουν τρίγωνο  $A_0B_0\Gamma_0$  όμοιο του  $AB\Gamma$ .





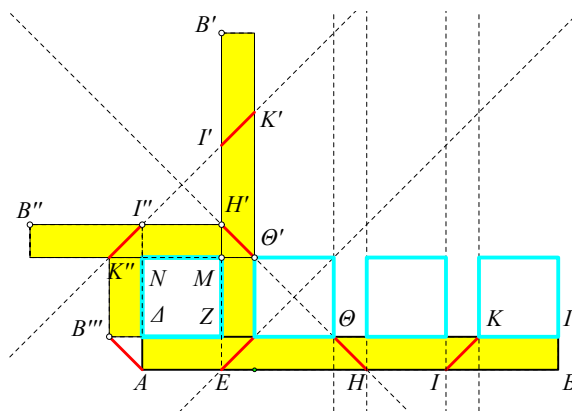
Σχήμα 7.11.3: Όμοια τρίγωνα

Όμοια τετράπλευρα

**Υπόδειξη:** Το δεύτερο σημείο τομής  $\Delta$  των κύκλων  $(AA'E)$ ,  $(BB'E)$  ορίζει το κέντρο ομοιότητας  $f$  που απεικονίζει  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  (Σχήμα 7.11.3-I). Η ομοιότητα αυτή, λόγω της διατήρησης γωνιών και λόγων, απεικονίζει το τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο  $A'B'\Gamma'$ . Αυτό αποδεικνύει τα (1), (2) και (3). Για το (2) αρκεί επίσης η παρατήρηση ότι οι γωνίες  $\widehat{BEB'}$  και  $\widehat{B'ZB'}$  είναι ίσες.

Το (4) ανάγεται στο ότι τα  $(\Delta A_0\Gamma_0, \Delta A'\Gamma')$ ,  $(\Delta B_0A_0, \Delta B'A')$ ,  $(\Delta \Gamma_0B_0, \Delta \Gamma'B')$  είναι ζεύγη ομοίων τριγώνων. Αυτό λ.χ. για το πρώτο ζεύγος προκύπτει ως εξής: Οι γωνίες  $\widehat{\Delta A'\Gamma'}$  και  $\widehat{\Delta A_0\Gamma_0}$  είναι ίσες, διότι η πρώτη είναι ίση με την  $\widehat{\Delta EH}$ , λόγω του εγγράψιμου τετραπλεύρου  $\Delta EHA'$ , η οποία είναι το μισό της (μη κυρτής)  $\widehat{\Delta A_0H}$ , που είναι ακριβώς ίσο με την  $\widehat{\Delta A_0\Gamma_0}$ . Τα τρίγωνα  $\Delta A_0\Gamma_0$ ,  $\Delta A'\Gamma'$  έχουν, συνεπώς, μία γωνία ίση και τις αντίστοιχες προσκείμενες πλευρές ανάλογες, κ.λπ.

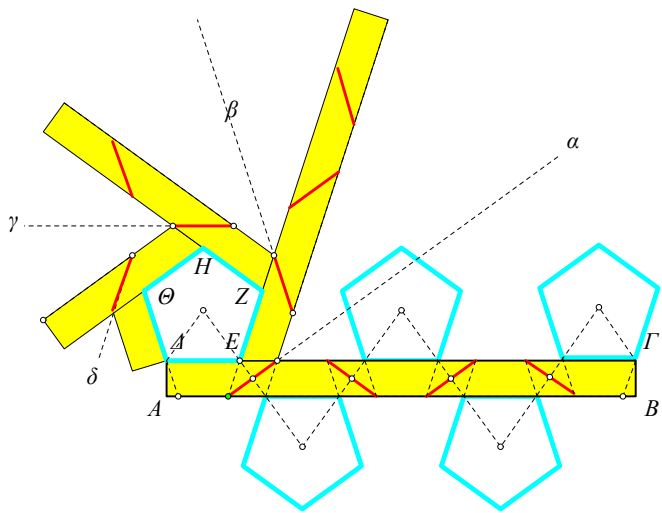
**Άσκηση 7.11.4** Διατύπωσε και απόδειξε ιδιότητες ανάλογες αυτών της προηγούμενης άσκησης για τετράπλευρα (Σχήμα 7.11.3-II).



Σχήμα 7.11.4: Διπλώμα σε τετράγωνο

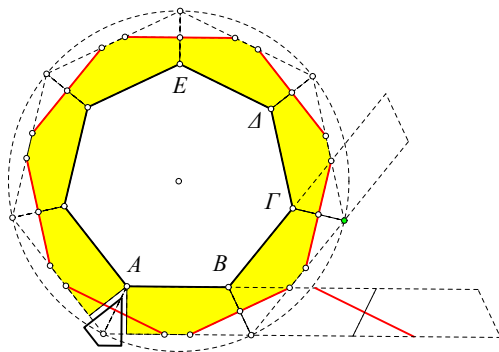
**Άσκηση 7.11.5** Δίδεται ταινία (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο)  $AB\Gamma\Delta$ . Βρες σε ποια σημεία και με ποιες γωνίες πρέπει να το διπλώσεις, ώστε να σχηματιστεί το μέγιστο δυνατό τετράγωνο  $\Delta ZMN$  (Σχήμα 7.11.4).





Σχήμα 7.11.5: Δίπλωμα σε κανονικό πεντάγωνο

**Άσκηση 7.11.6** Δίδεται ταινία (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο)  $AB\Gamma\Delta$ . Βρες σε ποια σημεία και με ποιες γωνίες πρέπει να το διπλώσεις, ώστε να σχηματιστεί το μέγιστο δυνατό κανονικό πεντάγωνο  $\Delta EZH\Theta$  (Σχήμα 7.11.5).



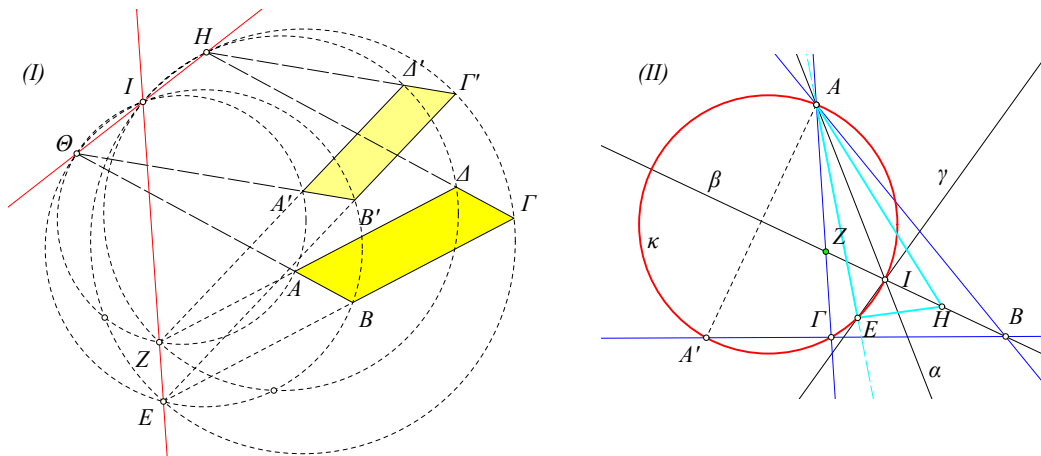
Σχήμα 7.11.6: Δίπλωμα σε κανονικό n-γωνο

**Άσκηση 7.11.7** Γενίκευσε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις και βρες πως πρέπει να διπλώσεις μία ταινία  $a \times b$  διαστάσεων, ώστε να σχηματιστεί το μέγιστο κανονικό n-γωνο  $AB\Gamma\Delta\dots$  στο εσωτερικό της (Σχήμα 7.11.6).

**Άσκηση 7.11.8** Δίδονται τα όμοια και όμοια προσανατολισμένα παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$ . Θεώρησε τα σημεία τομής αντίστοιχων πλευρών  $\Theta = (AB, A'B')$ ,  $H = (\Gamma\Delta, \Gamma'\Delta')$ ,  $E = (B\Gamma, B'\Gamma')$  και  $Z = (A\Delta, A'\Delta')$ . Δείξε ότι οι  $Z\Theta$  και  $H\Theta$  διέρχονται από το κέντρο ομοιότητας  $I$  των παραλληλογράμμων.

Υπόδειξη:  $\widehat{\Theta I Z} = \widehat{\Theta A Z}$  (Σχήμα 7.11.7-1) και, λόγω της παραλληλίας, η τελευταία γωνία ισούται με την  $\widehat{\Theta B E}$ , κ.λπ.

**Άσκηση 7.11.9** Δίδονται τρεις διαφορετικές ευθείες  $a, \beta, \gamma$  διερχόμενες από σημείο  $I$ . Κατασκεύασε τρίγωνο  $A\epsilon H$  που έχει τις ευθείες αυτές ως εσωτερικές διχοτόμους. Δείξε επίσης, ότι αν δύο από τις δοθείσες ευθείες είναι κάθετες, τότε δεν υπάρχει λύση.

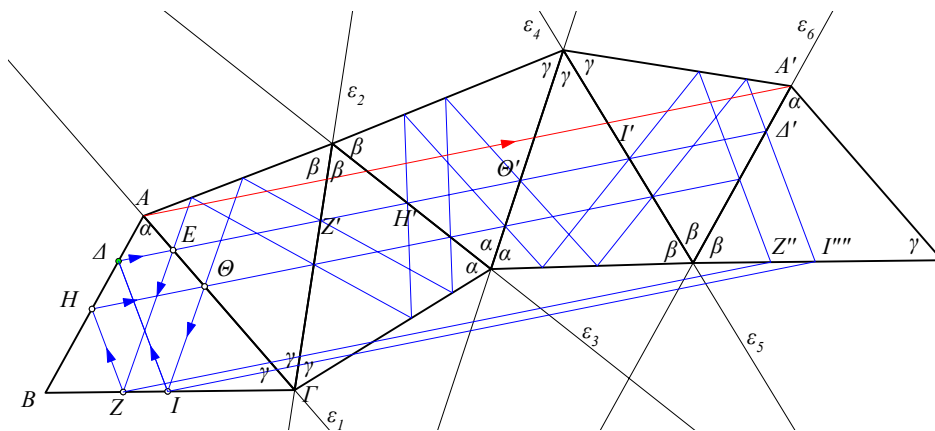


Σχήμα 7.11.7: Όμοια παραλληλόγραμμα

Τρίγωνο δοθέντων διχοτόμων (ευθειών)

Υπόδειξη: Αν  $A$  είναι τυχόν σημείο της  $a$  και  $Z$  τυχόν σημείο της  $\beta$ , θεώρησε την ευθεία  $AZ$ , την ανάκλασή της  $AB$  ως προς  $a$  και την ανάκλαση  $B\Gamma$  της  $AB$  ως προς  $\beta$  (Σχήμα 7.11.7-II). Οι τρεις ευθείες  $AZ$ ,  $AB$  και  $B\Gamma$  ορίζουν τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Για σταθερό  $A$  και μεταβλητό  $Z$  επί της  $\beta$  η κορυφή  $\Gamma$  αυτού του τριγώνου διαγράφει κύκλο  $\kappa$ , διερχόμενο από το  $A$ , το  $I$  και το κατοπτρικό  $A'$  του  $A$  ως προς  $\beta$ . Το ζητούμενο τρίγωνο προκύπτει από το σημείο τομής  $E$  αυτού του κύκλου με τη  $\gamma$ .

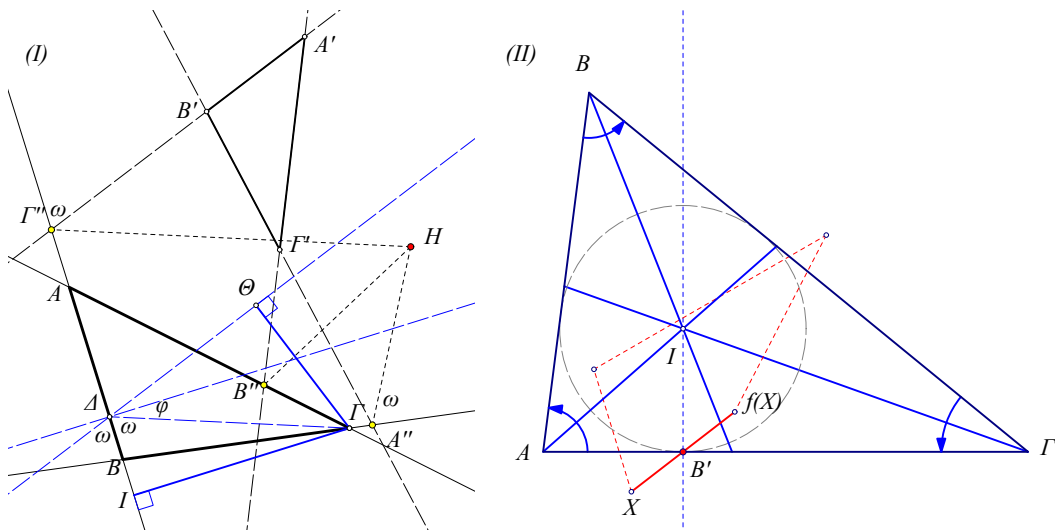
**Άσκηση 7.11.10** Από τυχόν σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνουμε διαδοχικά αντιπαράλληλες  $\Delta E, EZ, ZH, H\Theta, \Theta I$ , αντίστοιχα, προς τις πλευρές  $B\Gamma, AB, A\Gamma, B\Gamma, AB$ . Δείξε ότι η  $I\Delta$  είναι επίσης αντιπαράλληλος της  $A\Gamma$ .



Σχήμα 7.11.8: Εγγεγραμμένα στο  $AB\Gamma$  εξάγωνα με αντιπαράλληλες πλευρές

Υπόδειξη: Θεώρησε τη σύνθεση  $f = f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , όπου  $f_i$  η ανάκλαση ως προς την ευθεία  $\epsilon_i$  για  $i = 1, 2, \dots, 6$  (Σχήμα 7.11.8). Η σύνθεση αυτή είναι μία μεταφορά κατά το προσανατολισμένο διάστημα  $AA'$  και το πολύγωνα, λόγω της αντιπαράλληλίας, σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές και οι  $f(HZ), f(I\Delta)$  είναι παράλληλες, άρα και οι  $HZ, I\Delta$  είναι παράλληλες. Συνεπώς, και η  $I\Delta$  είναι αντιπαράλληλη της  $A\Gamma$ .

**Άσκηση 7.11.11** Δοθέντος τριγώνου  $AB\Gamma$  και σημείου  $H$ , προβάληθουμε το  $H$  στις πλευρές του τριγώνου αντίστοιχα στα σημεία  $\{A'', B'', \Gamma''\}$  έτσι ώστε οι γωνίες των ευθειών  $(HA'', \Gamma B), (HB'', A\Gamma), (H\Gamma'', BA)$  να είναι όλες ίσες με τη σταθερά γωνία  $\omega$  (Σχήμα 7.11.9-I). Δείξε ότι το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ , που σχηματίζεται από τις ανακλάσεις των ευθειών  $\{HA'', HB'', H\Gamma''\}$  ως προς τις αντίστοιχες πλευρές



Σχήμα 7.11.9: Ομοιότητα μέσω ανάκλασης

Στροφές ως προς γωνίες τριγώνου

$\{BG, GA, AB\}$  είναι όμοιο του  $ABG$ . Δείξε επίσης ότι το κέντρο ομοιότητας συμπίπτει με το  $H$  και ο λόγος ομοιότητας με το  $\hat{h} = 2 \sin(\omega)$ .

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα ότι ο λόγος ομοιότητας  $\hat{h}$  είναι ανεξάρτητος της θέσης του  $H$ . Κατόπιν υπολόγισε το λόγο παίρνοντας το  $H$  σε μια ειδική θέση, όπως λ.χ.  $H = G$ .

**Άσκηση 7.11.12** Θεώρησε τις στροφές  $\{f_1, f_2, f_3\}$  με κέντρα τις κορυφές, αντίστοιχα,  $\{A, B, G\}$  τριγώνου  $ABG$  και γωνίες θετικές ίσες αντίστοιχα με αυτές του τριγώνου  $\{a, \beta, \gamma\}$  (Σχήμα 7.11.9-II). Δείξε ότι η σύνθεσή τους  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$  είναι μία συμμετρία ως προς το σημείο επαφής  $B'$  του εγγεγραμμένου κύκλου με την  $AG$ .

Υπόδειξη: Αφού το άθροισμα των γωνιών  $a + \beta + \gamma = \pi$ , η σύνθεση  $f$  των στροφών θα είναι σίγουρα (Πρόταση 7.4.3) μία στροφή κατά  $\pi$ , δηλαδή μία σημειακή συμμετρία. Δείξε ότι το σημείο  $B'$  παραμένει σταθερό, άρα είναι το κέντρο της συμμετρίας.

Η τελευταία άσκηση μπορεί να γενικευθεί, κατ' αρχήν, για κυρτά πολύγωνα με  $v$  πλευρές  $A_1A_2 \dots A_v$ . Να θεωρήσουμε δηλαδή τις γωνίες του πολυγώνου ομοιόμορφα προσανατολισμένες, λ.χ. θετικά, και να σχηματίσουμε τη σύνθεση

$$f = f_v \circ f_{v-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1,$$

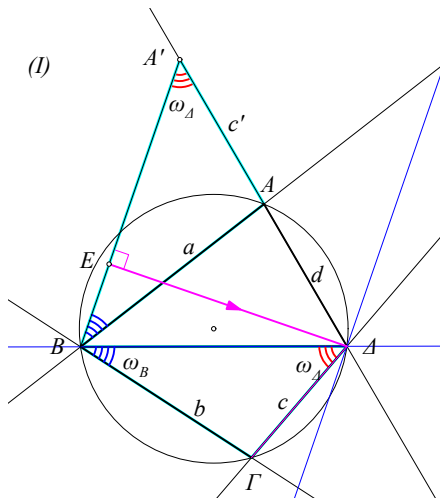
όπου κάθε  $f_i$  είναι η στροφή με κέντρο την κορυφή  $A_i$  του πολυγώνου και γωνία στροφής τη γωνία  $\omega_i$  του πολυγώνου στην  $A_i$ . Επειδή το άθροισμα των γωνιών  $\omega_1 + \dots + \omega_v = (v-2)\pi$ , από τα γενικά θεωρήματα για στροφές, βλέπουμε ότι η σύνθεση  $f$  των στροφών, για περιττά  $v$  θα είναι μια συμμετρία ως προς σημείο και για άρτια  $v$  θα είναι μια μεταφορά.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η  $f$  αφήνει την ευθεία  $\varepsilon = A_vA_1$  αναλλοίωτο, δηλαδή την απεικονίζει στον εαυτό της. Συνεπώς, στην περίπτωση της σημειακής συμμετρίας, το κέντρο της συμμετρίας θα είναι επί της  $\varepsilon$  και στην περίπτωση της μεταφοράς, το προσανατολισμένο διάστημα της μεταφοράς θα είναι παράλληλο προς την  $\varepsilon$ . Οι επόμενες ασκήσεις εξετάζουν τις απλούστερες περιπτώσεις τέτοιων συνθέσεων στροφών.

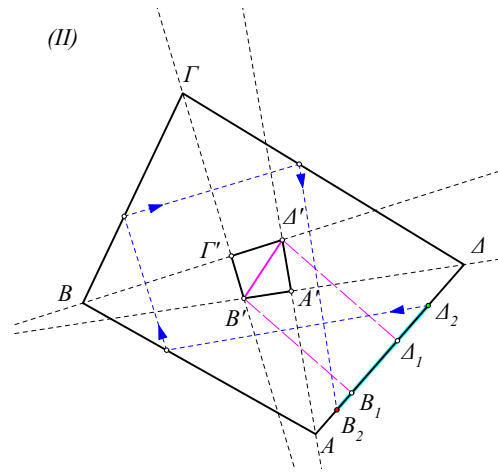
**Άσκηση 7.11.13** Δίδεται το εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο  $ABGD$ . Έστω  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$  η σύνθεση των ανακλίσεων ως προς τις πλευρές, αντίστοιχα,  $\{AB, BG, GD, DA\}$  με αντίστοιχα μήκη  $\{a, b, c, d\}$ . Δείξε ότι η  $f$  είναι μία μεταφορά κατά προσανατολισμένο διάστημα  $E\Delta$  (Σχήμα 7.11.10-I)

$$\text{μήκος } \frac{ac + bd}{R} \text{ και κλίση ως προς τη διαγώνιο } B\Delta : \widehat{B\Delta E} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B},$$

όπου  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.



Σχήμα 7.11.10: Σύνθεση 4 ανακλάσεων



Σύνθεση 4 στροφών

Υπόδειξη: Χώρισε τη σύνθεση σε δύο ζεύγη  $f = (f_4 \circ f_3) \circ (f_2 \circ f_1)$ . Οι δύο πρώτες ανακλάσεις  $g = (f_2 \circ f_1)$  ορίζουν μία στροφή με κέντρο το  $B$  και γωνία στροφής τη διπλάσια της  $\widehat{B}$ . Η στροφή αυτή μπορεί να παρασταθεί και με το ζεύγος ανακλάσεων  $g = f'_2 \circ f'_1$ , όπου  $f'_1$  η ανάκλαση ως προς την ευθεία  $BA'$  και  $f'_2$  η ανάκλαση ως προς τη διαγώνιο  $BD$ . Αρκεί προς τούτο η  $BA'$  να σχηματίζει με τη  $BD$  επίσης τη γωνία  $\widehat{B}$ . Το άλλο ζεύγος  $h = f_4 \circ f_3$  παριστάνει επίσης στροφή, που, και αυτή, μπορεί να παρασταθεί με το ζεύγος ανακλάσεων  $h = f'_4 \circ f'_3$ , όπου η  $f'_3 = f'_2$  είναι η ανάκλαση ως προς τη  $AB$  και η  $f'_4$  είναι η ανάκλαση ως προς ευθεία που σχηματίζει με τη  $BD$  γωνία ίση με  $\widehat{D}$ . Λόγω της  $\widehat{B} + \widehat{D} = \pi$ , οι άξονες των ανακλάσεων  $\{f'_1, f'_4\}$  είναι παράλληλοι και η σύνθεση

$$f = (f_4 \circ f_3) \circ (f_2 \circ f_1) = (f'_4 \circ f'_3) \circ (f'_2 \circ f'_1) = f'_4 \circ f'_1,$$

είναι η παράλληλος μεταφορά κατά το διπλάσιο της απόστασης αυτών των παραλλήλων. Τα υπόλοιπα είναι απλοί υπολογισμοί. Αξιοσημείωτη είναι η συμμετρία της παράστασης με τα μήκη, που, κατά Πτολεμαίο, εκφράζεται και με το γινόμενο των διαγωνίων.

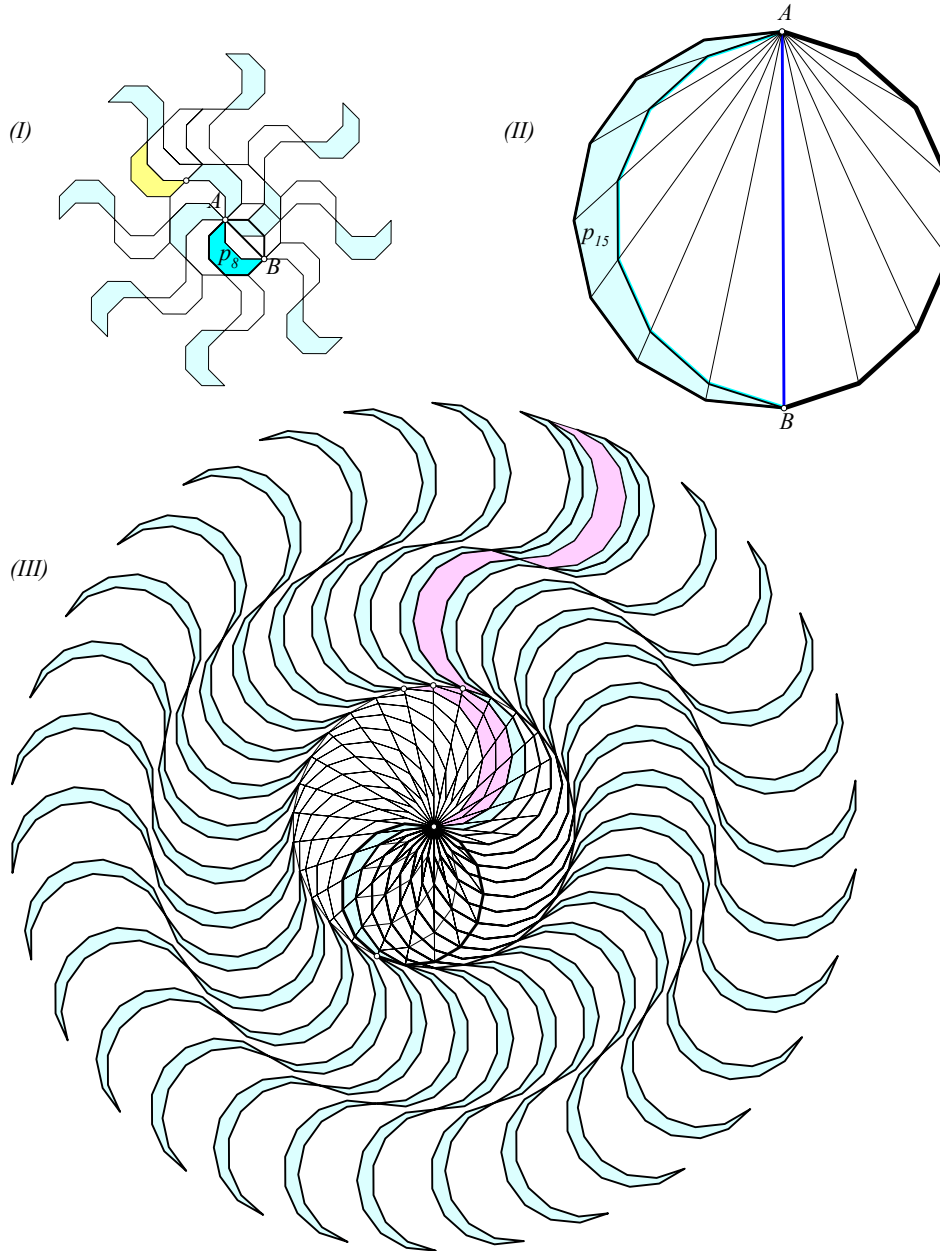
**Άσκηση 7.11.14** Έστω  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$  η σύνθεση των στροφών με κέντρα τις κορυφές, αντίστοιχα,  $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  και γωνίες στροφής τις, θετικά προσανατολισμένες, αντίστοιχες γωνίες του τετραπλεύρου. Δείξε ότι η  $f$  είναι μία μεταφορά κατά το διάστημα  $\Delta_2 B_2$  της πλευράς  $\Delta A$ . Το διάστημα αυτό είναι το διπλάσιο σε μήκος της προβολής  $\Delta_1 B_1$  στη  $\Delta A$  της διαγωνίου ενός τετραπλεύρου  $A'B'\Gamma'\Delta'$  (Σχήμα 7.11.10-II). Το τετράπλευρο αυτό είναι εγγράψιμο και σχηματίζεται από τα σημεία τομής των εσωτερικών διχοτόμων των γωνιών του  $AB\Gamma\Delta$ .

Υπόδειξη: Η στροφή  $f_1$  με κέντρο το  $A$  μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση δύο ανακλάσεων  $f_1 = h_1 \circ g_1$ . Η  $g_1$  είναι η ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο  $AA'$  της  $\widehat{A}$ . Η  $h_1$  είναι η ανάκλαση ως προς την πλευρά  $AB$ . Παρόμοια, η στροφή  $f_2$  με κέντρο το  $B$  μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση  $f_2 = h_2 \circ g_2$ , όπου  $g_2 = h_1$  είναι, πάλι, η ανάκλαση ως προς την πλευρά  $AB$  και  $h_2$  είναι η ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο  $BB'$  της  $\widehat{B}$ . Τότε η σύνθεση των δύο στροφών

$$f_2 \circ f_1 = (h_2 \circ g_2) \circ (h_1 \circ g_1) = h_2 \circ g_1,$$

είναι η σύνθεση των ανακλάσεων ως προς τις δύο διαδοχικές πλευρές  $\{A'D', D'\Gamma'\}$  του τετραπλεύρου  $A'B'\Gamma'\Delta'$ . Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι η σύνθεση των στροφών με κέντρα  $\Gamma$  και  $\Delta$  ταυτίζεται με τη σύνθεση των ανακλάσεων ως προς τις  $B'\Gamma'$  και  $\Gamma'\Delta'$ . Εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση στο εγγράψιμο τετράπλευρο  $A'B'\Gamma'\Delta'$ .

**Άσκηση 7.11.15** Δείξε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι περιγράψιμο σε κύκλο τότε και μόνον, όταν η σύνθεση  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$  των όμοια προσανατολισμένων στροφών που ορίζονται από τις γωνίες του παριστάνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό.



Σχήμα 7.11.11: Πλακοστρώσεις με πλακάκια τύπου  $p_n$

**Άσκηση 7.11.16** Το πλακάκι τύπου  $p_n$  ορίζεται από ένα κανονικό  $n$ -γωνο  $q$ . Για άρτιο  $n$  θεωρούμε το συμμετρικό  $q'$  του  $q$  ως προς τη δεύτερη μεγαλύτερη διαγώνιο του  $AB$  και αφαιρούμε από το  $q$  το κοινό με το  $q'$  κομμάτι. Αυτό που απομένει είναι το  $p_n$ , όπως το  $p_8$  στο σχήμα 7.11.11-I. Για περιττό  $n$  κάνουμε την ίδια διαδικασία ως προς μία μέγιστη διαγώνιο  $AB$ , από την οποία προκύπτει το  $p_n$ , όπως το  $p_{15}$  στο σχήμα 7.11.11-II. Δείξε ότι, αυτά τα μη-κυρτά πλακάκια πλακοστρώνουν το επίπεδο κατά κυκλικές ζώνες, όπως το  $p_8$  στο σχήμα 7.11.11-I και το  $p_{15}$  στο σχήμα 7.11.11-III. Υπολόγισε πόσα πλακάκια περιέχονται σε κάθε κυκλική ζώνη.

## Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

## 8.1 Αξιώματα για το χώρο

Το μάτι της κατανόησης είναι σαν το πραγματικό μάτι. Διότι, όπως μπορείς να διακρίνεις μεγάλα αντικείμενα μέσα από χαραμάδες, έτσι μπορείς να διακρίνεις και μεγάλα αξιώματα της φύσης μέσα σε μικρά και ασήμαντα περιστατικά.

*Francis Bacon, Sylva Sylvarum*

Για τη μελέτη σχημάτων του χώρου χρειαζόμαστε την αόριστη έννοια του **επιπέδου** και μερικά συμπληρωματικά αξιώματα αυτών που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Αξιώματα που περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες των επιπέδων αλλά και ιδιότητες των ευθειών του χώρου.

**Αξίωμα 8.1.1** *Τρία σημεία μη κείμενα επί ευθείας ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο. Κάθε επίπεδο  $\varepsilon$  περιέχει άπειρα σημεία και υπάρχουν επίσης άπειρα σημεία μη περιεχόμενα στο επίπεδο  $\varepsilon$ .*

**Αξίωμα 8.1.2** *Αν μία ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με ένα επίπεδο  $\varepsilon$ , τότε περιέχεται στο επίπεδο  $\varepsilon$ .*

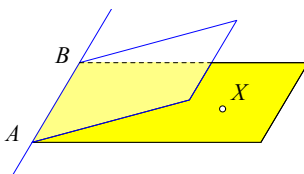
**Αξίωμα 8.1.3** *Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε έχουν και ολόκληρη ευθεία κοινή.*

**Αξίωμα 8.1.4** *Κάθε επίπεδο  $\varepsilon$  χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη που δεν έχουν κοινά σημεία και ονομάζονται **ημίχωροι**. Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του σε διαφορετικούς ημίχωρους τέμνει το επίπεδο σε ένα ακριβώς σημείο. Ένα ευθύγραμμο τμήμα, που έχει και τα δύο άκρα του στον ίδιο ημίχωρο, δεν τέμνει το επίπεδο.*

Τα επίπεδα παίζουν στο χώρο το ρόλο που παίζουν οι ευθείες στο επίπεδο. Στην επιπεδομετρία απομονώνουμε ένα από τα επίπεδα του χώρου και εξετάζουμε τα σχήματα που ορίζονται μέσα σε αυτό το επίπεδο. Στη **στερεομετρία** εξετάζουμε σχήματα, όπως λ.χ. τον κύβο, που εκτείνονται στο χώρο και δεν μπορούν να περιορισθούν σε κάποιο επίπεδο.

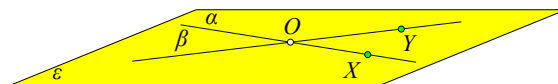
**Θεώρημα 8.1.1** *Αν δύο διαφορετικά επίπεδα τέμνονται, τότε η τομή τους συμπίπτει με μία ευθεία.*

*Απόδειξη:* Κατά το τελευταίο αξίωμα, η τομή τους θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μία ευθεία  $AB$  (Σχήμα 8.1.1). Δεν μπορεί όμως να περιλαμβάνει σημεία εκτός της  $AB$ . Τούτο διότι δύο σημεία της ευθείας λ.χ. τα  $A, B$  και ένα σημείο  $X$  εκτός αυτής ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο. Άρα αν το  $X$  ανήκε και στα δύο επίπεδα τότε αυτά, κατά το πρώτο αξίωμα, θα έπρεπε να ταυτίζονται, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.



Σχήμα 8.1.1: Τεμνόμενα επίπεδα

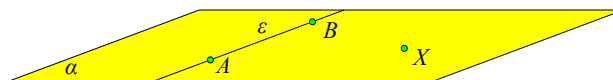
**Θεώρημα 8.1.2** Δύο διαφορετικές τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα και μοναδικό επίπεδο που τις περιέχει.



Σχήμα 8.1.2: Επίπεδο δύο τεμνομένων ευθειών

*Απόδειξη:* Θεώρησε το σημείο τομής  $O$  δύο ευθειών  $\alpha$  και  $\beta$ . Πάρε και δύο σημεία  $\{X, Y\}$ , το πρώτο στην  $\alpha$  και το δεύτερο στη  $\beta$ . Κατά το πρώτο αξίωμα, ορίζεται ένα ακριβώς επίπεδο  $\varepsilon$  περιέχον τα τρία σημεία  $\{O, X, Y\}$ . Κατά το δεύτερο αξίωμα το επίπεδο θα περιέχει και τις δύο ευθείες, ο.ε.δ.

**Πρόταση 8.1.1** Μία ευθεία  $\varepsilon$  και σημείο  $X$  εκτός αυτής ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο που τα περιέχει.



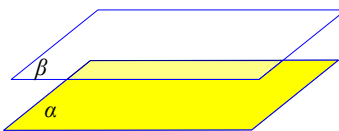
Σχήμα 8.1.3: Επίπεδο ευθείας και σημείου

*Απόδειξη:* Θεώρησε δύο σημεία  $A$  και  $B$  της  $\varepsilon$ . Το επίπεδο  $\alpha$ , που περιέχει τα τρία σημεία  $A, B$  και  $X$ , περιέχει και όλη την ευθεία  $\varepsilon$  (Αξίωμα 8.1.2). Κάθε επίπεδο που περιέχει την  $\varepsilon$  και το  $X$  θα περιέχει και τα  $A, B$  και  $X$ , άρα θα ταυτίζεται με το  $\alpha$  (Αξίωμα 8.1.1), ο.ε.δ.

**Πρόταση 8.1.2** Αν δύο διαφορετικές ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  περιέχονται σε επίπεδο, τότε το επίπεδο αυτό είναι το μοναδικό που περιέχει και τις δύο.

*Απόδειξη:* Πάρε δύο σημεία  $\{A, B\}$  της  $\varepsilon$  και ένα  $X$  της  $\zeta$  και εφάρμοσε την πρόταση 8.1.1, ο.ε.δ.

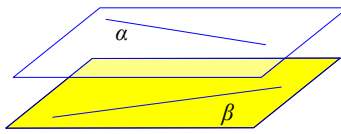
**Παράλληλα επίπεδα** ονομάζονται δύο επίπεδα που δεν τέμνονται. Μία ευθεία λέγεται **παράλληλη** προς το επίπεδο όταν δεν το τέμνει. Ένα επίπεδο λέγεται **παράλληλο** προς ευθεία όταν δεν



Σχήμα 8.1.4: Παράλληλα επίπεδα

την τέμνει. Δύο ευθείες λέγονται **παράλληλες** (στο χώρο) όταν (1) περιέχονται σε ένα επίπεδο  $\alpha$  και (2) είναι παράλληλες ευθείες αυτού του επιπέδου. **Ασύμβατες ευθείες** λέγονται δύο ευθείες  $\alpha$  και  $\beta$  που δεν περιέχονται, και οι δύο, σε κάποιο επίπεδο.

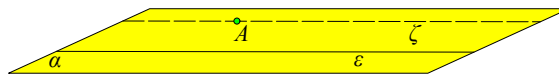
Ξεκαθαρίζω πρώτα ένα λεπτό σημείο που αφορά δύο ευθείες παράλληλες στο χώρο, διότι ο ορισμός των παραλλήλων του χώρου και του επιπέδου έχουν μία μικρή διαφορά. Ενώ στο επίπεδο δύο



Σχήμα 8.1.5: Ασύμβατες ευθείες

παράλληλες ορίζονται ως δύο μη-τεμνόμενες ευθείες, στο χώρο αυτή η ιδιότητα δεν αρκεί, όπως φαίνεται με δύο ασύμβατες ευθείες, οι οποίες να μην δεν τέμνονται, δεν είναι όμως και παράλληλες. Οι παράλληλες στο χώρο περιέχονται εξ υποθέσεως στο ίδιο επίπεδο και ο ορισμός τους, ως παραλλήλων του χώρου, ανάγεται στον ορισμό, ως παραλλήλων του επιπέδου που τις περιέχει.

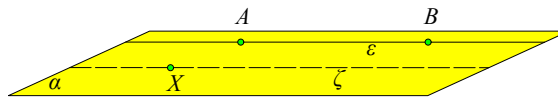
**Θεώρημα 8.1.3** Από σημείο  $A$ , εκτός ευθείας  $\varepsilon$ , άγεται μία και μόνον ευθεία  $\zeta$  παράλληλος της  $\varepsilon$ .



Σχήμα 8.1.6: Μοναδικότητα παραλλήλου στο χώρο

*Απόδειξη:* Στο επίπεδο  $\alpha$ , που ορίζεται από την ευθεία  $\varepsilon$  και το σημείο  $A$ , θεώρησε τη μοναδική παράλληλο  $\zeta$  προς την  $\varepsilon$  (Αξίωμα παραλληλίας 1.15.1). Κάθε άλλο επίπεδο που περιέχει την  $\varepsilon$  και το  $A$  θα ταυτίζεται με το  $\alpha$ . Συνεπώς, η παράλληλος από το  $A$  προς την  $\varepsilon$  θα είναι μοναδική, ο.ε.δ.

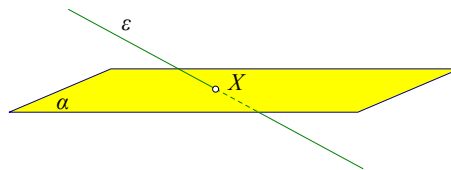
**Πόρισμα 8.1.1** Για κάθε σημείο  $X$  εκτός ευθείας  $\varepsilon$  το επίπεδο που περιέχει το  $X$  και την  $\varepsilon$  περιέχει και την παράλληλο  $\zeta$  της  $\varepsilon$  από το  $X$ .



Σχήμα 8.1.7: Επίπεδο δύο παραλλήλων ευθειών

*Απόδειξη:* Θεώρησε το μοναδικό επίπεδο  $\alpha$  που περιέχει την  $\varepsilon$  και το  $X$ . Σε αυτό το επίπεδο ορίζεται η παράλληλος  $\zeta$  της  $\varepsilon$  από το  $X$ . Κάθε επίπεδο που περιέχει την  $\varepsilon$  και το  $X$  θα ταυτίζεται με το  $\alpha$  και η παράλληλος της  $\varepsilon$  από το  $X$  θα ταυτίζεται με την  $\zeta$ , ο.ε.δ.

**Πρόταση 8.1.3** Αν ευθεία  $\varepsilon$  δεν είναι παράλληλη προς το επίπεδο  $\alpha$  και δεν περιέχεται σε αυτό, τότε το τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο.



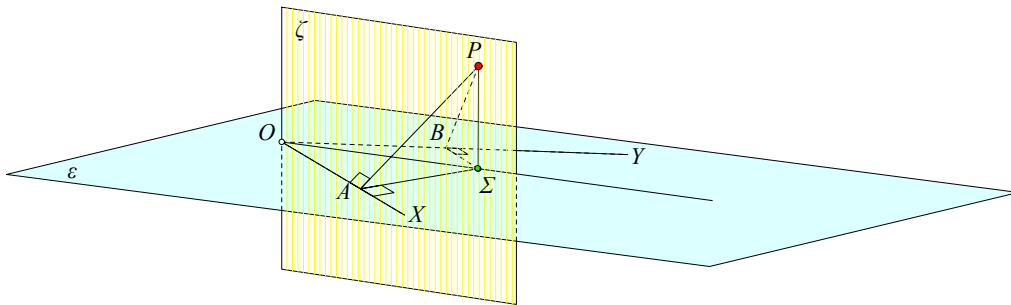
Σχήμα 8.1.8: Ευθεία τέμνουσα επίπεδο

*Απόδειξη:* Προφανώς πρέπει η  $\varepsilon$  να τέμνει το  $\alpha$ . Διαφορετικά θα ήταν παράλληλη προς αυτό. Επίσης αν το έτεμνε σε περισσότερα από ένα σημεία τότε, κατά το δεύτερο αξίωμα, θα περιεχόταν στο  $\alpha$ , αντίθετα με την υπόθεση. Άρα η  $\varepsilon$  τέμνει το  $\alpha$  σε ένα ακριβώς σημείο, ο.ε.δ.



**Άσκηση 8.8.14** Εάν οι προβολές ορισμένων σημείων σε επίπεδο  $\varepsilon$  περιέχονται σε ευθεία του  $\varepsilon$ , τότε τα σημεία αυτά περιέχονται σε επίπεδο  $\zeta$ .

**Άσκηση 8.8.15** Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $P$ , που ισαπέχουν από τις πλευρές γωνίας  $\widehat{XOY}$ , είναι το επίπεδο  $\zeta$  που ορίζεται από τη διχοτόμο της γωνίας και την ευθεία  $\varepsilon$  την κάθετο στο επίπεδο της γωνίας στο σημείο  $O$ .



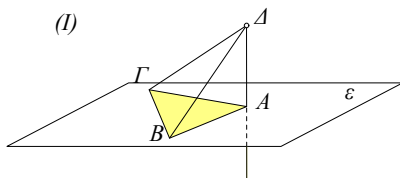
Σχήμα 8.8.1: Επίπεδο ίσων αποστάσεων από πλευρές γωνίας

**Υπόδειξη:** Αν  $P$  σημείο του  $\zeta$ ,  $S$  η προβολή του στο  $\varepsilon$  και  $A, B$  οι προβολές στις  $OX, OY$  αντίστοιχα. Τότε το  $S$  είναι επί της διχοτόμου της  $\widehat{XOY}$  και τα ορθογώνια τρίγωνα  $PΣΑ$  και  $PΣB$  είναι ίσα. Επίσης, από το Θεώρημα τριών καθέτων 8.5.3, έπεται ότι οι  $PA$  και  $PB$  είναι αντίστοιχα κάθετες στις  $OX$  και  $OY$ , άρα το  $P$  είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου. Αντίστροφα, αν το  $P$  είναι σημείο του τόπου, έστω  $PA$  και  $PB$  οι ίσες κάθετες αντίστοιχα στις  $OX$  και  $OY$ . Και πάλι τα ορθογώνια τρίγωνα  $PΣΑ$  και  $PΣB$  είναι ίσα και από το θεώρημα τριών καθέτων οι  $SA$  και  $SB$  είναι κάθετες αντίστοιχα στις  $OX$  και  $OY$ , άρα το  $S$  είναι επί της διχοτόμου της  $\widehat{XOY}$ .

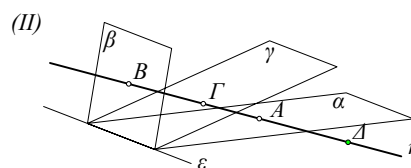
**Άσκηση 8.8.16** Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $P$  για τα οποία οι ευθείες  $OP$  σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές γωνίας  $\widehat{XOY}$ , είναι το επίπεδο  $\zeta$  που ορίζεται από τη διχοτόμο της γωνίας και την ευθεία την κάθετο στο επίπεδο της  $\varepsilon$  στο σημείο  $O$  (Σχήμα 8.8.1).

**Άσκηση 8.8.17** Δείξε ότι, αν το επίπεδο  $\varepsilon$  διέρχεται από μία διαγώνιο παραλληλογράμμου, τότε οι αποστάσεις από το  $\varepsilon$  των άκρων της άλλης διαγωνίου είναι ίσες.

**Άσκηση 8.8.18** Δίδεται επίπεδο  $\varepsilon$  και ευθεία αυτού  $\eta$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$  του χώρου, τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση  $d$  από την  $\eta$  και απόσταση  $d'$  από το  $\varepsilon$ . Για ποια  $d, d'$  δεν υπάρχει λύση;



Σχήμα 8.8.2: Μεταβολή γωνίας



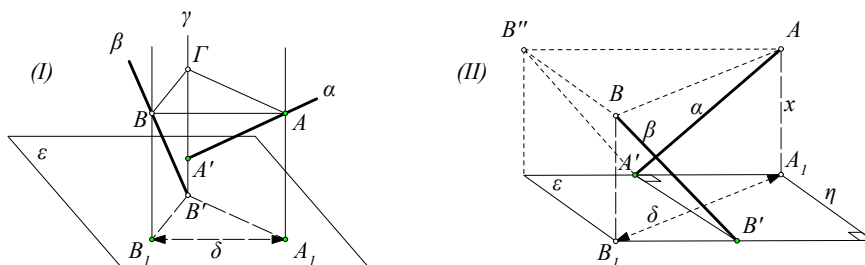
Σταθερός διπλός λόγος

**Άσκηση 8.8.19** Δίδεται επίπεδο  $\varepsilon$  και ευθεία  $\eta$ , κάθετη στο επίπεδο στην κορυφή  $A$  ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  του επιπέδου (Σχήμα 8.8.2-I). Δείξε ότι, για κάθε σημείο  $\Delta \neq A$  της ευθείας  $\eta$ , η γωνία  $\widehat{BA\Gamma}$  είναι μεγαλύτερη της  $\widehat{B\Delta\Gamma}$ .

**Άσκηση 8.8.20** Τα τρία επίπεδα  $\{a, \beta, \gamma\}$  είναι σταθερά και διέρχονται από την ίδια ευθεία  $\varepsilon$  (αντίστοιχα, είναι παράλληλα). Η μεταβλητή ευθεία  $\eta$  τέμνει αυτά τα επίπεδα αντίστοιχα στα σημεία  $\{A, B, \Gamma\}$ . Βρες το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $\Delta$  της ευθείας  $\eta$ , που ορίζουν ένα σταθερό διπλό λόγο  $k = (AB\Gamma\Delta)$  (Σχήμα 8.8.2-III).

**Άσκηση 8.8.21** Δίδονται τρεις ευθείες  $a, \beta$  και  $\gamma$ , που είναι ανά δύο ασύμβατες. Κατασκεύασε ευθεία  $\delta$ , παράλληλη της  $\gamma$  και τέμνουσα τις  $a$  και  $\beta$ .

Υπόδειξη: Από σημείο  $A$  της  $a$  φέρε παράλληλο  $\gamma'$  της  $\gamma$  και όρισε το επίπεδο  $\varepsilon_1 = a\gamma'$  που τις περιέχει. Ανάλογα, από σημείο  $B$  της  $\beta$  φέρε παράλληλο  $\gamma''$  της  $\gamma$  και όρισε το επίπεδο  $\varepsilon_2 = \beta\gamma''$  που τις περιέχει. Η τομή των επιπέδων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι η ζητούμενη ευθεία.



Σχήμα 8.8.3: Κατασκευή τμήματος δοθέντος μήκους

**Άσκηση 8.8.22** Δίδονται δύο ασύμβατες ευθείες  $a$  και  $\beta$  και επίπεδο  $\varepsilon$  που τέμνει και τις δύο. Κατασκεύασε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με τα άκρα του αντίστοιχα στις  $a$  και  $\beta$ , το οποίο να είναι παράλληλο προς το  $\varepsilon$  και να έχει δοθέν μήκος  $\delta$ .

Υπόδειξη: Τα επίπεδα  $\varepsilon_a, \varepsilon_\beta$ , που περιέχουν αντίστοιχα τις  $a, \beta$  και είναι κάθετα στο  $\varepsilon$ , τέμνονται, εν γένει, κατά ευθεία  $\gamma$  κάθετη στο  $\varepsilon$  (Σχήμα 8.8.3). Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  που προκύπτει από τις τομές των  $a, \beta, \gamma$  με επίπεδο παράλληλο προς το  $\varepsilon$ , μπορεί να υπολογισθεί, συναρτήσει της απόστασης  $x = |A'\Gamma|$ , έτσι ώστε  $|AB| = \delta$  (Σχήμα 8.8.3-I). Εξέτασε και την περίπτωση που τα  $\varepsilon_a, \varepsilon_\beta$  είναι παράλληλα. Σε αυτή την περίπτωση το  $\varepsilon$  μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα  $A'B'$  της ελάχιστης απόστασης  $\eta$  των δύο ασυμβάτων (Σχήμα 8.8.3-II). Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαγώνιο  $A_1B_1$  που ορίζεται από τις προβολές των  $\{A, B\}$  στο  $\varepsilon$  κατασκευάζεται από τα δεδομένα. Κατόπιν και το τρίγωνο  $A'AB''$  των προβολών πάνω στο  $\varepsilon_a$  κατασκευάζεται, διότι έχει γωνίες και την πλευρά  $AB''$  που προσδιορίζονται από τα δεδομένα.

**Άσκηση 8.8.23** Για δύο διαφορετικά σημεία  $\{A, B\}$  του χώρου, θεωρούμε όλες τις ευθείες/επίπεδα  $a$  διά του  $A$  και σε κάθε τέτοια ευθεία/επίπεδο την προβολή  $B_a$  του  $B$ . Δείξε ότι όλα αυτά τα σημεία  $\{B_a\}$  έχουν την ίδια απόσταση  $r = |AB|/2$  από το μέσον  $M$  του  $AB$ .

**Άσκηση 8.8.24** Τα επίπεδα  $\{a, \beta\}$ , που τέμνονται κατά την ευθεία  $\varepsilon$ , περιέχουν αντίστοιχα τα σημεία  $\{A, B\}$ . Δείξε ότι η ευθεία  $AB$  σχηματίζει με τα δύο επίπεδα ίσες γωνίες, τότε και μόνον, όταν τα σημεία εφίσκονται σε ίση απόσταση από την ευθεία  $\varepsilon$ .

Υπόδειξη: Πρόβαλλε το  $A$  στην ευθεία  $\varepsilon$  στο σημείο  $A'$  και στο επίπεδο  $\beta$  στο σημείο  $A''$  και αντίστοιχα το  $B$  στα  $\{B', B''\}$  των  $\{\varepsilon, a\}$ . Η ισότητα των γωνιών της  $AB$  με τα επίπεδα ισοδυναμεί με την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων  $\{A''BA, B''AB\}$ . Αυτή ισοδυναμεί με την ισότητα των  $\{|AA''|, |BB''|\}$  που, με τη σειρά της, ισοδυναμεί με την ισότητα των τριγώνων  $\{AA'A'', BB'B''\}$ .

**Άσκηση 8.8.25** Δείξε ότι τα μεσοκάθετα επίπεδα των πλευρών ενός σφαιρικού τετραπλεύρου διέρχονται, και τα τέσσερα, από ένα κοινό σημείο.

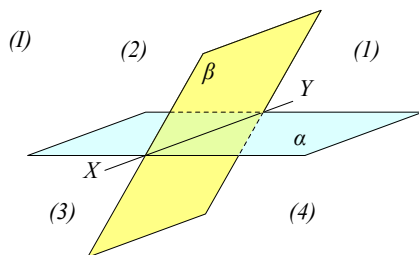
**Άσκηση 8.8.26** Δείξε ότι αν δύο απέναντι πλευρές σφαιρικού τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε οι προβολές τους στην ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο άλλων πλευρών είναι επίσης ίσες ([Καν70, σ. 45]).

### 9.1 Διέδρες γωνίες

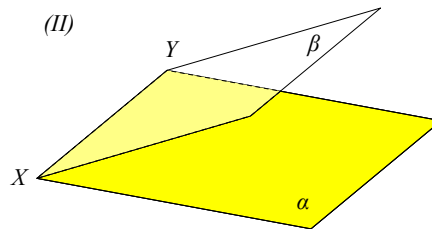
Δεν βλέπεις, φίλε, τον καιρόν, το πως ουδέν αφήνει  
 στέρεον τι να στέκεται, μα ἔδω κ' εκεί το κλίνει,  
 και οι χρόνοι πως μας φεύγουσι και πως κυλούν κ' υπάσι,  
 και πάσα μέρα δε θωρείς τον κόσμον πως αλλάσσει;

*Μαρίνος Φαηλέρος, Ρίμα παρηγορητική*

Δύο επίπεδα  $a$  και  $\beta$ , που τέμνονται, χωρίζουν το χώρο σε τέσσερα μέρη, που λέγονται **τεταρτημόρια**



Σχήμα 9.1.1: Τεταρτημόρια



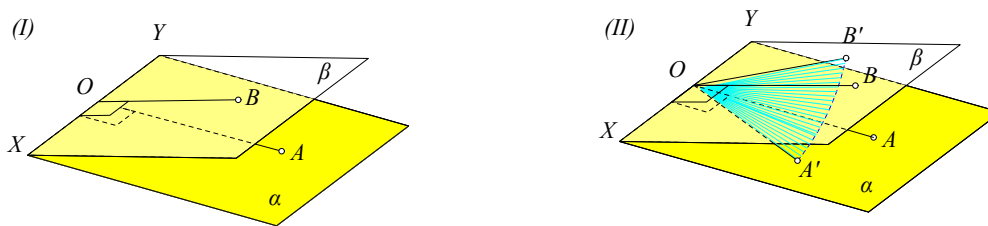
Διέδρος γωνία

(Σχήμα 9.1.1-I). Ορίζουν επίσης σχήματα ανάλογα των γωνιών που ορίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου. Κάθε ζεύγος ημιεπιπέδων, που είναι τμήματα διαφορετικών επιπέδων, ορίζει μία **κυρτή διέδρος γωνία** (Σχήμα 9.1.1-II). Η ευθεία  $XY$  τομής των επιπέδων  $a$  και  $\beta$  λέγεται **ακμή της διέδρου**. Τα ημιεπίπεδα (αλλά και τα επίπεδα) που ορίζουν τη διέδρος λέγονται **έδρες της διέδρου γωνίας**.

Στην έννοια της διέδρου αντιστοιχεί αυτή της γωνίας του επιπέδου. Αυτό τονίζεται και με τον επόμενο ορισμό, που δίνει τον τρόπο που μετράμε το μέγεθος μιας διέδρου.

Το **μέτρο διέδρου** γωνίας ορίζεται μέσω επιπέδου καθέτου στην ακμή της. Το επίπεδο αυτό τέμνει τις έδρες κατά ευθείες  $\{OA, OB\}$  και ως μέτρο της διέδρου ορίζουμε αυτό της γωνίας  $\widehat{AOB}$  (Σχήμα 9.1.2-I). Έτσι η **κυρτή διέδρος** αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία  $\widehat{AOB}$  μέτρου μικρότερου του  $\pi$  (σε ακτίνια) και η μη-κυρτή διέδρος αντιστοιχεί στη μη-κυρτή γωνία  $\widehat{AOB}$  μέτρου μεγαλύτερου του  $\pi$ .

Πρέπει να σημειώσουμε ότι το μέτρο της διέδρου δεν εξαρτάται από τη θέση του  $O$  στην ακμή  $XY$  αυτής. Αν φέρουμε το κάθετο στην  $XY$  επίπεδο σε ένα άλλο σημείο  $O'$  της ακμής, τότε η αντίστοιχη



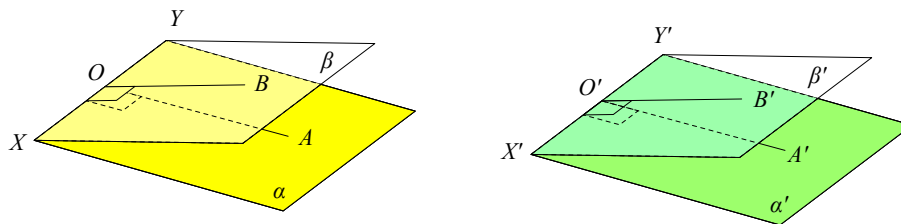
Σχήμα 9.1.2: Μέτρο διέδρου  $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$

γωνία που θα σχηματισθεί  $\widehat{A'O'B'}$  θα έχει τις πλευρές της παράλληλες και ομόρροπες προς αυτές της  $\widehat{AOB}$ . Συνεπώς, οι δύο γωνίες θα είναι ίσες (Θεώρημα 8.3.1).

**Θεώρημα 9.1.1** Το μέτρο  $\widehat{AOB}$  μιας διέδρου γωνίας είναι μικρότερο από κάθε γωνία  $\widehat{A'O'B'}$ , που σχηματίζεται τέμνοντας τη διέδρο με επίπεδο που δεν είναι κάθετο στην ακμή της (Σχήμα 9.1.2-II).

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με αυτήν της άσκησης 8.6.2, ο.ε.δ.

Δύο διέδρες γωνίες τις λέμε **ίσες** όταν έχουν το ίδιο μέτρο. Γενικότερα, μεταφέροντας τις έννοιες των επιπέδων γωνιών στις διέδρους μιλάμε για **ορθή διέδρο**, **αμβλεία διέδρο**, **οξεία διέδρο**, **συμπληρωματική διέδρο**, **παραπληρωματική διέδρο**, **κατά κορυφήν διέδρο** κ.λπ. Ισχύουν επίσης ιδιότητες ανάλογες με αυτές των γωνιών. Αρκεί να ανατρέξουμε στις ιδιότητες των γωνιών και να αντικαταστήσουμε σε αυτές τη φράση *πλευρά γωνίας* με τη φράση *έδρα διέδρου*. Η επόμενη πρόταση δίνει ένα παράδειγμα αυτών των αναλογιών.



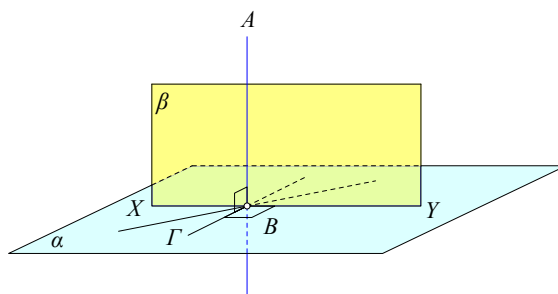
Σχήμα 9.1.3: Ίσες διέδρες γωνίες

**Πρόταση 9.1.1** Διέδρες γωνίες των οποίων οι αντίστοιχες έδρες είναι παράλληλα επίπεδα είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη: Έστω ότι οι έδρες  $a'$ ,  $\beta'$  της μιας διέδρου είναι παράλληλα επίπεδα αντίστοιχα προς τις έδρες  $a$ ,  $\beta$  της άλλης (Σχήμα 9.1.3). Τότε οι ακμές τους είναι παράλληλες. Αυτό συνάγεται προεκτείνοντας μία έδρα λ.χ. τη  $\beta'$  έως ότου τμήσει την  $a$  κατά ευθεία  $\varepsilon$ . Κατά την Πρόταση 8.2.3 η  $\varepsilon$  και η  $XY$  θα είναι παράλληλες ως αποτεμνόμενες από τα παράλληλα επίπεδα  $\beta$  και  $\beta'$  μέσω του  $a$ . Παρόμοια και οι  $\varepsilon$  και  $X'Y'$  θα είναι παράλληλες ως αποτεμνόμενες από τα παράλληλα επίπεδα  $a$  και  $a'$  μέσω του  $\beta'$ . Συνεπώς, οι ακμές  $XY$  και  $X'Y'$  θα είναι παράλληλες ευθείες. Επομένως, ένα επίπεδο  $\gamma$  κάθετο στην ακμή  $XY$  που ορίζει τη γωνία  $\widehat{AOB}$  της μιας διέδρου θα είναι και κάθετο στην ακμή  $X'Y'$  της άλλης διέδρου (Πρόταση 8.5.2) και θα ορίζει τη γωνία  $\widehat{A'O'B'}$  της άλλης διέδρου. Λόγω της παραλληλίας των επιπέδων οι γωνίες  $\widehat{AOB}$  και  $\widehat{A'O'B'}$  θα έχουν πλευρές παράλληλες, άρα θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές (Πόρισμα 1.15.11), ο.ε.δ.

Δύο επίπεδα που σχηματίζουν μία ορθή διέδρο τα λέμε **κάθετα επίπεδα**.

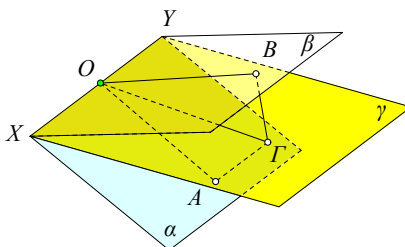
**Θεώρημα 9.1.2** Αν μία ευθεία  $AB$  είναι κάθετος στο επίπεδο  $a$ , τότε κάθε άλλο επίπεδο  $\beta$  που περιέχει την  $AB$  θα είναι κάθετο στο επίπεδο  $a$ .



Σχήμα 9.1.4: Κάθετα επίπεδα

*Απόδειξη:* Η  $AB$  (με  $B$  στο  $a$ ) είναι κάθετος σε κάθε ευθεία του  $a$  διερχόμενη από το  $B$  (Θεώρημα 8.5.1), άρα θα είναι κάθετος και στην  $B\Gamma$  που είναι ορθογώνια προς την τομή  $XY$  των επιπέδων και περιέχεται στο  $a$  (Σχήμα 9.1.4). Αυτό δείχνει ότι η γωνία της διέδρου των  $a$  και  $\beta$  είναι ορθή, ο.ε.δ.

**Πρόταση 9.1.2** Για δύο επίπεδα  $a$  και  $\beta$ , τεμνόμενα κατά την ευθεία  $XY$ , τα σημεία του χώρου  $\Gamma$  που ισαπέχουν από τα επίπεδα ευρίσκονται επί δύο κάθετων επιπέδων  $\{\gamma, \delta\}$ , διερχομένων διά της  $XY$  και σχηματιζόντων ίσες διέδρες με τα  $a$  και  $\beta$ .



Σχήμα 9.1.5: Διχοτόμο επίπεδο διέδρου

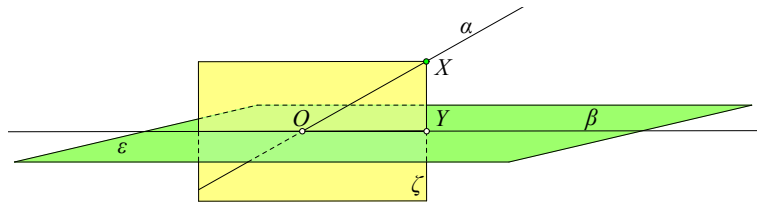
*Απόδειξη:* Έστω σημείο  $\Gamma$  ισαπέχον από τα επίπεδα  $a$  και  $\beta$ . Φέρε τις κάθετες  $\Gamma A$  και  $\Gamma B$  σε αυτά. Το επίπεδο  $AB\Gamma$  είναι κάθετο στην  $XY$ , διότι η  $XY$ , ως ευθεία του επιπέδου  $\beta$ , είναι κάθετη στη  $B\Gamma$  και ως ευθεία του επιπέδου  $a$ , είναι κάθετη στην  $A\Gamma$ . Έπεται ότι η γωνία  $\widehat{AOB}$ , όπου  $O$  το σημείο τομής της  $XY$  με το επίπεδο  $AB\Gamma$ , είναι η γωνία της διέδρου των  $a$  και  $\beta$ , που περιέχει το  $\Gamma$ . Επίσης, τα ορθογώνια τρίγωνα  $O\Gamma A$  και  $O\Gamma B$  είναι ίσα, ως έχοντα την υποτεινούσα  $O\Gamma$  κοινή και τις κάθετους  $\Gamma A$  και  $\Gamma B$  ίσες εξ υποθέσεως. Συνάγεται ότι το επίπεδο  $\gamma$ , που περιέχει το  $\Gamma$  και την ευθεία  $XY$ , σχηματίζει ίσες γωνίες με τα επίπεδα  $a$  και  $\beta$ . Ανάλογα δείχνουμε ότι, αν το  $\Gamma$  είναι σε ένα από τα άλλα τεταρτημόρια που ορίζουν τα δύο επίπεδα, τότε περιέχεται είτε στο  $\gamma$  είτε στο επίπεδο  $\delta$  που σχηματίζει ορθή γωνία με το  $\gamma$  (διχοτομεί την εξωτερική διέδρου), ο.ε.δ.

Στην προηγούμενη πρόταση βλέπουμε πάλι μια ιδιότητα γωνιών του επιπέδου (Πόρισμα 1.15.17) να μεταφέρεται στις διέδρες γωνίες. Τα επίπεδα που ορίζονται από την προηγούμενη πρόταση λέγονται **διχοτομούμενα επίπεδα** της διέδρου.

**Άσκηση 9.1.1** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$  του χώρου που απέχουν δοθείσα απόσταση  $\delta$  από τις έδρες μιας διέδρου γωνίας.

**Θεώρημα 9.1.3** Μία ευθεία  $a$ , που δεν περιέχεται και δεν είναι κάθετος στο επίπεδο  $\varepsilon$ , περιέχεται σε ένα ακριβώς επίπεδο  $\zeta$  κάθετο στο  $\varepsilon$ .

*Απόδειξη:* Φέρε από τυχόν σημείο  $X$  της  $a$  την κάθετο  $XY$  στο  $\varepsilon$  (Σχήμα 9.1.6). Το επίπεδο  $\zeta$  που περιέχει την  $a$  και την  $XY$  είναι κάθετο στο  $\varepsilon$  (Πρόταση 9.1.2). Κάθε άλλο επίπεδο  $\zeta'$  που περιέχει την  $a$  και είναι κάθετο στο  $\varepsilon$ , θα τέμνει το  $\varepsilon$  κατά ευθεία  $\beta$ . Φέρε από το  $X$  την κάθετο  $XY'$  στη  $\beta$

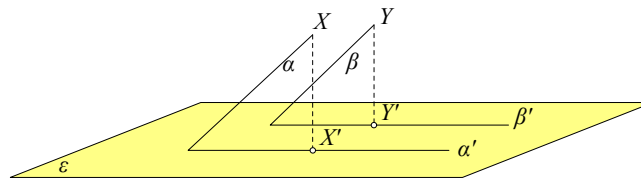


Σχήμα 9.1.6: Επίπεδο διερχόμενο από ευθεία κάθετο σε άλλο

στο επίπεδο  $\zeta'$ . Η  $XY'$  θα είναι και κάθετος στο  $\varepsilon$  διότι εκτός της ευθείας  $\beta$  θα είναι και κάθετος σε μία ορθογώνιά της και περιεχόμενη στο  $\varepsilon$ , λόγω της υποθέσεως ότι τα  $\zeta'$  και  $\varepsilon$  τέμνονται κάθετα. Συνεπώς, η  $XY'$  θα συμπίπτει με την προηγούμενη  $XY$  και το  $\zeta'$  θα περιέχει την  $a$  και την  $XY$ , άρα θα ταυτίζεται με το  $\zeta$ , ο.ε.δ.

Η ευθεία  $\beta$  που ορίζεται από την προηγούμενη πρόταση, ως τομή του μοναδικού επιπέδου  $\zeta$  που περιέχει την ευθεία  $a$  και τέμνει κάθετα το επίπεδο  $\varepsilon$ , λέγεται **προβολή** της ευθείας  $a$  στο επίπεδο  $\varepsilon$ .

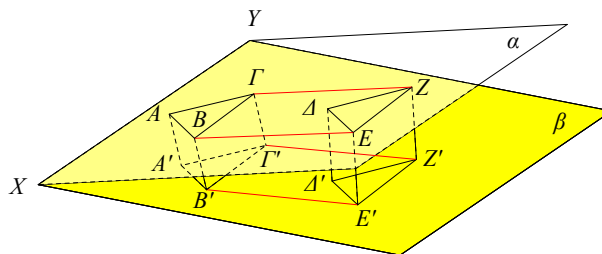
**Πρόταση 9.1.3** Οι προβολές  $a'$ ,  $\beta'$  δύο παραλληλίων ευθειών  $a$  και  $\beta$  στο επίπεδο  $\varepsilon$  ή ταυτίζονται ή είναι δύο σημεία ή είναι παράλληλες ευθείες του  $\varepsilon$ .



Σχήμα 9.1.7: Προβολή παραλλήλων σε παράλληλες

*Απόδειξη:* Αν οι  $a$ ,  $\beta$  είναι κάθετες στο  $\varepsilon$ , τότε οι προβολές τους είναι δύο σημεία: τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν το  $\varepsilon$ . Αν το  $\varepsilon$  είναι κάθετο στο επίπεδό τους, αλλά όχι κάθετο στις  $a$ ,  $\beta$  τότε οι ευθείες προβάλλονται στην ίδια ευθεία του  $\varepsilon$ . Στην περίπτωση που δεν συμβαίνουν τα παραπάνω (Σχήμα 9.1.7), παίρνοντας ένα σημείο  $X$  στην  $a$  και ένα  $Y$  στη  $\beta$  και προβάλλοντάς τα στο  $\varepsilon$ , ορίζουμε τα κάθετα στο  $\varepsilon$  επίπεδα που περιέχουν τις προβολές  $a'$  και  $\beta'$  των δύο ευθειών. Τα δύο αυτά επίπεδα, ως περιέχοντα δύο ζεύγη παραλλήλων ευθειών είναι παράλληλα (Πρόταση 8.2.2) άρα οι  $a'$ ,  $\beta'$  κατά τις οποίες τέμνουν το  $\varepsilon$  θα είναι παράλληλες (Πρόταση 8.2.3), ο.ε.δ.

**Πόρισμα 9.1.1** Η προβολή ενός παραλληλογράμμου του επιπέδου  $\varepsilon$  σε ένα άλλο επίπεδο  $\zeta$ , που δεν είναι κάθετο στο  $\varepsilon$ , είναι ένα παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 9.1.8: Προβολή ίσων τριγώνων σε ίσα τρίγωνα

**Πόρισμα 9.1.2** Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  περιεχόμενα σε επίπεδο  $\alpha$  που είναι ίσα και με παράλληλες πλευρές προβάλλονται σε επίπεδο  $\beta$ , μη-κάθετο στο  $\alpha$ , σε δύο τρίγωνα  $A'B'\Gamma'$  και  $\Delta'E'Z'$  που είναι επίσης ίσα και με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα αφού το παραλληλόγραμμο λ.χ.  $B\Gamma ZE$  (Σχήμα 9.1.8), που ορίζεται από δύο ίσες και παράλληλες πλευρές των τριγώνων στο  $\alpha$ , θα προβάλλεται σε παραλληλόγραμμο  $B'\Gamma'Z'E'$ , ορίζοντας ίσες και παράλληλες πλευρές  $B'\Gamma'$  και  $E'Z'$ , ο.ε.δ.

**Πόρισμα 9.1.3** Δύο πολύγωνα  $AB\Gamma\Delta E\dots$ ,  $ΠΡ\Sigma T\dots$ , περιεχόμενα σε επίπεδο  $\alpha$  που είναι ίσα και με παράλληλες πλευρές προβάλλονται σε επίπεδο  $\beta$ , μη-κάθετο στο  $\alpha$ , σε δύο πολύγωνα  $A'B'\Gamma'\Delta'E'\dots$ ,  $Π'Ρ'\Sigma'T'\dots$ , που είναι επίσης ίσα και με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα διαιρώντας τα δύο πολύγωνα σε τρίγωνα και προβάλλοντας, ο.ε.δ.

**Άσκηση 9.1.2** Δείξε ότι η προβολή  $M'$  του μέσου  $M$  ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  σε επίπεδο  $\varepsilon$  είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $A'B'$ , όπου  $A'$  και  $B'$  οι προβολές των  $A$  και  $B$  στο επίπεδο.

**Άσκηση 9.1.3** Εάν  $A'B'\Gamma'$  είναι η προβολή τριγώνου  $AB\Gamma$  στο επίπεδο  $\varepsilon$ , δείξε ότι η προβολή του κέντρου βάρους του  $AB\Gamma$  είναι το κέντρο βάρους του  $A'B'\Gamma'$ .

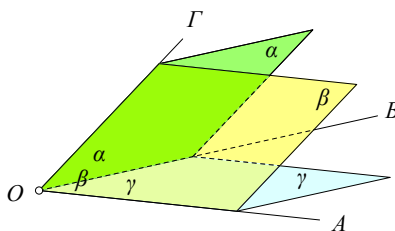
**Άσκηση 9.1.4** Εάν η ευθεία  $\varepsilon$  δεν είναι ορθογώνια στο επίπεδο  $\alpha$  και  $\omega$  είναι μια γωνία  $0 < \omega < \pi/2$ , δείξε ότι υπάρχουν δύο επίπεδα περιέχοντα την  $\varepsilon$  και σχηματίζοντα με το  $\alpha$  διέδρες γωνίες ίσες με  $\omega$ . Κατασκεύασε αυτά τα επίπεδα και τη διχοτόμο της διέδρου που σχηματίζουν.

## 9.2 Τρίεδρες γωνίες

Πάσαι όσοι μεγάλοι των τεχνών, προσδέονται  
αδολεσχίας και μετεωρολογίας φύσεως.

Πλάτων, Φαίδρος 54

Τρεις ημιευθείες  $OA$ ,  $OB$ ,  $OG$ , διερχόμενες από κοινό σημείο  $O$  και μη περιεχόμενες σε ένα επίπεδο, ορίζουν ανά δύο, επίπεδα και δημιουργούν στερεό σχήμα, που χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη. Από τα



Σχήμα 9.2.1: Τρίεδρος γωνία

δύο αυτά μέρη το ένα είναι κυρτό (δηλαδή για δύο σημεία  $X$ ,  $Y$  περιεχόμενα σε αυτό το μέρος και ολόκληρο το τμήμα  $XY$  περιέχεται στο ίδιο μέρος) και το άλλο είναι μη-κυρτό.

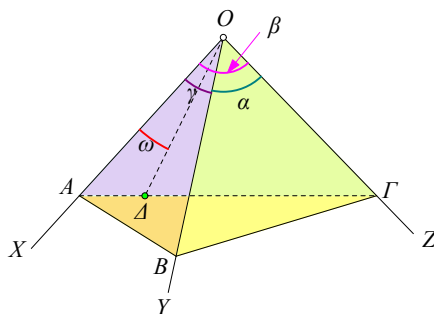
Επιλέγοντας ένα εξ αυτών των μερών, συνήθως το κυρτό, ορίζεται μια **τρίεδρος γωνία** (Σχήμα 9.2.1). Το μέρος του χώρου που επιλέγεται λέγεται **εσωτερικό** της τριέδρου. Οι ημιευθείες που ορίζουν την τριέδρο λέγονται **ακμές** της τριέδρου και οι γωνίες  $\alpha = \widehat{BO\Gamma}$ ,  $\beta = \widehat{\Gamma O A}$ ,  $\gamma = \widehat{A O B}$  που



σχηματίζονται μεταξύ αυτών λέγονται **έδρες** της τριέδρου. Συχνά ονομάζουμε έδρες και τα επίπεδα στα οποία περιέχονται αυτές οι γωνίες.

Οι διέδρες γωνίες με ακμές τις ευθείες  $OA, OB$  και  $OG$ , λέγονται **διέδρες της τριέδρου** και συμβολίζονται αντίστοιχα με  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ . Συχνά με το ίδιο γράμμα συμβολίζουμε και το μέτρο της γωνίας. Έτσι στις διάφορες προτάσεις παρακάτω τα  $a, \beta$  και  $\gamma$  μπορεί να συμβολίζουν τις έδρες ή και τα μέτρα των εδρών της τριέδρου. Ανάλογα τα  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$  μπορεί να συμβολίζουν τις διέδρες ή και τα μέτρα αυτών, που λαμβάνονται μετρώντας τις γωνίες που αποτεμνουν οι διέδρες αυτές σε επίπεδα κάθετα στις ακμές τους. Δύο τριέδρες  $\widehat{OAB\Gamma}$  και  $\widehat{O'A'B'\Gamma'}$  λέγονται **ίσες** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.

**Θεώρημα 9.2.1** Σε κάθε τριέδρο  $\widehat{OAB\Gamma}$  το άθροισμα δύο εδρών της είναι μεγαλύτερο της τρίτης.



Σχήμα 9.2.2: Ανισότητες εδρών

*Απόδειξη:* Υπόθεσε ότι η  $\beta = \widehat{XOZ}$  είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις έδρες  $a = \widehat{YOZ}$ ,  $\beta = \widehat{XOZ}$ ,  $\gamma = \widehat{ZOX}$ . Θα δείξουμε ότι  $\beta < a + \gamma$ . Πάρε τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  επί των ακμών  $OY$  και  $OZ$  αυθαίρετα. Κατόπιν σχημάτισε στο επίπεδο  $XOZ$  το τρίγωνο  $\Delta O\Gamma$  έτσι ώστε να είναι ίσο με το  $BO\Gamma$  και προέκτεινε τη  $\Delta\Gamma$  μέχρι το σημείο τομής της  $A$  με την τρίτη ακμή. Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα τρίγωνα  $ABO$  και  $\Delta O\Gamma$  έχουν την  $AO$  κοινή και τις  $BO$  και  $\Delta O$  ίσες. Επίσης από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|\Delta\Gamma| = |\Delta O| + |O\Gamma| < |AB| + |B\Gamma|.$$

Όμως  $|\Delta\Gamma| = |B\Gamma| \Rightarrow |\Delta O| < |AB|$ . Από το Πόρισμα 1.10.10 η γωνία

$$\omega = \widehat{AO\Delta} < \widehat{AOB} \Leftrightarrow \widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma} < \widehat{AOB}, \quad \text{ο.ε.δ.}$$

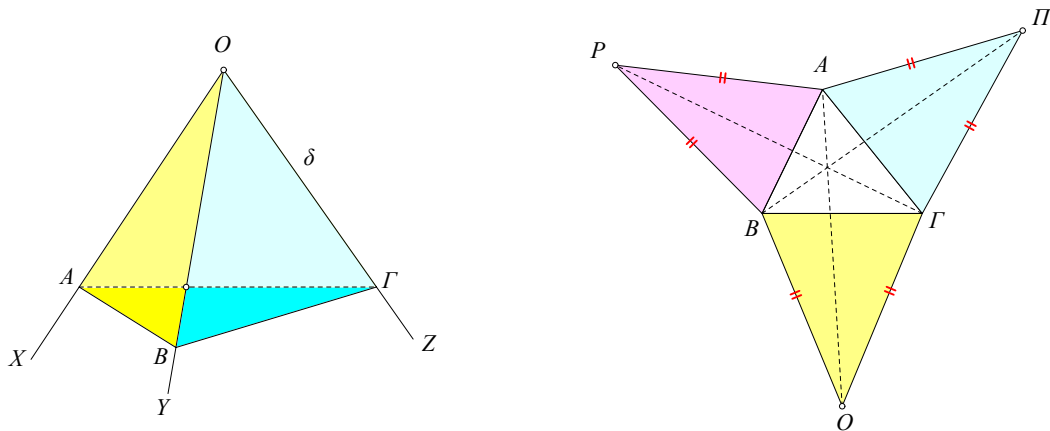
**Θεώρημα 9.2.2** Σε κάθε τριέδρο  $\widehat{OAB\Gamma}$  το άθροισμα των εδρών της είναι μικρότερο του  $2\pi$ .

*Απόδειξη:* Θεώρησε τυχόντα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  επί των ακμών αντίστοιχα  $OX, OY$  και  $OZ$  της τριέδρου (σχήμα 9.2.2). Σχηματίζονται άλλες τρεις τριέδρες με κορυφές στα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$ . Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση στις τρεις αυτές τριέδρους έχουμε

$$\begin{aligned} a + \beta + \gamma &= (\pi - \widehat{OB\Gamma} - \widehat{O\Gamma B}) + (\pi - \widehat{OA\Gamma} - \widehat{O\Gamma A}) + (\pi - \widehat{OAB} - \widehat{OBA}) \\ &= 3\pi - (\widehat{OB\Gamma} + \widehat{OBA}) - (\widehat{O\Gamma B} + \widehat{O\Gamma A}) - (\widehat{OA\Gamma} + \widehat{OAB}) \\ &< 3\pi - (\widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} + \widehat{\Gamma AB}) = 3\pi - \pi = 2\pi, \quad \text{ο.ε.δ.} \end{aligned}$$

Παίρνοντας ίσα ευθύγραμμα τμήματα  $|OA| = |OB| = |OG| = \delta$  επί των ακμών  $OX, OY, OZ$  της τριέδρου, αντίστοιχα, σχηματίζουμε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το οποίο, μαζί με το μήκος  $\delta$ , περιγράφει πλήρως την τριέδρο και μάλιστα με τη βοήθεια ενός επιπέδου σχήματος που λέγεται **ανάπτυγμα τριέδρου**. Το σχήμα αυτό προκύπτει κόβοντας την τριέδρο κατά μήκος των ακμών της και περιστρέφοντας τα ισοσκελή τρίγωνα περί τις βάσεις τους, που είναι οι πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ , έως ότου τα επίπεδά των ισοσκελών συμπέσουν με αυτό του  $AB\Gamma$ . Το σχήμα (9.2.3) που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή τριέδρου από χαρτί. Αρκεί να περιστρέψουμε, αντίστροφα προς



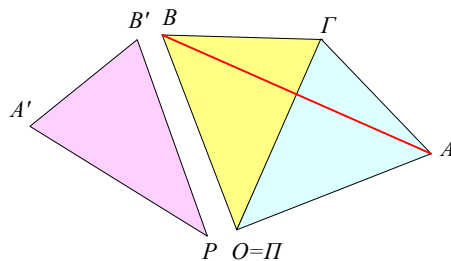


Σχήμα 9.2.3: Ανάπτυγμα τριέδρου

την προηγούμενη φορά, τα ισοσκελή τρίγωνα περί τις βάσεις τους, έως ότου οι τρεις κορυφές τους συμπέσουν στο ίδιο σημείο του χώρου  $O$ , που ορίζει τότε την κορυφή της τριέδρου. Οι επόμενες δύο προτάσεις δείχνουν ότι οι ανισότητες των δύο προηγούμενων προτάσεων είναι και ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι μια τέτοια διαδικασία οδηγεί πάντοτε σε τριέδρου.

**Λήμμα 9.2.1** Δοθέντων τριών ισοσκελών τριγώνων με ίσα σκέλη, των οποίων οι κορυφές λαμβανόμενες ανά δύο έχουν άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο της τρίτης, μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο, του οποίου οι πλευρές να συμπίπτουν με τις βάσεις των ισοσκελών.

Απόδειξη: Έστω ότι τα τρία τρίγωνα με ίσα σκέλη είναι τα  $OBF$ ,  $ΠΓΑ$  και  $PA'B'$ . Τοποθετούμε δύο εξ αυτών λ.χ. τα δύο πρώτα έτσι ώστε οι γωνίες στις κορυφές τους να γίνουν εφεξής. Από την τριγωνική



Σχήμα 9.2.4: Τριεδρική ανισότητα

ανισότητα έχουμε ότι

$$|BF| + |ΓA| > |BA|.$$

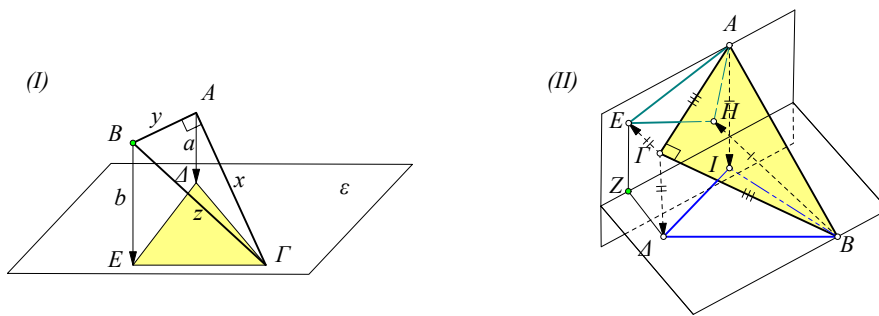
Τα τρίγωνα  $PA'B'$  και  $OAB$  είναι ισοσκελή με το ίδιο μήκος σκέλους και εξ υποθέσεως έχουμε ότι οι γωνίες τους ικανοποιούν την

$$\widehat{A'PB'} < \widehat{BOA}.$$

Από το Θεώρημα 1.10.4 συνάγεται ότι  $|A'B'| < |AB| < |BF| + |ΓA|$ , συνεπώς, ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα και κατασκευάζεται τρίγωνο με πλευρές τις βάσεις των ισοσκελών (Θεώρημα 2.4.1), ο.ε.δ.

**Θεώρημα 9.2.3** Για κάθε τριάδα γωνιών  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  με  $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$  και τέτοια ώστε η μεγαλύτερη εξ αυτών να είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων, υπάρχει τριέδρος με έδρες τις τρεις αυτές γωνίες.

Απόδειξη: Κατασκεύασε ισοσκελή τρίγωνα με γωνία στην κορυφή αντίστοιχα  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  και τα σκέλη τους όλα ίσα με αυθαίρετο θετικό αριθμό  $\delta$ . Οι υποθέσεις για τις γωνίες συνεπάγονται, κατά το



Σχήμα 9.18.15: Προβολή σε ισόπλευρο

Προβολή σε δύο ισόπλευρα

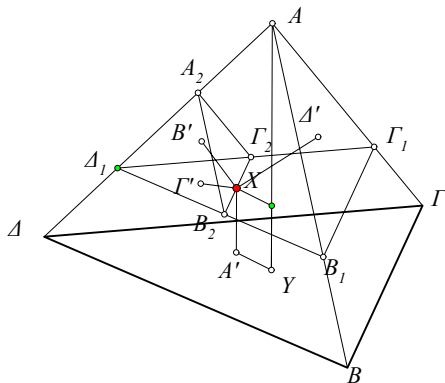
προβάλλονται αντίστοιχα στις κορυφές  $\{A, E\}$  του ισοπλεύρου  $\Gamma\Delta E$ . Προκύπτουν οι σχέσεις:

$$z^2 = |B\Gamma|^2 = x^2 + y^2, |BE|^2 = z^2 - d^2, |A\Delta|^2 = x^2 - d^2 \Rightarrow 4(x^2 - d^2)(y^2 - d^2) = d^4,$$

$$b = |BE| = (2a^2 + d^2)/(2a), \text{ όπου } a = |A\Delta|.$$

**Άσκηση 9.18.38** Ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με τα άκρα της υποτεινουσας  $\{A, B\}$  σε δύο τεμνόμενα επίπεδα  $\{a, \beta\}$ , προβάλλεται κάθετα σε αυτά τα επίπεδα και οι προβολές είναι ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές μήκους  $d$ . Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Υπόδειξη: Εάν  $\{I, H\}$  είναι αντίστοιχα οι προβολές των  $\{A, B\}$  στα επίπεδα (Σχήμα 9.18.15-II), τότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $\{ABI, ABH\}$ , θα έχουν κατά την υπόθεση, κοινή υποτεινουσα και τις καθέτους  $|IB| = |HA| = d$ . Άρα θα είναι ίσα. Εφαρμόζοντας κατόπιν την προηγούμενη άσκηση, βλέπουμε ότι για  $b = |AI| = |BH|$  και τα  $a = |\Gamma\Delta| = |\Gamma E|$ . Συνάγεται ότι και τα ορθογώνια τρίγωνα  $\{\Gamma\Delta B, \Gamma E A\}$  είναι ίσα, άρα το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. Για τον υπολογισμό του  $|AB|$  αρκεί να εφαρμόσουμε τη σχέση των καθέτων πλευρών της προηγούμενης άσκησης για  $x = y$ .



Σχήμα 9.18.16: Σταθερό άθροισμα αποστάσεων του  $X$  από τις έδρες

**Άσκηση 9.18.39** Δείξε ότι το άθροισμα των αποστάσεων σημείου  $X$  του εσωτερικού κανονικού τετραέδρου  $AB\Gamma\Delta$ , από τις έδρες του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του τετραέδρου.

Υπόδειξη: Αν  $\{XA', XB', X\Gamma', X\Delta'\}$  οι κάθετες από το  $X$  στις έδρες (Σχήμα 9.18.16), τότε το μήκος  $|XA'|$  δεν αλλάζει όταν το  $X$  κινείται στο επίπεδο  $B_1\Gamma_1\Delta_1$  το παράλληλο του  $B\Gamma\Delta$ , το διερχόμενο δια του  $X$ . Παρόμοια το μήκος  $|X\Delta'|$  δεν αλλάζει όταν το  $X$  κινείται στο επίπεδο  $A_2B_2\Gamma_2$  το παράλληλο του  $AB\Gamma$  και διερχόμενο δια του  $X$ .

## 10.1 Εμβαδά στο χώρο

Για να γράψει το σημαντικό βιβλίο, το μόνο αληθινό, ένας καλός συγγραφέας, δεν χρειάζεται να το επινοήσει, αφού ήδη υπάρχει μέσα στον καθένα από 'μας, αλλά να το μεταφράσει.

*Marcel Proust, Σε αναζήτηση του χαμένου χρόνου*

Το εμβαδόν πολυεδρικών επιφανειών στηρίζεται στους ορισμούς και τις ιδιότητες του εμβαδού επιπέδων σχημάτων. Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές μήκους  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι  $2(a\beta + \beta\gamma + \gamma a)$ , το εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου πλευράς  $\delta$  είναι  $6\delta^2$  και ανάλογα υπολογίζονται τα εμβαδά όλων των πολυέδρων προσθέτοντας τα εμβαδά των εδρών που τα αποτελούν. Το εμβαδόν των πολυέδρων λοιπόν δεν παρουσιάζει δυσκολίες και, επομένως, θεωρητικό ενδιαφέρον (δες ωστόσο τις ασκήσεις παρακάτω).

Εκεί που παρουσιάζονται δυσκολίες είναι στα εμβαδά καμπύλων επιφανειών, όπως ο κύλινδρος, ο κώνος, η σφαίρα, καθώς και τμημάτων αυτών των επιφανειών. Ο ορισμός του εμβαδού αυτών των επιφανειών ή/και τμημάτων τους με έναν γενικό τρόπο, παρόμοια με τον ορισμό μήκους γενικών καμπυλών είναι αντικείμενο της *Διαφορικής γεωμετρίας (εμβαδόν χωρίων επιφάνειας* [dC76, σ. 114], *στοιχείο όγκου υποποσπλαπτότητας* [Σπί948, σελ. 130]) και ξεπερνά τα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

Αποδεικνύεται ωστόσο ότι το εμβαδόν του κώνου, του κυλίνδρου και της σφαίρας μπορεί να ορισθεί ως όριο εμβαδών πολυέδρων εγγεγραμμένων σε αυτές τις επιφάνειες. Η διαδικασία είναι, στην ουσία, η ίδια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό του μήκους και του εμβαδού του κύκλου § 6.5.

Το **εμβαδόν κώνου** ορίζεται ως το όριο των εμβαδών κανονικών πυραμίδων εγγεγραμμένων στον κώνο. Παρόμοια το **εμβαδόν του κυλίνδρου** ορίζεται ως όριο κανονικών πρισμάτων εγγεγραμμένων στον κύλινδρο. Σε αυτά τα δύο σχήματα το εμβαδόν των βάσεων είναι αυτό του κύκλου. Επομένως, το ενδιαφέρον εστιάζεται στον υπολογισμό του εμβαδού της *παράπλευρης επιφάνειας*.

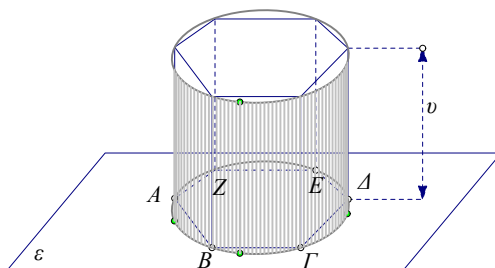
Ως **παράπλευρο εμβαδόν** του κυλίνδρου θεωρούμε το όριο των παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πρισμάτων των εγγεγραμμένων στον κύλινδρο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών τους (Σχήμα 10.1.0). Ας συμβολίζουμε πάλι με  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$  τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην § 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο ( $\Pi_1$ ) εγγεγραμμένο στον κύκλο  $\kappa$  και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον  $\kappa$  και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Εάν  $p_\nu$  συμβολίζει την περίμετρο του  $\Pi_\nu$  τότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κανονικού πρίσματος με βάση το  $\Pi_\nu$  είναι

$$u \cdot p_\nu,$$

όπου  $u$  το ύψος του πρίσματος. Από το Λήμμα 6.2.2 προκύπτει ότι η ακολουθία

$$u \cdot p_1, \quad u \cdot p_2, \quad u \cdot p_3, \dots$$

είναι αύξουσα. Και από το Λήμμα 6.2.3 προκύπτει ότι η ακολουθία είναι και φραγμένη, άρα κατά το Αξίωμα 6.1.1 η ακολουθία θα συγκλίνει. Το όριο ακριβώς αυτής της ακολουθίας ονομάζουμε παράπλευρο **εμβαδόν του κυλίνδρου**. Προκύπτει λοιπόν από τα προηγούμενα (Πόρισμα 6.3.1) η επόμενη πρόταση.



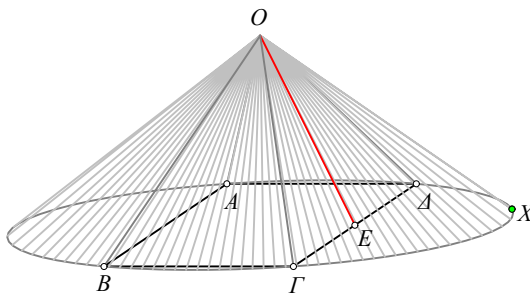
Σχήμα 10.1.1: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου

**Θεώρημα 10.1.1** *Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου είναι ίσο με*

$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot u,$$

όπου  $\rho$  η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και  $u$  το ύψος του.

Ο υπολογισμός του παράπλευρου εμβαδού του κώνου γίνεται με ανάλογο τρόπο. Ως **παράπλευρο**



Σχήμα 10.1.2: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώνου

**εμβαδόν** του κώνου θεωρούμε το όριο των παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πυραμίδων των εγγεγραμμένων στον κώνο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών τους. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κανονικού κώνου με βάση το  $\Pi_v$  είναι

$$\frac{1}{2} \cdot u_v \cdot p_v,$$

όπου  $u_v$  το ύψος της τριγωνικής έδρας του πρίσματος (όχι το ύψος του κώνου, ούτε η γενέτειρα, αλλά το μήκος του τμήματος όπως το  $OE$  στο σχήμα-10.1.2). Και πάλι διαπιστώνουμε εύκολα ότι η ακολουθία

$$\frac{1}{2} \cdot u_1 \cdot p_1, \quad \frac{1}{2} \cdot u_2 \cdot p_2, \quad \frac{1}{2} \cdot u_3 \cdot p_3, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη από τον αριθμό

$$\frac{1}{2} \cdot u \cdot (2\pi\rho),$$

όπου  $u = |OX|$  το μήκος της γενέτειρας του κώνου και  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου της βάσης του. Και πάλι κατά το Αξίωμα 6.1.1 η ακολουθία θα συγκλίνει. Το όριο ακριβώς αυτής της ακολουθίας ονομάζουμε παράπλευρο **εμβαδόν του κώνου**.

**Θεώρημα 10.1.2** *Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κώνου είναι ίσο με*

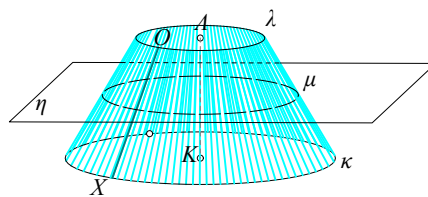
$$\epsilon = \pi \cdot u \cdot \rho,$$

όπου  $\rho$  η ακτίνα της βάσης του κώνου και  $u$  το μήκος της γενέτειράς του.

*Απόδειξη:* Σκιαγραφώ την απόδειξη γιατί δεν θέλω να μπω στις λεπτομέρειες για τα όρια. Δείχνουμε λοιπόν πρώτα ότι η ακολουθία

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνει και μάλιστα προς το  $u = |OX|$ . Για τις περιμέτρους  $p_n$  γνωρίζουμε ήδη ότι συγκλίνουν στο  $2\pi\rho$ . Για την ολοκλήρωση της απόδειξης χρειάζεται και ο κανόνας για τα όρια, σύμφωνα με τον οποίο *το όριο του γινομένου ακολουθιών που συγκλίνουν είναι το γινόμενο των ορίων*. Κατ' αυτόν λοιπόν τον κανόνα το όριο της ακολουθίας  $(u_n)(p_n)$  θα είναι το  $u \cdot (2\pi\rho)$  απ' όπου προκύπτει και ο τύπος του εμβαδού, ο.ε.δ.

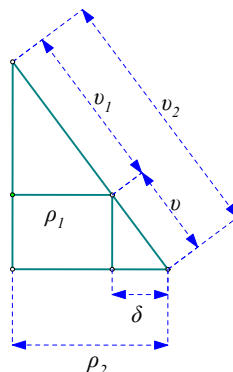


Σχήμα 10.1.3: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώλου κώνου

Ο υπολογισμός του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας κώλου κώνου ανάγεται στον αντίστοιχο υπολογισμό για κώνους. Η παράπλευρη επιφάνεια του κώλου κώνου μπορεί να θεωρηθεί ως η διαφορά της παράπλευρης του κώνου ως προς τη μεγάλη βάση (κύκλος  $\kappa$  στο σχήμα-10.1.3) μείον την παράπλευρη του κώνου ως προς τη μικρή βάση (κύκλος  $\lambda$  στο σχήμα-10.1.3). Εφαρμόζοντας τον τύπο έχουμε, συνεπώς, ότι το εμβαδόν δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = \pi(u_2\rho_2 - u_1\rho_1),$$

όπου  $\rho_1, \rho_2, u_1, u_2$  είναι τα μήκη γενέτειρας και ακτίνας βάσης των δύο κώνων των οποίων η διαφορά είναι ο κώλου κώνος.



Σχήμα 10.1.4: Τομή κώλου κώνου

Θέτοντας  $u = u_2 - u_1$ ,  $\delta = \rho_2 - \rho_1$  και αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u_2\rho_2 - u_1\rho_1 &= (u_1 + u)(\rho_1 + \delta) - u_1\rho_1 \\ &= u\rho_1 + u_1\delta + u\delta \\ &= u\rho_1 + \left(u\frac{\rho_1}{\delta}\right)\delta + u\delta \\ &= u(\rho_1 + \rho_1 + \delta) \\ &= u(\rho_1 + \rho_2). \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση στη μεσαία ισότητα προκύπτει από την ομοιότητα των αντιστοίχων ορθογώνιων τριγώνων. Το ημίθροισμα  $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$  είναι η ακτίνα της μεσαίας τομής του κώλου και έτσι έχουμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 10.1.1** Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώλου δίδεται από τον τύπο

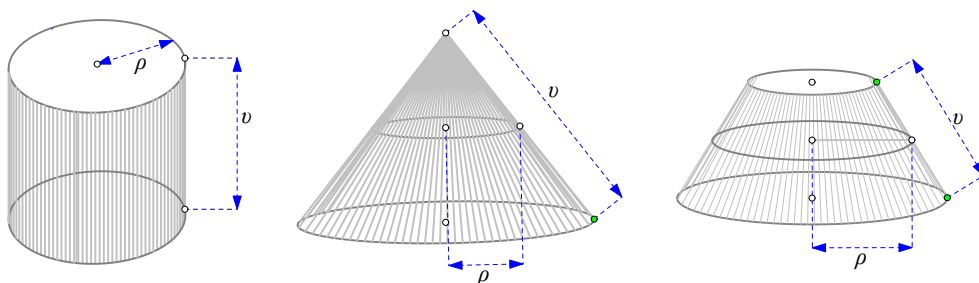
$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot u,$$

όπου  $\rho$  η ακτίνα της μεσαίας τομής του και  $u$  το μήκος της γενέτειράς του.

**Πόρισμα 10.1.1** Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου καθώς και κώλου δίδεται από τον τύπο

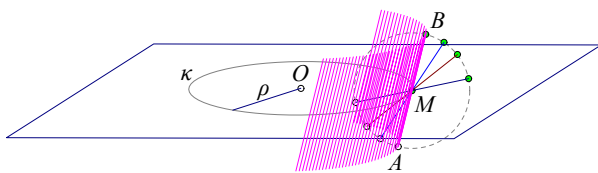
$$\epsilon = 2\pi\rho u,$$

όπου  $u$  το μήκος της γενέτειρας και  $\rho$  η ακτίνα της μεσαίας τομής του στερεού.



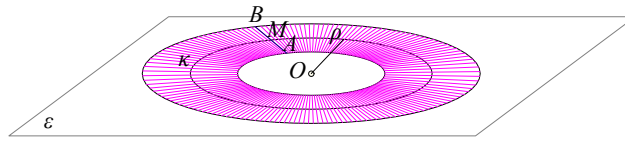
Σχήμα 10.1.5: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, ενιαίος τύπος

*Απόδειξη:* Το πόρισμα απλά ενοποιεί τα επιμέρους αποτελέσματα των τριών προηγούμενων προτάσεων βάσει της παρατήρησης ότι για τον κώνο η μεσαία τομή είναι ο κύκλος με ακτίνα το μισό της ακτίνας της βάσης, ενώ στον κύλινδρο η μεσαία τομή είναι κύκλος ίσος με αυτόν της βάσης, ο.ε.δ.



Σχήμα 10.1.6: Εμβαδόν παράπλευρης ανεξάρτητο της κλίσης του  $AB$

**Σχόλιο-1** Ο τελευταίος τύπος δείχνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  περιστρεφόμενο περί το μέσον του  $M$  παράγει παράπλευρη επιφάνεια κώλου με το ίδιο εμβαδόν, ανεξάρτητα της κλίσης του προς το επίπεδο του κύκλου περιστροφής  $\kappa$  (σχήμα-10.1.6). Όταν το  $AB$  είναι κάθετο στο επίπεδο του  $\kappa$  τότε η παράπλευρη επιφάνεια είναι αυτή ενός κυλίνδρου. Όταν το  $AB$  είναι στο επίπεδο του  $\kappa$  και μικρότερο από την ακτίνα του  $\kappa$ , τότε παράγεται ένας επίπεδος κυκλικός δακτύλιος (σχήμα-10.1.7).

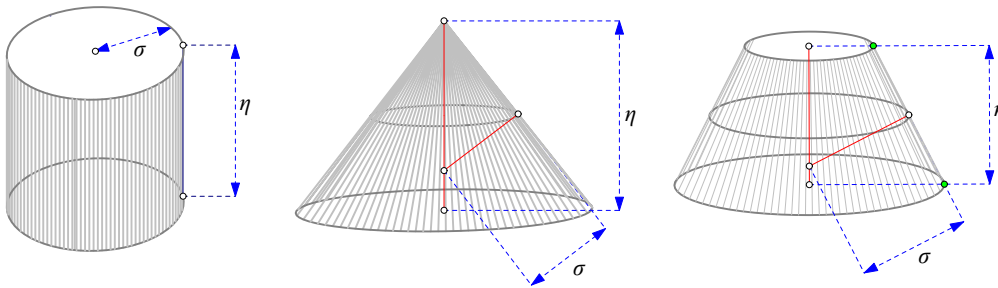


Σχήμα 10.1.7: Δακτύλιος όταν το AB περιέχεται στο ε

**Πόρισμα 10.1.2** Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου καθώς και κολουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

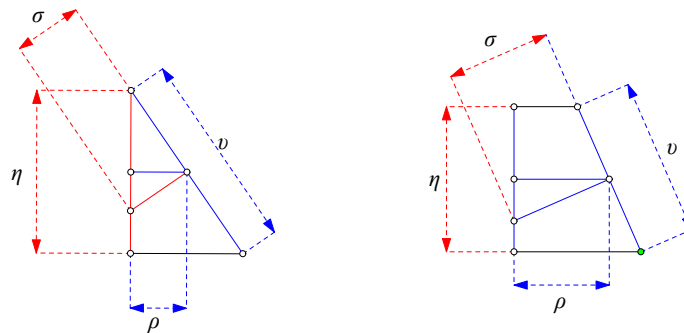
$$ε = 2πση,$$

όπου σ το μήκος του καθέτου τμήματος στο μέσον της γενέτειρας μέχρι τον άξονα και η το ύψος του στερεού.



Σχήμα 10.1.8: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, ενιαίος τύπος II

Απόδειξη: Απόδειξη διά του σχήματος. Στην περίπτωση του κυλίνδρου το πόρισμα ταυτίζεται με το προηγούμενο. Στις περιπτώσεις του κώνου και του κολουρου κώνου, από την ομοιότητα των



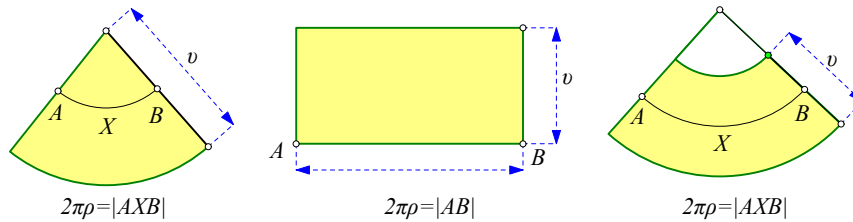
Σχήμα 10.1.9: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, ενιαίος εναλλακτικός τύπος

ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές (ρ, σ) και (η, υ) αντίστοιχα προκύπτει

$$\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\eta}{\upsilon} \Rightarrow \rho\upsilon = \sigma\eta.$$

Αντικαθιστώντας το ρυ στον τύπο του προηγούμενου πορίσματος αποδεικνύουμε το ζητούμενο, ο.ε.δ.

**Σχόλιο-2** Αν χρησιμοποιήσουμε τα περί αναπτύγματος που αναφέρθηκαν στις § 9.9, § 9.8 και ειδικά το ότι η διαδικασία του αναπτύγματος διατηρεί μήκη και εμβαδά, οι τύποι, που αποδείχθηκαν εδώ με τη χρήση ορίων, ανάγονται απ' αυτήν τη σκοπιά σε απλούς υπολογισμούς επιπέδων εμβαδών. Το επόμενο σχήμα δείχνει τα αναπτύγματα κώνου, κυλίνδρου και κολουρου κώνου και τα εμβαδά τους.

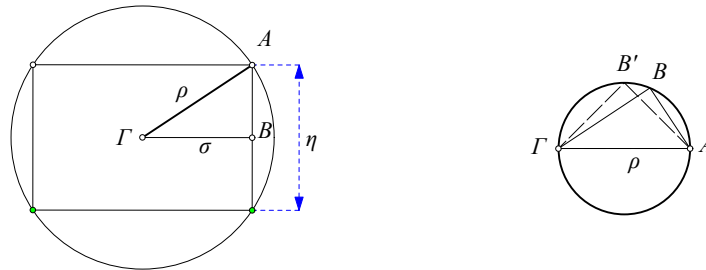


Σχήμα 10.1.10: Εμβαδόν μέσω αναπτύγματος

Και στις τρεις περιπτώσεις το  $v$  είναι το μήκος της γενέτειρας και το  $\rho$  είναι η ακτίνα της μέσης τομής και ευρίσκεται από την αντίστοιχη ισότητα που αναγράφεται. Σε αυτήν το δεξί μέλος είναι, στις περιπτώσεις του κώνου και του κώλου κώνου, το μήκος τόξου  $AXB$  και στην περίπτωση του κυλίνδρου το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

**Άσκηση 10.1.1** Δείξε ότι από τα παραλληλεπίπεδα που εγγράφονται σε δεδομένο κύλινδρο αυτό με βάση το τετράγωνο έχει τη μέγιστη δυνατή παράπλευρη επιφάνεια.

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την Άσκηση 2.13.8.



Σχήμα 10.1.11: Εγγεγραμμένος κύλινδρος μεγίστου παράπλευρου εμβαδού

**Άσκηση 10.1.2** Βρες τον κύλινδρο με τη μεγίστου εμβαδού παράπλευρη επιφάνεια που εγγράφεται σε μία σφαίρα.

Υπόδειξη: Το  $\sigma \cdot \frac{\eta}{2}$  μεγιστοποιείται όταν  $\sigma = \frac{\eta}{2}$  (Σχήμα 10.1.11).

**Άσκηση 10.1.3** Δείξε ότι δοθέντων δύο επιπέδων  $\alpha$  και  $\beta$  και τριγώνου  $AB\Gamma$  του επιπέδου  $\alpha$ , έτσι ώστε η πλευρά του  $B\Gamma$  να είναι επί της τομής των  $\alpha$  και  $\beta$ , το εμβαδόν της προβολής  $A'B'\Gamma'$  του  $AB\Gamma$  στο  $\beta$  είναι

$$\epsilon(A'B'\Gamma') = \sigma\upsilon\upsilon(\omega)\epsilon(AB\Gamma),$$

όπου  $\omega$  η γωνία των επιπέδων  $\alpha$  και  $\beta$  (Σχήμα 10.1.12-I).

**Άσκηση 10.1.4** Δείξε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει και όταν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει την πλευρά του  $B\Gamma$  παράλληλο προς την τομή των  $\alpha$  και  $\beta$ .

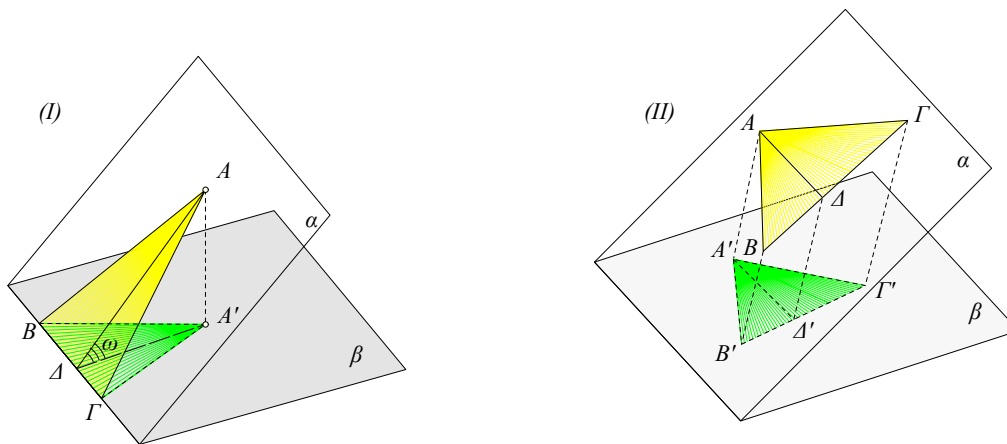
Υπόδειξη: Εφάρμοσε το Πόρισμα 9.1.2 και μετάφερε το  $AB\Gamma$  στο επίπεδο  $\alpha$  παράλληλα εαυτώ έτσι ώστε η ακμή του  $B\Gamma$  να συμπίσει με την τομή των  $\alpha$ ,  $\beta$ .

**Άσκηση 10.1.5** Δείξε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  του επιπέδου  $\alpha$  και την προβολή του  $A'B'\Gamma'$  σε επίπεδο  $\beta$ . Δηλαδή

$$\epsilon(A'B'\Gamma') = \sigma\upsilon\upsilon(\omega)\epsilon(AB\Gamma),$$

όπου  $\omega$  η γωνία των επιπέδων  $\alpha$  και  $\beta$  (Σχήμα 10.1.12-II).





Σχήμα 10.1.12: Προβολή τριγώνου σε άλλο επίπεδο

*Υπόδειξη:* Από μία κορυφή του  $AB\Gamma$  λ.χ. την  $A$  φέρε παράλληλο  $A\Delta$  προς την τομή των  $\alpha$  και  $\beta$ . Εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση στα δύο τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  και πρόσθεσε ή αφάιρεσε, ανάλογα με το αν το  $\Delta$  είναι μέσα ή έξω από το  $B\Gamma$ .

**Άσκηση 10.1.6** Δείξε ότι για κάθε κυρτό πολύγωνο  $AB\Gamma\Delta\dots$  του επιπέδου  $\alpha$  και την προβολή του  $A'B'\Gamma'\Delta'\dots$  στο επίπεδο  $\beta$  ισχύει η σχέση μεταξύ των εμβαδών τους:

$$\epsilon(A'B'\Gamma'\Delta'\dots) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma\Delta\dots),$$

όπου  $\omega$  η γωνία των επιπέδων  $\alpha$  και  $\beta$ .

*Υπόδειξη:* Φέρε από μία κορυφή του  $AB\Gamma\Delta\dots$  τις διαγώνιες και διαίρεσέ το σε τρίγωνα. Κατόπιν εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση και πρόσθεσε.

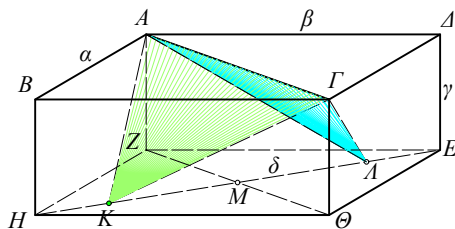
## 10.2 Εμβαδόν της σφαίρας

Το πρώτο ήταν να μην παραδέχομαι ποτέ τίποτα για αληθινό, αν δεν το ξέρω ολοφάνερα αληθινό.

*Καρτέσιος, Λόγος περί Μεθόδου, β' μέρος*

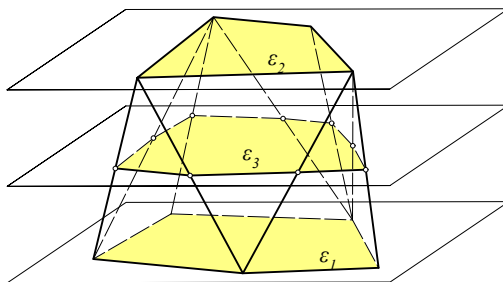
Το εμβαδόν της σφαίρας υπολογίζεται μέσω των εμβαδών στερεών που προκύπτουν από εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα. Θεωρούμε ότι η σφαίρα παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου  $\kappa$  περί διάμετρο  $AE$  αυτού. Μια προσέγγιση της σφαίρας παράγεται από περιστροφή κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο  $\kappa$ . Ας συμβολίζουμε πάλι με  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$  τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην § 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο ( $\Pi_1$ ) εγγεγραμμένο στον κύκλο  $\kappa$  και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον  $\kappa$  και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο, ενώ όλα έχουν κοινή τη διαγώνιο  $AE$  που είναι και διάμετρος του κύκλου  $\kappa$ . Κατά την περιστροφή ενός τέτοιου πολυγώνου περί τη διάμετρο  $AE$  παράγεται μία επιφάνεια που αποτελείται από κώνους και κόλουργους κώνους. Η παράπλευρη επιφάνεια αυτών των κώνων και κόλουργων κώνων υπολογίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και σύμφωνα με τους τύπους που αποδείχθηκαν (Πόρισμα 10.1.2) δίδει μια συνολική επιφάνεια, που στην περίπτωση του οκταγώνου ( $\Pi_2$  κατά τους συμβολισμούς μας, σχήμα-10.2.1) είναι

$$\epsilon_2 = (2\pi \cdot \eta_2) \cdot (|AK| + |K\Lambda| + |\Lambda M| + |ME|) = (2\pi \cdot \eta_2) \cdot |AE| = (2\pi \cdot \eta_2)(2\rho)$$



Σχήμα 10.11.8: Τετράεδρο εντός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

**Άσκηση 10.11.14** Το τετράεδρο ΑΓΚΛ έχει δύο απέναντι ακμές επί των διαγωνίων δύο απέναντι εδρών του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΕΖΗΘ (Σχήμα 10.11.8). Η μία ακμή του ταυτίζεται με τη διαγώνιο ΑΓ και η άλλη, μήκους δ, περιέχεται στη διαγώνιο ΗΕ και είναι συμμετρική ως προς το κέντρο Μ της ΗΕ. Υπολόγισε τον όγκο του τετράεδρου συναρτήσει των μηκών των ακμών α, β, γ του παραλληλεπιπέδου, καθώς και του μήκους δ.



Σχήμα 10.11.9: Όγκος κυρτού πολυέδρου με δύο παράλληλες έδρες (πρισματοειδές)

**Άσκηση 10.11.15** Δείξε ότι ο όγκος κυρτού πολυέδρου, του οποίου οι κορυφές περιέχονται σε δύο παράλληλα επίπεδα σε απόσταση υ (συνχά ένα τέτοιο αναφέρεται ως **πρισματοειδές**) ισούται με

$$o = \frac{υ}{6}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + 4\epsilon_3),$$

όπου  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  το εμβαδόν των παραλλήλων εδρών του και  $\epsilon_3$  το εμβαδόν της μέσης τομής του της παράλληλης προς τα επίπεδα (Σχήμα 10.11.9).

Υπόδειξη: ([Sha86, σ. 9]) Δείξε πρώτα ότι ο τύπος ισχύει για τετράεδρα. Κατόπιν διαίρεσε το πολυέδρο σε τετράεδρα και πρόσθεσε τους όγκους.

**Άσκηση 10.11.16** Δίδεται ευθεία ε εκτός της σφαίρας Σ. Να αχθούν επίπεδα  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  διερχόμενα διά της ε, τα οποία τέμνουν τη σφαίρα σε  $n + 1$  μέρη που έχουν τον ίδιο όγκο.

**Άσκηση 10.11.17** Δείξε ότι το εμβαδόν ε ενός σφαιρικού ισοπλεύρου τριγώνου σφαίρας ακτίνας ρ και η γωνία του α συνδέονται με τον τύπο

$$a = \frac{\epsilon}{3\rho^2} + \frac{\pi}{3}.$$

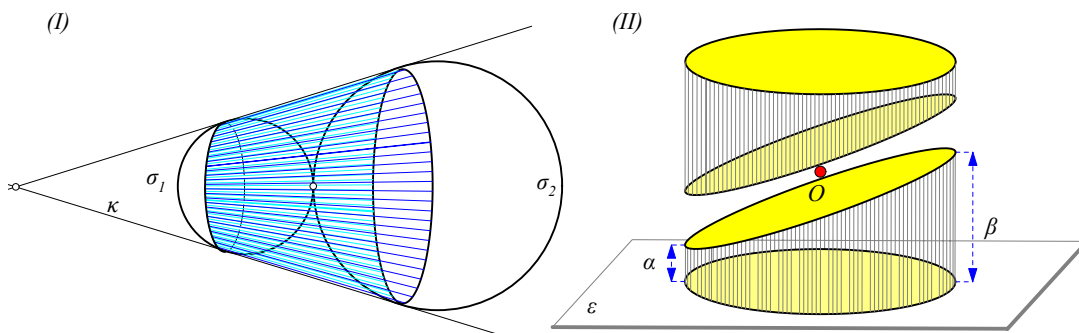
Κατασκεύασε ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες 90°. (Δες και την Άσκηση 9.14.4)

Ο επόμενος πίνακας καταγράφει το λόγο του εμβαδού της επιφάνειας  $\epsilon(\Sigma)/a^2$ , καθώς και το λόγο του όγκου  $o(\Sigma)/a^3$ , αντίστοιχα, προς το τετράγωνο/κύβο της ακμής του πλατωνικού σώματος.

**Άσκηση 10.11.18** Δείξε την ισχύ των στοιχείων των τριών πρώτων γραμμών του επόμενου πίνακα.

Πλατωνικό σώμα $\Sigma$	$\epsilon(\Sigma)/a^2$	$\sigma(\Sigma)/a^3$
Τετράεδρο	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{12} \sqrt{2}$
Κύβος	6	1
Οκτάεδρο	$2\sqrt{3}$	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$
Δωδεκάεδρο	$3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})$
Εικοσάεδρο	$5\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})$

**Άσκηση 10.11.19** Δύο σφαίρες διαφορετικών ακτίνων  $\{\sigma_1(r_1), \sigma_2(r_2)\}$  εφάπτονται εξωτερικά και ο κώνος  $\kappa$  εφάπτεται και των δύο. Υπολόγισε τον όγκο της εξωτερικής περιοχής των σφαιρών και εσωτερικής του κώνου που περιλαμβάνεται μεταξύ των κύκλων επαφής των σφαιρών και του κώνου συναρτήσει των



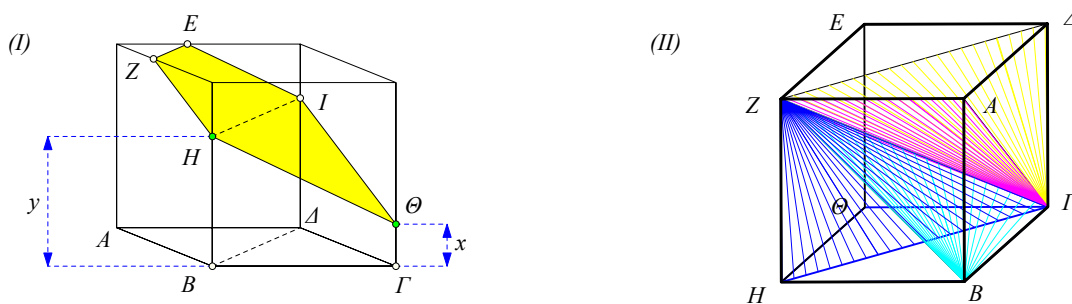
Σχήμα 10.11.10: Μεταξύ δύο σφαιρών

Πλάγια τομή κυλίνδρου

ακτίνων  $\{r_1, r_2\}$  (Σχήμα 10.11.10-I).

**Άσκηση 10.11.20** Το ανάλογο με το προηγούμενο πρόβλημα για σφαίρες διαφορετικών ακτίνων  $\{\sigma_1(r_1), \sigma_2(r_2)\}$  με  $r_1 + r_2 < d$  ( $d$  η απόσταση των κέντρων) και τον εφαιτόμενο και στις δύο κώνο  $\kappa$ . Υπολόγισε τον όγκο της εξωτερικής περιοχής των σφαιρών και εσωτερικής του κώνου, περιεχόμενης μεταξύ των κύκλων επαφής των σφαιρών και του κώνου, συναρτήσει των  $\{r_1, r_2, d\}$ .

**Άσκηση 10.11.21** Ορθή κυκλική κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $r$  τέμνεται με επίπεδο  $\epsilon$  ορθογώνιο στον άξονά της καθώς και με επίπεδο  $\epsilon'$  πλάγιο προς τον άξονα. Προκύπτει το στερεό  $\Sigma$  που περιορίζεται από την κυλινδρική επιφάνεια και τα δύο επίπεδα, του οποίου έστω  $\beta$  το μεγαλύτερο μήκος γενέτειρας και  $a$  το μικρότερο (Σχήμα 10.11.10-II). Βρες μια μέθοδο υπολογισμού της παράπλευρης επιφάνειας του στερεού, καθώς και του όγκου του, συναρτήσει των  $\{r, a, \beta\}$ . Δείξε ότι αυτά τα δύο μεγέθη δεν μεταβάλλονται όταν τα  $\{a, \beta\}$  αλληλλάζουν, έτσι ώστε το άθροισμά τους να παραμένει σταθερό.



Σχήμα 10.11.11: Πενταγωνική τομή κύβου

Διεδρη γωνία

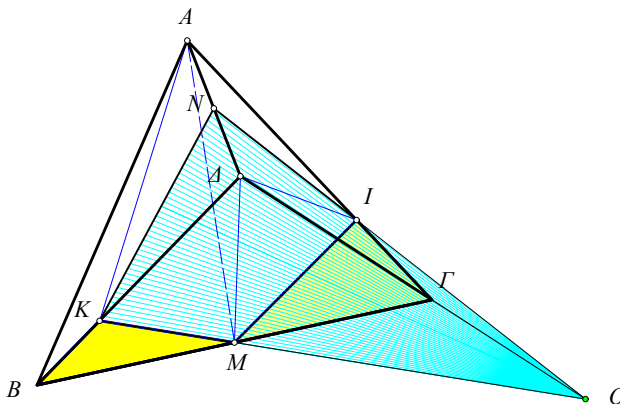
**Άσκηση 10.11.22** Δίδεται κύβος με βάση  $ABΓΔ$  (Σχήμα 10.11.11-I). Στην κάθετη ακμή από το  $Γ$  παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $ΓΘ$  μήκους  $x$ . Από το σημείο  $H$  της κάθετου ακμής στο  $B$  και σε απόσταση  $|BH| = y$  φέρνουμε την παράλληλο  $HI$  της διαγωνίου  $ΒΔ$ . Το επίπεδο  $ΘHI$  τέμνει τον κύβο, για ορισμένες τιμές των  $x, y$ , κατά πεντάγωνο. Δοθέντος του  $x$  να βρεθεί για ποιες τιμές του  $y$  συμβαίνει αυτό. Επίσης να υπολογισθεί το εμβαδόν του προκύπτοντος πενταγώνου, καθώς και οι όγκοι των τμημάτων του κύβου που ορίζονται από αυτό.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι μέσω της Άσκησης 10.1.6

**Άσκηση 10.11.23** Σε κύβο  $ABΓΔΕΖΗΘ$  φέρε τις διαγώνιες  $\{AΓ, BΖ\}$  (Σχήμα 10.11.11-II). Δείξε ότι η διέδρος γωνία μεταξύ των επιπέδων  $\{BΖΓ, ΖΗΓ\}$  είναι  $60^\circ$ .

Υπόδειξη: Τα τετράεδρα  $\{BΓΖH, ABΓΖ\}$  είναι συμμετρικά ως προς το επίπεδο  $BΓΖ$  και τα τετράεδρα  $\{ABΓΖ, AΓΔΖ\}$  είναι συμμετρικά ως προς το επίπεδο  $AΓΖ$ .

**Άσκηση 10.11.24** Το επίπεδο  $\varepsilon$  διέρχεται από τα μέσα  $\{M, N\}$  των απέναντι ακμών τετραέδρου  $ABΓΔ$ . Δείξε ότι τα σημεία τομής  $\{I, K\}$  που ορίζονται στις άλλες δύο ακμές, αντίστοιχα,  $\{AΓ, BΔ\}$  τις χωρίζουν σε μέρη ανάλογα:  $\frac{KB}{KA} = \frac{IG}{IA}$ .



Σχήμα 10.11.12: Τομή τριέδρου με επίπεδο δια των μέσων απέναντι ακμών

Υπόδειξη: Θεώρησε το σημείο τομής  $O$  του επιπέδου τομής με τη  $AΓ$  και εφάρμοσε το θεώρημα του Μενέλαου (1) στο τρίγωνο  $AΔΓ$  με τέμνουσα την  $ON$  και (2) στο τρίγωνο  $ΔBΓ$  με τέμνουσα την  $OM$  (Σχήμα 10.11.12). Συνάγεται ότι

$$\frac{KB}{KA} \cdot \frac{OA}{OG} \cdot \frac{MG}{MB} = 1 = \frac{IG}{IA} \cdot \frac{OA}{OG} \cdot \frac{NA}{ND},$$

και η σχέση προκύπτει απλοποιώντας.

**Άσκηση 10.11.25** Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης, δείξε ότι, ένα επίπεδο  $\varepsilon$ , που διέρχεται από τα μέσα  $\{M, N\}$  των απέναντι ακμών τετραέδρου  $ABΓΔ$ , το χωρίζει σε δύο στερεά  $\{\sigma_1, \sigma_2\}$  ίσων όγκων.

Υπόδειξη: Το κάθε ένα από τα δύο στερεά  $\{\sigma_1, \sigma_2\}$  είναι ένωση μιας τετραγωνικής πυραμίδας  $\tau_i$  και ενός τετραέδρου  $\delta_i$ . Το  $\sigma_1$  αποτελείται από τα  $\{\tau_1 = \Delta MINK, \delta_1 = \Delta MGI\}$  και το  $\sigma_2$  από τα  $\{\tau_2 = AKMIN, \delta_2 = KBMA\}$ . Οι πυραμίδες  $\{\tau_1, \tau_2\}$  έχουν τον ίδιο όγκο, διότι έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

Τα τετράεδρα  $\{\delta_1, \delta_2\}$  έχουν επίσης ίσους όγκους. Τούτο προκύπτει συγκρίνοντάς τα πρώτα προς τον όγκο του μισού τετραέδρου  $o = o(\Delta ABM) = o(\Delta MGA)$ .

$$\frac{o(\delta_1)}{o} = \frac{\varepsilon(\Delta IG)}{\varepsilon(\Delta GA)} = \frac{|IG|}{|AG|}, \quad \frac{o(\delta_2)}{o} = \frac{\varepsilon(BMK)}{\varepsilon(BMA)} = \frac{|BK|}{|BA|}.$$

Το συμπέρασμα προκύπτει, βάσει της προηγούμενης άσκησης, από την ισότητα των λόγων των τμημάτων ([Cat52, σ. 241]).

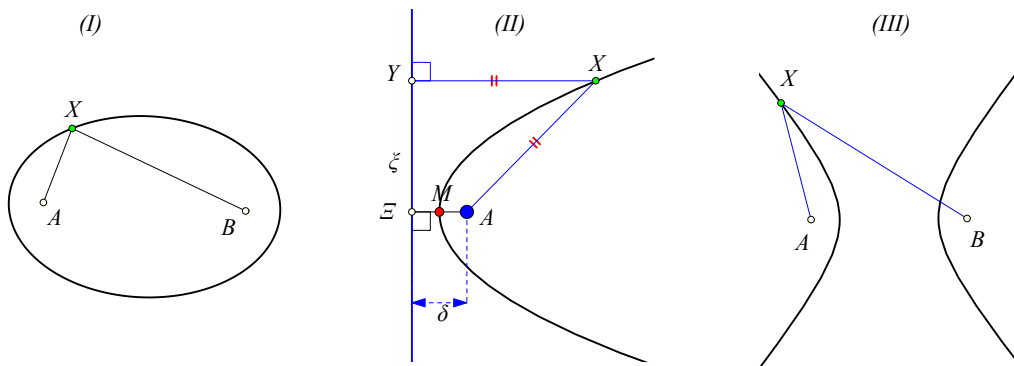
### 11.1 Κωνικές τομές

Δεν είναι υπερβολή, να πούμε ότι για τη συντριπτική πλειονότητα των Μαθηματικών της εποχής μας, ο Απολλώνιος δεν είναι παρά ένα όνομα, και τα *Κωνικά* του, από κάθε πρακτική άποψη ένα άγνωστο βιβλίο. Και όμως, αυτό το βιβλίο, γραμμένο εδώ και 21 αιώνες, περιέχει, με τα λόγια του Chasles, «τις πιο ενδιαφέρουσες ιδιότητες των κωνικών» ...

*Sir Thomas Heath, Κωνικά του Απολλωνίου*

Οι τομές ορθής κυκλικής κωνικής επιφάνειας  $\Sigma$  με επίπεδο  $\varepsilon$ , κάθετο στον άξονά της και μη διερχόμενο από την κορυφή της  $O$ , είναι κύκλοι (Πρόταση 9.9.2). Όταν το επίπεδο δεν είναι κάθετο στον άξονα της  $\Sigma$ , τότε οι τομές που προκύπτουν είναι *ελλείψεις*, *παραβολές* και *υπερβολές*.

Οι ελλείψεις προκύπτουν, όπως θα δούμε, από τομές με επίπεδα που τέμνουν όλες τις γενέτειρες της  $\Sigma$ . Μια **έλλειψη** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$  τα οποία έχουν



Σχήμα 11.1.1: Έλλειψη  $|XA| + |XB| = \rho$ , Παραβολή  $|XA| = |XY|$ , Υπερβολή  $||XA| - |XB|| = \rho$

σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$  (Σχήμα 11.1.1-I).

$$|XA| + |XB| = \rho.$$

Τα σημεία  $A$  και  $B$  λέγονται **εστίες** της έλλειψης. Ελλείψεις προκύπτουν επίσης όταν τμηθεί ορθός κυκλικός κύλινδρος με επίπεδο μη-κάθετο (και μη παράλληλο) στις γενέτειρές του. Οι κύκλοι

μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση ελλείψεων, των οποίων τα σταθερά σημεία  $A$  και  $B$  συμπίπτουν.

Οι παραβολές προκύπτουν από τομές με επίπεδα που είναι παράλληλα προς κάποιο εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας (§ 9.9). Η **παραβολή** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$  τα οποία έχουν την ίδια απόσταση από σταθερό σημείο  $A$  και σταθερή ευθεία  $\xi$  (Σχήμα 11.1.1-II). Το σημείο  $A$  λέγεται **εστία** της παραβολής και η ευθεία  $\xi$  λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής.

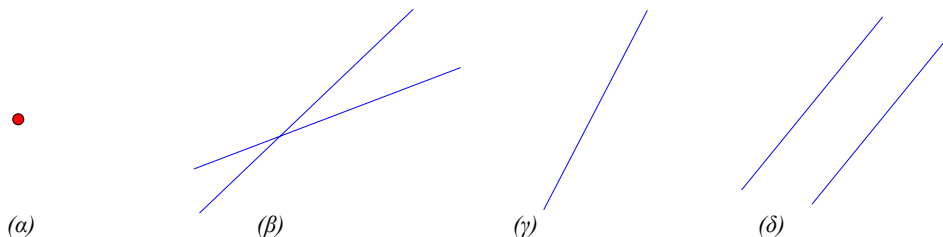
Τέλος οι υπερβολές προκύπτουν από τομές με επίπεδα που είναι παράλληλα προς δύο ακριβώς γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας. Η **υπερβολή** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $X$  τα οποία έχουν σταθερή διαφορά αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$  (Σχήμα 11.1.1-III).

$$||XA| - |XB|| = \beta.$$

Και πάλι τα σημεία  $A$  και  $B$  ονομάζονται **εστίες** της υπερβολής.

Τα τρία αυτά είδη καμπυλών (ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές) ονομάζονται συλλογικά **γνήσιες κωνικές τομές** και προκύπτουν ως τομές κωνικής επιφάνειας με επίπεδο μη-διερχόμενο διά της κορυφής  $O$ . Οι ελλείψεις και οι υπερβολές έχουν, όπως θα δούμε, δύο άξονες συμμετρίας καθώς και κέντρο συμμετρίας και λέγονται **κωνικές με κέντρο**. Η παραβολή ωστόσο έχει ένα μόνο άξονα συμμετρίας αλλά όχι κέντρο συμμετρίας.

Όταν το επίπεδο  $\varepsilon$ , με το οποίο τέμνουμε την κωνική επιφάνεια, διέρχεται από την κορυφή  $O$  της κωνικής επιφάνειας, τότε προκύπτουν, ανάλογα με την κλίση του  $\varepsilon$ , οι επόμενες **καμπύλεις**, με μία



Σχήμα 11.1.2: Τα τέσσερα είδη ιδιόμορφων κωνικών τομών

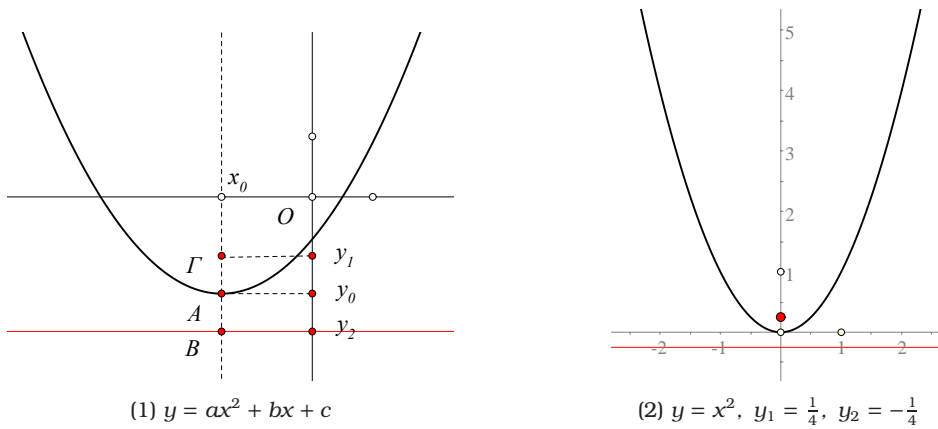
καταχρηστική έννοια του όρου: (α) ένα σημείο (το  $\varepsilon$  περιέχει τότε το  $O$  και κανένα άλλο σημείο της  $\Sigma$ ), (β) δύο τεμνόμενες ευθείες (το  $\varepsilon$  τέμνει τη  $\Sigma$  κατά δύο γενέτειρες) και (γ) μία ευθεία (το  $\varepsilon$  εφάπτεται της  $\Sigma$ ). Όπως ανέφερα ήδη, ο όρος **καμπύλη** χρησιμοποιείται, κατ' αρχήν, καταχρηστικά για αυτές τις περιπτώσεις (Σχήμα 11.1.2). Συλλογικά αυτές οι ιδιαίζουσες περιπτώσεις τομών ονομάζονται **ιδιόμορφες κωνικές τομές**. Σε αυτές προσμετρώνται και ζεύγη παραλλήλων ευθειών, θεωρούμενα ότι προκύπτουν από τομή κυλίνδρου με επίπεδο παράλληλο προς τις γενέτειρές του.

**Σχόλιο-1** Συνήθως, ο μαθητής συναντά τις κωνικές τομές, πολύ πριν τις γνωρίσει από τη γεωμετρική σκοπιά, στη μορφή γραφικών παραστάσεων απλών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, την παραβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2 + bx + c$  (Σχήμα 11.1.3), της οποίας η εστία είναι στο σημείο  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_1 = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}$  και η διευθετούσα είναι η παράλληλη του  $x$ -άξονα από το σημείο του  $y$ -άξονα  $y_2 = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ .

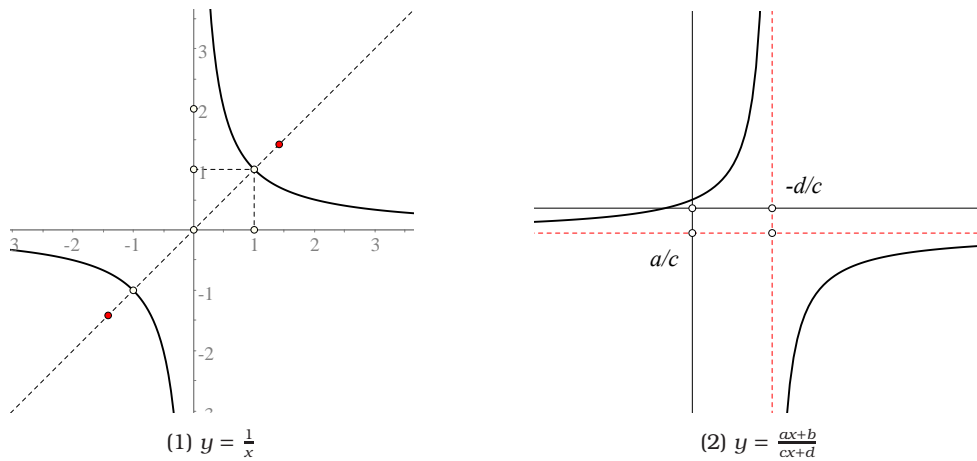
Ο μαθητής συναντά επίσης την υπερβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{1}{x}$ , που είναι υπερβολή διερχόμενη από τα σημεία  $\pm(1, 1)$  και με εστίες στα σημεία  $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Γενικότερα, υπερβολή παριστάνει και η συνάρτηση  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , όπου  $\{a, b, c, d\}$  σταθερές (Σχήμα 11.1.4).

**Άσκηση 11.1.1** Κατασκεύασε τα σημεία της έλλειψης  $\gamma(A, B, \beta)$ , τα οποία ικανοποιούν την  $|XA| + |XB| = \beta$  και τα οποία ευρίσκονται στις καθέτους της ευθείας δια των εσίων  $\varepsilon = AB$  στα σημεία  $A$  και  $B$ .

Υπόδειξη: Αν  $x = |XA|$  η απόσταση ενός τέτοιου σημείου της καθέτου της  $AB$  στο  $A$ , τότε  $d^2 + x^2 = (\beta - x)^2$ , όπου  $d = |AB|$ .



Σχήμα 11.1.3: Γραφική παράσταση τριωνύμου



Σχήμα 11.1.4: Υπερβολή ως γραφική παράσταση

**Άσκηση 11.1.2** Κατασκεύασε σημεία της παραβολής  $\gamma(\Pi, \xi)$  με εστία  $\Pi$  και διευθετούσα  $\xi$ , ευρίσκοντας σημεία τομής  $B$  της  $\gamma$  με ευθείες κάθετες της  $\xi$ .

**Άσκηση 11.1.3** Κατασκεύασε σημεία της παραβολής  $\gamma(\Pi, \xi)$  με εστία  $\Pi$  και διευθετούσα  $\xi$ , ευρίσκοντας σημεία τομής  $B$  της  $\gamma$  με ευθείες παράλληλες της  $\xi$  και από την ίδια μεριά της  $\xi$  με το σημείο  $\Pi$ .

Υπόδειξη: Αν  $\varepsilon$  μια τέτοια παράλληλος της  $\xi$ , πάρε το συμμετρικό  $\Pi'$  του  $\Pi$  ως προς  $\varepsilon$  και την προβολή  $O$  του  $\Pi$  στην  $\xi$ . Εάν  $\Gamma$  είναι η προβολή του ζητούμενου σημείου  $B$  της  $\varepsilon$ , τότε θα πρέπει  $|OA| \cdot |OA'| = |O\Gamma|^2$ .

**Άσκηση 11.1.4** Κατασκεύασε τα σημεία της υπερβολής  $\gamma(A, B, \beta)$ , τα οποία ικανοποιούν την  $\|XA\| - \|XB\| = \beta$  και τα οποία ευρίσκονται στις καθέτους της ευθείας δια των εστιών  $\varepsilon = AB$  στα σημεία  $A$  και  $B$ .

Υπόδειξη: Αν  $x = \|XA\|$  η απόσταση ενός τέτοιου σημείου της καθέτου της  $AB$  στο  $A$ , τότε  $\beta(2x + \beta) = d^2$ , όπου  $d = |AB|$ .

**Σχόλιο-2** Η υπερβολή (ακριβέστερα, μια ειδική περίπτωση της, που ονομάζουμε *ορθογώνια υπερβολή*) είναι το μοναδικό είδος κωνικής τομής, που είναι ταυτόχρονα γράφημα μιας *αντιστρέψιμης* συνάρτησης. Τη συνάρτηση αυτή, που έχει τη μορφή  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , χρησιμοποιούμε για τον ορισμό μιας *ομογραφικής σχέσης* των  $\{x, y\}$  (§ 5.21).



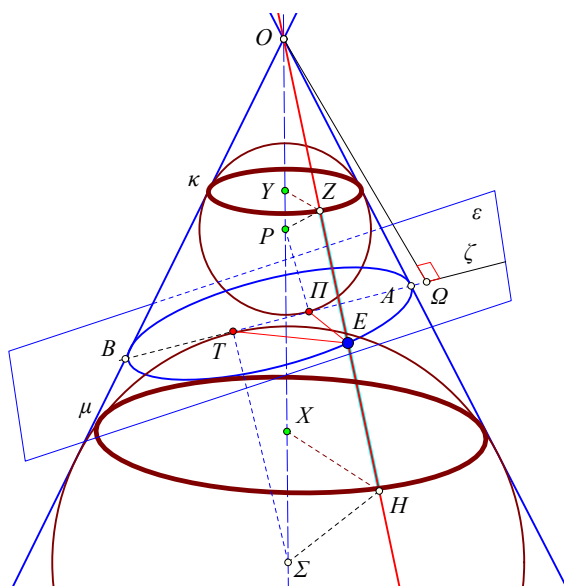
### 11.2 Οι σφαίρες του Dandelin

Η αλήθεια υπάρχει. Αυτά που επινοούνται είναι τα ψέματα.

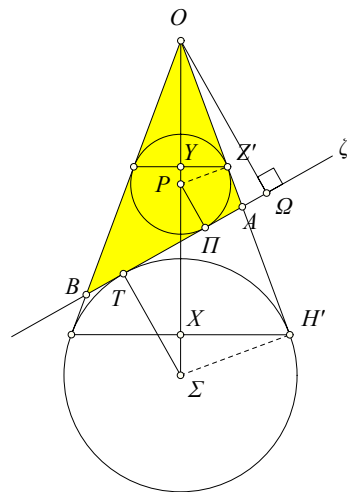
*Georges Braque, Cahiers 1917-1952*

Οι **σφαίρες του Dandelin** (1794-1847) διευκολύνουν το συσχετισμό των κωνικών τομών με τους γεωμετρικούς τόπους, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Πρόκειται για σφαίρες εγγεγραμμένες σε κωνικές/κυλινδρικές επιφάνειες και ταυτόχρονα εφαπτόμενες ενός επιπέδου  $\varepsilon$ . Οι επόμενες προτάσεις δείχνουν ότι, κάθε επίπεδο  $\varepsilon$  που τέμνει μια τέτοια επιφάνεια εκτός της κορυφής της, ορίζει δύο (ή μία σε ορισμένες περιπτώσεις όπως θα δούμε) σφαίρες που λέγονται *σφαίρες Dandelin* του επιπέδου  $\varepsilon$ . Αποφασιστικής σημασίας εδώ είναι το Θεώρημα 9.9.1, κατά το οποίο κάθε επίπεδο  $\varepsilon$ , μη-διερχόμενο από την κορυφή  $O$  κωνικής επιφάνειας, τέμνει (α) ή όλες τις γενέτειρες, (β) ή όλες εκτός από δύο, (γ) ή όλες εκτός από μία. Εδώ θα εξετάσουμε τις δύο πρώτες περιπτώσεις. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε και την τρίτη.

**Πρόταση 11.2.1** Έστω επίπεδο  $\varepsilon$  τέμνον όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας  $K$ . Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της κωνικής επιφάνειας και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου  $\varepsilon$ .



Σχήμα 11.2.1: Σφαίρες του Dandelin



Η τομή με το επίπεδο  $\theta$

*Απόδειξη:* Θεώρησε το επίπεδο  $\theta$ , που ορίζεται από τον άξονα  $OX$  της κωνικής επιφάνειας  $K$  και την κάθετο  $O\Omega$  από την κορυφή  $O$  του κώνου προς το επίπεδο  $\varepsilon$  (και παριστάνεται από το επίπεδο του χαρτιού). Έστω ότι η τομή του  $\varepsilon$  και του  $\theta$  είναι η ευθεία  $\zeta$ . Εκ κατασκευής, η  $\zeta$  είναι κάθετη στην  $O\Omega$  και τέμνει τις δύο γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας  $K$ , που περιέχονται στο  $\theta$ , στα σημεία  $A$  και  $B$ . Ορίζεται λοιπόν στο επίπεδο  $\theta$ , τρίγωνο  $OAB$  και, επομένως, ο εγγεγραμμένος και παρεγγεγραμμένος κύκλος του στη γωνία  $\widehat{AOB}$ , με κέντρα αντίστοιχα  $P$  και  $\Sigma$ . Οι σφαίρες με κέντρα τα  $P$  και  $\Sigma$  και ακτίνες αυτές του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου,  $PII$  και  $\Sigma T$  αντίστοιχα, είναι οι ζητούμενες. Δείχνω ότι η μία από αυτές, η  $P(PII)$ , είναι εφαπτόμενη του κώνου. Πράγματι, αν  $OH$  είναι μια άλλη γενέτειρα και  $Z$  η προβολή του  $P$  σε αυτήν, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $PZO$  και  $PZ'O$ , όπου  $Z'$  η προβολή του  $P$  στην  $OA$ , είναι ίσα. Τούτο, διότι το  $P$  είναι επί του άξονος της κωνικής επιφάνειας, άρα έχει την ίδια απόσταση από τις γενέτειρες, συνεπώς  $|PZ| = |PZ'|$ . Επίσης τα δύο ορθογώνια έχουν την υποτεινούσα  $OP$  κοινή, είναι συνεπώς ίσα. Αυτό συνεπάγεται ότι η  $OH$  είναι εφαπτόμενη της σφαίρας στο σημείο  $Z$  και αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η σφαίρα  $\Sigma(\Sigma T)$  είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Το ότι οι σφαίρες αυτές είναι και εφαπτόμενες στο επίπεδο  $\varepsilon$  συνάγεται



αμέσως λ.χ. για την  $P(P\Gamma)$ , από το γεγονός ότι η  $P\Gamma$  είναι και κάθετος στο επίπεδο  $\varepsilon$ , ως παράλληλη της  $O\Omega$ , που έχει αυτήν την ιδιότητα. Συνεπώς το επίπεδο  $\varepsilon$  είναι εφαπτόμενο της σφαίρας  $P(P\Gamma)$ , ως κάθετο στο άκρο μιας ακτίνας της, ο.ε.δ.

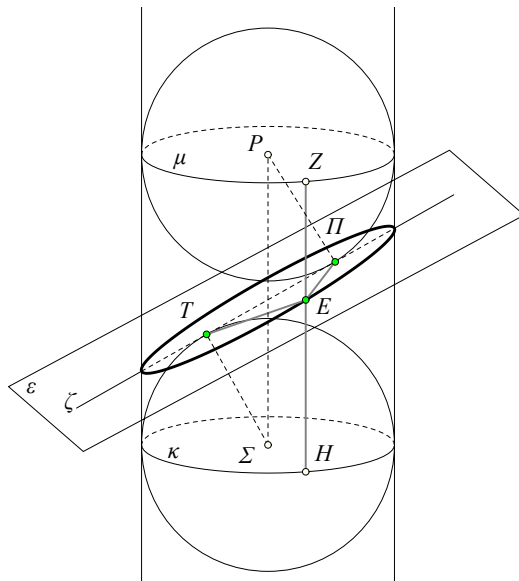
**Θεώρημα 11.2.1** Τα σημεία τομής επιπέδου  $\varepsilon$ , που τέμνει όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας  $K$ , αποτελούν μία έλλειψη, με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο  $\varepsilon$ .

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Θεώρημα 9.11.2). Αν  $E$  σημείο της τομής του  $\varepsilon$  και της  $K$ , τότε η γενέτειρα  $OE$  είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν  $\Gamma$  και  $T$  είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών  $P(P\Gamma)$  και  $\Sigma(\Sigma T)$  με το επίπεδο  $\varepsilon$ , τότε και οι  $E\Gamma$  και  $ET$  είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι  $|E\Gamma| = |EZ|$  και  $|ET| = |EH|$ , όπου  $E$  και  $Z$  τα σημεία επαφής της γενέτειρας  $OE$  με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

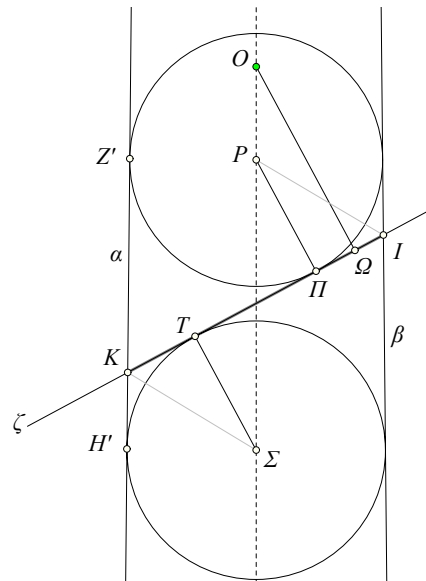
$$|ET| + |E\Gamma| = |EZ| + |EH| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κώλου που σχηματίζεται από τους κύκλους  $\kappa$  και  $\mu$ , κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

**Πρόταση 11.2.2** Έστω επίπεδο  $\varepsilon$  τέμνον όλες τις γενέτειρες κυλινδρικής επιφάνειας  $K$ . Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της  $K$  και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου  $\varepsilon$ .



Σχήμα 11.2.2: Σφαίρες του Dandelin



Η τομή με το επίπεδο  $\theta$

Απόδειξη: Παρόμοια με της Πρότασης 11.2.1. Το επίπεδο του χαρτιού στο σχήμα-11.2.2 είναι το  $\theta$  που ορίζεται από τον άξονα  $\eta$  της κυλινδρικής επιφάνειας και την κάθετο  $OQ$  στο επίπεδο  $\varepsilon$  από τυχόν σημείο  $O$  του άξονα. Το  $\theta$  τέμνει την κυλινδρική επιφάνεια  $K$  κατά δύο (παράλληλες) γενέτειρες  $\alpha$  και  $\beta$ . Τέμνει επίσης το επίπεδο  $\varepsilon$  κατά ευθεία  $\zeta$ . Φέρνοντας τις διχοτόμους  $K\Sigma$ ,  $IP$  των γωνιών που σχηματίζει η  $\zeta$  με τις  $\alpha, \beta$  και τις τομές αυτών  $P, \Sigma$  με τον άξονα  $\eta$ , ορίζουμε τους κύκλους  $P(P\Gamma)$  και  $\Sigma(\Sigma T)$  που εφάπτονται ταυτόχρονα των  $\alpha, \beta$  και  $\zeta$ . Οι σφαίρες  $P(P\Gamma)$  και  $\Sigma(\Sigma T)$  είναι οι ζητούμενες. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της Πρότασης 11.2.1, ο.ε.δ.

**Θεώρημα 11.2.2** Τα σημεία τομής επιπέδου  $\varepsilon$ , που τέμνει όλες τις γενέτειρες κυλινδρικής επιφάνειας  $K$ , αποτελούν μία έλλειψη με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο  $\varepsilon$ .

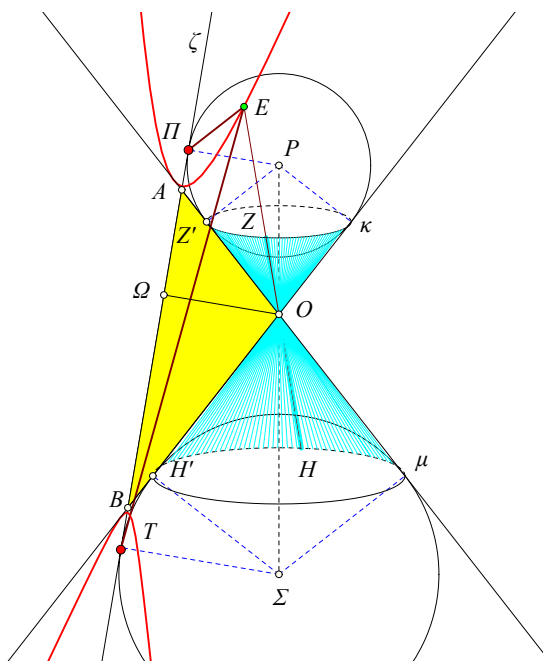
Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Θεώρημα 9.11.2). Αν  $E$  σημείο της τομής του  $\varepsilon$  και της  $K$ , τότε η γενέτειρα  $EZ$  είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη

και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν  $\Pi$  και  $T$  είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών  $P(P\Pi)$  και  $\Sigma(\Sigma T)$  με το επίπεδο  $\varepsilon$ , τότε και οι  $E\Pi$  και  $ET$  είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι  $|E\Pi| = |EZ|$  και  $|ET| = |EH|$ , όπου  $E$  και  $Z$  τα σημεία επαφής της γενέτειρας  $OE$  με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

$$|ET| + |E\Pi| = |EZ| + |EH| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κυλίνδρου που σχηματίζεται από τους κύκλους  $\kappa$  και  $\mu$ , κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κυλινδρική επιφάνεια, ο.ε.δ.

**Πρόταση 11.2.3** Έστω επίπεδο  $\varepsilon$  τέμνον όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας  $K$ , εκτός από δύο. Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της  $K$  και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου  $\varepsilon$ .



Σχήμα 11.2.3: Σφαίρες του Dandelin για την υπερβολή

*Απόδειξη:* Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 11.2.1. Το επίπεδο του χαρτιού στο σχήμα-11.2.3, είναι το επίπεδο  $\theta$  που ορίζεται από τον άξονα της κωνικής επιφάνειας  $K$  και την κάθετο  $O\Omega$  από την κορυφή  $O$  της κωνικής επιφάνειας προς το επίπεδο  $\varepsilon$ . Έστω ότι η τομή του  $\varepsilon$  και του  $\theta$  είναι η ευθεία  $\zeta$ . Εκ κατασκευής η  $\zeta$  είναι κάθετη στην  $O\Omega$  και τέμνει τις δύο γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας που περιέχονται στο  $\theta$  στα σημεία  $A$  και  $B$ . Ορίζεται λοιπόν στο επίπεδο  $\theta$  τρίγωνο  $OAB$  και, επομένως, οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι του με κέντρα αντίστοιχα  $P$  και  $\Sigma$ . Οι σφαίρες με κέντρα τα  $P$  και  $\Sigma$  και ακτίνες αυτές των παρεγγεγραμμένων,  $P\Pi$  και  $\Sigma T$  αντίστοιχα, είναι οι ζητούμενες. Δείχνω ότι η μία από αυτές, η  $P(P\Pi)$  είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Πράγματι, αν  $OH$  είναι μια άλλη γενέτειρα και  $Z$  η προβολή του  $P$  σε αυτήν, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $PZO$  και  $PZ'O$ , όπου  $Z'$  η προβολή του  $P$  στην  $OA$ , είναι ίσα. Τούτο διότι το  $P$  είναι επί το άξονος του κώνου, άρα έχει την ίδια απόσταση από τις γενέτειρες, συνεπώς  $|PZ| = |PZ'|$ . Επίσης τα δύο ορθογώνια έχουν την υποτεινούσα  $OP$  κοινή, είναι συνεπώς ίσα. Αυτό συνεπάγεται ότι η  $OH$  είναι εφαπτόμενη της σφαίρας στο σημείο  $Z$  και αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η σφαίρα  $\Sigma(\Sigma T)$  είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Το ότι οι σφαίρες αυτές είναι και εφαπτόμενες στο επίπεδο  $\varepsilon$  συνάγεται αμέσως λ.χ. για την  $P(P\Pi)$ , από το γεγονός ότι η  $P\Pi$  είναι και κάθετος στο επίπεδο  $\varepsilon$ , ως παράλληλη της  $O\Omega$ , που έχει αυτήν την ιδιότητα. Συνεπώς, το επίπεδο  $\varepsilon$  είναι εφαπτόμενο της σφαίρας  $P(P\Pi)$  ως κάθετο στο άκρο μιας ακτίνας της, ο.ε.δ.

**Θεώρημα 11.2.3** Τα σημεία τομής επιπέδου  $\varepsilon$ , που τέμνει, εκτός δύο, όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας  $K$ , αποτελούν μία υπερβολή με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το  $\varepsilon$ .

*Απόδειξη:* Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Θεώρημα 9.11.2). Αν  $E$  σημείο της τομής του  $\varepsilon$  και της  $K$ , τότε η γενέτειρα  $OE$  είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν  $\Pi$  και  $T$  είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών  $P(P\Pi)$  και  $\Sigma(\Sigma T)$  με το επίπεδο  $\varepsilon$ , τότε και οι  $E\Pi$  και  $ET$  είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι  $|E\Pi| = |EZ|$  και  $|ET| = |EH|$ , όπου  $E$  και  $Z$  τα σημεία επαφής της γενέτειρας  $OE$  με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

$$|ET| - |E\Pi| = |EH| - |EZ| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κόλουρου κώνου (ένωση των δύο κώνων με κοινή κορυφή το  $O$ ) που σχηματίζεται από τους κύκλους  $\kappa$  και  $\mu$ , κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

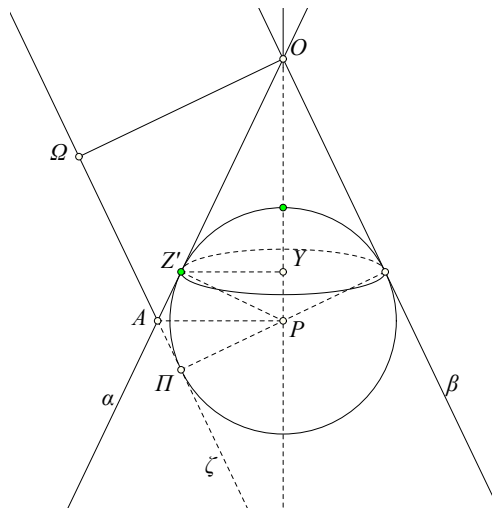
### 11.3 Διευθετούσες

Ο άνθρωπος είναι ευτυχισμένος, όταν του αρέσει αυτό που κάνει. Αυτή όμως η αρχή δεν συμπεριλαμβάνεται στα θεμέλια της κοινωνίας

*Claude Adrien Helvetius, Περί του πνεύματος*

Εκτός από την παραβολή, στην οποία η διευθετούσα παίζει σημαντικό ρόλο για το συνηθισμένο χαρακτηρισμό της ως γεωμετρικό τόπο, διευθετούσες ορίζονται και για τα άλλα είδη κωνικών τομών με ιδιότητες παρόμοιες με αυτήν της διευθετούσας της παραβολής. Στην παράγραφο αυτή συσχετίζουμε πρώτα τη διευθετούσα της παραβολής με την αντίστοιχη σφαίρα του Dandelin και κατόπιν εξετάζουμε τη γενίκευσή της για τις άλλες κωνικές τομές.

**Πρόταση 11.3.1** Έστω επίπεδο  $\varepsilon$  παράλληλο προς εφαπτόμενο επίπεδο κωνικής επιφάνειας  $\Sigma$ . Υπάρχει τότε μία σφαίρα εφαπτόμενη της  $\Sigma$  και ταυτόχρονα εφαπτόμενη του επιπέδου  $\varepsilon$ .

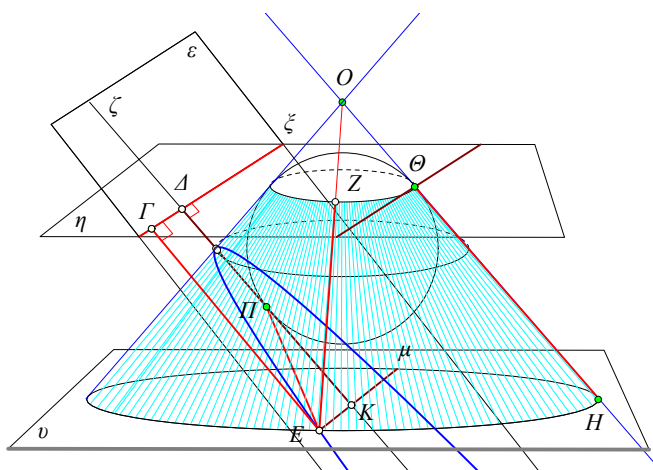


Σχήμα 11.3.1: Σφαίρα του Dandelin για την παραβολή

*Απόδειξη:* Όπως και στις προτάσεις της προηγούμενης παραγράφου, θεωρούμε το επίπεδο  $\theta$  που ορίζεται από τον άξονα της κωνικής επιφάνειας  $\Sigma$  και την κάθετο  $O\Omega$  από την κορυφή  $O$  της  $\Sigma$  στο δοθέν επίπεδο  $\varepsilon$  (στο σχήμα-11.3.1 το  $\theta$  ταυτίζεται με το επίπεδο του χαρτιού). Τα επίπεδα  $\theta$  και  $\varepsilon$  τέμνονται κατά ευθεία  $\zeta$ . Η ευθεία αυτή είναι παράλληλος της γενέτειρας  $\beta$  που περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο το παράλληλο του  $\varepsilon$ . Το  $\theta$  περιέχει επίσης τη συμμετρική της  $\beta$  ως προς τον

άξονα γενέτειρα  $a$  και μάλιστα, λόγω της παραλληλίας των  $\zeta$  και  $\beta$ , το τρίγωνο με πλευρές τις  $a$ ,  $\zeta$  και τον άξονα είναι ισοσκελές. Μεταβαίνοντας λοιπόν στο επίπεδο σχήμα το περιεχόμενο στο  $\theta$  ευρίσκουμε κύκλο  $P(PII)$  με κέντρο επί του άξονος και ταυτόχρονα εφαπτόμενο των δύο παραλλήλων  $\zeta$  και  $\beta$ , καθώς και της άλλης γενέτειρας  $a$  της  $\Sigma$  που περιέχεται στο  $\theta$ . Προς τούτο αρκεί να θεωρήσουμε την κάθετο προς τον άξονα  $OP$  από το σημείο τομής των  $a$  και  $\zeta$ . Αυτή διχοτομεί τη γωνία στο  $A$  μεταξύ των  $a$  και  $\zeta$  και ορίζει κύκλο  $P(PII)$  ταυτόχρονα εφαπτόμενο των  $a$ ,  $\beta$  και  $\zeta$ . Η σφαίρα  $P(PII)$  είναι η ζητούμενη. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 11.2.1, ο.ε.δ.

**Θεώρημα 11.3.1** Τα σημεία τομής κωνικής επιφάνειας  $\Sigma$  και επιπέδου  $\varepsilon$ , παραλλήλου προς εφαπτόμενο επίπεδο της  $\Sigma$ , σχηματίζουν μία παραβολή του  $\varepsilon$  με εστία το σημείο επαφής  $\Pi$  της σφαίρας του Dandelin με το επίπεδο  $\varepsilon$  και διευθετούσα την ευθεία  $\xi$ , κατά την οποία το  $\varepsilon$  τέμνει το επίπεδο  $\eta$  του κύκλου των σημείων επαφής της σφαίρας με την κωνική επιφάνεια.



Σχήμα 11.3.2: Παραβολή και σφαίρα του Dandelin

*Απόδειξη:* Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Θεώρημα 9.11.2). Κατ' αρχήν ο κύκλος, κατά τον οποίον εφάπτονται η σφαίρα και η κωνική επιφάνεια  $\Sigma$ , περιέχεται σε επίπεδο  $\eta$  κάθετο στον άξονα της κωνικής επιφάνειας, το οποίο τέμνει το επίπεδο  $\varepsilon$  κατά ευθεία  $\xi$ . Η ευθεία  $\xi$  είναι κάθετη στο επίπεδο  $\theta$  που περιέχει τον άξονα και τη γενέτειρα  $\beta = O\theta$  που ορίζει το εφαπτόμενο επίπεδο της  $\Sigma$  το οποίο, εξ υποθέσεως, είναι παράλληλο του  $\varepsilon$ . Από το τυχόν σημείο  $E$  της τομής του επιπέδου  $\varepsilon$  με τη  $\Sigma$  διέρχεται επίπεδο  $\nu$  παράλληλο προς το  $\eta$  και σχηματίζουν με αυτό κώλουρο κώνο. Έστω  $EZ$  η γενέτειρα αυτού του κώνου που διέρχεται από το  $E$  και  $H\theta$  η ίση με την  $EZ$  γενέτειρα που περιέχεται στο επίπεδο  $\theta$ . Από την ισότητα των εφαπτομένων από το  $E$  προς τη σφαίρα, προκύπτει ότι οι  $EZ$  και  $E\Pi$  έχουν το ίδιο μήκος, άρα και οι  $E\Pi$  και  $H\theta$  έχουν το ίδιο μήκος. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η  $H\theta$  και η  $EF$  έχουν το ίδιο μήκος. Εδώ  $EF$  είναι η κάθετος από το  $E$  προς την  $\xi$ . Έστω  $\mu$  η τομή των επιπέδων  $\varepsilon$  και  $\nu$ . Έστω επίσης  $K$  η τομή της  $\mu$  με το επίπεδο  $\theta$ . Λόγω της παραλληλίας των επιπέδων  $\eta$  και  $\nu$  οι ευθείες  $\xi$  και  $\mu$  που αποτελούνται από αυτά μέσω του επιπέδου  $\varepsilon$  είναι παράλληλες. Επειδή τα επίπεδα  $\varepsilon$  και  $\eta$  είναι κάθετα στο  $\theta$  και η τομή τους  $\xi$  θα είναι κάθετη στο  $\theta$ . Συνεπώς, αν  $\Delta$  το σημείο τομής της  $\xi$  με το  $\theta$ , το  $E\Gamma\Delta K$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και οι  $K\Delta$  και  $EF$  έχουν το ίδιο μήκος. Λόγω όμως της παραλληλίας της  $\zeta$  προς τη γενέτειρα  $O\theta$  και οι  $K\Delta$  και  $H\theta$  θα έχουν του ίδιο μήκος, ως τμήματα παραλλήλων ευθειών μεταξύ παραλλήλων επιπέδων, ο.ε.δ.

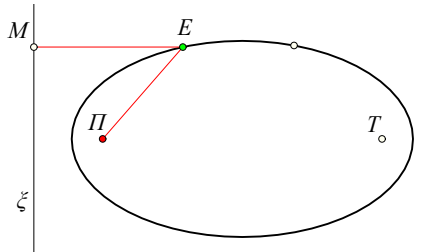
Στη συνέχεια δείχνουμε μία ακόμη χαρακτηριστική ιδιότητα των ελλείψεων και των υπερβολών, στην οποία συμμετέχουν ευθείες με ιδιότητες παρόμοιες με αυτή της διευθετούσας της παραβολής.

**Θεώρημα 11.3.2** Δοθείσης έλλειψης, σε κάθε εστία της  $\Pi$  αντιστοιχεί ευθεία  $\xi$ , έτσι ώστε για κάθε

σημείο  $E$  της έλλειψης ο λόγος των αποστάσεων

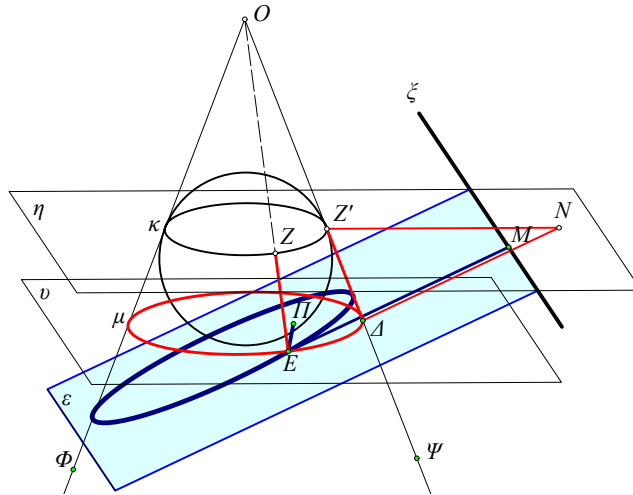
$$\frac{|E\Pi|}{|EM|} = k < 1,$$

να είναι σταθερός. Το  $M$  συμβολίζει εδώ την προβολή του  $E$  στην  $\xi$ .



Σχήμα 11.3.3: Ιδιότητα έλλειψης  $\frac{|E\Pi|}{|EM|} = k < 1$

*Απόδειξη:* Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον ορισμό της έλλειψης ως τομής κωνικής επιφάνειας  $\Sigma$  και επιπέδου  $\varepsilon$  και μία από τις σφαίρες του Dandelin. Η εστία  $\Pi$  είναι το σημείο επαφής του  $\varepsilon$  με τη σφαίρα και το τυχόν σημείο  $E$  της έλλειψης ορίζει μια γενέτειρα  $EO$  της  $\Sigma$  καθώς και ένα επίπεδο  $\nu$  διερχόμενο διά του  $E$  και κάθετο στον άξονα της  $\Sigma$ , το οποίο τέμνει την  $\Sigma$  κατά κύκλο  $\mu$ . Επίσης



Σχήμα 11.3.4: Η διευθετούσα  $\xi$  της έλλειψης

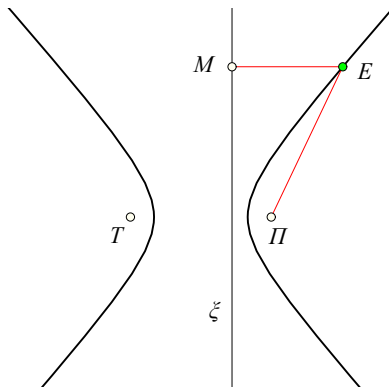
τα σημεία επαφής της σφαίρας και της κωνικής επιφάνειας ορίζουν κύκλο  $\kappa$  περιεχόμενο σε επίπεδο  $\eta$  παράλληλο του  $\nu$ . Τα δύο επίπεδα  $\nu$  και  $\eta$  αποτεμνουν από την κωνική επιφάνεια έναν κόλουρο κώνου. Η  $E\Pi$  ισούται με τη γενέτειρα  $EZ$  του κόλουρου κώνου. Έστω τώρα  $\xi$  ή ευθεία, κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα  $\varepsilon$  και  $\eta$  και  $M$  η προβολή του  $E$  στην  $\xi$ . Θεωρούμε το επίπεδο  $\vartheta$  που παράγεται από τον άξονα της  $\Sigma$  και την κάθετο από το  $O$  στο επίπεδο  $\varepsilon$ . Το  $\vartheta$  τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά δύο γενέτειρες  $O\Phi$  και  $O\Psi$ , συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα. Το  $\vartheta$  ορίζει επίσης και τη γενέτειρα  $\Delta Z'$  του προηγούμενου κόλουρου κώνου, της οποίας το μήκος είναι

$$|\Delta Z'| = |EZ| = |E\Pi|.$$

Φέρουμε από το  $\Delta$  παράλληλο της  $EM$  μέχρι να τμήσει το επίπεδο  $\eta$  στο σημείο  $N$ . Ισχύει και  $|EM| = |\Delta N|$ , διότι αυτά είναι τμήματα παραλλήλων περιοριζόμενα από παράλληλα επίπεδα (Πρόταση 8.2.5). Το τρίγωνο  $Z'\Delta N$  εξαρτάται από τη θέση του σημείου  $E$ , εν τούτοις παραμένει όμοιο εαυτώ, συνεπώς ο λόγος των πλευρών του

$$k = \frac{|\Delta Z'|}{|\Delta N|} = \frac{|E\Pi|}{|EM|}$$

παραμένει σταθερός. Το ότι το  $k < 1$  έπεται εύκολα από το ότι η γωνία  $\widehat{\Delta NZ'} < \widehat{\Delta Z'N}$ , ο.ε.δ.

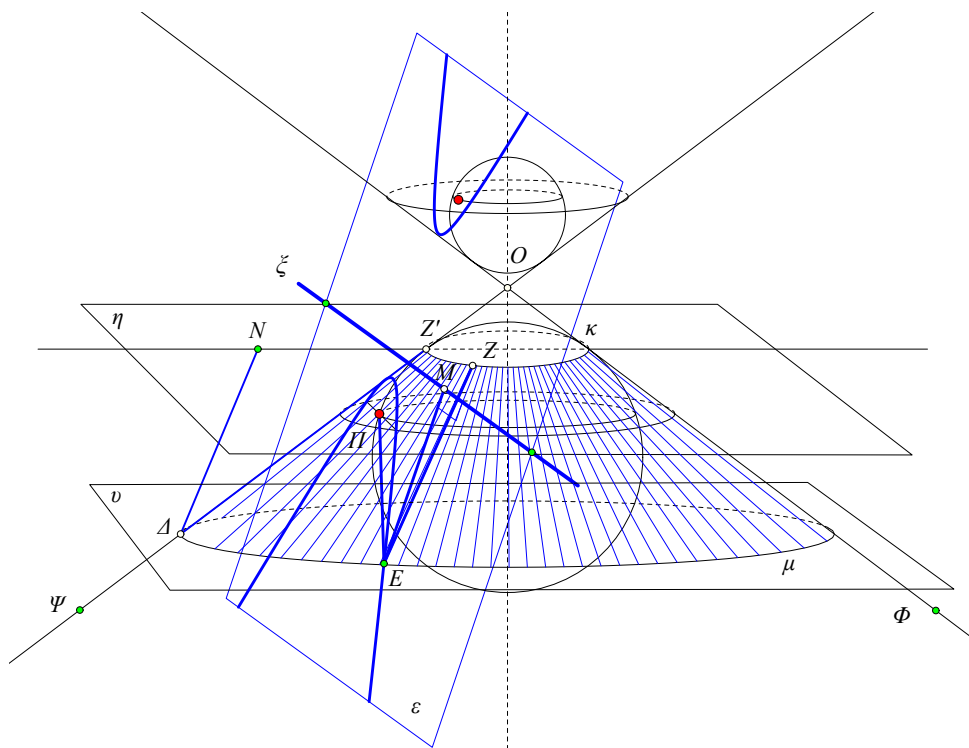


Σχήμα 11.3.5: Ιδιότητα υπερβολής  $\frac{|EΠ|}{|EM|} = \kappa > 1$

**Θεώρημα 11.3.3** Δοθείσης υπερβολής, σε κάθε εστία της  $Π$  αντιστοιχεί ευθεία  $\xi$ , έτσι ώστε για κάθε σημείο  $E$  της υπερβολής ο λόγος των αποστάσεων

$$\frac{|EΠ|}{|EM|} = \kappa > 1,$$

να είναι σταθερός. Το  $M$  συμβολίζει εδώ την προβολή του  $E$  στην  $\xi$  (Σχήμα 11.3.5).



Σχήμα 11.3.6: Η διευθετούσα  $\xi$  της υπερβολής

*Απόδειξη:* Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον ορισμό της υπερβολής ως τομής κωνικής επιφάνειας  $\Sigma$  και επιπέδου  $\epsilon$  και μία από τις σφαίρες του Dandelin. Η εστία  $Π$  είναι το σημείο επαφής του  $\epsilon$  με τη σφαίρα και το τυχόν σημείο  $E$  της υπερβολής ορίζει μια γενέτειρα  $EO$  της  $\Sigma$  καθώς και ένα

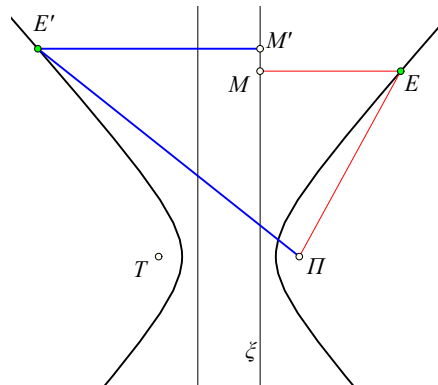
επίπεδο  $\nu$  διερχόμενο διά του  $E$  και κάθετο στον άξονα της  $\Sigma$ , το οποίο τέμνει την  $\Sigma$  κατά κύκλο  $\mu$  (Σχήμα 11.3.6). Επίσης, τα σημεία επαφής της σφαίρας και της κωνικής επιφάνειας ορίζουν κύκλο  $\kappa$  περιεχόμενο σε επίπεδο  $\eta$  παράλληλο του  $\nu$ . Τα δύο επίπεδα  $\nu$  και  $\eta$  αποτέμνουν έναν κόλouro κώνου από την κωνική επιφάνεια. Η  $E\Pi$  ισούται με τη γενέτειρα  $EZ$  του κόλουρου κώνου. Έστω τώρα  $\xi$  ή ευθεία κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα  $\varepsilon$  και  $\eta$  και  $M$  η προβολή του  $E$  στην  $\xi$ . Θεωρούμε το επίπεδο  $\vartheta$  που παράγεται από τον άξονα της  $\Sigma$  και την κάθετο από το  $O$  στο επίπεδο  $\varepsilon$ . Το  $\vartheta$  τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά δύο γενέτειρες  $O\Phi$  και  $O\Psi$  συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα. Το  $\vartheta$  ορίζει επίσης και τη γενέτειρα  $\Delta Z'$  του προηγούμενου κόλουρου κώνου, της οποίας το μήκος

$$|\Delta Z'| = |EZ| = |E\Pi|.$$

Φέρουμε από το  $\Delta$  παράλληλο της  $EM$  μέχρι να τμήσει το επίπεδο  $\eta$  στο σημείο  $N$ . Ισχύει και  $|EM| = |\Delta N|$ , διότι αυτά είναι τμήματα παραλλήλων περιοριζόμενα από παράλληλα επίπεδα (Πρόταση 8.2.5). Το τρίγωνο  $Z'\Delta N$  εξαρτάται από τη θέση του σημείου  $E$ , εν τούτοις παραμένει όμοιο εαυτώ, συνεπώς ο λόγος των πλευρών του

$$k = \frac{|\Delta Z'|}{|\Delta N|} = \frac{|E\Pi|}{|EM|}$$

παραμένει σταθερός. Το ότι το  $k > 1$  έπεται εύκολα από το ότι η γωνία  $\widehat{\Delta N Z'} > \widehat{\Delta Z' N}$ , ο.ε.δ.



Σχήμα 11.3.7: Εστία και αντίστοιχη διευθετούσα ώστε  $\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \frac{|E'\Pi|}{|EM'|}$

Οι ευθείες  $\xi$ , που αναφέρονται στα δύο τελευταία θεωρήματα, ονομάζονται **διευθετούσες της έλλειψης** και αντίστοιχα **διευθετούσες της υπερβολής** ενώ το  $k$  ονομάζεται **εκκεντρότητα** της έλλειψης, αντίστοιχα της υπερβολής. Ενώ στην παραβολή υπάρχει μία διευθετούσα (συνήθως θεωρούμε ότι η *ευθεία στο άπειρο* είναι μια δεύτερη διευθετούσα της παραβολής), στις ελλείψεις και υπερβολές υπάρχουν δύο και χρειάζεται προσοχή στο πως κατασκευάζεται ο σταθερός λόγος της εκκεντρότητας

$$k = \frac{|E\Pi|}{|EM|}.$$

Διευθετούσα και αντίστοιχη εστία πάνε μαζί και πρέπει να γνωρίζουμε αυτήν την αντιστοιχία για να ορίσουμε σωστά το λόγο. Διαφορετικά ο λόγος αυτός δεν θα βγαίνει σταθερός, όταν το  $E$  μεταβάλλεται επί της κωνικής.

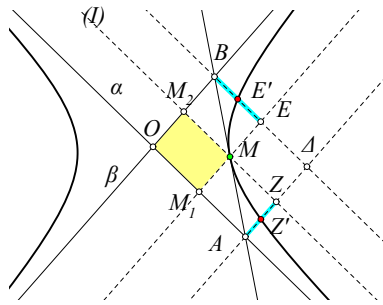
**Πόρισμα 11.3.1** Σε κάθε έλλειψη ή υπερβολή οι διευθετούσες που αντιστοιχούν στις δύο εστίες της είναι παράλληλες.

*Απόδειξη:* Αυτό είναι άμεση συνέπεια του τρόπου ορισμού τους μέσω της τομής του φέροντος επιπέδου τους  $\varepsilon$  με την κωνική επιφάνεια  $\Sigma$ . Οι διευθετούσες ορίστηκαν, μέσω των προηγούμενων θεωρημάτων, ως τομές του επιπέδου  $\varepsilon$  με τα επίπεδα  $\eta$  που περιέχουν τους κύκλους επαφής της  $\Sigma$  με αντίστοιχες σφαίρες του Dandelin. Τα επίπεδα αυτά είναι παράλληλα, ως κάθετα στον άξονα της  $\Sigma$ , συνεπώς και οι τομές τους με το επίπεδο  $\varepsilon$  της κωνικής θα είναι παράλληλες ευθείες (Πρόταση 8.2.3), ο.ε.δ.

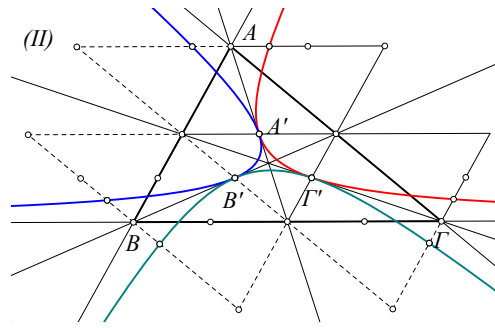






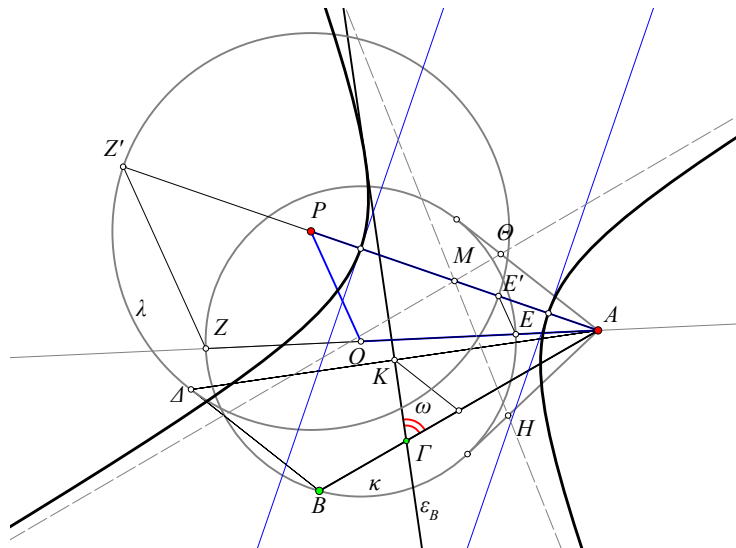


Σχήμα 11.8.31: Υπερβολή από ασυμπτωτικό



Διαίρεση σε ισοεμβαδικά μέρη

**Άσκηση 11.8.40** Δείξε ότι κάθε ευθεία που διαιρεί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε δύο ισοεμβαδικά πολύγωνα είναι εφαπτόμενη μιας υπερβολής που έχει ένα ασυμπτωτικό τρίγωνο αποτελούμενο από δύο πλευρές και μία διάμεσο του τριγώνου, με εφαπτόμενη της υπερβολής τη διάμεσο. Για κάθε τρίγωνο ορίζεται με αυτόν τον τρόπο τρεις υπερβολές (Σχήμα 11.8.31-II).



Σχήμα 11.8.32: Υπερβολή παραγόμενη από μεταβαλλόμενη γωνία

**Άσκηση 11.8.41** Δίδεται κύκλος  $\kappa$ , σταθερά  $k > 0$ , γωνία  $\omega$  και σημείο  $A$  εκτός του κύκλου. Για κάθε σημείο  $B$  του κύκλου, θεωρούμε το σημείο  $\Gamma$  του τμήματος  $AB$ , για το οποίο  $|AG|/|GB| = k$  και την ευθεία  $\varepsilon_B$ , που διέρχεται από το  $\Gamma$  και σχηματίζει γωνία  $\omega$  με την  $AB$  (Σχήμα 11.8.32). Δείξε ότι όλες αυτές οι ευθείες  $\varepsilon_B$  είναι εφαπτόμενες μιας υπερβολής, της οποίας προσδιόρισε τις εστίες και τις ασύμπτωτες.

*Υπόδειξη:* Θεώρησε το συμμετρικό  $\Delta$  του  $A$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon_B$  και δείξε ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  έχει σταθερές γωνίες, άρα το  $\Delta$  περιέχεται σε κύκλο  $\lambda(P)$  (Θεώρημα 3.10.3) και οι ευθείες  $\varepsilon_B$  ταυτίζονται με τις μεσοκάθετες  $K\Gamma$  των τμημάτων  $A\Delta$ , άρα εφάπτονται υπερβολής (Άσκηση 11.7.1), που έχει τις εστίες της στα  $\{A, P\}$ . Οι ασύμπτωτες της υπερβολής προκύπτουν από τις θέσεις που παίρνει η  $\varepsilon_B$ , όταν το  $B$  συμπίπτει με τα σημεία επαφής των εφαπτομένων του  $\kappa$  από το  $A$ .

Πολλές από τις ιδιότητες των κωνικών μπορούν να μελετηθούν με γεωμετρικό τρόπο, όπως στις προηγούμενες ασκήσεις ([Ask03], [Bes95], [CrFW91], [Tay81]). Ακόμη περισσότερες δε με τις μεθόδους της αναλυτικής και προβολικής Γεωμετρίας ([Cha65], [Sal17], [Cha65]). Ιστορικά η γεωμετρική μέθοδος προηγήθηκε ([Coo68]). Ακολούθησαν δε οι μέθοδοι της αναλυτικής και της προβολικής γεωμετρίας, οι οποίες οδήγησαν στη δεσποζούσα σήμερα Αλγεβρική Γεωμετρία ([Που06α], [Per08]).

### 12.1 Ισομετρίες του χώρου

Και το τελευταίο, να κάνω παντού απαριθμήσεις τόσο πλήρεις, κι ανασκοπήσεις τόσο γενικές, που να είμαι σίγουρος πως δεν παραλείπω τίποτα.

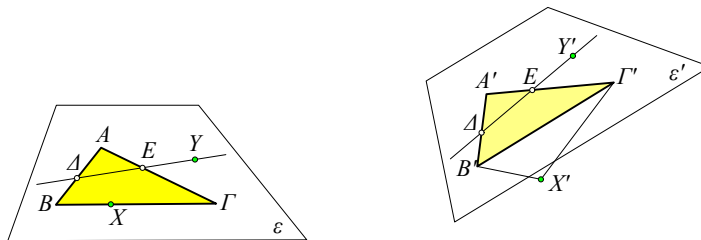
*Καρτέσιος, Λόγος περί Μεθόδου, β' μέρος*

Οι μετασχηματισμοί του χώρου, ανάλογα προς αυτούς του επιπέδου (§ 7.1), είναι διαδικασίες μέσω των οποίων σε κάθε σημείο  $X$  του χώρου αντιστοιχίζεται ένα άλλο σημείο  $Y$  του χώρου που συμβολίζουμε με  $f(X)$ . Η ονοματολογία εδώ, *Εικόνα, Πρότυπο, Απεικονίζει, Πεδίο ορισμού, Πεδίο τιμών, Σύνθεση Μετασχηματισμών ...*, κ.λπ. είναι η ίδια με αυτήν της προαναφερθείσας παραγράφου και δεν την επαναλαμβάνω.

Ανάλογος επίσης είναι και ο ορισμός της ισομετρίας. Τυπικά είναι ο ίδιος με του επιπέδου. Το μόνο που αλλάζει είναι το που ευρίσκονται τα σημεία. Λέμε λοιπόν **ισομετρία** του χώρου ένα μετασχηματισμό  $f$  του χώρου που διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ σημείων, δηλαδή για κάθε ζεύγος σημείων του χώρου  $X, Y$  και τις εικόνες τους  $X' = f(X), Y' = f(Y)$  ισχύει

$$|X'Y'| = |XY|.$$

Μπορούμε αμέσως να δούμε μερικές συνέπειες του ορισμού, εντελώς ανάλογες σχετικών ιδιοτήτων του επιπέδου, ορισμένες από τις οποίες παραθέτω ως ασκήσεις.



Σχήμα 12.1.1: Ισομετρία διατηρεί μήκη, γωνίες, ευθείες, επίπεδα

**Θεώρημα 12.1.1** *Μια ισομετρία απεικονίζει ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε ένα ίσο τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ , μια γωνία σε μια ίση γωνία, μια ευθεία σε μια ευθεία και ένα επίπεδο σε ένα επίπεδο.*

*Απόδειξη:* Το πρώτο μέρος είναι προφανές διότι εξ' ορισμού η ισομετρία διατηρεί τα μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, άρα τα δύο τρίγωνα θα έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι και μία γωνία  $\widehat{XOY}$  απεικονίζεται σε μία ίση γωνία  $\widehat{X'O'Y'}$ . Για το δεύτερο μέρος δείχνουμε πρώτα ότι η ισομετρία απεικονίζει ευθείες σε ευθείες. Αυτό προκύπτει από το προηγούμενο μέρος. Πράγματι, αν  $X$  είναι σημείο μιας ευθείας  $B\Gamma$  και το  $X'$  δεν είναι πάνω στην αντίστοιχη ευθεία  $B'\Gamma'$ , τότε δημιουργείται ένα γνήσιο τρίγωνο  $B'X'\Gamma'$  και για τα μήκη του θα ισχύει

$$|B'X'| + |X'\Gamma'| = |BX| + |X\Gamma| = |B\Gamma| = |B'\Gamma'|,$$

που αντιφάσκει στην τριγωνική ανισότητα. Απεικονίζει λοιπόν η ισομετρία ευθείες σε ευθείες. Από αυτό έπεται ότι απεικονίζει και ένα επίπεδο  $\varepsilon$  σε ένα επίπεδο  $\varepsilon'$ . Πράγματι, αν  $\{AB, A\Gamma\}$  είναι ευθείες του  $\varepsilon$  και  $\{A'B', A'\Gamma'\}$  οι εικόνες τους, τότε για κάθε άλλο σημείο  $Y$  του επιπέδου  $\varepsilon$  θεωρούμε μία ευθεία διά του  $Y$  που τέμνει τις  $\{AB, A\Gamma\}$  στα σημεία  $\{D, E\}$ . Οι εικόνες  $\{D', E'\}$  αυτών των σημείων μέσω της ισομετρίας θα περιέχονται, κατά τα προηγούμενα, στις ευθείες  $\{A'B', A'\Gamma'\}$ , άρα και η ευθεία  $D'E'$  που περιέχει το  $Y'$  θα περιέχεται στο επίπεδο των  $A'B', A'\Gamma'$ , ο.ε.δ.

**Άσκηση 12.1.1** Μια ισομετρία που αφήνει δύο διαφορετικά σημεία  $A, B$  σταθερά αφήνει σταθερά και όλα τα σημεία της ευθείας  $AB$ .

**Άσκηση 12.1.2** Μια ισομετρία που αφήνει τρία μη-συνευθειακά σημεία σταθερά, αφήνει σταθερά και όλα τα σημεία του επιπέδου που διέρχεται από αυτά τα τρία σημεία.

**Άσκηση 12.1.3** Μια ισομετρία που αφήνει τέσσερα μη-συνεπίπεδα σημεία σταθερά, αφήνει σταθερά όλα τα σημεία του χώρου, δηλαδή είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός  $e$  του χώρου.

**Άσκηση 12.1.4** Δύο ισομετρίες που ταυτίζονται σε τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία ταυτίζονται παντού.

**Άσκηση 12.1.5** Μια ισομετρία  $f$  διατηρεί την παράλληλη ευθείας και επιπέδου, καθώς και την παράλληλη δύο επιπέδων. Δηλαδή, αν  $a, \varepsilon, \varepsilon'$  είναι αντίστοιχα μία ευθεία και δύο επίπεδα, τότε αν η  $a$  είναι παράλληλη προς το  $\varepsilon$  τότε και η  $f(a)$  θα είναι παράλληλη προς το  $f(\varepsilon)$ . Επίσης, αν τα επίπεδα  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  είναι παράλληλα, τότε και τα επίπεδα  $f(\varepsilon)$  και  $f(\varepsilon')$  θα είναι παράλληλα.

**Άσκηση 12.1.6** Μια ισομετρία  $f$  διατηρεί τη γωνία μεταξύ μιας ευθείας  $a$  και ενός επιπέδου  $\varepsilon$ .

**Άσκηση 12.1.7** Μια ισομετρία  $f$  απεικονίζει μία σφαίρα  $\Sigma$  σε μία σφαίρα  $\Sigma'$  ίσης ακτίνας. Επίσης απεικονίζει ένα κύκλο  $\kappa$  σε ένα κύκλο  $\kappa'$  ίσης ακτίνας. Αν ο  $\kappa$  περιέχεται στη  $\Sigma$ , τότε και ο  $\kappa'$  περιέχεται στη  $\Sigma'$ .

**Άσκηση 12.1.8** Μια ισομετρία  $f$  απεικονίζει μία διεδρο σε μία ίση διεδρο και ένα τετράεδρο σε ένα ίσο τετράεδρο. Γενικότερα, απεικονίζει ένα πολυέδρο σε ένα ίσο πολυέδρο.

Όπως στο επίπεδο (§ 1.7), έτσι και στο χώρο έχουμε μια έννοια προσανατολισμού που μπορεί να ορισθεί μέσω των τετραέδρων και εξαρτάται από τη σειρά με την οποία βάζουμε τα γράμματα στις κορυφές. Το τετράεδρο  $AB\Gamma\Delta$  λέγεται **θετικά προσανατολισμένο**, αν τοποθετώντας ένα ρολόι στο επίπεδο  $AB\Gamma$  με την όψη προς το  $\Delta$  η φορά  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$  είναι αυτή της φοράς των δεικτών του. Αν η φορά  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$  είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών, τότε το τετράεδρο λέγεται **αρνητικά προσανατολισμένο**.

Λέμε ότι ο μετασχηματισμός  $f$  **αντιστρέφει τον προσανατολισμό** ενός τετραέδρου, όταν το τετράεδρο  $A'B'\Gamma'\Delta'$ , που έχει κορυφές τις εικόνες των κορυφών του τετραέδρου  $AB\Gamma\Delta$  μέσω του  $f$  έχει αντίθετο προσανατολισμό από αυτόν του  $AB\Gamma\Delta$ . Αν τα δύο τετράεδρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$  έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, τότε λέμε ότι ο  $f$  **διατηρεί τον προσανατολισμό** τους. Οι μετασχηματισμοί που θεωρούμε σε αυτό το κεφάλαιο (είναι, όπως λέγεται, «συνεχείς» και) έχουν την ιδιότητα, εάν διατηρούν τον προσανατολισμό ενός τετραέδρου, τότε να διατηρούν τον προσανατολισμό και κάθε άλλου. Αντίστοιχα, αν αντιστρέφουν τον προσανατολισμό ενός τετραέδρου, να αντιστρέφουν τον προσανατολισμό και κάθε άλλου τετραέδρου. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε τι παθαίνει ο προσανατολισμός ενός

και μοναδικού τετραέδρου, για να συμπεράνουμε αν ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

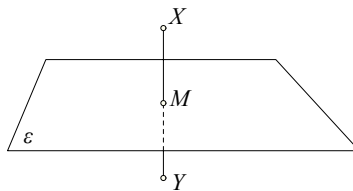
Για τους μετασχηματισμούς που διατηρούν τον προσανατολισμό των τετραέδρων λέμε επίσης συχνά ότι *διατηρούν τον προσανατολισμό του χώρου*, ενώ για αυτούς που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό των τετραέδρων λέμε ότι *αντιστρέφουν τον προσανατολισμό του χώρου*.

## 12.2 Κατοπτρισμοί του χώρου

Και αυτό μπορεί να συμβεί, όπως ξέρεις, στον πιο έξυπνο άνθρωπο, τον ψυχολόγο, τον άνθρωπο της γνώσης. Ή ιδιοσυγκρασία αντικατοπτρίζει τα πάντα σαν καθρέφτης! Κύτταξε μέσα και θαύμασε αυτό που βλέπεις!

*Φρόντορ Ντισογιέβσκι, Έγκλημα και τιμωρία*

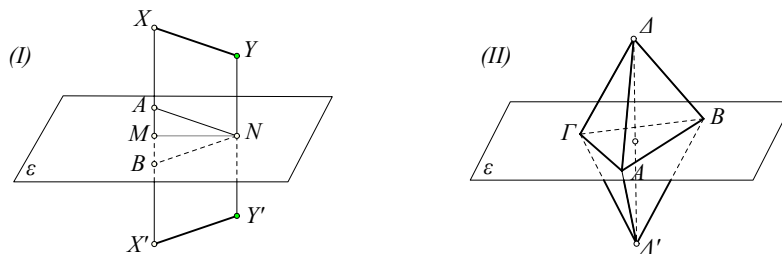
Ένα επίπεδο  $\varepsilon$  ορίζει ένα μετασχηματισμό του χώρου που λέγεται **κατοπτρισμός** ή **ανάκλαση** ως προς το  $\varepsilon$ . Το  $\varepsilon$  ονομάζεται συχνά **κάτοπτρο** της ανάκλασης. Αυτό είναι το ανάλογο των κατοπτρισμών ως προς ευθείες του επιπέδου (§ 7.2). Ο κατοπτρισμός αυτός σε κάθε σημείο  $X$  του χώρου αντιστοιχίζει: α) το ίδιο το  $X$  αν αυτό περιέχεται στο επίπεδο  $\varepsilon$ , β) το σημείο  $Y$  του χώρου, έτσι ώστε το  $\varepsilon$  να είναι το



Σχήμα 12.2.1: Κατοπτρισμός στο χώρο

μεσοκάθετο επίπεδο του  $XY$  αν το  $X$  δεν περιέχεται στο  $\varepsilon$ . Ισοδύναμα, αν  $M$  είναι η προβολή του  $X$  στο  $\varepsilon$ , τότε το  $Y$  είναι στην προέκταση του  $XM$  προς το  $M$  και σε ίση απόσταση με το  $X$  από το  $M$ .

**Θεώρημα 12.2.1** Ένας κατοπτρισμός είναι ισομετρία του χώρου που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.



Σχήμα 12.2.2: Κατοπτρισμοί είναι ισομετρίες

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία  $X, Y$  του χώρου δεν περιέχονται στο επίπεδο  $\varepsilon$  που ορίζει τον κατοπτρισμό και  $X', Y'$  είναι οι εικόνες τους (Σχήμα 12.2.2-I). Τότε, εξ' ορισμού τα ευθύγραμμα τμήματα  $XX', YY'$  θα είναι κάθετα στο  $\varepsilon$ , άρα παράλληλα μεταξύ τους και θα ορίσουν τραπέζιο  $XY'X'$ . Δείχνουμε ότι το τραπέζιο αυτό είναι ισοσκελές. Προς τούτο φέρνουμε παράλληλες από το μέσον  $N$  του  $YY'$  αντίστοιχα προς τα  $YX$  και  $Y'X'$ , που τέμνουν το  $XX'$  αντίστοιχα στα σημεία  $A$  και  $B$ . Σχηματίζονται τα παραλληλόγραμμα  $XANY$  και  $X'BNY'$ , στα οποία  $|AX| = |YN| = |NY'| = |BX'|$ .

Όμως, αν  $M$  το μέσον του  $XX'$ , τότε  $|MX| = |MX'|$  και αφαιρώντας προκύπτει ότι  $|AM| = |MB|$ . Επίσης το  $AB$  είναι εξ' ορισμού του κάθετο στο  $MN$ , άρα το τρίγωνο  $ANB$  είναι ισοσκελές και συνεπώς  $|XY| = |AN| = |BN| = |X'Y'|$ . Η απόδειξη όταν ένα ή και τα δύο σημεία  $X, Y$  περιέχονται στο  $\varepsilon$  ή το ισοσκελές εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα  $MN$  είναι ακόμη πιο εύκολη.

Το ότι ο κατοπτρισμός αντιστρέφει τον προσανατολισμό, το βλέπουμε αμέσως παίρνοντας ένα τετράεδρο  $AB\Gamma\Delta$ , του οποίου η βάση περιέχεται στο επίπεδο  $\varepsilon$  (Σχήμα 12.2.2-II). Κατά τον κατοπτρισμό ως προς  $\varepsilon$  αυτό απεικονίζεται στο τετράεδρο  $AB\Gamma\Delta'$ , όπου  $\Delta'$  το συμμετρικό του  $\Delta$  και βλέπουμε αμέσως ότι τα δύο τετράεδρα έχουν αντίθετους προσανατολισμούς, ο.ε.δ.

**Πρόταση 12.2.1** Για κάθε ανάκλαση  $f$  ισχύει  $f \circ f = e$ , με άλλα λόγια, ο αντίστροφος μιας ανάκλασης είναι ο ίδιος μετασχηματισμός της ανάκλασης.

Απόδειξη: Η ίδια με της Πρότασης 7.2.1, ο.ε.δ.

**Πρόταση 12.2.2** Εάν μια ισομετρία του χώρου  $f$ , διαφορετική της ταυτοτικής, ικανοποιεί τη σχέση  $f \circ f = e$  και έχει τρία τουλάχιστον μη-συνευθειακά σταθερά σημεία, τότε συμπίπτει με την ανάκλαση ως προς το επίπεδο που ορίζεται από τα τρία σημεία.

Απόδειξη: Η ίδια με της Πρότασης 7.2.4, ο.ε.δ.

**Άσκηση 12.2.1** Δείξε ότι μία ισομετρία του χώρου που αφήνει σταθερά τα σημεία ενός επιπέδου  $\varepsilon$  και μόνον αυτά, συμπίπτει με την ανάκλαση ως προς  $\varepsilon$ .

Κατ' αναλογία με τα σχήματα του επιπέδου, ένα σχήμα του χώρου  $\Sigma$  λέγεται **συμμετρικό** ως προς το επίπεδο  $\varepsilon$ , όταν η ανάκλαση  $f$  ως προς το  $\varepsilon$  απεικονίζει το  $\Sigma$  στον εαυτό του ( $f(\Sigma) = \Sigma$ ). Ένα επίπεδο  $\varepsilon$  ως προς το οποίο το σχήμα  $\Sigma$  είναι συμμετρικό, λέγεται **επίπεδο συμμετρίας** του  $\Sigma$ . Το πλέον συμμετρικό σχήμα στο χώρο είναι η σφαίρα.

**Άσκηση 12.2.2** Δείξε ότι κάθε επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας είναι επίπεδο συμμετρίας της. Δείξε ότι σχήματα  $\Sigma$  για τα οποία υπάρχει ένα σημείο  $O$ , έτσι ώστε κάθε επίπεδο διά του  $O$  να είναι επίπεδο συμμετρίας του  $\Sigma$ , είναι ενώσεις σφαιρών με κέντρο το  $O$ .

**Άσκηση 12.2.3** Πόσα και ποια επίπεδα συμμετρίας έχει ένα συγκεκριμένο επίπεδο και μία διέδρος;

**Άσκηση 12.2.4** Πότε μία τριέδρος έχει επίπεδο συμμετρίας;

**Άσκηση 12.2.5** Δείξε ότι αν μία τριέδρος έχει δύο επίπεδα συμμετρίας, τότε έχει και τρίτο και, συνεπώς, έχει ίσες έδρες και ίσες διέδρες γωνίες.

**Άσκηση 12.2.6** Πόσα και ποια επίπεδα συμμετρίας έχει ο κύλινδρος και ο κώνος;

**Άσκηση 12.2.7** Δείξε ότι, για δύο σφαίρες ίσων ακτίνων, υπάρχει μία ανάκλαση που απεικονίζει την μία στην άλλη.

Όπως στο επίπεδο, έτσι και στο χώρο, ένα σημείο  $O$  ορίζει τη **σημειακή συμμετρία** ως προς  $O$ . Αυτή στο  $O$  αντιστοιχίζει το ίδιο το  $O$  και σε κάθε άλλο σημείο  $X \neq O$  αντιστοιχίζει το  $Y$  έτσι ώστε το  $O$  να συμπίπτει με το μέσον του  $XY$ . Λέμε ότι το  $Y$  είναι το συμμετρικό του  $X$  ως προς  $O$ . Η συμμετρία  $f$  ως προς  $O$  είναι, όπως και η ανάκλαση, αντίστροφη του εαυτού της:

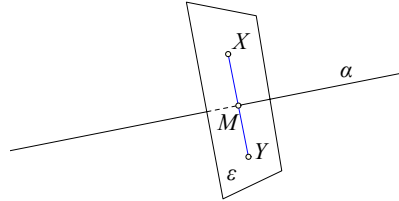
$$f \circ f = e.$$

Ένα σχήμα  $\Sigma$  λέγεται **συμμετρικό** ως προς σημείο  $O$ , όταν η συμμετρία  $f$  ως προς το  $O$  απεικονίζει το σχήμα στον εαυτό του ( $f(\Sigma) = \Sigma$ ). Λέμε επίσης τότε ότι το  $O$  είναι **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος. Το τυπικό παράδειγμα είναι πάλι η σφαίρα.

**Άσκηση 12.2.8** Δείξε ότι σε μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθε σημείο τους είναι κέντρο συμμετρίας τους.

**Άσκηση 12.2.9** Ποια από τα πλατωνικά σώματα έχουν κέντρο συμμετρίας;

**Άσκηση 12.2.10** Δείξε ότι η συμμετρία ως προς σημείο είναι ισομετρία.



Σχήμα 12.2.3: Αξονική συμμετρία στο χώρο

Στο χώρο έχουμε και ένα είδος συμμετρίας που ορίζεται από μία ευθεία  $a$ . Ονομάζουμε **αξονική συμμετρία** ως προς την ευθεία  $a$  του χώρου το μετασχηματισμό που: α) σε κάθε σημείο  $X$  της ευθείας  $a$  αντιστοιχίζει το ίδιο το  $X$  και β) σε κάθε σημείο  $X$  εκτός της ευθείας  $a$  αντιστοιχίζει το  $Y$ , έτσι ώστε η  $a$  να είναι μεσοκάθετος του  $XY$ . Με άλλα λόγια το  $Y$  προκύπτει προβάλλοντας το  $X$  πάνω στην  $a$  στο σημείο  $M$  και προεκτείνοντας το  $XM$  προς το  $M$  κατά το διπλάσιο. Κάθε επίπεδο  $\varepsilon$  κάθετο στην ευθεία  $a$  απεικονίζεται στον εαυτό του μέσω της αξονικής συμμετρίας ως προς  $a$  και, συνεπώς, ορίζεται ένας μετασχηματισμός αυτού του επιπέδου στον εαυτό του που συμπίπτει με τη συμμετρία ως προς  $M$ , όπου  $M$  το σημείο τομής του επιπέδου  $\varepsilon$  με την ευθεία  $a$ . Η σφαίρα πάλι έχει κάθε ευθεία δια του κέντρου της ως άξονα συμμετρίας.

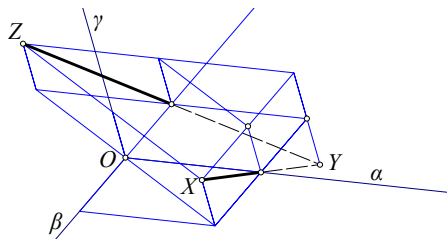
**Άσκηση 12.2.11** Δείξε ότι μία ευθεία, ένα επίπεδο και μία σφαίρα έχουν άπειρους άξονες συμμετρίας.

**Άσκηση 12.2.12** Βρες τους άξονες συμμετρίας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

**Άσκηση 12.2.13** Ποια πλατωνικά σώματα έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους;

**Άσκηση 12.2.14** Δείξε ότι η αξονική συμμετρία ως προς την ευθεία  $a$  ισούται με τη σύνθεση δύο ανακλίσεων ως προς δύο κάθετα επίπεδα και διερχόμενα διά της  $a$ .

Υπόδειξη: Δες την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.3.



Σχήμα 12.2.4: Σύνθεση αξονικών συμμετριών καθέτων αξόνων

**Άσκηση 12.2.15** Δείξε ότι η σύνθεση δύο αξονικών συμμετριών ως προς άξονες  $a$  και  $\beta$  που τέμνονται κάθετα στο σημείο  $O$  είναι η αξονική συμμετρία ως προς τον άξονα  $\gamma$  που είναι κάθετος στο επίπεδο των  $a, \beta$  στο σημείο  $O$ .

**Άσκηση 12.2.16** Δείξε ότι η σύνθεση τριών ανακλίσεων ως προς τρία επίπεδα που διέρχονται από το σημείο  $O$  και τέμνονται ανά δύο κάθετα είναι η συμμετρία ως προς  $O$ .

## 12.3 Μεταφορές του χώρου

Σε όλες τις εποχές και σε όλους τους τόπους υπήρξαν πολλοί που «δεν πίστευαν σε τίποτα», ακριβώς διότι, «δεν διερωτόνταν για τίποτα». Η ζωή, γι' αυτούς, σήμαινε να αφήνεσαι από τη μια στιγμή στην άλλη, χωρίς καμία εσωτερική απόκριση ή τοποθέτηση σε κάποιο δίλημμα.

*Ortega y Gasset, Η προέλευση της φιλοσοφίας*

Όπως στο επίπεδο (§ 7.3), έτσι και στο χώρο, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  ορίζει το μετασχηματισμό της **μεταφοράς** κατά το  $AB$ . Αυτός, σε κάθε σημείο  $X$  του χώρου, αντιστοιχίζει το σημείο  $Y$ , έτσι ώστε τα  $XY$  και  $AB$  να είναι ευθύγραμμα τμήματα ίσα, παράλληλα και όμοια προσανατολισμένα. Ισοδύναμα: το  $ABYX$  να είναι παραλληλόγραμμο. Και εδώ θεωρούμε τον ταυτοτικό μετασχηματισμό ως **μηδενική μεταφορά**, δηλαδή μεταφορά κατά διάστημα του οποίου τα άκρα ταυτίζονται. Όλες οι ιδιότητες των μεταφορών του επιπέδου, που εξετάζονται στην παράγραφο που προανέφερα, μεταφέρονται σχεδόν αυτολεξεί μαζί με τις αποδείξεις τους σε ανάλογες ιδιότητες των μεταφορών του χώρου. Τις παραθέτω ως ασκήσεις για επανάληψη.

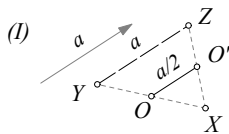
**Άσκηση 12.3.1** Κάθε μεταφορά είναι ισομετρία (Θεώρημα 7.3.1).

**Άσκηση 12.3.2** Η σύνθεση δύο ή περισσότερων μεταφορών είναι πάλι μεταφορά (Θεώρημα 7.3.2, Πρόρισμα 7.3.1).

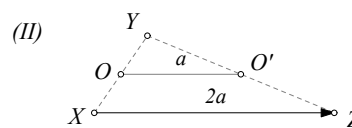
**Άσκηση 12.3.3** Η σύνθεση των μεταφορών κατά μήκος των προσανατολισμένων πλευρών  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$  ενός κλειστού πολυγώνου  $A_1A_2\dots A_k$  είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός του χώρου (Πρόρισμα 7.3.2).

**Άσκηση 12.3.4** Η σύνθεση δύο ανακλίσεων ως προς παράλληλα επίπεδα των οποίων η απόσταση είναι  $\delta$  είναι μεταφορά κατά ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  μήκους  $2\delta$  και κατεύθυνση την κάθετο στα δύο επίπεδα (Θεώρημα 7.3.3).

**Άσκηση 12.3.5** Η σύνθεση δύο συμμετριών ως προς άξονες που είναι παράλληλοι και σε απόσταση  $\delta$ , είναι μια μεταφορά κατά ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  του επιπέδου των παραλλήλων, κάθετο στους παράλληλους άξονες και μήκους  $2\delta$ .



Σχήμα 12.3.1: Σύνθεση συμμετρίας, μεταφοράς



Σύνθεση δύο συμμετριών

**Άσκηση 12.3.6** Η σύνθεση μιας συμμετρίας ως προς κέντρο και μιας μεταφοράς είναι μια συμμετρία ως προς κέντρο (Θεώρημα 7.3.4).

**Άσκηση 12.3.7** Η σύνθεση δύο συμμετριών ως προς δύο διαφορετικά σημεία  $O, O'$  είναι μεταφορά κατά το διπλάσιο του  $OO'$  (Θεώρημα 7.3.5).

**Άσκηση 12.3.8** Η σύνθεση  $n$  συμμετριών ως προς  $n$  σημεία  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι, για άρτια  $n$  μια μεταφορά και για περιττά  $n$  μια συμμετρία (Πρόρισμα 7.3.3).

**Άσκηση 12.3.9** Δοθέντων  $n$  διαφορετικών σημείων  $A_1, A_2, \dots, A_n$  υπάρχει ένα ακριβώς πολύγωνο που έχει αυτά τα σημεία ως μέσα διαδοχικών πλευρών του αν το  $n$  είναι περιττό. Αν το  $n$  είναι άρτιο, εν γένει δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο. Αν όμως υπάρχει ένα, τότε υπάρχουν άπειρα και μάλιστα κάθε σημείο του χώρου μπορεί να θεωρηθεί κορυφή ενός τέτοιου πολυγώνου (Θεώρημα 7.3.6).

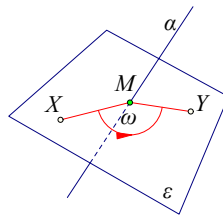


## 12.4 Στροφές του χώρου

Μακριά από τη λέπρα των γενικοτήτων. Όπου γενικότης, επιπολαιότης. Παντού τα συγκεκριμένα, τα χειροπιαστά. Ζωγραφιές των πραγμάτων, όχι άρθρα. Να η λυδία λίθος της μελέτης της βαθιάς.

*Κωστής Παλαμάς, Η μούσα του Παπαδιαμάντη*

Η κύρια διαφορά των στροφών του χώρου από αυτές του επιπέδου (§ 7.4) είναι ότι έχουν **άξονα στροφής** αντί για κέντρο στροφής. Υπάρχει δηλαδή μία ολόκληρη ευθεία που παραμένει σταθερά κατά τη στροφή (τα σημεία της είναι σταθερά σημεία του μετασχηματισμού). Επίσης την ευθεία αυτή (άξονα) τη θεωρούμε προσανατολισμένη, επιλέγοντας (αυθαίρετα) μία κατεύθυνση της ως θετική και την αντίθετή της ως αρνητική. Οι δύο έννοιες στροφής ωστόσο είναι στενά συνδεδεμένες. Μπορεί να πει κανείς ότι η στροφή στο χώρο είναι ένα είδος επέκτασης της στροφής στο επίπεδο. Αυτό αντανακλάται στην ιδιότητα της στροφής του χώρου, να ορίζει μια στροφή του επιπέδου σε κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονά της.



Σχήμα 12.4.1: Στροφή στο χώρο

Λέμε λοιπόν **στροφή του χώρου** ως προς άξονα την *προσανατολισμένη* ευθεία  $a$  και προσανατολισμένη γωνία  $\omega$ , το μετασχηματισμό που ορίζεται ως εξής: α) Τα σημεία του άξονα παραμένουν σταθερά. β) Για κάθε σημείο  $X$  εκτός του άξονα, φέρνουμε το επίπεδο  $\varepsilon$  διά του  $X$ , το κάθετο στον άξονα που τον τέμνει στο σημείο  $M$  και επιλέγουμε την πλευρά του ( $\varepsilon_+$ ), που βλέπει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Στο επίπεδο αυτό ορίζουμε ως θετικό προσανατολισμό στροφών αυτόν που είναι αντίθετος της φοράς του ρολογιού, η όψη του οποίου βλέπει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Στο  $X$  ο μετασχηματισμός αντιστοιχίζει το  $Y$  έτσι ώστε η προσανατολισμένη γωνία  $\widehat{XMY} = \omega$  και επίσης  $|MY| = |MX|$ . Με άλλα λόγια, αφού καθορίσουμε τον προσανατολισμό στο  $\varepsilon$ , στρέφουμε το  $X$  κατά την έννοια της στροφής στο επίπεδο, εφαρμοζόμενη στο  $\varepsilon$ , με κέντρο  $M$  και γωνία  $\omega$ .

**Σχόλιο-1** Στην περίπτωση που η γωνία στροφής  $|\omega| = \pi$  η στροφή ως προς άξονα  $a$  συμπίπτει με τη συμμετρία ως προς άξονα  $a$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση, στροφής  $f$  κατά γωνία που δεν είναι πολλαπλάσιο του  $\pi$ , αλλάζοντας ενδεχομένως τη φορά του άξονα μπορούμε να ορίσουμε στροφή  $g$  που έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την  $f$  για κάθε σημείο του χώρου και η γωνία της είναι  $0 < (\omega) < \pi$ .

Όπως στο επίπεδο έτσι και στο χώρο η στροφή είναι σύνθεση δύο ανακλάσεων, αυτή τη φορά ως προς δύο επίπεδα  $\zeta, \eta$ . Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται όπως ακριβώς και η αντίστοιχη για επίπεδα (Πρόταση 7.4.2).

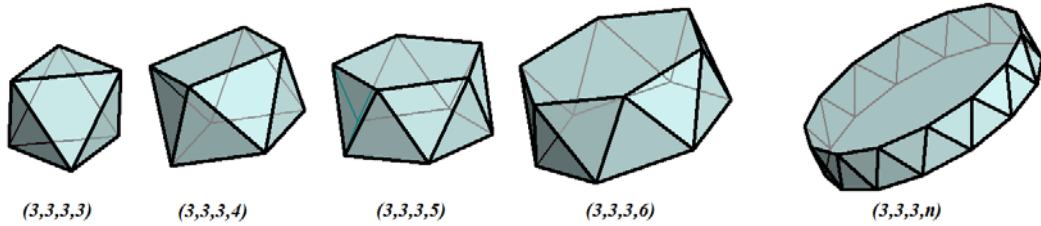
**Πρόταση 12.4.1** Η σύνθεση δύο ανακλάσεων  $f = h \circ g$ , των οποίων τα επίπεδα τέμνονται κατά ευθεία  $a$  σχηματίζοντας μία διεδρο γωνία προσανατολισμένου μέτρου  $\omega$  με  $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ , είναι στροφή με άξονα  $a$  και γωνία στροφής  $2\omega$  (Σχήμα 12.4.2).

**Θεώρημα 12.4.1** Κάθε στροφή του χώρου είναι ισομετρία του χώρου.

*Απόδειξη:* Μία απλή απόδειξη προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση και το γεγονός ότι οι ανακλάσεις ως προς επίπεδα είναι ισομετρίες του χώρου, ο.ε.δ.

**Πρόταση 12.4.2** Η σύνθεση δύο στροφών με τον ίδιο άξονα  $\eta$  και γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  είναι στροφή ως προς τον ίδιο άξονα και γωνία στροφής  $\alpha + \beta$ .





Σχήμα 12.8.3: Αντιπρίσματα  $(3, 3, 3, n)$

αντίστοιχα σύμβολα είναι  $(3, 3, 3, 3)$  (κανονικό οκτάεδρο),  $(3, 3, 3, 4)$ ,  $(3, 3, 3, 5)$ , ...

Στη συνέχεια, αφού αναλύσουμε τρεις περιορισμούς που υφίστανται για τις έδρες γύρω από κάθε κορυφή ενός ημικανονικού πολυέδρου, θα προχωρήσουμε στην ταξινόμησή τους, κατά Kepler [Kep19], [Cro97]. Την αιτία του πρώτου από αυτούς τους περιορισμούς την έχουμε ήδη συναντήσει. Εκφράζεται με το Θεώρημα 9.3.1, κατά το οποίο το άθροισμα των εδρών γύρω από την κορυφή μιας κυρτής πολυεδρικής γωνίας είναι μικρότερο του  $2\pi$ . Δεδομένου ότι οι γωνίες των κανονικών πολυγώνων αρχίζουν από τις  $60^\circ$  (ισόπλευρο τρίγωνο) και προχωρούν στις  $90^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $120^\circ$ , ... με άθροισμα  $60 + 90 + 108 + 120 = 378 > 360$ , το οποίο γίνεται ακόμη μεγαλύτερο για πολύγωνα με περισσότερες πλευρές, αποκλείεται γύρω από μία κορυφή να εμφανίζονται περισσότερα από τρία είδη κανονικών πολυγώνων. Ο πρώτος περιορισμός λοιπόν μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή της επόμενης πρότασης.

**Πρόταση 12.8.1** *Γύρω από κάθε κορυφή ημικανονικού πολυέδρου μπορούν να εμφανίζονται ως έδρες το πολύ 3 διαφορετικά είδη κανονικών πολυγώνων.*

Οι άλλοι δύο περιορισμοί αντιστοιχούν στις δύο διατάξεις πολυγώνων γύρω από μία κορυφή, που συνοψίζονται στο επόμενο σχήμα.



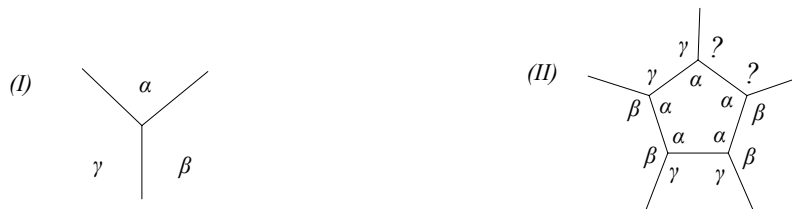
Σχήμα 12.8.4: Αδύνατη διάταξη γύρω από κορυφή ημικανονικού πολυέδρου

**Πρόταση 12.8.2** *Γύρω από κορυφή ημικανονικού πολυέδρου η διάταξη τριγώνου,  $\alpha$ -γώνου,  $\beta$ -γώνου και  $\gamma$ -γώνου είναι αδύνατη, όταν  $\alpha \neq \gamma$ , εκτός της περίπτωσης  $3 = \alpha = \beta \neq \gamma$ .*

*Απόδειξη:* Για την απόδειξη αρκεί να προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε πολύγωνα γύρω από το τρίγωνο. Αναπόφευκτα θα προκύψει η κατάσταση του σχήματος 12.8.4-II, όπου η γωνία στη θέση του ερωτηματικού δεν μπορεί να καθορισθεί, δεδομένου ότι τα πολύγωνα είναι κανονικά άρα έχουν ίσες γωνίες και γύρω από κάθε κορυφή πρέπει να εμφανίζεται ο ίδιος συνδυασμός πολυγώνων και με την ίδια διάταξη. Η περίπτωση  $(3, 3, 3, n)$  είναι, ωστόσο, δυνατή και συμβολίζει τα αντιπρίσματα με βάση κανονικό  $n$ -γώνο, ο.ε.δ.

**Πρόταση 12.8.3** *Γύρω από κορυφή ημικανονικού πολυέδρου η διάταξη  $\alpha$ -γώνου, με  $\alpha$  περιττό ακέραιο,  $\beta$ -γώνου και  $\gamma$ -γώνου με  $\gamma \neq \beta$  είναι αδύνατη.*

*Απόδειξη:* Για την απόδειξη αρκεί, πάλι, να προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε πολύγωνα σύμφωνα με αυτή τη διάταξη. Αναπόφευκτα θα προκύψει μία κατάσταση, όπως αυτή του σχήματος 12.8.5-II ( $\alpha = 5$ ), όπου, στη θέση με ερωτηματικό, οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνα και να βάλουμε οδηγεί σε ασυμβατότητα, ο.ε.δ.



Σχήμα 12.8.5: Ασυμβατότητα διάταξης γύρω από κορυφή ημικανονικού πολυέδρου

**Θεώρημα 12.8.1** (Αρχιμήδεια σώματα) *Εκτός των κανονικών πρισμάτων και αντιπρισμάτων, υπάρχουν 13 ακόμη διαφορετικά ημικανονικά στερεά.*

*Απόδειξη:* Εξετάζουμε τις διάφορες δυνατότητες, προσέχοντας τους προηγούμενους περιορισμούς. Όπως θα δούμε αμέσως, οι επόμενες δυνατότητες εξαντλούν όλες τις περιπτώσεις πολυεδρικών γωνιών που εμφανίζονται σε ημικανονικά πολύεδρα.

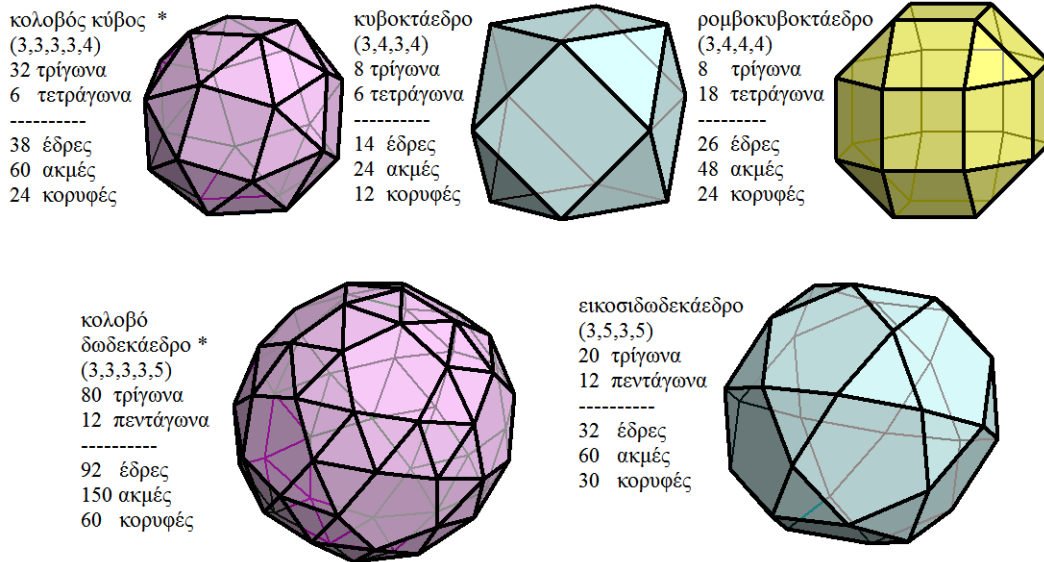
**1. Δύο είδη πολυγώνων σε κάθε κορυφή**

- (α) Τρίγωνα + τετράγωνα
  - i. Τρίγωνα + 1 μόνο τετράγωνο
  - ii. Τρίγωνα + 2 τετράγωνα
  - iii. Τρίγωνα +  $n > 2$  τετράγωνα
- (β) Τρίγωνα + πεντάγωνα
  - i. Τρίγωνα + 1 μόνο πεντάγωνο
  - ii. Τρίγωνα + 2 πεντάγωνα
- (γ) Τρίγωνα + εξάγωνα
  - i. Τρίγωνα + 1 μόνο εξάγωνο
  - ii. Τρίγωνα + 2 εξάγωνα
- (δ) Τρίγωνα +  $n$ -γωνα ( $n \geq 7$ )
  - i. Τρίγωνα + 1 μόνο  $n$ -γωνα

- ii. Τρίγωνα + 2  $n$ -γωνα
- (ε) Τετράγωνα +  $n$ -γωνα ( $n \geq 5$ )
  - i. Τετράγωνα + 1 μόνο  $n$ -γωνα
  - ii. Τετράγωνα + 2  $n$ -γωνα
- (ς) Πεντάγωνα +  $n$ -γωνα ( $n \geq 6$ )
  - i. Πεντάγωνα + 1 μόνο  $n$ -γωνα
  - ii. Πεντάγωνα + 2  $n$ -γωνα

**2. Τρία είδη πολυγώνων σε κάθε κορυφή**

- (α) Τρίγωνα + τετράγωνα +  $n$ -γωνα
- (β)  $m$ -γωνα +  $n$ -γωνα +  $p$ -γωνα, χωρίς τρίγωνα

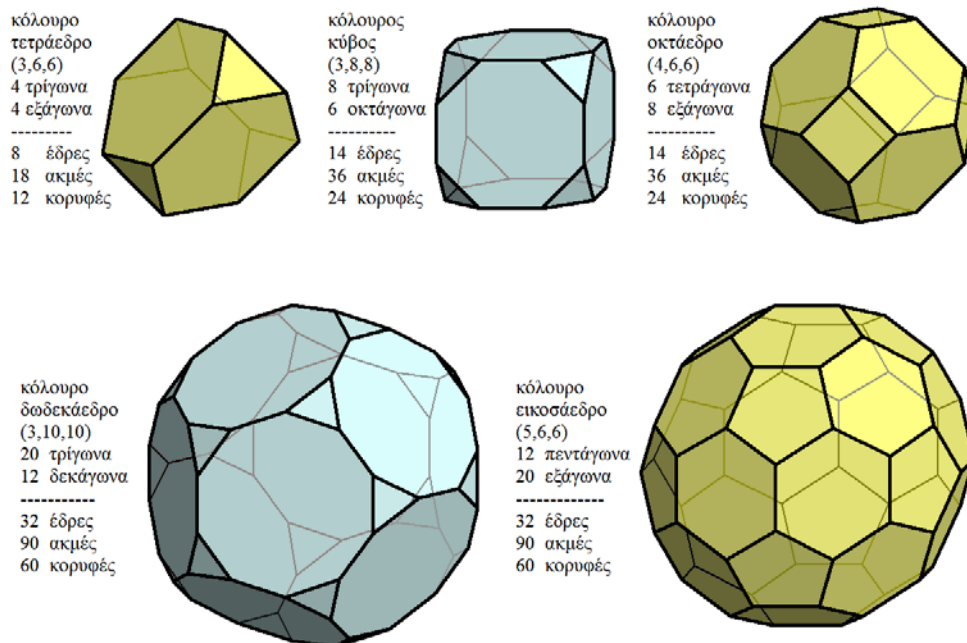


Σχήμα 12.8.6: Αρχιμήδεια σώματα-I

- (1.α'.i) Το τετράγωνο έχει γωνίες  $90^\circ$  και συνεπώς μπορεί να συνυπάρχει με, το πολύ, 4 τρίγωνα. Διαφορετικά, το συνολικό άθροισμα των εδρών γύρω από την κορυφή θα υπερβαίνει τις

$360^\circ$ . Κατ' αρχήν λοιπόν οι δυνατές περιπτώσεις είναι οι:  $(3, 3, 3, 3, 4)$ ,  $(3, 3, 3, 4)$  και  $(3, 3, 4)$ . Από αυτές η τελευταία είναι αδύνατη (Περιορισμός 12.8.3). Οι άλλες δύο είναι δυνατές και υλοποιούνται από τον λεγόμενο **κολοβό κύβο** και το τετραγωνικό αντιπρίσμα αντίστοιχα.

- (1.α', ii) Τα δύο τετράγωνα έχουν άθροισμα γωνιών  $180^\circ$ . Επομένως, μπορούν να συνυπάρχουν με 2 το πολύ τρίγωνα. Προκύπτουν λοιπόν οι περιπτώσεις  $(3, 3, 4, 4)$ ,  $(3, 4, 3, 4)$  και η  $(3, 4, 4)$ . Η περίπτωση  $(3, 4, 3, 4)$  αποκλείεται λόγω του Περιορισμού 12.8.2. Οι άλλες δύο είναι δυνατές και υλοποιούνται από το λεγόμενο **κυβοκτάεδρο** και το τριγωνικό κανονικό πρίσμα αντίστοιχα.
- (1.α', iii) Τρία τετράγωνα έχουν άθροισμα γωνιών  $270^\circ$ . Επομένως, μπορούν να συνυπάρχουν με ένα μόνο τρίγωνο. Η μοναδική λοιπόν δυνατότητα σε αυτή την κατηγορία είναι η  $(3, 4, 4, 4)$ , που υλοποιείται από το λεγόμενο **ρομβοκυβοκτάεδρο**.
- (1.β', i) Το πεντάγωνο με γωνία  $108^\circ$  μπορεί να συνυπάρχει με 4, το πολύ τρίγωνα. Διαφορετικά, το συνολικό άθροισμα των εδρών γύρω από την κορυφή θα υπερβαίνει τις  $360^\circ$ . Προκύπτουν λοιπόν οι δυνατότητες  $(3, 3, 3, 3, 5)$ ,  $(3, 3, 3, 5)$ ,  $(3, 3, 5)$ , εκ των οποίων η τελευταία είναι αδύνατη κατά τον Περιορισμό 12.8.3. Οι δύο άλλες δυνατότητες υλοποιούνται από το λεγόμενο **κολοβό δωδεκάεδρο** και το πενταγωνικό αντιπρίσμα.
- (1.β', ii) Δύο πεντάγωνα σε μια κορυφή έχουν άθροισμα γωνιών  $216^\circ$  και μπορούν να συνυπάρχουν με 2, το πολύ, ισόπλευρα τρίγωνα. Προκύπτουν λοιπόν οι δυνατότητες  $(3, 3, 5, 5)$ ,  $(3, 5, 3, 5)$ ,  $(3, 5, 5)$ , εκ των οποίων η τελευταία είναι αδύνατη κατά τον Περιορισμό 12.8.3. Η πρώτη αποκλείεται επίσης λόγω του Περιορισμού 12.8.2. Η μόνη δυνατότητα σε αυτή την κατηγορία είναι, συνεπώς, η  $(3, 5, 3, 5)$ , που υλοποιείται από το ονομαζόμενο **εικοσιδωδεκάεδρο**.
- (1.γ', i) Το εξάγωνο έχει γωνίες  $120^\circ$  και μπορεί να συνυπάρχει με 3, το πολύ, ισόπλευρα τρίγωνα. Προκύπτουν λοιπόν οι δυνατότητες  $(3, 3, 3, 6)$  και  $(3, 3, 6)$ , εκ των οποίων η τελευταία είναι αδύνατη κατά τον Περιορισμό 12.8.3. Η μόνη δυνατότητα σε αυτή την κατηγορία είναι, συνεπώς, η  $(3, 3, 3, 6)$ , που υλοποιείται από το εξαγωνικό αντιπρίσμα.



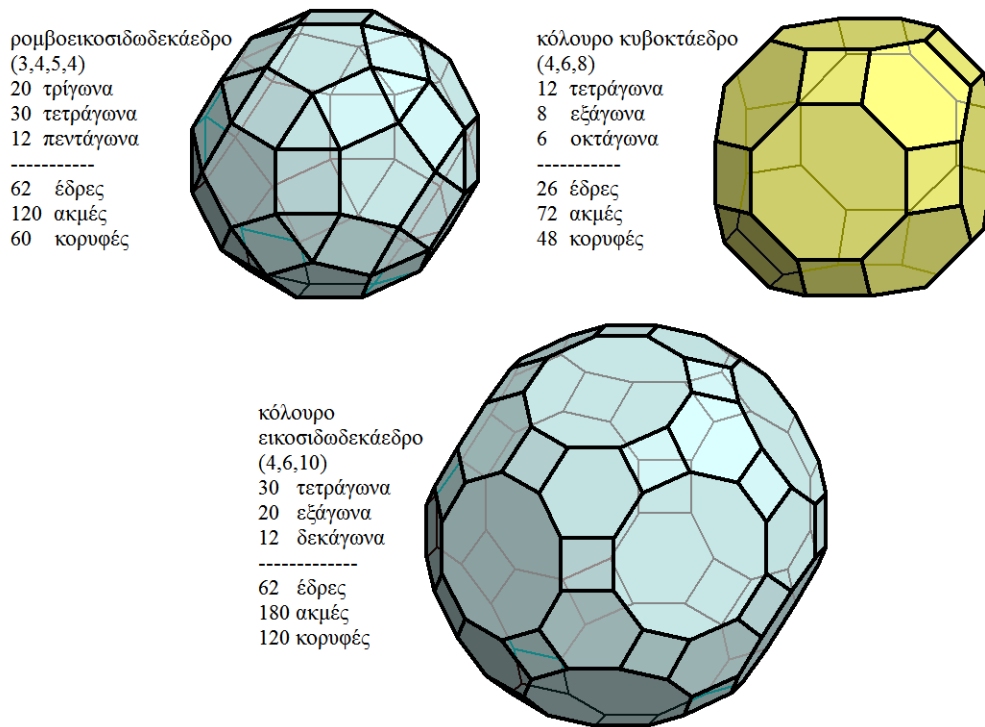
Σχήμα 12.8.7: Αρχιμήδεια σώματα - II

- (1.γ', ii) Δύο εξάγωνα, με άθροισμα γωνιών  $240^\circ$  μπορούν να συνυπάρχουν με ένα και μόνο ισόπλευρο τρίγωνο. Η μόνη δυνατότητα σε αυτή την κατηγορία είναι, συνεπώς, η  $(3, 6, 6)$ , που υλοποιείται από το **κόλουρο τετράεδρο**.

- (1.δ', i) Η περίπτωση ενός ακριβώς  $n$ -γώνου και τριγώνων, με  $n \geq 7$  και γωνίες μεγαλύτερες των  $128^\circ$  επιτρέπει τη συνύπαρξη με 3, το πολύ, ισόπλευρα τρίγωνα. Οι δυνατότητες σε αυτή την κατηγορία είναι οι  $(3, 3, 3, n)$ ,  $(3, 3, n)$ , εκ των οποίων η δεύτερη είναι αδύνατη λόγω του περιορισμού 12.8.3 και η πρώτη υλοποιείται από το αντίπρισμα με βάση το κανονικό  $n$ -γώνο.
- (1.δ', ii) Η περίπτωση δύο ακριβώς  $n$ -γώνων και τριγώνων, με  $n \geq 7$  και αντίστοιχες γωνίες μεγαλύτερες των  $128^\circ$  επιτρέπει τη συνύπαρξη με ένα, το πολύ, ισόπλευρο τρίγωνο. Οι δυνατότητες, συνεπώς, σε αυτή την κατηγορία αντιστοιχούν στα σύμβολα  $(3, n, n)$ , τα οποία, για περιπτώσεις  $n$  αποκλείονται, λόγω του περιορισμού 12.8.3. Επίσης, λόγω υπέρβασης των  $360^\circ$  γύρω από μια κορυφή, αποκλείονται άρτιοι μεγαλύτεροι του 10. Προκύπτουν λοιπόν σε αυτή την κατηγορία οι δυνατότητες  $(3, 8, 8)$  και  $(3, 10, 10)$ , που υλοποιούνται αντίστοιχα από τον **κόλουρο κύβο** και το **κόλουρο δωδεκάεδρο**.
- (1.ε', i) Η περίπτωση τετραγώνων και ενός ακριβώς  $n$ -γώνου, με  $n \geq 5$  είναι η  $(4, 4, n)$  που αντιστοιχεί στα κανονικά πρίσματα με βάση ένα κανονικό  $n$ -γώνο.
- (1.ε', ii) Η περίπτωση τετραγώνων και δύο ακριβώς  $n$ -γώνων, με  $n \geq 5$  επιτρέπει ένα μόνο τετράγωνο και επιτρέπει μόνο στερεά με σύμβολα του τύπου  $(4, n, n)$ . Αυτά για  $n \geq 8$  αποκλείονται διότι δίνουν άθροισμα γωνιών γύρω από την κορυφή μεγαλύτερο των  $360^\circ$ . Επίσης ο τύπος  $(3, 7, 7)$  αποκλείεται λόγω του περιορισμού 12.8.3. Μοναδική λοιπόν περίπτωση σε αυτή την κατηγορία είναι η  $(4, 6, 6)$ , που υλοποιείται από το **κόλουρο οκτάεδρο**.
- (1.στ', i) Η περίπτωση πενταγώνων και ενός ακριβώς  $n$ -γώνου, με  $n \geq 6$ , ήδη από το αντίστοιχο σύμβολο  $(5, 5, n)$  απορρίπτεται διότι τέτοια πολύγωνα δίνουν άθροισμα γωνιών γύρω από την κορυφή μεγαλύτερο των  $360^\circ$ .
- (1.στ', ii) Για τον ίδιο λόγο η περίπτωση πενταγώνων και δύο ακριβώς  $n$ -γώνων, με  $n \geq 6$ , είναι δυνατή μόνο για το στερεό με αντίστοιχο σύμβολο  $(5, 6, 6)$ , που υλοποιείται από το **κόλουρο εικοσάεδρο**. Οι προηγούμενες κατηγορίες εξαντλούν όλες τις περιπτώσεις κορυφών ημικανονικών πολυέδρων όπου εμφανίζονται δύο ακριβώς είδη πολυγώνων.
- (2.α) Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται πολυέδρα γύρω από τις κορυφές των οποίων εμφανίζονται τρία είδη πολυγώνων: τρίγωνα, τετράγωνα και  $n$ -γωνα με  $n \geq 5$ . Διακρίνουμε πάλι τις περιπτώσεις:
  1. 1 μόνο τετράγωνο  $\Rightarrow$  2 το πολύ τρίγωνα. Προκύπτουν τα σύμβολα  $(3, 3, 4, n)$ ,  $(3, 4, n)$ , που αποκλείονται, λόγω των περιορισμών 12.8.2 και 12.8.3 αντίστοιχα.
  2. 2 ακριβώς τετράγωνα  $\Rightarrow$  1 το πολύ τρίγωνο. Προκύπτουν τα σύμβολα  $(3, 4, 4, n)$ ,  $(3, 4, 5, 4)$ . Εκ των οποίων το πρώτο αποκλείεται, λόγω του περιορισμού 12.8.2. Το σύμβολο  $(3, 4, 5, 4)$  υλοποιείται από το λεγόμενο **ρομβοεικοσιδωδεκάεδρο**.
- (2.β) Στην τελευταία αυτή κατηγορία συμπεριλαμβάνονται πολυέδρα γύρω από τις κορυφές των οποίων εμφανίζονται τρία είδη πολυγώνων, όχι όμως τρίγωνα. Βλέπουμε αμέσως ότι το σύμβολο  $(4, 4, 5, 6)$  ορίζει γωνίες γύρω από μια κορυφή, των οποίων το άθροισμα είναι μεγαλύτερο των  $360^\circ$ . Συνάγεται ότι τα πολύγωνα γύρω από μια κορυφή πρέπει να είναι όλα διαφορετικά και σύμφωνα με τον περιορισμό 12.8.3, κανένα δεν μπορεί να περιέχει περιττό αριθμό. Προκύπτουν οι δυνατότητες  $(4, 6, 8)$  και  $(4, 6, 10)$  που υλοποιούνται από το **κόλουρο κυβοκτάεδρο** και **κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο** αντίστοιχα.

Η προηγούμενη ανάλυση εξαντλεί όλες τις περιπτώσεις κυρτών πολυεδρικών γωνιών που μπορούν να εμφανίζονται σε ημικανονικά πολυέδρα και δείχνει ότι δεν υπάρχουν άλλα από τα αναφερθέντα, ο.ε.δ.

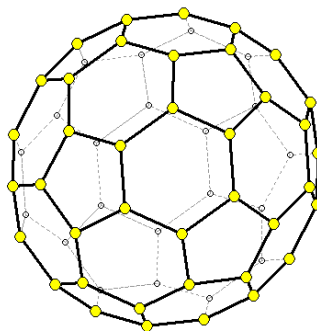
**Σχόλιο-1** Το προηγούμενο θεώρημα αφορά τον προσδιορισμό όλων των δυνατών ημικανονικών πολυέδρων. Δεν θίγει, ωστόσο, το πρόβλημα της ύπαρξης. Για να αντιμετωπισθεί αυτό το ζήτημα, θα πρέπει, όπως κάνει ο Ευκλείδης για τα Πλατωνικά, να γίνει η κατασκευή του κάθε στερεού, βάσει του μήκους της ακμής του ή της ακτίνας της περιγεγραμμένης του σφαίρας. Για τις περισσότερες



Σχήμα 12.8.8: Αρχιμήδεια σώματα - III

κατασκευές, και συγκεκριμένα για όσες χαρακτηρίζονται από το επίθετο **κόλουρο**, αλλά και το κυβοκτάεδρο και εικοσιδωδεκάεδρο, υπάρχει η δυνατότητα αναγωγής στην κατασκευή των Πλατωνικών σωμάτων. Για παράδειγμα, το κόλουρο τετράεδρο προκύπτει αποκόπτοντας με απλό τρόπο τις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου. Επίσης το κόλουρο κυβοκτάεδρο προκύπτει αποκόπτοντας κορυφές του κυβοκταέδρου, που προκύπτει παρόμοια από τον κύβο.

**Σχόλιο-2** Δύο από τα Αρχιμήδεια στερεά, ο **κολοβός κύβος** και το **κολοβό δωδεκάεδρο** εμφανίζονται σε δύο, όπως λέγονται, **εναντιόμορφες** μορφές, που δεν είναι παρά οι κατοπτρικές τους εικόνες ως προς επίπεδο. Σύμφωνα με τη συζήτησή μας για την ισότητα στο χώρο (§ 12.5), οι δύο εναντιόμορφες μορφές καθενός από αυτά τα στερεά είναι ισομετρικές, αλλά δεν μπορούν να τοποθετηθούν η μία πάνω στην άλλη.

Σχήμα 12.8.9: Φουλερένιο  $C_{60}$ , άτομα άνθρακα διατεταγμένα στις κορυφές κολουρου εικοσαέδρου

**Σχόλιο-3** Τα Αρχιμήδεια σώματα ήλθαν πάλι στην επικαιρότητα με την ανακάλυψη στη Χημεία (1996)



των **φουλερένιων**, που είναι μόρια άνθρακα, των οποίων τα άτομα είναι στις κορυφές πολυέδρων. Το πιο γνωστό είναι το  $C_{60}$  (Σχήμα 12.8.9), που αντιστοιχεί στο κόλουρο εικοσαέδρο ([FC11]).

## 12.9 Επίλογος

Τα βιβλία έχουν τους ίδιους εχθρούς με τον άνθρωπο: τη φωτιά, την υγρασία, την ανοησία, το χρόνο, και το ίδιο τους το περιεχόμενο.

*Paul Valery, Σκέψεις και Αφορισμοί*

Κοιτάζοντας πίσω, το υλικό που επεξεργαστήκαμε στο σύνολό του, θα διαπιστώσουμε ότι τις περισσότερες φορές μας απασχόλησαν, όχι τόσο ιδιότητες που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς ισομετρίες, αλλά ιδιότητες που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς ομοιότητες. Ακόμη και οι μετρήσιμες μεγεθών που διατηρούνται μόνο από ισομετρίες, όπως είναι μήκη, εμβαδά και όγκοι, μεταβάλλονται μέσω ομοιοτήτων με απλό τρόπο, πολλαπλασιάζοντας τα αρχικά μεγέθη αντίστοιχα με  $\kappa$ ,  $\kappa^2$ ,  $\kappa^3$ , όπου  $\kappa$  ο λόγος της ομοιότητας. Έτσι, θα μπορούσε κανείς να διατυπώσει το γενικό κανόνα, ότι η ευκλείδεια γεωμετρία έχει ως αντικείμενό της το σύνολο των ιδιοτήτων των σχημάτων του χώρου που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τις ομοιότητες του χώρου ([Yag62, σ. 4,II]). Υπάρχουν πολλά ενδιαφέροντα άρθρα και βιβλία για την τροπή που πήραν τα πράγματα και το τι ακριβώς σημαίνει σήμερα η λέξη «Γεωμετρία». Θα αναφέρω ένα από τα σημαντικότερα άρθρα, αυτό του S.S. Chern [Che90], στο οποίο περιέχονται και παραπομπές σε συναφή άρθρα, καθώς και τα βιβλία του Berger [Ber10] και των Scriba και Schreiber [CS05].

Όσον αφορά τις υποδομές, πάνω στις οποίες στηρίζεται το υλικό που διαπραγματευθήκαμε, αυτές υποδηλώνονται σε πολλά και διάφορα σημεία. Κατ' αρχήν, η βασική υποδομή σε όλο το σύστημα της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι αυτή των πραγματικών αριθμών. Πολλές από τις ελλείψεις των στοιχείων του Ευκλείδη οφείλονται στο ότι, για την ακριβή περιγραφή της δομής του συνόλου των πραγματικών αριθμών (δες το θαυμάσιο βιβλίο του Αντώνη Τσολομύτη [Τσο04α]), χρειάστηκε να περάσει διάστημα μεγαλύτερο των δύο χιλιετιών. Οι ευκλείδειες ευθείες είναι, κατά κάποιον τρόπο, αντίγραφα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Μία ευκλείδεια ευθεία είναι ένα «μοντέλο» του συνόλου των πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα, το σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών είναι ένα συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο της ευκλείδειας ευθείας. Σε αυτή την αμφίδρομη αντιστοιχία στηρίζεται η ιδέα της «αναλυτικής γεωμετρίας» του Καρτέσιου, που παίρνοντας δύο κάθετες ευθείες στο επίπεδο, το παριστάνει με το καρτεσιανό γινόμενο  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Αμέσως φανερώνεται πιο καθαρά η έννοια του «διανυσματικού χώρου», που τόσο καιρό χρησιμοποιούσαμε χωρίς να το αναγνωρίζουμε, δουλεύοντας με τα κατευθυνόμενα ευθύγραμμο τμήματα  $AB$ , τις τεθλασμένες, τα παραλληλόγραμμα, τα πολύγωνα, τα μέσα των τμημάτων, τα κέντρα βάρους, που, όλα τους σχετίζονται με το «άθροισμα» τέτοιων κατευθυνόμενων τμημάτων = «διανυσμάτων».

Ένας άλλος τομέας, που στηρίζεται από ένα πλήθος υποδομών, είναι αυτός των σχέσεων και των εξισώσεων, που προκύπτουν σχεδόν σε κάθε θεώρημα και άσκηση της ευκλείδειας γεωμετρίας. Τι είναι αυτές οι εξισώσεις; Ποιες «λύνονται»; Ποιες δεν λύνονται; Γιατί λύνονται αυτές που λύνονται και δεν λύνονται αυτές που δεν λύνονται; Ερωτήματα αυτής της φύσεως σχετίζονται με το πότε κατασκευάζεται, με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη, ένα ευθύγραμμο τμήμα με συγκεκριμένο μέτρο λ.χ.  $\sqrt{\pi}$  ή ένα κανονικό πολύγωνο με  $n$  πλευρές. Τα ερωτήματα οδηγούν στην άλγεβρα, στη «θεωρία σωμάτων» και στη «θεωρία ομάδων», που με τη σειρά τους οδηγούν σε πλήθος άλλων αλγεβρικών δομών.

Την έννοια του «ορίου» τη συναντάμε στη μέτρηση εμβαδών/όγκων πολυγώνων/πολυέδρων και μηκών απλών καμπυλών, όπως ο κύκλος. Το «μήκος», το «εμβαδόν», ο «όγκος», σε συνδυασμό με το όριο, οδηγούν στη «θεωρία μέτρου». Κάτω απ' την έννοια του ορίου κρύβεται όλος ο «απειροστικός λογισμός».

Τέλος, ένας ακόμη τομέας, που οδηγεί σε σημαντικές υποδομές, είναι αυτός των «συμμετριών ενός σχήματος». Η δομή που προκύπτει είναι αυτή της «ομάδος». Πολλές από τις ιδιότητες των

μετασηματισμών που μελετήσαμε, στις «μεταφορές», στις «στροφές», στις «ομοιότητες», μπορούν να εκφρασθούν ενιαία στη γλώσσα της «θεωρίας ομάδων». Ο περιορισμένος αριθμός πλατωνικών ή αρχιμήδειων σωμάτων λ.χ. οφείλεται στο ότι η ομάδα ισομετριών της σφαίρας έχει λίγες συγκεκριμένες «υποομάδες» με πεπερασμένα στοιχεία. Στο βιβλίο λοιπόν, βάζουμε μια καλή αρχή. Κάποιες φορές, κάτω από ένα απλό θεώρημα ή άσκηση, μπορούμε να βρούμε, αν σκάσουμε λίγο βαθύτερα, μια ολόκληρη θεωρία, ένα νέο κόσμο.





---

## Βιβλιογραφία

---

- [Πάπ76] Πάππος: *Συναγωγή*. Weidmann, Berlin, 1876.
- [Μ52] Μ, Φ Γ: *Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουΐτων)*. Εκδόσεις Καραβία, Αθήναι, 1952.
- [Ιωα68α] Ιωαννίδης, Ι.: *Γεωμετρία*. Αθήναι, 1968.
- [Τσα68β] Τσαούσης, Κωνσταντίνος: *Γεωμετρικά Θέματα*. Αθήναι, 1968.
- [Καν70] Κανέλλος, Σπύρος: *Στερεομετρία*. Παπαδημητρόπουλος, Αθήναι, 1970.
- [Καν76] Κανέλλος, Σπύρος: *Ευκλείδειος Γεωμετρία*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1976.
- [Παπ81] Παπανικολάου, Χρ.: *Ευκλείδειος Γεωμετρία για την Β' Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1981.
- [Πάμ89] Πάμφιλος, Πάρις: *Γεωμετρία*. Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1989.
- [Λευ90] Λευκαδίτης, Γεώργιος: *Η Προοπτική*. Αθήνα, 1990.
- [Φρά94α] Φράλεϊ, Τζόν: *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
- [Σπί94β] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Λογισμός σε Πολυπλοκότητες*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
- [Καπ96] Καπέτης, Γεώργιος: *Γεωμετρία του Τριγώνου, τομ. Α, Β*. Εκδόσεις Ζητη, Θεσσαλονίκη, 1996.
- [Στά00] Στάμου, Γεώργιος: *Σχετικά με τους Δίδυμους Κύκλους του Αρχιμήδη*. Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, 8:31–32, 2000.
- [Μπα01] Μπαλόγλου, Χρήστος: *Σκόρπιες Σταγόνες Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη, 2001.
- [Χρι03α] Χριστιανίδης, Γιάννης: *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003.
- [Λευ03β] Λευκαδίτης, Γεώργιος: *Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας I,II*. Αθήνα, 2003.
- [Τσο04α] Τσολομύτης, Αντώνης: *Σύνολα και Αριθμοί*. Εκδόσεις Λεαδερ Βοοκς, 2004.
- [Σπί04β] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.

- [Που06α] Πουλάκης, Δημήτριος Μ.: *Γεωμετρία των Αλγεβρικών Καμπυλών*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2006.
- [Λευ06β] Λευκαδίτης, Γεώργιος: *Μέθοδοι Παραστάσεων, Αξονομετρία, Υψομετρία, Σκιαγραφία*. Αθήνα, 2006.
- [Μαρ08] Μαρκάτης, Στηλιανός: *Παρασιατική Γεωμετρία*. Αθήνα, 2008.
- [Κατ10] Κατσιγιάννης, Κώστας: *Από το Στομάχιον του Αρχιμήδη στο θεώρημα του Pick Διπλωματική Εργασία*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Πανεπιστήμιο Κύπρου, 2010.
- [Μπέ11α] Μπέργκ, Μάρκ ντε: *Υπολογιστική Γεωμετρία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2011.
- [Πρέ11β] Πρέσλεϊ, Άντριου: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2011.
- [Τσι11γ] Τσιμπούκης, Θεόδωρος: *Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο I, II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2011.
- [Ντρ11δ] Ντριάνκος, Σωκράτης: *Άρρητοι Αριθμοί και Συνεχή Κλάσματα*. Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2011.
- [Τζό12α] Τζόριζ Τομάς, Ρος Φίνεϊ: *Απειροστικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2012.
- [Γεώ12β] Γεώργιος Λευκαδίτης, Σταματίνα Μαλικούτη: *Γεωμετρία, από την Επιστήμη στην Εφαρμογή*. Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά, Πειραιάς, 2012.
- [Κατ13] Κατς, Βίκτωρ: *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- [AA06] Andreescu, Titu and Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*. Birkhaeuser, Berlin, 2006.
- [Aar08] Aarts, J.M.: *Plane and Solid Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [AB83] A. Bruen, J. Fisher, J. Wilker: *Apollonius by Inversion*. Mathematics Magazine, 56:97–103, 1983.
- [Adl06] Adler, August: *Theorie der Geometrischen Konstruktionen*. Goeschensche Verlagshandlung, Leipzig, 1906.
- [Alp00] Alperin, Roger: *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*. New York Journal of Mathematics, 6:119–133, 2000.
- [AO12] Alexander Ostermann, Gerhard Wanner: *Geometry by its history*. Springer, Berlin, 2012.
- [AP88] Agazzi, Evandro and Dario Palladino: *Le Geometrie non Euclidee e i Fondamenti della Geometria*. La scuola, Brescia, 1988.
- [Arn04] Arnolold, Vladimir: *Problems for children from 5 to 15*. MCCME, Moscow, 2004.
- [Arn05] Arnolold, Vladimir: *Arnold's Problems*. Springer, Berlin, 2005.
- [Ask03] Askwith, E.H.: *A course of pure Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1903.
- [Aud02] Audin, Michele: *Geometry*. Springer Verlag, 2002.

- [Aym04] Ayme, Jean Louis: *A purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem*. Forum Geometricorum, 4:219–224, 2004.
- [Bac73] Bachmann, Friedrich: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Verlag, Heidelberg, 1973.
- [Bai88] Bailey, David: *The computation of  $\pi$  to 29,360,000 Decimal Digits Using Borweins' Quartically Convergent Algorithm*. Mathematics of Computation, 50:283–296, 1988.
- [Bak85a] Baker, Marcus: *A collection of formulae for the area of a plane triangle*. Annals of Mathematics, 1:134–138, 1885.
- [Bak85b] Baker, Marcus: *A collection of formulae for the area of a plane triangle*. Annals of Mathematics, 2:11–18, 1885.
- [Ban88] Bankoff, Leon: *The Metamorphosis of the Butterfly Problem*. Mathematics Magazine, 60:195–210, 1988.
- [Bea83] Beardon, Alan: *The Geometry of Discrete Groups*. Springer, Berlin, 1983.
- [Bel07] Belyaev, Oleg: *Fundamentals of Geometry*. Preprint (Internet), 2007.
- [Ben07] Benko, David: *A New Approach to Hilbert's Third Problem*. The American Mathematical Monthly, 114:665–676, 2007.
- [Ber87] Berger, Marcel: *Geometry vols I, II*. Springer Verlag, Heidelberg, 1987.
- [Ber02] Berger, Marcel: *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer Verlag, Heidelberg, 2002.
- [Ber10] Berger, Marcel: *Geometry Revealed*. Springer Verlag, Heidelberg, 2010.
- [Bes95] Besant, W. H.: *Conic Sections Treated Geometrically*. George Bell and Sons, London, 1895.
- [BH07] Barker, William and Roger Howe: *Continuous Symmetry, From Euclid to Klein*. American Mathematical Society, 2007.
- [Bir32] Birkhoff, George: *A set of postulates for plane Geometry, Based on Scale and Protractor*. Annals of Mathematics, 33:329–345, 1932.
- [Bir15] Birsan, Temistocle: *Bounds for Elements of a Triangle Expressed by  $R, r$  and  $s$* . Forum Geometricorum, 15:99–103, 2015.
- [Bla36] Blaschke, Wilhelm: *Kreis und Kugel*. Walter de Gruyter, Berlin, 1936.
- [Bly00] Blythe, W.: *Geometrical Drawing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1900.
- [BM57] B., Argunov and Balk M.: *Geometritseskie Postroenia na ploskosti (Russian)*. Gasudarstvenoe Isdatelstvo, Moscva, 1957.
- [Boa06] Boas, Harold: *Reflections on the Arbelos*. The American Mathematical Monthly, 113:236–249, 2006.
- [Boc15] Bocher, Maxime: *Plane Analytic Geometry*. Henry Holt and Company, New York, 1915.
- [Bol82] Bold, Benjamin: *Famous Problems of Geometry*. Dover Publications, Inc., New York, 1982.
- [Bon12] Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*. The Open Court Publishing Company, Chicago, 1912.

- [Bot84] Bottema, Oene: *Archimedes Revisited*. Mathematics Magazine, 57:224–225, 1984.
- [Bot01] Bottema, Oene: *The Malfatti Problem*. Forum Geometricorum, 1:43–50, 2001.
- [Bot07] Bottema, Oene: *Topics in Elementary Geometry*. Springer Verlag, Heidelberg, 2007.
- [Boy91] Boyer, Carl: *A History of Mathematics, 2nd Edition*. John Wiley, New York, 1991.
- [Bur86] Burnside, William: *Theory of equations*. Longmans, Green and Co., London, 1886.
- [Cai33] Cairns, Stewart: *An axiomatic basis for plane Geometry*. Transactions of the American Mathematical Society, 35:234–244, 1933.
- [Car16] Carslaw, H.S.: *The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry*. Longmans, Green and Co., London, 1916.
- [Cas88] Castellanos, Dario: *The Ubiquitous  $\pi$* . Mathematics Magazine, 61:67–98, 1988.
- [Cat52] Catalan, E.: *Theoremes et problemes de Geometrie Elementaire*. Carilian-Coeury, Paris, 1852.
- [Cay76] Cayley, Arthur: *On three-bar motion*. Proceedings of the London Mathematical Society, 7:136–166, 1876.
- [CG67] Coxeter, H and L Greitzer: *Geometry Revisited*. Math. Assoc. Amer. Washington DC, 1967.
- [Cha52] Chasles, M.: *Traite de geometrie superieure*. Bachelier, Paris, 1852.
- [Cha65] Chasles, M.: *Traite de Sections Coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1865.
- [Cha79] Chakerian, G.D.: *A distorted view of Geometry*. Mathematical Plums, Dolciani Mathematical Expositions, 4:131–150, 1979.
- [Che90] Chern, Shiing Shen: *What Is Geometry?* American Mathematical Monthly, 97:679–686, 1990.
- [Cla19] Clawson, Wentworth: *The Complete Quadrilateral*. Annals of Mathematics, 20:232–261, 1919.
- [Con98] Connes, Alain: *A new proof of Morley's theorem*. Les relations entre les mathematiques et la physique theorique, IHES, 40:43–46, 1998.
- [Coo16] Coolidge, Julian Lowell: *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford University Press, Oxford, 1916.
- [Coo40] Coolidge, Julian Lowell: *A history of the Geometrical Methods*. Oxford University Press, Oxford, 1940.
- [Coo68] Coolidge, Julian Lowell: *A history of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. Dover Publications, New York, 1968.
- [Cou80] Court, Nathan Altshiller: *College Geometry*. Dover Publications Inc., New York, 1980.
- [Cox48] Coxeter, H S M: *A Problem of Collinear Points*. American Math. Monthly, 55:26–28, 1948.
- [Cox49] Coxeter, H: *Projective Geometry*. Mathematics Magazine, 23:79–97, 1949.
- [Cox61] Coxeter, H: *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1961.
- [Cox67] Coxeter, H: *CUPM Geometry Conference*. Math. Assoc. Amer. Washington DC, 1967.

- [Cox68] Coxeter, H S M: *The problem of Apollonius*. American Math. Monthly, 75:5–15, 1968.
- [Cox12] Cox, David: *Galois Theory, 2nd ed.* Wiley., New York, 2012.
- [CR96] Courant, Richard and Herbert Robbins: *What is Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [Cra03] Crabbs, Robert: *Gaspar Monge and the Monge Point of the Tetrahedron*. Mathematics Magazine, 76:193–203, 2003.
- [CrFW91] Cockshott, Arthur and rev. F.B. Walters: *Geometrical Conics*. MacMillan and Co., London, 1891.
- [Cro97] Cromwell, Peter: *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [CS05] Christoph Scriba, Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie*. Springer Verlag, Heidelberg, 2005.
- [CSC94] Chou Shang-Ching, Gao Xiao-Shan, Zhang Jing Zhong: *Machine Proofs in Geometry*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [C.W99] C.W.Dodge, T.Schoch, P.Woo P.Yiu: *Those Ubiquitous Archimedean Circles*. Mathematics Magazine, 72:202–213, 1999.
- [Dan55] Dantzig, Tobias: *The bequest of the Greeks*. George Allen and Unwin Ltd., London, 1955.
- [Dar04] Darling, David: *The Universal Book of Mathematics*. Wilen, New York, 2004.
- [Dav93] Davis, Philip: *Spirals, From Theodorus to Chaos*. A K Peters, Wellesley Massachusetts, 1993.
- [Dav06] Davis, Thom: *Geometry with Computers*. Free internet edition, 2006.
- [dB81] Bruijn, N.G de: *Algebraic theory of Penrose non-periodic tilings of the plane I, II*. Proceedings of the AMS, 84:39–66, 1981.
- [dC76] Carmo, Manfredo do: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [Dea56] Deaux, Roland: *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*. Dover, New York, 1956.
- [Del89] Deltheil, R Caire D.: *Geometrie et complements*. Editions Jaques Gabay, Paris, 1989.
- [Der07] Dergiades, Nikolaos: *The Soddy Circles*. Forum Geometricorum, 7:191–197, 2007.
- [DF06] Dmitry Fuchs, Serg Tabchnikov: *Mathematical Omnibus, Thirty lectures on Classic Mathematics*. Department of Mathematics, Davis, 2006.
- [Dij87] Dijksterhuis, E. J.: *Archimedes*. Princeton University Press, Princeton, 1987.
- [Doe65] Doerrie, Heinrich: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York, 1965.
- [DR81] DeTemple, Duane and Jack Robertson: *A Billiard Path Characterization of Regular Polygons*. Mathematics Magazine, 54:73–75, 1981.
- [dV98] Villiers, Michael de: *Dual Generalizations of Van Aubel's theorem*. The Mathematical Gazette, 11:405–412, 1998.
- [Efi80] Efimov, N. V.: *Higher Geometry*. Mir Publishers, Moscow, 1980.

- [Ehr04] Ehrmann, Jean Pierre: *Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral*. Forum Geometricorum, 4:35-52, 2004.
- [Eng98] Engel, Arthur: *Problem-Solving Strategies*. Springer, Berlin, 1998.
- [ERH94] Eddy R. H, Fritsch R.: *The conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the triangle*. Mathematics Magazine, 67:188-205, 1994.
- [EV51] Eves, Howard and V.Hoggatt: *Hyperbolic Trigonometry Derived from the Poincare Model*. American Mathematical Monthly, 58:469-474, 1951.
- [Eve63] Eves, Howard: *A survey of Geometry*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.
- [FC11] F. Cataldo, A. Graovac, O. Ori: *The Mathematics and topology of fullerenes*. Springer, Berlin, 2011.
- [Fet77] Fetisov, A: *Proof In Geometry*. Mir Publishers, Moscow, 1977.
- [Fou00] Fourray, E.: *Curiosities Geometriques*. Vuibert editeurs, Paris, 1900.
- [Fow79] Fowler, D. H.: *Ratio in Early Greek Mathematics*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1:807-846, 1979.
- [FTW42] Fu Traing Wang, Chuan Chih Hsiung: *A theorem on the Tangram*. The Mathematical Gazette, 49:596-599, 1942.
- [Fur37] Fursenko, V.B.: *Lexicographical account of constructional problems of triangle geometry*. Mathematics in school (in Russian), 5:4-30, 1937.
- [Gal13] Gallatly, William: *The modern geometry of the triangle*. Francis Hodgsonn, London, 1913.
- [Gau13] Gaultier, Louis: *Sur le moyens generaux de construire graphiquement un cercle determine par trois conditions*. Journal de l'Ecole polytechnique, 16:124-214, 1813.
- [Gla20] Glaser, Robert: *Stereometrie*. Walther de Gruyter, 1920.
- [GR04] Gisch, David and Jason Ribando: *Apolloniū's Problem: A Study of Solutions and Their Connections*. American Journal of Undergraduate Research, 3:15-26, 2004.
- [Gra59] Graham, L.: *Ingenious Mathematical Problems and Methods*. Dover Publications, New York, 1959.
- [Gre88] Greitzer, Samuel: *Arbelos, Special Geometry issue*. Arbelos, Mathematical Association of America, 6:1-51, 1988.
- [Gro04] Gronau, Detlef: *The Spiral of Theodorus*. The American Mathematical Monthly, 111:230-237, 2004.
- [GS87] Gruenbaum, Branko and G.S. Shephard: *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and company, New York, 1987.
- [GS95] Grunbaum, Branko and G. C. Shephard: *Ceva, Menelaus, and the Area Principle*. Mathematics Magazine, 68:254-268, 1995.
- [Had05] Hadamard, Jacques: *Lecons de Geometrie elementaire I, II*. Librairie Armand Colin, Paris, 1905.
- [Har56] Hart, Andrew: *Geometrical investigation of Steiner's solution of Malfatti's problem*. Quarterly journal of pure and applied Mathematics, 1:219-222, 1856.



- [Hea96] Heath, T: *Apollonius of Perga, Treatise on conic sections*. Cambridge University Press, Cambridge, 1896.
- [Hea08] Heath, T: *The thirteen books of Euclid's elements vol. I, II, III*. Cambridge University Press, Cambridge, 1908.
- [Hea31] Heath, T: *A manual of Greek Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1931.
- [Hei85] Heiberg, Johan: *Euclidis Elementa*. Teubner Verlag, 1885.
- [Hel76] Helmholtz, H.: *The Origin and Meaning of Geometrical Axioms*. *Mind*, 1:301–321, 1876.
- [Hes12] Hess, Albrecht: *A highway from Heron to Brahmagupta*. *Forum Geometricorum*, 12:191–192, 2012.
- [HF08] Hidetoshi Fukagawa, Tony Rothman: *Sacred Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [Hil03] Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner Verlag, Leipzig, 1903.
- [Hon95] Honsberger, Ross: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. The Mathematical Association of America, New Library, Washington, 1995.
- [Hon97] Honsberger, Ross: *In Polya's Footsteps*. The Mathematical Association of America, The Dolciani Mathematical Expositions, Washington, 1997.
- [Joh16] Johnson, Roger: *Relating to the Simson line or Wallace line*. *American Math. Monthly*, 23:61–62, 1916.
- [Joh60] Johnson, Roger: *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, New York, 1960.
- [JV04] Jill Vincent, Claire Vincent: *Japanese temple geometry*. *Australian Senior Mathematics Journal*, 18:8–20, 2004.
- [Kaz68] Kazarinoff, Nicholas: *On who first proved the impossibility... ruler and compass alone*. *American Mathematical Monthly*, 75:647, 1968.
- [Kaz70] Kazarinoff, Nicholas: *Ruler and the Round*. Dover, New York, 1970.
- [Kep19] Kepler, Johannes: *Harmonices Mundi Libri V*. Linz, 1619.
- [KF70] Kolmogorov, A. and S. Fomin: *Introductory Real Analysis*. Dover, New York, 1970.
- [Khi61] Khinchin, A.: *Continued Fractions*. The University of Chicago press, Chicago, 1961.
- [Kim14] Kimberling, Clark: *Encyclopedia of triangle centers*. Internet Site, 2014.
- [Kle97] Klein, Felix: *Famous Problems of Elementary Geometry*. Ginn and Company, Boston, 1897.
- [Kno93] Knorr, Wilbur Richard: *The ancient tradition of geometric problems*. Dover, New York, 1993.
- [KW91] Klee, Victor and Stan Wagon: *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*. The Mathematical Association of America, Washington, 1991.
- [Lac93] Lachlan, R.: *Modern Pure Geometry*. Macmillan and Co., London, 1893.
- [Lal52] Lalesco, Trajan: *La Geometrie du triangle*. Librairie Vuibert, Paris, 1952.
- [Lan96] Lang, Robert J.: *Origami and Geometric Constructions*. Preprint, 1996.
- [LC65] Lebosse C., Hemery C.: *Geometrie*. Fernand Nathan, Paris, 1965.

- [Leg37] Legendre, Adrien Marie: *Elements de Geometrie, suivis d' un traite de Trigonometrie*. Langlet et compagnie, Bruxelles, 1837.
- [Log80] Logothetti, Dave: *An Interview with H.S.M. Coxeter, the King of Geometry*. The Two-Year College Mathematics Journal, 11:2–19, 1980.
- [Loh82] Lohwater, Arthur: *Introduction to inequalities*. Internet published in pdf, 1982.
- [Loo68] Loomis, Elisha Scott: *The Pythagorean Proposition*. The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1968.
- [LWBM06] Leah Wrenn Berman, Gordon Ian Williams and Bradley James Molnar: *The Cross Ratio Is the Ratio of Cross Products!* Mathematics Magazine, 79:54–59, 2006.
- [Mac93] Mackay, J. S.: *Early history of the symmedian point*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 11:92–103, 1893.
- [Mac95] Mackay, J. S.: *Symmedians of a triangle and their concomitant circles*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 14:37–103, 1895.
- [Mar87] Martin, George E.: *Transformation Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Mar02] Marchisotto, Elena Anne: *The theorem of pappus: A bridge between algebra and geometry*. Amer. Math. Monthly, 109:497–516, 2002.
- [Mcl91] McClelland, William: *A treatise on the Geometry of the Circle*. Macmillan and Co, London, 1891.
- [Moo64] Moore, Charles: *An Introduction to Continued Fractions*. The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1964.
- [MP77] Millman, Righard and George Parker: *Elements of differential geometry*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1977.
- [MP94] Mironescu, P. and L. Panaitopol: *The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. Amer. Math. Monthly, 101:58–60, 1994.
- [MU36] Mitchell U., Strain M.: *The Number e*. Osiris, 1:476–496, 1936.
- [Mui95] Muirhead, R.: *On the number and nature of the solutions of the Apollonian contact problem*. Proc. Edinburgh Math. Society, 14:135–147, 1895.
- [Nah06] Nahin, Paul J.: *Dr. Euler's Fabulous Formula*. Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [Nah07] Nahin, Paul J.: *Chases and Escapes, The Mathematics of Pursuit and Evasion*. Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [Nar09] Naraniengar, M. T.: *Solution to Morley's problem*. Educational Times (New Series), 15:47, 1909.
- [Neg06] Negrepontis, S.: *Plato's theory of Ideas is the philosophic equivalent of the theory of continued fraction expansions of lines commensurable in power only*. Manuscript, 1:1–70, 2006.
- [Nie11] Niemeyer, Jo: *A simple Construction of the Golden Section*. Forum Geometricorum, 11:53, 2011.
- [Niv78] Niven, Ivan: *Convex Polygons that Cannot tile the Plane*. The American Mathematical Monthly, 85:785–792, 1978.
- [Ogi69] Ogilvy, Stanley: *Excursions in Geometry*. Oxford University Press, New York, 1969.



- [O'L10] O'Leary, Michael: *Revolutions of Geometry*. Wiley, 2010.
- [O'R11] O'Rourke, Joseph: *How to fold it*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [Oxm08] Oxman, Victor: *A Purely Geometric Proof of the Uniqueness of a Triangle With Prescribed Angle Bisectors*. Forum Geometricorum, 8:197–200, 2008.
- [Pap96] Papelier, Georges: *Exercices de Geometrie moderne*. Editions Jacques Gabay, 1996.
- [Pap10] Papadopoulos, Athanase: *Nikolai I. Lobachevsky, Pangeometry*. European Mathematical Society, 2010.
- [PE99] Pierre Eymard, Jean Pierre Lafon: *Autour du nombre  $\pi$* . Hermann Editeurs, Paris, 1999.
- [Ped90] Pedoe, D: *A course of Geometry*. Dover, New York, 1990.
- [Per08] Perrin, Daniel: *Algebraic Geometry An Introduction*. Springer, New York, 2008.
- [Pet01] Petersen, Julius: *Constructions Geometriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1901.
- [Pet41] Peters, J.W.: *The theorem of Morley*. National Mathematics Magazine, 16:119–126, 1941.
- [Pet09] Petkovic, Miodrag: *Famous Puzzles*. American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [Pin05] Pinelis, Iosif: *Cyclic polygons with given edge lengths*. Journal of Geometry, 82:156–171, 2005.
- [PL07] Posamentier, Alfred and Ingmar Lehmann: *The (Fabulous) FIBONACCI Numbers*. Prometheus Books, New York, 2007.
- [PR06] Poonen, Bjorn and Michael Rubinstein: *The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon*. SIAM J. Discrete Mathematics, 11:135–156, 2006.
- [PS88] Posamentier, Alfred and Charles Salkind: *Challenging Problems in Geometry*. Dover, New York, 1988.
- [Qui04] Quinn, John James: *A linkage for describing the conic sections by continuous motion*. American Mathematical Monthly, 11:12–13, 1904.
- [RA03] Rashid, M. A and A. O Ajibade: *Two conditions for a quadrilateral to be cyclic expressed in terms of the lengths of its sides*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34:739–799, 2003.
- [Ram13] Ramdorai, Sujatha: *Interview with Hidetoshi Fukagawa*. Asia Pacific Mathematics Newsletter, 3:30–36, 2013.
- [R.B09] R.B.Manfrino, J.A.G. Ortega, R.V.Delgado: *Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhaeuser, Berlin, 2009.
- [RG95] Ronald Graham, Donald Knuth, Oren Patashnik: *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, New York, 1995.
- [Ria62] Riaz, M.: *Geometric Solutions of Algebraic Equations*. American Mathematical Monthly, 69:654–658, 1962.
- [Ric08] Richeson, David: *Euler's gem*. Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [Rob71] Robinson, R.: *Undecidability and nonperiodicity of tilings of the plane*. Inventiones Mathematicae, 12:177–209, 1971.
- [Rob95] Robbins, David: *Areas of Polygons Inscribed in a Circle*. American Mathematical Monthly, 102:523–530, 1995.

- [Ros88] Rosenfeld, B.A.: *A history of Non-Euclidean Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Row17] Row, Sundara: *Geometric Exercises in Paper Folding*. The open court publishing company, Chicago, 1917.
- [RT33] Rademacher, Hans and Otto Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*. Springer Verlag, 1933.
- [RWG76] R. W. Gaskell, M. S. Klamkin, P. Watson: *Triangulations and Pick's Theorem*. Mathematics Magazine, 49:35-37, 1976.
- [Sal17] Salmon, George: *A treatise on Conic Sections*. Longmans, Green and Co., London, 1917.
- [San15] Sandifer, Edward: *How Euler Did Even More*. Mathematical Association of America, New York, 2015.
- [Sch64] Schwarz, Hermann Amandus: *Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie*. Journal fuer die reine und angewandte Mathematik, 63:309-314, 1864.
- [Sch78] Schattschneider, Doris: *Tiling the Plane with Congruent Pentagons*. Mathematics Magazine, 51:29-44, 1978.
- [Sch93] Schreiber, Peter: *On the Existence and Constructibility of Inscribed Polygons*. Beitrage zur Algebra und Geometrie, 34:195-199, 1993.
- [sH94] Hahn, Liang shin: *Complex Numbers and Geometry*. Mathematical Association of America, 1994.
- [Sha86] Sharygin, I. F.: *Problems in Solid Geometry*. Mir, Moscow, 1986.
- [Sin95] Singer, David: *Isometries of the Plane*. The American Mathematical Monthly, 102:628-631, 1995.
- [Sin01] Sinefakopoulos, Achilleas: *Circumscribing an Inscribed Quadrilateral*. The American Mathematical Monthly, 108:378, 2001.
- [Smi64] Smirnov, V.I.: *A course of higher Mathematics I,II,III*. Pergamon Press, New York, 1964.
- [ST76] Singer, I and J Thorpe: *Lecture notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ste71] Steiner, Jacob: *Gesammelte Werke vol. I, II*. Chelsea Publishing Company, New York, 1971.
- [Ste83] Steinhaus, Hugo: *Mathematical Snapshots*. Oxford University Press, 3rd Edition, Oxford, 1983.
- [Sti47] Stiefel, Eduard: *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*. Springer Verlag, Basel, 1947.
- [Sup01] Suppa, Italo D' Ignazio Ercole: *Il Problema Geometrico, dal compasso al cabri*. interlinea editrice, Teramo, 2001.
- [TA12] Titu Andreescu, Cosmin Pohoata: *Back to Euclidean Geometry: Droz-Farny Demystified*. Mathematical Reflections, 3:1-5, 2012.
- [Tan67] Tan, Kaidy: *Different Proofs of Desargues' Theorem*. Mathematics Magazine, 40:14-25, 1967.
- [Tay81] Taylor, Charles: *Geometry of Conics*. Deighton Bell and Co, Cambridge, 1881.

- [Thi03] Thiele, Ruedger: *Hilbert's Twenty-Fourth Problem*. The American Mathematical Monthly, 110:1–24, 2003.
- [Tho57] Thomas, Ivor: *Greek Mathematics (selections) 2 vols*. Harvard University Press, Cambridge, 1957.
- [Tia12] Tian, Xiaoxi: *The Art and Mathematics of Tangrams*. Bridges 2012: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, 1:553–556, 2012.
- [Var00] Vardi, Ilan: *Mekh-Mat Entrance Examination Problems*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 6:1–47, 2000.
- [Var05] Varverakis, Antreas: *A Maximal Property of Cyclic Quadrilaterals*. Forum Geometricorum, 5:63–64, 2005.
- [Vas69] Vasic, O. Bottema R. Djordjevic R. Janic D. Mitrinovic P.: *Geometric Inequalities*. Wolters-Noordhoff Publishers, Groningen, 1969.
- [VG88] V. Gusev, V. Litvinenko, A. Mondkovich: *Solving Problems in Geometry*. Mir Publishers, Moscow, 1988.
- [VY10] Veblen, Oswald and John Young: *Projective Geometry vol. I, II*. Ginn and Company, New York, 1910.
- [vY93] Yzeren, Jan van: *A Simple Proof of Pascal's Hexagon Theorem*. The American Mathematical Monthly, 100:930–931, 1993.
- [Wal01] Walser, Hans: *The Golden Section*. The Mathematical Association of America, 2001.
- [Wei03] Weisstein, Eric: *CRC concise encyclopedia of mathematics*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
- [Wel91] Wells, David: *Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Books, 1991.
- [Whi07] White, Homer: *The Geometry of Leonhard Euler, Life Work and Legacy*. Studies In the history and philosophy of mathematics, Elsevier, 5:303–323, 2007.
- [Wil69] Wilker, J.B.: *Four Proofs of a Generalization of the Descartes Circle Theorem*. American Mathematical Monthly, 76:278–282, 1969.
- [WY99] Woo, Dodge Schoch and Yiu: *Those Ubiquitous Archimedean Circles*. Mathematics Magazine, 72:202–213, 1999.
- [Yag62] Yaglom, I. M.: *Geometric Transformations I, II, III*. The Mathematical Association of America, 1962.
- [Yiu13] Yiu, Paul: *Introduction to the Geometry of the Triangle*. <http://math.fau.edu/Yiu/Geometry.html>, 2013.
- [You17] Young, John Wesley: *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. Macmillan Company, New York, 1917.



## Ευρετήριο ελληνικών όρων

### Σύμβολα

$\kappa(O, \rho)$ , 57

$O(\rho)$ , 57, 62, 65

( $AB\Gamma$ ), 59

### A

Αθροισμα γωνιών τριγώνου, 35, 39

Ακμές πολυέδρου, 585

Ακμές πολυεδρικής γωνίας, 577

Ακμές πυραμίδας, 577

Ακμές τριέδρου, 569

Ακμή της διέδρου, 565

Ακολουθία, 447, 449

Ακολουθία του Fibonacci, 477

Ακρα, 4

Ακτίνα, 57

Ακτίνα κυλίνδρου, 594

Ακτίνα σφαίρας, 602

Ακτίνα, 455, 456

Αλυσίδες, 359

Αμβλεία, 12

Ανάκλαση, 482, 743

Ανακλαστική ομοιότητα, 502

Αναλογία πλευρών, 156

Ανάλυση, 70

Ανάλυση, Σύνθεση, Διερεύνηση, 70

Ανάπτυγμα κυλίνδρου, 594

Ανάπτυγμα πυραμίδας, 581

Ανάπτυγμα τετραέδρου, 580

Ανάπτυγμα του κώνου, 600

Ανάπτυγμα τριέδρου, 570

Ανθυφαίρεση, 151, 469, 472

Ανοιγμα κώνου, 596

Αντι-αντιστροφή, 299

Αντιδιαμετρικά, 58, 109, 184, 197, 209, 329, 602, 651

Αντίθετη ισομετρία, 485, 756

Αντίκεντρο, 117

Αντιομοιοθεσία, 499, 756

Αντιομοιόθετα, 183

Αντιομοιότητα, 502

Αντιομόλογα σημεία, 270

Αντιπαράλληλες πλευράς τριγώνου, 211, 535

Αντιπρίσμα, 634

Αντίρροπες, 42

Αντιστρέφει τον προσανατολισμό, 742

Αντίστροφα σημεία, 275

Αντιστροφή, 275, 511

Αντίστροφη δέσμη, 279

Αντίστροφος μετασχηματισμός, 480

Αντισυμπληρωματικό τρίγωνο, 86, 581

Αξίωμα, 1, 3, 6, 8, 39, 140, 447

Αξίωμα πληρότητας, 447

Αξίωμα τριγώνου του Pash, 14

Αξίωμα των παραλλήλων, 39, 166

Αξονας κυλινδρικής επιφάνειας, 593

Αξονας παραβολής, 702

Αξονας προοπτικότητας, 399

Αξονας συμμετρίας, 46

Αξονας της ανάκλασης, 482

Αξονας της αντιομοιότητας, 503

Αξονας του κώνου, 595

Αξονας των κέντρων, 255

Αξονες έλλειψης, 710

Αξονες υπερβολής, 718

Αξονική συμμετρία, 46, 745

Αξονομετρική προβολή, 620, 621

Αόριστες έννοιες, 1

Απεικονίζει, 479

Απέναντι, 77, 393, 590

Απολλώνιοι κύκλοι, 250

Απολλώνιος, 249, 333

Απολλώνιος κύκλος, 249, 505

Απόλυτη Γεωμετρία, 33, 35

Απόσταση, 6

Απόσταση ασυμβάτων, 553

Απόσταση δύο επιπέδων, 553

Απόσταση παράλληλης από επίπεδο, 553

Απόσταση παραλλήλων, 43, 143, 174

Απόσταση σημείου από επίπεδο, 553

Απόσταση σημείου από ευθεία, 32

Απόστημα χορδής, 63

Αρβηλος, 356

Αριθμητικός μέσος, 159

Αριθμοί του Fermat, 99

Αρμονικά συζυγή, 51

Αρμονική δέσμη, 379

Αρμονική τετράδα, 51, 176

Αρμονικό τετράπλευρο, 383, 435, 513

Αρμονικός μέσος, 159

Αρνητικά προσανατολισμένη, 491

Αρνητικά προσανατολισμένο, 742

Αρνητικός ημίξονας, 372

Αρχή, 4, 6, 372

Αρχιμήδειες πλακοστρώσεις, 526

Αρχιμήδειο αξίωμα, 140

Αρχιμήδειο τρίγωνο, 703

Αρχιμήδης, 109, 140, 449

Ασύμβατα κάθετες, 549, 553, 561, 575

Ασύμβατες ευθείες, 540, 547, 549, 553, 556, 753

Ασυμβάτων απόσταση, 553

Ασύμπτωτες, 698  
 Ασύμπτωτες υπερβολής, 719  
 Ασυμπτωτικό τρίγωνο, 520, 724  
 Ατρακτος, 611  
 Αύξουσα ακολουθία, 447  
 Αυτοπολικό τρίγωνο, 397  
 Αυτοτεμνόμενα, 95  
 Αυτοτεμνόμενο, 77

## B

Βαρέλι, 674  
 Βάσεις κόλπου κώνου, 600  
 Βάσεις του κυλίνδρου, 594  
 Βάσεις του πρίσματος, 589  
 Βάση, 18  
 Βάση πυραμίδας, 577  
 Βάση κώνου, 595  
 Βασικά σημεία, 255  
 Βοηθητικοί κύκλοι, 712, 720

## Γ

Γενέτειρες, 593, 597, 606, 635, 666, 681, 684, 686  
 Γενέτειρες κώνου, 595  
 Γένος πολυέδρου, 653  
 Γεωμετρία του τριγώνου, 13  
 Γεωμετρικός μέσος, 158  
 Γεωμετρικός τόπος, 21, 44, 60, 106, 121, 153, 161, 177, 185, 245, 250, 258, 260  
 Γνήσια ομοιότητα, 502  
 ΓΠΓ-κριτήριο, 20, 44, 74, 94, 96  
 Γραμμή απόστασης, 521  
 Γωνία ασυμβάτων, 549  
 Γωνία αμβλεία, 25  
 Γωνία ανάκλασης, 33  
 Γωνία κύκλων, 278  
 Γωνία κυρτή, 8  
 Γωνία μη-κυρτή, 8  
 Γωνία ομοιότητας, 503  
 Γωνία παραλληλίας, 522  
 Γωνία πεπλατυσμένη, 8  
 Γωνία πλήρης, 8  
 Γωνία προσανατολισμένη, 491  
 Γωνία πρόσπτωσης, 33  
 Γωνία της ατράκτου, 611  
 Γωνία του κώνου, 596  
 Γωνία, ευθεία = Γωνία πεπλατυσμένη, 8  
 Γωνία, μηδενική, 8  
 Γωνία, οξεία, 12  
 Γωνία, ορθή, 12  
 Γωνίας εσωτερικό, 8  
 Γωνίας κορυφή, 8  
 Γωνίας κυρτής, εξωτερικό, 8  
 Γωνίας πλευρές, 8  
 Γωνίας, εσωτερικό, 10

Γωνίας, μέτρο σε μοίρες, 9  
 Γωνίες μεγίστων κύκλων, 611  
 Γωνίες εφεξής, 9  
 Γωνίες ίσες, 9  
 Γωνίες παραπληρωματικές, 12  
 Γωνίες πολυγώνου, 95  
 Γωνίες του σφαιρικού τριγώνου, 613  
 Γωνίες, απέναντι πλευρών, 14  
 Γωνίες, κατά κορυφήν, 11  
 Γωνίες, παραπληρωματικές, 24  
 Γωνίες, συμπληρωματικές, 12, 163, 634, 734  
 Γωνιών άθροισμα, 9  
 Γωνιών, ισότητα, 33

## Δ

Δελτοειδές, 348  
 Δέσμη ευθειών, 173  
 Δέσμη κύκλων, 252, 254  
 Δέσμη παραγόμενη, 256  
 Δευτερεύων κύκλος, 711  
 Διαγώνιος, 74, 95, 97, 138, 393  
 Διαγώνιος παραλληλεπιπέδου, 590  
 Διάκεντρος, 64, 297  
 Διάμεσοι τετραέδρου, 585  
 Διάμεσος, 15, 22, 23, 31, 44, 84, 139, 144, 147, 205, 240  
 Διαμέσων τρίγωνο, 85  
 Διάμετροι της έλλειψης, 710  
 Διάμετροι υπερβολής, 718  
 Διάμετρος, 57, 58, 60, 602  
 Διάμετρος κωνικής, 698  
 Διάμετρος της παραβολής, 702  
 Διατηρεί τον προσανατολισμό, 485, 494, 742, 751, 756, 759  
 Διέδρες ίσες, 566, 574, 586, 635  
 Διέδρες πολυέδρου, 585  
 Διέδρες της τριέδρου, 570  
 Διέδρος, 565, 589, 611  
 Διέδρος αμβλεία, 566  
 Διέδρος οξεία, 566  
 Διέδρος ορθή, 566  
 Διέδρος παραπληρωματική, 566  
 Διέδρος συμπληρωματική, 566  
 Διερεύνηση, 70  
 Διευθετούσα, 682  
 Διευθετούσες της έλλειψης, 691  
 Διευθετούσες της υπερβολής, 691  
 Διευθετών κύκλος, 739  
 Δικεντρικό τετράπλευρο, 121, 167  
 Διπλός λόγος, 378, 379, 383, 414, 511  
 Διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών, 379  
 Διχοτόμος, 9, 15, 22, 23, 35, 45, 53, 62, 69, 102, 108, 146, 161, 206, 207  
 Διχοτομούντα επίπεδα, 567

Δυϊκό πλατωνικό σώμα, 589  
 Δύναμη αντιστροφής, 275  
 Δύναμη σημείου, 632  
 Δύναμη ως προς κύκλο, 237

## Ε

Εγγεγραμμένη γωνία, 104  
 Εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια, 599  
 Εγγεγραμμένο τετράπλευρο, 114  
 Εγγεγραμμένος, 97  
 Εγγεγραμμένος κύκλος, 119  
 Εγγεγραμμένος κύκλος του αρθήλου, 357  
 Εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου, 62  
 Εγγράψιμο σε κύκλο, 114  
 Εγγράψιμο σε σφαίρα, 609  
 Εγγύτατες παράλληλες, 514  
 Εγκάρσιος άξονας, 720  
 Εγκεντρο, 62, 64, 316, 329  
 Εδρα, 589  
 Εδρες διέδρου, 565  
 Εδρες του πολυέδρου, 585  
 Εδρες τριέδρου, 570  
 Εικόνα, 479  
 Εις άτοπον απαγωγή, 1, 5, 25, 36  
 Εκκεντρα, 315  
 Εκκεντρική γωνία, 712  
 Εκκεντρότητα, 691, 699, 709, 711, 718, 732  
 Ελάσσων κύκλος, 603, 711  
 Ελαχιστοποίηση μήκους, 11, 32  
 Ελικοειδής μετατόπιση, 751, 752  
 Ελλειπτική δέσμη, 255  
 Ελλειψη, 248, 666, 681, 685, 689, 698, 709, 712, 717, 733, 738  
 Εμβαδόν, 137, 142, 148, 461, 639, 646, 650, 656  
 Εμβαδόν κώνου, 639  
 Εμβαδόν πολυγώνου, 137  
 Εμβαδόν του κυλίνδρου, 639, 640  
 Εμβαδόν του κώνου, 641  
 Εναντιόμορφη πλακόστρωση, 528  
 Ενέλιξη, 484  
 Εξωτερικά σημεία, 696  
 Εξωτερική γωνία, 15, 24, 39  
 Εξωτερική διχοτόμος, 16, 146  
 Εξωτερικό, 4  
 Εξωτερικό κέντρο, 270  
 Εξωτερικό κύκλου, 58  
 Εξωτερικό σφαίρας, 602  
 Επαγωγή, 450  
 Επίκεντρη γωνία, 101  
 Επίπεδο, 1, 539  
 Επίπεδο συμμετρίας, 744  
 Επιπεδομετρία, 1  
 Εστία, 682

Εστιακή απόσταση, 709, 718  
 Εστιακή παράμετρος, 700, 709, 711  
 Εστίες, 681, 682  
 Εσωτερικά σημεία, 696  
 Εσωτερικό, 4  
 Εσωτερικό κέντρο, 270  
 Εσωτερικό κύκλου, 57  
 Εσωτερικό σφαίρας, 602  
 Εσωτερικό τριέδρου, 569  
 Ευθεία, 1, 3  
 Ευθεία ισομετρία, 485, 756  
 Ευθεία ομοιότητα, 502  
 Ευθεία στο άπειρο, 288, 388, 400, 404, 691  
 Ευθεία του Euler, 184, 406  
 Ευθεία του Lemoine, 408  
 Ευθεία του Newton, 82, 146, 171, 398  
 Ευθεία του Pascal, 407  
 Ευθεία του Simson, 345  
 Ευθεία φυγής, 625  
 Ευθείες κάθετες, 12, 16  
 Ευθείες του Steiner, 347, 437, 439  
 Ευθείες, κάθετες, 13  
 Ευθύγραμμο τμήματα ίσα, 6  
 Ευθύγραμμο τμήμα, 3  
 Εφαπτόμενη, 61, 69, 238  
 Εφαπτόμενη δέσμη, 255  
 Εφαπτόμενη της κωνικής, 694  
 Εφαπτόμενη της σφαίρας, 604  
 Εφαπτομενικό τρίγωνο, 212, 268, 288, 408  
 Εφαπτόμενο επίπεδο, 597, 603  
 Εφαπτόμενοι κύκλοι, 65  
 Εφαπτόμενος κώνος, 606

## Η

Ημιεπίπεδα, 3  
 Ημιευθεία, 6, 42, 61, 101  
 Ημιευθείας, αρχή, 6  
 Ημιευθείες αντικείμενες, 6  
 Ημιευθείες παράλληλες, 6  
 Ημικανονικές πλακοστρώσεις, 526  
 Ημιπαράμετρος εύρους, 700, 711  
 Ημιπεριφέρεια, 101  
 Ημιστροφή, 492  
 Ημιτόνου σφαιρικού τύπος, 617  
 Ημίχωροι, 539  
 Ηρων, 320

## Θ

Θαλής, 168  
 Θεμελιώδεις αναλλοίωτοι, 332  
 Θεόδωρος ο Κυρηναίος, 151  
 Θετικά προσανατολισμένη, 491  
 Θετικά προσανατολισμένο, 742  
 Θετικός ημιάξονας, 372  
 Θεώρημα ημιτόνων, 197



Θεώρημα συνημιτόνου, 199  
 Θεώρημα του Ceva, 180, 384, 389, 393, 404  
 Θεώρημα του Droz-Farny, 305  
 Θεώρημα του Euler, 328  
 Θεώρημα του Morley, 369  
 Θεώρημα του Pick, 231  
 Θεώρημα του Stewart, 204  
 Θεώρημα του Απολλώνιου, 249  
 Θεώρημα του Ήρωνα, 320  
 Θεώρημα του Θαλή, 168, 170  
 Θεώρημα του Μενελάου, 384, 387, 394, 399,  
 406, 432, 500  
 Θεώρημα του Ναπολέοντος, 367  
 Θεώρημα του Πάππου, 151  
 Θεώρημα του Πτολεμαίου, 338, 341  
 Θεώρημα του Πυθαγόρα, 149, 166  
 Θεώρημα των τριών Βραχιόνων, 377

## I

Ιδιόμορφες κωνικές τομές, 682  
 Ιπποκράτης, 463  
 Ισα πολύγωνα, 95  
 Ισα πρίσματα, 589  
 Ισα σφαιρικά τρίγωνα, 613  
 Ισες άτρακτοι, 611  
 Ισες γωνίες, 9  
 Ισες διέδρες, 566  
 Ισες σφαίρες, 602  
 Ισογώνια συζυγία, 392, 420, 438, 476  
 Ισοί κόλουροι κώνοι, 600  
 Ισοί κύκλοι, 58  
 Ισοί κύλινδροι, 594  
 Ισοί κώνοι, 595  
 Ισομετρία, 17, 50, 480, 484, 486, 492, 496,  
 741, 746, 749, 752, 757, 760  
 Ισομετρίες του επιπέδου, 480  
 Ισοπεριμετρική ανισότητα, 465  
 Ισόπλευρο, 41, 68, 75, 86, 98, 109, 340  
 Ισοσκελές, 18, 20-22, 26, 27, 48, 58, 59, 109,  
 131, 160, 242  
 Ισοσκελές τραπέζιο, 92  
 Ισοσκελούς, κορυφή, 18  
 Ισότητα, 1, 16  
 Ισοτομική συζυγία, 392

## K

Καθ' ομοιότητα μεταβολή, 191, 352, 731  
 Καθ' ομοιότητα σταθερά, 191  
 Κάθετα επίπεδα, 566  
 Κάθετες, 19  
 Κάθετες πλευρές, 19, 25  
 Κάθετη στο επίπεδο, 550, 553, 558  
 Κάθετη τομή πρισματικής επιφάνειας, 589  
 Κάθετος από σημείο, 31, 68  
 Κανονικές πολυεδρικές γωνίες, 583

Κανονική πλακόστρωση, 523  
 Κανονική πυραμίδα, 582  
 Κανονικό δωδεκάεδρο, 586  
 Κανονικό εικοσάεδρο, 586  
 Κανονικό οκτάεδρο, 586  
 Κανονικό πεντάγωνο, 97, 243  
 Κανονικό πολύγωνο, 96, 110  
 Κανονικό πολυέδρο, 586  
 Κανονικό πρίσμα, 589  
 Κανονικό τετράεδρο, 586  
 Καρτέσιος, 441  
 Κατά κορυφήν τριέδρες, 572  
 Κατάκλιση επιπέδου σε άλλο, 592  
 Κατασκευή τριγώνου, 70, 72, 110, 116, 131,  
 148, 210, 217, 224, 225, 242, 319,  
 328, 332, 333, 426, 509  
 Κατευθύνοντα επίπεδα, 549  
 Κατεύθυνση, 4  
 Κατεύθυνση δέσμης ευθειών, 173  
 Κατοπτρισμός, 482, 743  
 Κάτοπτρο, 482  
 Κέντρα Ομοιότητας, 270, 281, 334, 388, 426,  
 633  
 Κεντρική προβολή = Προοπτική προβολή, 625  
 Κέντρο αντιστροφής, 275, 511  
 Κέντρο βάρους, 85, 183  
 Κέντρο βάρους τετραέδρου, 585  
 Κέντρο δέσμης ευθειών, 173  
 Κέντρο κανονικού πολυγώνου, 97  
 Κέντρο ομοιοθεσίας, 183, 189  
 Κέντρο ομοιότητας, 503  
 Κέντρο προοπτικότητας, 399  
 Κέντρο συμμετρίας, 136, 744  
 Κέντρο σφαίρας, 602  
 Κέντρο της έλλειψης, 710  
 Κέντρο της κωνικής, 698  
 Κέντρο της συμμετρίας, 47  
 Κέντρο υπερβολής, 718  
 Κεντροειδές = Κέντρο βάρους, 85  
 Κεντροειδές τετραέδρου, 585  
 Κογχοειδής του Νικομήδη, 444  
 Κοινά αρμονικά, 267, 297  
 Κοινή κάθετος, 556  
 Κολοβό πρίσμα, 590  
 Κόλουρη πυραμίδα, 578  
 Κόλουρος κώνος, 599  
 Κορυφές, 74, 95  
 Κορυφές πολυέδρου, 585  
 Κορυφές της έλλειψης, 710  
 Κορυφές του σφαιρικού τριγώνου, 613  
 Κορυφές υπερβολής, 720  
 Κορυφή, 393  
 Κορυφή πυραμίδας, 577  
 Κορυφή κώνου, 595



Κορυφή της παραβολής, 702  
 Κύβος, 586, 590, 634, 676, 760, 765  
 Κυκλικό = Εγγράψιμο τετράπλευρο, 114  
 Κυκλικό τμήμα, 462, 672  
 Κυκλικός τομέας, 461, 671  
 Κύκλοι του Tucker, 215  
 Κύκλος, 57  
 Κύκλος αντιστροφής, 275, 511  
 Κύκλος εννέα σημείων = κύκλος του Euler, 322  
 Κύκλος ομοιότητας, 273  
 Κύκλος του Euler, 322  
 Κύκλος του Taylor, 215  
 Κυλινδρική επιφάνεια, 593, 606, 685  
 Κύλινδρος, 594, 606, 639, 644, 682  
 Κυρτά σφαιρικά πολύγωνα, 648  
 Κυρτή διέδρος, 565  
 Κυρτή θήκη, 467  
 Κυρτή πυραμίδα, 577  
 Κυρτό, 77, 95, 115  
 Κυρτό πολύεδρο, 586  
 Κυρτό πρίσμα, 589  
 Κωνικές με κέντρο, 682  
 Κωνικές τομές, 411  
 Κωνική επιφάνεια, 595  
 Κωνική τομή, γνήσια, 682  
 Κώνος, 595  
 Κώνος πλάγιος κυκλικός, 635

## Λ

Λογαριθμική σπείρα, 510  
 Λόγος, 757  
 Λόγος ομοιοθεσίας, 183, 499, 756  
 Λόγος ομοιότητας, 188, 351, 434, 502, 505, 536  
 Λόγος χρυσής τομής, 242, 472

## Μ

Μεγάλος άξονας, 710  
 Μέγιστο εμβαδόν, 717  
 Μεγιστοποίηση γωνίας, 11  
 Μέγιστος κύκλος, 602  
 Μείζων κύκλος, 711, 720  
 Μενέλαος, 384  
 Μεριά = Ημιεπίπεδο, 3  
 Μεσαία σφαίρα, 610  
 Μεσαία τομή, 600  
 Μεσοκάθετο επίπεδο, 552, 556  
 Μεσοκάθετος, 19, 21, 58, 68, 102, 551  
 Μέσον, 6, 7, 68  
 Μεσοπαράλληλο επίπεδο, 560  
 Μεσοπαράλληλος, 44, 94, 289  
 Μέσος ανάλογος, 158  
 Μεταξύ, 1, 4, 6  
 Μετασχηματισμός, 17, 479

Μετατιθέμενοι μετασχηματισμοί, 488  
 Μεταφορά, 485, 488, 494, 497, 501, 508, 746, 749, 755, 757  
 Μέτρα Lebesgue, 138  
 Μέτρο διέδρου, 565  
 Μέτρο σε ακτίνια, 456  
 Μη τεμνόμενη δέσμη, 255  
 Μηδενική μεταφορά, 486, 746  
 Μήκος πλευράς σφαιρικού τριγώνου, 613  
 Μήκος τεθλασμένης, 30  
 Μήκος τμήματος, 6  
 Μήκος τόξου, 455  
 Μηνίσκος, 462  
 Μικρός άξονας, 710  
 Μικρός κύκλος, 603  
 Μοίρας λεπτό = Μοίρας πρώτο, 9  
 Μοίρας, δεύτερο, 9  
 Μοίρας, πρώτο, 9  
 Μοίρες, 9  
 Μονοεδρική πλακόστρωση, 523

## Ν

Νεύση, 99, 435  
 Νικομήδης, 444

## Ο

Ογκος κυλίνδρου, 665  
 Ογκος κώνου, 666  
 Ογκος πολυέδρου, ιδιότητες, 653  
 Ογκος σφαιρικής ζώνης, 673  
 Οδήγηση πολυγώνου, 353, 428  
 Οδηγός στροφής, 353, 428, 444  
 Ολισθανάκλαση, 497, 751, 754  
 Ομογραφική σχέση, 413, 414, 418, 434, 443, 683  
 Ομοια τρίγωνα, 156, 181, 187, 220, 238, 476, 759  
 Ομοιοθεσία, 499, 756  
 Ομοιόθετα πολύγωνα, 189  
 Ομοιόθετα τρίγωνα, 183  
 Ομοιότητα, 502, 509, 757, 759  
 Ομοιότητα ανακλαστική, 502  
 Ομοιότητα γνήσια, 502, 506, 757  
 Ομοιότητα ευθεία, 502  
 Ομοιότητα περιστροφική, 502  
 Ομοκυκλικά, 239  
 Ομόλογα σημεία, 183, 270, 399  
 Ομοπαράλληλία, 623, 624, 736  
 Ομόρροπες ημιευθείες, 42  
 Οξεία, 25  
 Ορθή, 107  
 Ορθή κυκλική κυλινδρική επιφάνεια, 594  
 Ορθία κωνικής, 700  
 Ορθικό τρίγωνο, 118, 316  
 Ορθό πρίσμα, 589

Ορθογώνια δέσμη, 265  
 Ορθογώνια υπερβολή, 726  
 Ορθογώνιο, 88, 139  
 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, 590, 654  
 Ορθογώνιο τρίγωνο, 19, 22, 44, 149, 157, 163  
 Ορθογώνιοι κύκλοι, 263  
 Ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο, 154, 303  
 Ορθοκεντρική τετράδα, 113  
 Ορθοκεντρικό τετράεδρο, 631  
 Ορθόκεντρο, 86, 426, 575  
 Ορθός κυκλικός κώνος, 595  
 Οριακά σημεία δέσμης, 255, 259, 262, 267, 280, 297, 516  
 Ορίζοντας προοπτικός, 625  
 Οριο ακολουθίας, 448, 449, 452, 455  
 Ορόκυκλος, 521  
 Ορος ακολουθίας, 447, 450

## Π

π, 453  
 Πάππος, 21, 151, 403  
 Παραβολή, 314, 682, 688, 693, 700, 703, 708, 728, 729, 732, 739  
 Παραβολική δέσμη κύκλων, 255  
 Παράκεντρα = Έκκεντρα, 315  
 Παράλληλα επίπεδα, 540  
 Παράλληλα τμήματα, 4  
 Παραλληλεπίπεδο, 590  
 Παράλληλες, 4, 26, 34, 39, 40, 69  
 Παράλληλη προβολή = Αξονομετρική προβολή, 620  
 Παραλληλόγραμμο, 74, 75, 78, 79, 82, 88, 138, 142, 405  
 Παράλληλος κύκλος, 603  
 Παράμετρος της παραβολής, 702  
 Παράπλευρες ακμές, 577, 589  
 Παράπλευρες έδρες, 577  
 Παράπλευρη επιφάνεια, 595  
 Παράπλευρο εμβαδόν, 639, 679  
 Παραπληρωματικές, 40, 43  
 Παραπληρωματική τριέδρος, 615  
 Παρεγγεγραμμένο πολυέδρο, 610  
 Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι, 315, 319  
 ΠΓΠ-κριτήριο, 22, 27, 36, 65  
 Πεδίο ορισμού, 479  
 Πεδίο τιμών, 479  
 Πέρας ευθυγράμμου τμήματος, 4  
 Περιβάλλουσα, 348, 703, 714, 721, 731  
 Περιγεγραμμένη κωνική επιφάνεια, 599  
 Περιγεγραμμένη σφαίρα, 609  
 Περιγεγραμμένο παραλληλεπίπεδο, 582, 663  
 Περιγεγραμμένο πολυέδρο, 610  
 Περιγεγραμμένο τετράπλευρο, 119

Περιγεγραμμένος κύκλος, 59, 90, 97, 103, 115, 160, 259, 295, 604, 705  
 Περίκεντρο, 59, 86  
 Περίκυκλος, 59, 240  
 Περίμετρος, 71, 110, 447, 452, 454  
 Περίμετρος πολυγώνου, 96  
 Περιστροφική ομοιότητα, 502  
 Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος, 594  
 Πλάγιος κυκλικός κώνος, 635  
 Πλακόστρωση, 523, 651  
 Πλατωνικά σώματα, 584, 586, 588, 610, 745, 760, 765  
 Πλευρές πλήρους τετραπλεύρου, 393  
 Πλευρές πολυγώνου, 74, 95  
 Πλευρές σφαιρικού τριγώνου, 613  
 Πλήρες τετράπλευρο, 393  
 Πλήρης στροφή = Γωνία πλήρης, 8  
 Ποδικό τρίγωνο, 350  
 Πολική κωνικής ως προς σημείο, 701  
 Πολικός κύκλος, 290, 397  
 Πόλος ευθείας, 287  
 Πόλος ευθείας ως προς κωνική, 701  
 Πόλος κύκλου, 603  
 Πολύγωνο, 95  
 Πολυεδρικές γωνίες πολυέδρου, 585  
 Πολυεδρική γωνία, 577  
 Πολυέδρο, 585  
 Πρίσμα, 589  
 Πρισματική επιφάνεια, 589  
 Πρισματοειδές, 678  
 Πρόβλημα του Castillon, 417  
 Προβολή, 32, 60  
 Προβολή σημείου, 553  
 Προβολή σχήματος, 553  
 Προβολή της ευθείας, 568  
 Προοπτικά τρίγωνα, 399  
 Προοπτικά ως προς ευθεία, 399  
 Προοπτική προβολή, 625  
 Προσανατολισμένη γωνία, 491  
 Προσανατολισμός, 17, 21, 485  
 Προσανατολισμός αρνητικός, 17  
 Προσανατολισμός θετικός, 17  
 Προσημασμένη απόσταση, 372  
 Προσημασμένο μέτρο γωνίας, 491  
 Προσημασμένος λόγος, 207, 371  
 Προσθετικότητα εμβαδών, 138  
 Πρότυπο, 479  
 Πρωτεύων κύκλος = Μείζων κύκλος, 711, 720  
 Πτέρυγα τριγώνου, 147  
 Πτολεμαίος, 338  
 Πυθαγόρας, 149, 170  
 Πυραμίδα, 577

## Ρ

Ριζικό επίπεδο, 632  
 Ριζικό κέντρο, 247, 410  
 Ριζικός άξονας, 245  
 Ριζικός άξονας δέσμης, 255  
 Ρόμβος, 93, 95, 133, 172, 675

## Σ

Σαλινόν, 464  
 Σημειακή δέση ευθειών, 173, 559  
 Σημειακή συμμετρία, 48, 483, 744  
 Σημείο, 1, 3  
 Σημείο Monge τετραέδρου, 630  
 Σημείο επαφής, 61, 65, 603, 604  
 Σημείο της ευθείας στο άπειρο, 287, 387, 388,

404

Σημείο του Brianchon, 410  
 Σημείο του Miquel, 349, 353  
 Σημείο του Feuerbach, 327  
 Σκέλη ισοσκελούς, 18, 27, 54, 75, 371  
 Σπείρα του Θεόδωρου, 151  
 Σταθερά σημεία, 275  
 Σταθερά σημεία μετασχηματισμού, 46, 299, 482, 511, 744, 747, 752  
 Σταθερό σημείο, 48  
 Στερεά γωνία, 577  
 Στερεομετρία, 1, 539  
 Στρεβλό Τετράπλευρο, 550, 574  
 Στροφανάκλαση, 751, 755  
 Στροφή του επιπέδου, 491, 494, 496, 499  
 Στροφή του χώρου, 747, 749, 750  
 Συγκεντρικοί, 64, 103  
 Συγκεντρικοί κύκλοι, 60, 103, 318, 388, 516, 714  
 Συζυγείς διάμετροι, 698  
 Συζυγείς κατευθύνσεις, 698  
 Συζυγείς χορδές κωνικής, 698  
 Συζυγής άξονας, 720  
 Συζυγής υπερβολή, 725  
 Συμμετρικά ως προς άξονα, 46  
 Συμμετρικά ως προς σημείο, 48  
 Συμμετρικό, 484, 744  
 Συμμετρικό ως προς σημείο, 48, 49, 89  
 Συμμετροδιάμεσο σημείο τριγώνου, 213  
 Συμμετροδιάμεσος, 211, 268, 705  
 Συμπληρωματικά τόξα, 101  
 Συμπληρωματικό τρίγωνο, 183  
 Συνημιτόνου σφαιρικού 1ος τύπος, 615  
 Συνημιτόνου σφαιρικού 2ος τύπος, 617  
 Σύνθεση μετασχηματισμών, 479, 483, 487, 493, 497, 501, 508, 514, 532, 537, 741, 745, 746, 748, 752, 756, 759  
 Σύνθεση, ανάλυση, διερεύνηση, 70  
 Σφαίρα, 602

Σφαιρικά πολύγωνα, 648  
 Σφαιρικά πολυέδρα, 609  
 Σφαιρική ζώνη, 647, 673  
 Σφαιρική υπεροχή, 651  
 Σφαιρικό πολύγωνο, 613  
 Σφαιρικό τρίγωνο, 612  
 Σφαιρικός δακτύλιος, 672  
 Σφαιρικός τομέας, 671  
 Σφαιρικού ημιτόνου τύπος, 617  
 Σφαιρικού συνημιτόνου 1ος τύπος, 615  
 Σφαιρικού συνημιτόνου 2ος τύπος, 617  
 Σχετική θέση, 191  
 Σχήμα, 1, 16  
 Σχήματα ίσα, 16, 18, 496, 514

## Τ

Τάξη πλακόστρωσης, 526  
 Ταυτοτικός μετασχηματισμός, 480  
 Τεθλασμένη, 30  
 Τεμνόμενη δέση, 255  
 Τέμνουσα, 4  
 Τεταρτημόρια, 565  
 Τετμημένη, 372  
 Τετραγωνισμός του κύκλου, 454  
 Τετράγωνο, 89, 141, 142, 147  
 Τετράεδρο, 579  
 Τετράπλευρο, 77, 146, 167  
 Τιγώνου, εξωτερικό, 14  
 Τόξο, 101  
 Τόξο αντίστοιχο επίκεντρης, 101  
 Τραπεζίο, 92, 144, 176  
 Τριγραμμική πολική, 387, 400  
 Τριγραμμικός πόλος, 387  
 Τρίγωνα, ίσα, 14  
 Τριγωνικές ανισότητες, 468  
 Τριγωνική ανισότητα, 29, 59, 65  
 Τρίγωνο, 13  
 Τρίγωνο του Calabi, 423  
 Τρίγωνο, αμβλυγώνιο, 14, 327, 397  
 Τρίγωνο, αμβλυγώνιο, 86  
 Τρίγωνο, οξυγώνιο, 14  
 Τρίγωνο, ορθογώνιο, 25  
 Τρίγωνο, σκαληνό, 14  
 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, 162  
 Τριγωνομετρικός κύκλος, 165  
 Τριγώνου γωνίες, 13  
 Τριγώνου κατασκευή, 16  
 Τριγώνου κορυφές, 13  
 Τριγώνου περίμετρος, 14  
 Τριγώνου πλευρές, 13  
 Τριγώνου, δευτερεύοντα στοιχεία, 16  
 Τριγώνου, εσωτερικό, 14  
 Τριγώνου, ημιπερίμετρος, 14  
 Τριγώνου, κριτήριο ισότητα ΠΓΠ, 20